

فصل

۱

قسمت اول

گزاره‌ها - منطق ریاضی

منطق ریاضی

در این فصل قرار است کاربرد علم منطق را در ریاضی شاهد باشیم به این بخش از علم منطق که در ریاضی کاربرد دارد، «منطق ریاضی» گفته می‌شود. منطق ریاضی به کمک روابط و قوانین خاص خود، روش‌های درست و منطقی استدلال کردن در ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد.

هر چند درستی یا نادرستی گزاره بر ما معلوم نباشد اما گزاره در یک زمان نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

برای مثال: جمله «عدد ۲ زوج است.» یک گزاره درست است.

عبارت « $1+2$ » گزاره نیست، زیرا جمله کاملی نیست.

جمله «عدد ۳ عدد خیلی کوچکی است.» گزاره نیست، زیرا ملاک خاصی نداریم که بگوییم چه اعدادی، کوچک‌اند و چه اعدادی خیلی کوچک‌اند، بنابراین نمی‌توانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

به جمله « a عددی گویاست.» دقت کنید. چون ما نمی‌دانیم a چه عددی است (a مجهول است). پس گزاره محسوب نمی‌شود، زیرا اگر a عددی مثل $\frac{1}{4}$ باشد، گویاست و اگر عددی مثل $\sqrt{2}$ باشد، گنگ است. بد نیست بدانید به این‌گونه عبارات‌ها، گزاره‌نما می‌گوییم.

نکته مهم: در منطق ریاضی جملات خبری که ارزش‌گذاری آن‌ها سلیقه‌ای، نامفهوم و یا بی‌معنی باشد گزاره محسوب نمی‌شوند. هم‌چنین جملات امری پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

«آیا فردا امتحان داریم؟» \Leftarrow چون پرسشی است، گزاره نیست.

«فردا ساعت ۸ برای امتحان در مدرسه باشید.» \Leftarrow چون امری است، پس گزاره نیست.

«عجب سوالات سختی!» \Leftarrow چون عاطفی است، گزاره نمی‌باشد.

تست

در موارد زیر، چند گزاره درست وجود دارد؟

(آ) مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

(پ) هوای بارانی زیباتر از هوای برفی است.

(ث) با فرض $n \in \mathbb{N}$ عدد $3n+1$ همواره عددی فرد است.

(ب) اولین عدد سه‌رقمی بر ۵ بخش پذیر است.

$$(ت) (\sqrt{5})^2 \leq (\sqrt{3})^2$$

(ج) حاصل عبارت $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ عددی طبیعی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: (آ) درست است. مثل $5+7=12$

(ب) درست است، زیرا اولین عدد سه‌رقمی 100 است که بر ۵ بخش‌پذیر است.

(پ) چون سلیقه‌ای است، گزاره محسوب نمی‌شود.

(ت) $3 \leq \frac{5}{4}$ گزاره‌ای نادرست است.

(ث) نادرست است. برای مثال اگر $n=1$ باشد، حاصل $(3n+1)$ برابر با $(3+1=4)$ می‌گردد که عددی زوج است.

(ج) $4-3=1$ پس حاصل، عددی طبیعی است لذا این گزاره درست است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

جبر گزاره‌ها

گاهی اوقات گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که ترکیبی از چند گزاره است. برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف هستند از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌کنیم که به مجموعه این قراردادها و نمادها «جبر گزاره‌ها» یا «حساب گزاره‌ها» گفته می‌شود. گزاره‌ها را معمولاً با حروفی مانند p, q, r, s, \dots نمایش می‌دهیم. هم‌چنین ارزش درست یک گزاره را با حرف «T» یا «د» و ارزش نادرست یک گزاره را با حرف «F» یا «ن» نشان می‌دهیم.

p	p	q	p	q	r
د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
$2^1 = 2$	ن	د	د	ن	د
↓	ن	ن	د	ن	ن
یک گزاره	$2^2 = 4$	ن	د	د	د
	↓	ن	د	ن	ن
	دو گزاره	ن	د	د	د
		ن	ن	ن	ن
		$2^3 = 8$			
		↓			
		سه گزاره			

جدول‌های ارزش‌گذاری مربوط به ۱، ۲ و ۳ گزاره، در حالت کلی به صورت مقابل می‌باشند. در این جدول‌ها می‌بینید که مثلاً اگر ۳ گزاره داشته باشیم، جدول ارزش‌گذاری، دارای ۸ ردیف می‌باشد.

نکته اگر n تعداد گزاره‌های دلخواه باشد، جدول ارزش‌گذاری دارای 2^n ردیف خواهد بود. مثلاً اگر ۴ گزاره داشته باشیم آن‌گاه $2^4 = 16 = 2^n$ پس جدول ارزش‌گذاری دارای ۱۶ ردیف خواهد بود.

تست

جدول ارزش‌گذاری مربوط به تعدادی از گزاره‌ها شامل ۳۲ ردیف می‌باشد. تعداد گزاره‌ها کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow n = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 = 2^n \Rightarrow$ تعداد ردیف‌ها

پاسخ:

نقیض گزاره‌ها

نقیض یک گزاره مثل p را با $\sim p$ نمایش می‌دهند که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش p می‌باشد. برای ساختن نقیض گزاره از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم: (آ) در جملات فارسی «است» را به «نیست» و «نیست» را به «است» یا به «است» تبدیل می‌کنیم. البته «نباشد» و «باشد» هم نقیض یکدیگرند.

مثال: گزاره‌های مقابل نقیض یکدیگرند:

- ۱ عددی اول نیست. p
 ۱ عددی اول است. $\sim p$

(ب) می‌توانیم در ابتدای گزاره از عبارت «چنین نیست که» استفاده کنیم تا نقیض شود.

- ۲۴ مضرب ۳ می‌باشد. p
 چنین نیست که ۲۴ مضرب ۳ باشد. $\sim p$

مثال: دو گزاره مقابل نقیض یکدیگرند:

(پ) اگر نمادهای ریاضی داشته باشیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- (۱) نمادهای \geq و $<$ نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $x \geq y$ و $x < y$ نقیض یکدیگرند.
 (۲) نمادهای $>$ و \geq نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $5 < -2$ و $5 \geq -2$ نقیض یکدیگرند.
 (۳) نمادهای $=$ و \neq نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $a = b$ و $a \neq b$ نقیض یکدیگرند.
 (۴) نمادهای \in و \notin نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $3 \in \mathbb{N}$ و $3 \notin \mathbb{N}$ نقیض یکدیگرند.
 (۵) نمادهای \subseteq و $\not\subseteq$ نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ نقیض یکدیگرند.

تست

کدام یک از گزاره‌های زیر، نقیض گزاره « a^2 عددی منفی است.» نمی‌باشد؟

- (۱) a^2 عددی منفی نیست. (۲) چنین نیست که a^2 عددی منفی باشد.
 (۳) a^2 عددی مثبت است. (۴) $a^2 \geq 0$

پاسخ: دو گزاره نقیض هم باید دقیقاً مخالف هم باشند. « a^2 عددی منفی است» و « a^2 عددی مثبت است» در ظاهر مخالف هم هستند. ولی مخالف گزاره « $a^2 < 0$ » می‌شود « $a^2 \geq 0$ ». به عبارت دیگر اگر a^2 منفی نباشد، می‌تواند مثبت یا صفر باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

گزاره‌های هم‌ارز

دو گزاره را زمانی هم‌ارز می‌گوییم که ارزش آن‌ها یکسان باشد، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. هم‌ارزی دو گزاره p و q را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً دو گزاره « 2 عددی فرد است» و « $\sqrt{3} \in \mathbb{N}$ » هم‌ارز هستند، زیرا هر دو نادرست هستند.

نکته اگر داشته باشیم $p \equiv q$ ، آن‌گاه $\sim p \equiv \sim q$ ، به عبارتی هرگاه دو گزاره هم‌ارز هم باشند، نقیض آن‌ها نیز هم‌ارز هستند.

مثال

طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

نمونه: $\sim(3 \in \mathbb{Z}) \equiv (3 \notin \mathbb{Z})$

(آ) $\sim(15 \leq -2) \equiv ?$ (ب) $\sim(\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv ?$ (پ) $\sim(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}) \equiv ?$

$\sim(15 \leq -2) \equiv (15 > -2)$

$\sim(\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv (\frac{1}{3} \in \mathbb{Q})$

$\sim(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R})$

پاسخ: (آ)

(ب)

(پ)

تذکر اگر از گزاره‌ای دو بار نقیض گرفته شود، جواب همان گزاره اولیه خواهد بود. به عبارتی نقیض نقیض هر گزاره، همان گزاره می‌شود. به عنوان مثال، می‌توان گفت:

$\sim(\sim q) \equiv q$

$\sim(\sim(\sqrt{3} < \sqrt{5})) \equiv (\sqrt{3} < \sqrt{5})$

تست

گزاره « $\frac{5^7}{5^3} = 5^4$ » با کدام گزاره زیر، هم‌ارز است؟

- (۱) معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ جواب حقیقی ندارد.
 (۲) حاصل عبارت $(x^2 - 1)$ به ازای هر مقدار x همواره مثبت است.
 (۳) رابطه $f = \{(3, 5), (4, 7), (\sqrt{9}, 1)\}$ تابع است.
 (۴) قد دانش‌آموزان یک کلاس، متغیر کمی نسبی است.

پاسخ: گزاره مورد نظر در سؤال، طبق قانون اعداد توان‌دار در تقسیم درست می‌باشد. گزینه‌ای پاسخ سؤال است که ارزش آن درست باشد.

گزینه (۱): $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$ ، پس معادله دارای ریشه مضاعف می‌باشد. لذا گزاره مربوط به گزینه (۱) نادرست است.

گزینه (۲): اگر برای مثال به جای x صفر قرار دهیم، حاصل منفی می‌شود پس این گزاره نیز نادرست است.

گزینه (۳): چون $\sqrt{9} = 3$ می‌باشد، فقط عضوهای اول $(3, 1)$ و $(3, 5)$ با هم برابرند. پس f تابع نمی‌باشد و گزاره‌ای نادرست داریم.

گزینه (۴): طبق دانسته‌های شما از سال گذشته، وزن، قد، درآمد و ... متغیرهای کمی نسبی هستند، پس این گزاره درست است و با گزاره مورد نظر سؤال هم‌ارز می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) درست است.

فصل

۱

قسمت دوم

ترکیب عطفی و فصلی

ترکیب گزاره‌ها

در این درسنامه می‌خواهیم گزاره‌های مرکب را بشناسیم و در مورد چگونگی ساخت این گزاره‌ها آشنایی پیدا کنیم. در علم منطق ریاضی، به کمک حروف ربطی مثل «و» و «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...» و «اگر ... آن‌گاه ... و بالعکس» می‌توانیم دو گزاره p و q را با هم ترکیب کنیم و یک گزاره مرکب بسازیم. دو گزاره مرکب $p \wedge q$ و $p \vee q$ به ترتیب ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره p و q نام دارند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر حرف ربط «و» را بین دو گزاره p و q قرار دهیم، گزاره $p \wedge q$ ساخته می‌شود. این گزاره مرکب زمانی درست است که هم p و هم q درست باشند. یعنی حتی اگر یکی از دو گزاره p و q نادرست باشند، کل گزاره $p \wedge q$ نادرست خواهد بود. جدول ارزش‌گذاری $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نادرستی حتی یکی از گزاره‌ها، باعث نادرستی کل گزاره $p \wedge q$ می‌شود. \Rightarrow

مثال

درستی یا نادرستی گزاره‌های عطفی زیر را بررسی کنید.

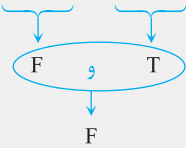
(ب) $(-3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$

(آ) ۳۶ مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویاست.

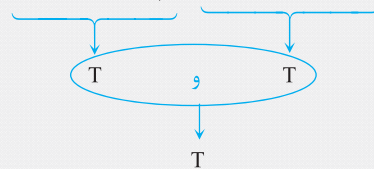
(ت) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامنفی است.

(پ) $(x(x-2) = x^2 - 2x) \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$

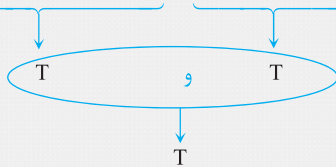
(ب) $(-3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$



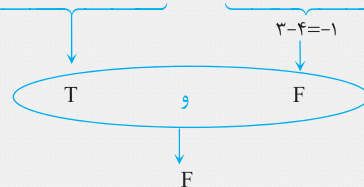
(پاسخ: آ) ۳۶ مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویاست.



(ت) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامنفی است.



(پ) $(x(x-2) = x^2 - 2x) \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$



در گزاره عطفی «p و معادله $x^2 - x + 3 = 0$ جواب حقیقی ندارد»، کدام گزاره باشد تا ارزش کل گزاره عطفی، درست باشد؟

- (۱) معادله $x^2 - 1 = 0$ یک ریشه حقیقی دارد.
 (۲) ۵ مضرب ۲۵ است.
 (۳) رابطه $\{(3, 5), (2, 7), (4, 4)\}$ یک تابع است.
 (۴) $\frac{\sqrt{5x}}{3x+2}$ عبارتی گویا است.

پاسخ: ارزش گزاره «معادله $x^2 - x + 3 = 0$ جواب حقیقی ندارد»، درست است، زیرا اگر Δ را به دست آوریم حاصل منفی می‌شود، پس معادله

ریشه حقیقی ندارد $(\Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11)$. لذا گزاره p هم باید درست باشد تا ارزش کل گزاره $p \wedge q$ درست باشد.

از بین گزینه‌ها فقط گزاره گزینه (۳) ارزش درست دارد، زیرا مؤلفه‌های اول تکراری نیستند. پس تابع است. اما در مورد نادرستی گزینه‌های دیگر باید

گفت در گزینه (۱) معادله $x^2 - 1 = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است $(x = \pm 1)$. در مورد گزینه (۲) عدد ۵ مضرب ۲۵ نیست، بلکه مقسوم‌علیه ۲۵ است.

در مورد گزینه (۴) هم، چون x زیر رادیکال است پس عبارت $\frac{\sqrt{5x}}{3x+2}$ گویا نیست. بنابراین گزینه (۳) درست است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر بین دو گزاره p و q از حرف ربط «یا» استفاده شود، گزاره $p \vee q$ ساخته می‌شود. این گزاره مرکب زمانی درست است که یکی از گزاره‌ها یا هر دو گزاره، درست باشند و به عبارتی زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند. جدول ارزش‌گذاری ترکیب فصلی $p \vee q$ به شکل زیر می‌باشد:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

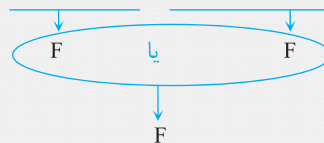
درستی حداقل یکی از گزاره‌ها، باعث درستی کل گزاره $p \vee q$ می‌شود. \Rightarrow

درستی یا نادرستی گزاره‌های فصلی زیر را تعیین کنید.

(آ) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ یا عددی طبیعی است یا $\frac{1}{4}$

(پ) ۹۰ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

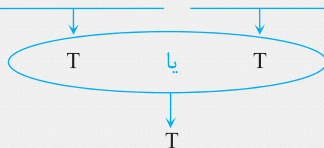
پاسخ: (آ) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ یا عددی طبیعی است یا $\frac{1}{4}$



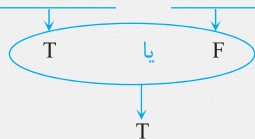
(ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ عددی منفی است.

(ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(-2)^{-4} = 16]$

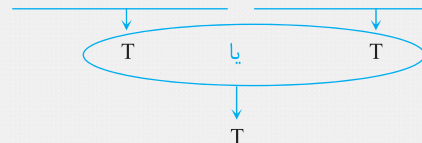
(ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ عددی منفی است.



(ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(-2)^{-4} = 16]$



(پ) ۹۰ بر ۳ بخش پذیر است یا ۹۰ بر ۵ بخش پذیر است.



$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

تذکر: می‌دانید اگر توان عددی منفی باشد می‌توانیم آن عدد را معکوس کنیم تا علامت توان مثبت شود. لذا:

تست

در گزاره فصلی « p یا ۸۰۰۰ عددی اول است.» گزاره p کدام باشد تا ارزش کل گزاره فصلی «درست» باشد؟

- (۱) از نمودار پراکنش نگاشت برای نمایش سه متغیر استفاده می‌شود.
- (۲) از نمودار میله‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود.
- (۳) از نمودار حبابی، برای نمایش چهار یا پنج متغیر استفاده می‌شود.
- (۴) از نمودار نقطه‌ای برای نمایش دو متغیر استفاده می‌شود.

پاسخ: گزاره « ۸۰۰۰ عددی اول است.» گزاره‌ای نادرست است، پس برای آن که گزاره فصلی درست باشد باید گزاره « p » درست باشد، چون در این صورت خواهیم داشت: q
 $(p \vee q) \equiv (T \vee F) \equiv T$
 طبق مطالب کتاب دهم، فقط گزاره «از نمودار میله‌ای، برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود.» ارزش درست دارد. بد نیست بدانید که از نمودار پراکنش نگاشت برای نمایش دو متغیر، از نمودار حبابی برای نمایش سه متغیر و از نمودار نقطه‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود. بنابراین گزینه (۲) درست است.

تست

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، کدام گزینه در مورد ستون نتیجه گزاره $\sim(p \wedge \sim q) \vee q$ درست است؟

- (۱) شامل ۳ نادرست و ۱ درست می‌باشد.
- (۲) شامل ۲ درست و ۲ نادرست می‌باشد.
- (۳) شامل ۱ نادرست و ۳ درست می‌باشد.
- (۴) شامل ۴ نادرست می‌باشد.

پاسخ:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q) \vee q$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

گزینه (۳) صحیح است. \Rightarrow ۳ درست و ۱ نادرست

خواص و فرمول‌های اصلی ترکیب عطفی و فصلی

در بسیاری از تست‌ها برای حل سریع‌تر و بدون رسم جدول ارزش‌گذاری می‌توانیم از فرمول‌های زیر استفاده کنیم. با فرض آن که p و q دو گزاره دلخواه باشند و T گزاره‌ای همواره درست و F گزاره‌ای همواره نادرست باشد، خواهیم داشت:

روابط اصلی ترکیب عطفی	روابط اصلی ترکیب فصلی
$(p \wedge p) \equiv p$	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$	$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$
$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$	$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$
$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$	$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$

در روابط بالا اگر به جای هر یک از گزاره‌های p و q ، گزاره‌های دیگری مثل r یا s یا حتی $\sim p$ و $\sim q$ قرار گیرد، روابط به همان شکل جواب می‌دهد.

برای مثال: $(r \vee F) \equiv r$ ، $(s \wedge \sim s) \equiv F$ ، $(s \vee \sim s) \equiv T$
 $(\sim p \vee F) \equiv \sim p$ ، $(r \wedge F) \equiv F$

تست

کدام هم‌ارزی زیر، درست است؟

- (۱) $(\sim p \wedge T) \equiv p$ (۲) $(\sim p \wedge \sim F) \equiv T$ (۳) $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv p$ (۴) $[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv T$

پاسخ: سمت چپ هم‌ارزی‌های داده‌شده را نوشته و حاصل آن‌ها را خودمان حساب می‌کنیم:

- (۱) گزینه (۱): $(\sim p \wedge T) \equiv \sim p$
 (۲) گزینه (۲): $(\sim p \wedge \sim F) \equiv (\sim p \wedge T) \equiv \sim p$
 (۳) گزینه (۳): $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv [(\sim p) \vee (\sim p)] \equiv \sim p$
 (۴) گزینه (۴): $[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

خواص و فرمول‌های تکمیلی ترکیب عملی و شملی

در زیر روابطی را می‌خواهیم یاد بگیریم که فقط در تست‌ها کاربرد دارد. در تمام روابط زیر می‌توانیم از جدول ارزش‌گذاری استفاده کنیم و آن‌ها را اثبات نماییم ولی نیازی به این کار نیست.

تذکره همان‌طور که در روابط قبلی اشاره شد به جای هر کدام از گزاره‌های p و q ، می‌توان از گزاره‌های دیگری مانند s ، r ، $\sim p$ ، $\sim q$ و ... استفاده کرد.

$$\text{روابط شرکت‌پذیری} \begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } [p \wedge (\sim p \wedge q)] \equiv \underbrace{[(p \wedge \sim p)]}_{F} \wedge q \equiv (F \wedge q) \equiv F$$

$$\text{روابط پخشی} \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

$$\text{روابط دمورگان} \begin{cases} \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \\ \sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } \begin{cases} \sim(\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim q) \\ \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv (p \wedge q) \end{cases}$$

$$\text{قوانین جذب} \begin{cases} [p \wedge (p \vee q)] \equiv p \\ [p \vee (p \wedge q)] \equiv p \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } \begin{cases} \sim p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p \\ p \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \end{cases}$$

یکسان هستند. یکسان هستند.

$$\text{قوانین شبه‌جذب} \begin{cases} [p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q) \\ [p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } \begin{cases} [\sim p \wedge (p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge q) \\ [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q) \end{cases}$$

نقیض هم نقیض هم

توجه برای نمونه رابطه $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ را به کمک جدول ارزش‌گذاری اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
د	د	د	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن

این ۲ ستون یکسان شدند پس هم‌ارزی، درست است.

تست

در صورتی که گزاره $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)$ کدام است؟

 $\sim r$ (۴) r (۳) F (۲) T (۱)

$$[p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \equiv [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q)$$

جابه‌جا می‌کنیم. شبه‌جذب

پاسخ:

چون طبق فرض، گزاره $p \vee \sim q$ نادرست است پس هم p نادرست است و هم $\sim q$ ، لذا خود q درست است. بنابراین:

$$[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv \underbrace{[\sim(F \vee T)]}_{T} \wedge r \equiv (F \wedge r) \equiv F \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$



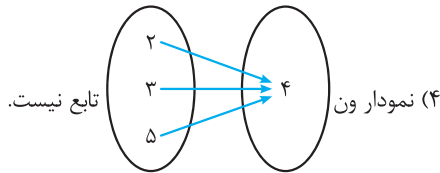
آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی

مفهوم گزاره - ارزش درستی گزاره‌ها

۱. کدام گزینه در مورد «مفهوم گزاره» صحیح است؟
 (۱) بعضی از جملات پرسشی، گزاره هستند.
 (۲) اگر یک جمله خبری قابل ارزش‌گذاری نباشد، گزاره نیست.
 (۳) هر جمله خبری، یک گزاره است.
 (۴) ارزش یک گزاره، می‌تواند گاهی درست و گاهی نادرست باشد.
۲. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) هر گزاره، جمله‌ای است خبری ولی هر جمله خبری ممکن است گزاره نباشد.
 (۲) جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.
 (۳) منطق ریاضی به کمک یک سری قانون و قاعده، روش درست استدلال کردن را به ما می‌آموزد.
 (۴) اگر ارزش یک جمله خبری برای ما معلوم نباشد، ولی دقیقاً درست یا نادرست باشد آن جمله گزاره نیست.
۳. کدام گزینه زیر ارزش نادرست دارد؟
 (۱) بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی، ۹۷ است.
 (۲) عدد طبیعی ۹۹، مربع کامل نیست.

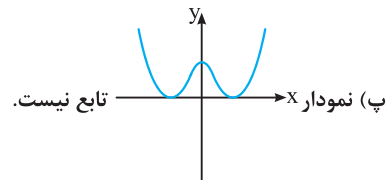


(۳) در مثلث خیام، مجموع اعداد سطر سوم برابر با ۴ است.

۴. کدام گزینه گزاره محسوب نمی‌شود؟
 (۱) هر عدد طبیعی، عدد صحیح نیز می‌باشد.
 (۲) a^2 عددی نامنفی است.
 (۳) ساده‌ترین درس کنکور، زبان انگلیسی است.
 (۴) قرآن ۱۱۴ سوره دارد.
۵. کدام گزاره زیر ارزش درست دارد؟
 (۱) واریانس داده‌های ۷، ۷ و ۷ برابر صفر است.
 (۲) ۵۱ عددی اول است.
 (۳) تمام مقسوم‌علیه‌های طبیعی 3^0 عبارتند از $1, 2, 3, 5, 10, 15, 30, 50, 150, 300, 500, 1500, 3000$.
 (۴) به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $(-3)^{n+1}$ همواره مثبت است.
۶. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به n گزاره، ۲۵۶ می‌باشد. مقدار n کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
۷. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به ۵ گزاره چند برابر تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری ۷ گزاره‌ای است؟
 (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{1}{5}$

۸. چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟
 (آ) نمودار خط $y = 2x + 5$ از ربع اول نمی‌گذرد.
 (ب) نمودار $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(ت) مزه غذاها (خوب، متوسط، بد) متغیر کیفی ترتیبی است.



- (ث) عدد ۱ نه اول است نه مرکب.
 (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

هم‌ارزی - نقیض گزاره‌ها

۹ ☆. کدام هم‌ارزی درست است؟

(۲) $\sim(\sqrt{5} \in \mathbb{Q}) \equiv \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

(۱) $\sim(a^2 < b^2) \equiv (a^2 > b^2)$

(۴) (وزن افراد، متغیر کیفی ترتیبی است.) $\equiv (1 + x^4 \text{ همواره مثبت است})$

(۳) $\sim[\sim(\frac{1}{3} < \frac{2}{9})] \equiv (\frac{1}{3} \geq \frac{2}{9})$

۱۰ ☆. در کدام گزینه دو عبارت کنار هم، نقیض یکدیگر نیستند؟

(۱) $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

(۲) $x^2 - 3x \neq 2, x^2 - 3x = 2$
 (۳) a عددی فرد است، a عددی زوج است.
 (۴) a عددی مرکب است، a عددی اول است.

۱۱ ☆. کدام هم‌ارزی درست است؟

(۱) (مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.) \equiv (حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، الزاماً گنگ نیست.)

(۲) $(\sqrt{5} \text{ عددی گنگ است.}) \equiv (\frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ عددی گویاست.})$

(۳) $(a < b) \equiv \sim(a > b)$

(۴) $(-3)^2 \geq 0 \equiv \sqrt{9+16} = 3+4$

۱۲ ☆. گزاره $\sim[3 \notin \mathbb{N}]$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

(۱) مکعب هر عدد حقیقی منفی، عددی منفی است.
 (۲) مقدار آماره ممکن است با مقدار پارامتر در یک جامعه، برابر شود.

(۳) طول رأس سهمی $y = -x^2 - 6x + 1$ برابر $x = -3$ می‌باشد.
 (۴) برد تابع $f(x) = 5$ کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) می‌باشد.

۱۳ ☆. با توجه به جدول زیر اگر ارزش درست را با T و نادرست را با F نمایش دهیم، گزینه درست برای ارزش‌های شماره‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

گزاره p	ارزش p	ارزش $\sim p$
نمودار جعبه‌ای، ۲ متغیر یا بیش‌تر را نمایش می‌دهد.	۱	۲
برای جمع‌آوری داده‌های آماری ۴ روش وجود دارد.	۳	۴

(۱) F, T, F, T (۲) T, F, T, F (۳) T, F, F, T (۴) F, T, T, F

۱۴ ☆. کدام گزاره با گزاره «مختصات رأس سهمی $y = (x-1)^2 + 4$ برابر $S(2,4)$ است.» هم‌ارز می‌باشد؟

(۱) میانه داده‌های ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۹۰، ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۵۰ برابر ۹ می‌باشد.
 (۲) میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰ برابر ۵ است.

(۳) دامنه تابع $y = 3$ برابر $\{3\}$ است.
 (۴) مد داده‌های ۱۰، ۳۰، ۵۰، ۱۷۰، ۱۰۰، ۳۰، ۳ برابر ۳ است.

قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی

ترکیب عطفی گزاره‌ها

۱۵ ☆. کدام گزینه، ستون آخر (نتیجه) جدول مقابل را نشان می‌دهد؟

p	q	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	?
د	ن	?
ن	د	?
ن	ن	?

(۱)

ن
ن
ن
ن

 (۲)

د
د
د
د

 (۳)

د
ن
د
ن

 (۴)

ن
د
ن
د

۱۶☆ در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره حاصل، درست باشد؟

(مربع هر عدد بین صفر و یک، از خود عدد کوچک تر است.) \wedge (\dots) \wedge $(4^2 \leq 2^4)$

(۱) تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها کم‌تر از چارک اول هستند. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{2} = \sqrt{3}$ (۲)

(۳) $\sim (\Delta \in \mathbb{Z}) \equiv \Delta \in \mathbb{N}$ (۴) حاصل کسر $\frac{x^2 - 4}{x^4 - 16}$ برابر است با $\frac{1}{x^2 - 4}$

۱۷☆ با توجه به جدول زیر به جای A، B و C کدام ارزش‌ها قرار بگیرند؟ (T یعنی درست و F یعنی نادرست)

p	$\sim q$	$\sim p \wedge q$
A	B	T
F	C	F

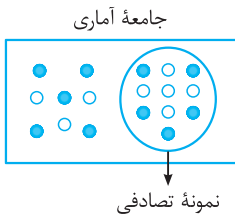
$A \equiv F, B \equiv F, C \equiv T$ (۲)

$A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T$ (۱)

$A \equiv T, B \equiv F, C \equiv F$ (۴)

$A \equiv T, B \equiv F, C \equiv T$ (۳)

۱۸☆ با توجه به شکل زیر در مورد گزاره «پارامتر دایره‌های توپر برابر ۱۰ و آماره دایره‌های توخالی برابر ۸ است.» چه می‌توان گفت؟



(۱) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب $\frac{5}{9}$ و $\frac{4}{9}$ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

(۲) گزاره درست است و نیازی به تغییرات ندارد.

(۳) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب $\frac{5}{9}$ و $\frac{1}{9}$ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

(۴) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب ۱۸ و ۲۸ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

۱۹☆ اگر گزاره p به صورت «معادله $-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 3 - \frac{1}{x^2}$ دو جواب قابل قبول دارد.» و گزاره q به صورت «معادله $x^2 - x + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد.» باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ نادرست است.

(۲) ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ درست است.

(۳) گزاره p درست ولی q نادرست است.

(۴) گزاره p نادرست ولی q درست است.

ترکیب فصلی گزاره‌ها

۲۰☆ در جای خالی چه عبارتی قرار گیرد تا گزاره زیر، درست باشد؟

«..... یا شدت زلزله، متغیر کیفی اسمی است.»

(۱) مرکب است.

(۲) $\sqrt{3}$ گویا است.

(۳) با ۲ برابر شدن داده‌ها، مد هم ۲ برابر می‌شود.

(۴) با ۳ برابر شدن داده‌ها، میانه تغییری نمی‌کند.

۲۱☆ در جای خالی کدام گزاره را قرار دهیم تا گزاره حاصل، ارزش درست داشته باشد؟

«..... یا تمام مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۴۰ عبارتند از $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 40\}$ »

(۱) شیب هر خط افقی برابر ۱ واحد است.

(۲) ۲۱ عدد اول است.

(۳) $(0/1)^{-2} = -10^2$

(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$

۲۲☆ گزاره [برد تابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$ با دامنه $D_f = \{0, 1, 5\}$ برابر است با $\{1, 2, 4\}$] یا «۷۰٪ داده‌ها قبل از چارک اول قرار دارند.» با کدام گزاره زیر هم‌ارز نیست؟

(۱) در داده‌های $50000, 80000, 100000, 120000, 150000$ ، میانه بهتر از میانگین محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهد.

(۲) در داده‌های $1, 2, 3, 4, 5, 6, 9999$ ، میانه و دامنه میان چارکی، بهتر از میانگین و انحراف معیار، پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهند.

(۳) در منحنی نرمال، ۹۶ درصد داده‌ها بین $\bar{x} - 2\sigma$ و $\bar{x} + 2\sigma$ قرار دارند.

(۴) با فرض $D_f = \{\sqrt{3}, 0, 2\}$ در تابع $f(x) = x^2 - 1$ ، برد تابع برابر $\{1, 2, 3\}$ می‌باشد.

ترکیب عطفی و فصلی به طور هم‌زمان

۲۳☆ حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟

$\sim p \vee \sim (q \vee \sim p) \equiv ?$

F (۴)

T (۳)

$\sim p \wedge \sim q$ (۲)

$\sim p \vee \sim q$ (۱)

۳۷. گزاره [«مجموع ریشه‌های معادله $0 = 2 + 5x - 3x^2$ برابر $\frac{5}{3}$ است.» و «در یک جامعه آماری، پارامتر همیشه از هر آماره‌ای بزرگ‌تر است.»] با

چند تا از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

(آ) یکی از مشکلات سرشماری، عدم امکان استفاده از آن در بررسی‌های مخرب است و مراحل رشد انسان، متغیر کیفی ترتیبی است.

(ب) در تجزیه $6 - 5x - x^2$ عبارت $x - 2$ وجود ندارد یا ۲۱ عددی اول است.

(پ) معکوس هر عدد حقیقی از خود آن عدد کوچک‌تر است یا تعداد دوچرخه‌ها متغیر کمی فاصله‌ای است.

(ت) جامعه آماری، زیرمجموعه نمونه تصادفی است و نمودار دایره‌ای برای نمایش متغیرهای کیفی کاربرد دارد.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۸★. اگر $(\sim p \wedge q) \equiv F$ باشد، حاصل هم‌ارزی $p \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv ?$ کدام است؟

(۱) p (۲) $\sim p$ (۳) همیشه نادرست (۴) بستگی به p و q دارد.

۳۹★. ستون پایانی جدول مقابل کدام است؟

p	q	$\sim(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$
د	د	؟
د	ن	؟
ن	د	؟
ن	ن	؟

د
ن
د
ن

(۴)

ن
ن
ن
د

(۳)

ن
ن
د
د

(۲)

ن
د
ن
د

(۱)

۴۰★. با توجه به جدول زیر به جای A، B و C چه ارزش‌هایی قرار خواهند داشت؟

گزاره p: $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ عددی گویا است.	گزاره q: $\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \text{میانگین}$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \vee \sim q)$
A	B	C

(۲) $A \equiv T, B \equiv F, C \equiv F$

(۱) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv F$

(۴) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T$

(۳) $A \equiv F, B \equiv F, C \equiv F$

۴۱★. با توجه به جدول زیر به جای A، B، C و D چه ارزش‌هایی باید قرار گیرد؟

گزاره	ارزش
گزاره p: $(\frac{1}{p})^{-3} < 0$	A
گزاره q: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	B
گزاره r: $(1 - \sqrt{2}) \in \mathbb{R}$	C
گزاره s: $\sim[(p \wedge q) \vee r]$	D

(۲) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T, D \equiv F$

(۱) $A \equiv T, B \equiv T, C \equiv F, D \equiv F$

(۴) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv F, D \equiv F$

(۳) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T, D \equiv T$

۴۲★. در جدول زیر ارزش هر گزاره مشخص شده است. چند مورد از این ارزش‌گذاری‌ها، اشتباه است؟

گزاره مرکب	درست	نادرست
عدد ۹ مربع کامل یا اول است.	✓	
خط $y = 3x - 2$ از ناحیه سوم می‌گذرد و اعداد منفی جذر ندارند.		✓
در حل معادله $0 = 2 + 5x - 3x^2$ به روش مربع کامل باید در ابتدا همه را به ۳ تقسیم کنیم و نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی مناسب است.	✓	

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

۴۳☆ چند مورد از گزاره‌های زیر ارزش درست دارند؟

(آ) در معادله $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x+1}{2x+1}$ دو ریشه قابل قبول وجود دارد و نمودار $y = 3$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

(ب) در داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۸، ۲۰، ۲۱ اختلاف میانگین و میانه کم‌تر از ۲ واحد است یا میانه بزرگ‌تر از میانگین است.

(پ) عبارت $x^3 - 4x = 0$ به ۳ عامل اول تجزیه می‌گردد و مجموع ریشه‌های آن صفر می‌باشد.

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۴☆ اگر گزاره $(p \wedge (\sim q \vee \sim r)) \wedge r$ درست باشد، ارزش گزاره $\sim p \vee q$ کدام است؟

- (۱) T (۲) F

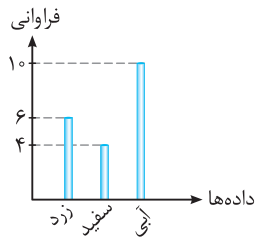
(۳) به I بستگی دارد. (۴) می‌تواند درست یا نادرست باشد.

۴۵☆ ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر درست است؟

(آ) در تابع $f(x) = |x^2 + 3x|$ مقدار $f(-2)$ برابر با ۲ می‌باشد و عبارت $x^2 + 1$ قابل تجزیه است.

(ب) در نمودار راداری با ۹ متغیر، زاویه هر دو محور متوالی ۴۰ درجه است و در نمودار میله‌ای روبه‌رو، درصد رنگ زرد برابر ۳۰ است.

(پ) با توجه به جدول مقابل، زاویه مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره‌ای ۶۰ درجه است یا $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ عددی گویا است.



گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی	۲۴	۱۶	۸	۱۲

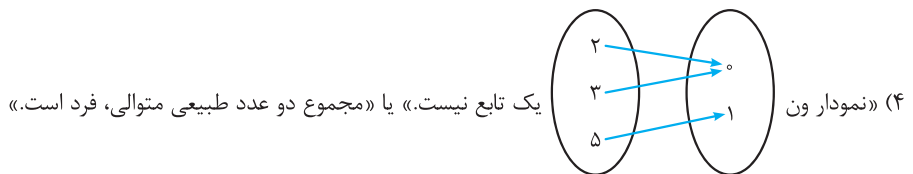
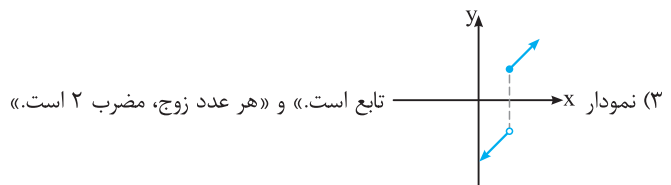
(ت) $f = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$ یک تابع است و معادله $x^2 - 9 = 0$ فقط دارای یک جواب $x = 3$ است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۶☆ ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

(۱) «طول رأس سهمی $y = x^2 - 12x + 1$ برابر $x = 6$ است.» و «مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.»

(۲) «وزن دانش‌آموزان پایه یازدهم متغیر کمی نسبتی است.» و «مربع هر عدد مثبت از همان عدد بزرگ‌تر است.»



قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دوشرطی

گزاره شرطی

۴۷☆ نقیض گزاره $\sim p \Rightarrow q$ کدام است؟

- (۱) $q \Rightarrow p$ (۲) $p \Rightarrow q$ (۳) $p \wedge q$ (۴) $\sim p \wedge \sim q$

۴۸☆ عکس نقیض گزاره مقابل چیست؟

- (۱) $(\sqrt{2})$ گنگ است. \Rightarrow (اگر ۲ زوج باشد)
 (۲) $(\sqrt{2})$ گنگ است. \Rightarrow (اگر ۲ فرد باشد)
 (۳) $(\sqrt{2})$ گویا است. \Rightarrow (اگر ۲ زوج باشد)
 (۴) $(\sqrt{2})$ گویا است. \Rightarrow (اگر ۲ زوج نباشد)



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

پاسخ فصل ۱

۱ ۴ ۳ ۲ ۱ ۸

هر جمله خبری یک گزاره نیست، مانند جملاتی که خبری هستند ولی هر فرد در مورد ارزش آن نظر متفاوتی دارد. مثلاً جمله خبری « $\frac{1}{1}$ عدد خیلی کوچکی است.» گزاره نیست، زیرا در علم منطق قانون خاصی برای بزرگی و کوچکی اعداد نداریم، پس بر اساس این توضیح گزینه (۳) نادرست و گزینه (۲) درست است. در مورد گزینه (۱) جملات پرسشی نمی‌توانند گزاره باشند ضمناً ارزش هر گزاره، دقیقاً درست است یا نادرست و نمی‌تواند گاهی درست و گاهی نادرست باشد.

۲ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

برای توضیح نادرستی گزینه (۴) مثلاً ارزش جمله خبری « 5921 عددی اول است.» برای ما معلوم نیست ولی می‌دانیم این جمله گزاره است.

۳ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

گزینه (۱): درست است، چون هم دو رقمی است و هم اول است.
گزینه (۲): 99 جذر کامل ندارد پس مربع کامل نیست.
گزینه (۳): اعداد سطر سوم مثلث خیام عبارتند از $(1, 2, 1)$ که مجموعشان 4 است.
گزینه (۴): اگر نمودار را به زوج مرتب تبدیل کنیم خواهیم داشت: $\{(4, 5), (4, 3), (4, 2)\}$ می‌بینیم تابع است. پس گزینه (۴) نادرست است.

۴ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

جمله «ساده‌ترین درس کنکور، زبان انگلیسی است.» گزاره نیست، چون طبق قوانین علم منطق نمی‌توان آن را ارزشیابی کرد، زیرا هر فردی نظر خاصی درباره دشواری یا آسانی این درس دارد.
بقیه گزینه‌ها همگی گزاره‌اند، دقت کنید که « a^2 عددی نامنفی است.» گزاره است و ارزش درست دارد.

۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم اگر داده‌ها برابر باشند، واریانس و انحراف معیار آن‌ها برابر صفر است.
بررسی گزینه (۲): 51 بر 3 بخش پذیر است پس اول نیست.
بررسی گزینه (۳): مقسوم‌علیه‌های طبیعی 3^6 عبارت‌اند از $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ که در گزینه (۳) عدد 6 نیامده است.
بررسی گزینه (۴): ارزش گزاره داده شده نادرست است، زیرا اگر n عددی زوج باشد مثل 2 ، آن‌گاه حاصل عبارت منفی می‌گردد:

$$(-3)^{n+1} = (-3)^{2+1} = (-3)^3 = -27$$

۶ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

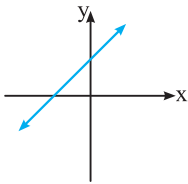
$$2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

۷ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

$$2^n = 2^n \Rightarrow 2^5 = 2^7 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow 2^5 = 32$$

$$\frac{2^5}{2^7} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 7 \Rightarrow 2^7 = 128$$

۸ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹



(آ) اگر نمودار $y = 2x + 5$ را رسم کنیم، از ناحیه اول می‌گذرد، پس نادرست است.

(ب) اتحاد مزدوج است و درست می‌باشد.

(پ) هر خطی به موازات محور y ها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند پس تابع است، پس این گزاره نادرست است.

(ت) مزه غذاها، کیفی ترتیبی است. پس گزاره درست است.
(ث) درست است.

(ج) میانه در واقع چارک دوم محسوب می‌شود، پس این گزاره نادرست است.

۹ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

$$\sim (a^2 < b^2) \equiv a^2 \geq b^2 \quad \text{نادرستی گزینه (۱):}$$

$$\sim (\sqrt{5} \in \mathbb{Q}) \equiv (\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}) \quad \text{درستی گزینه (۲):}$$

نادرستی گزینه (۳): نقیض نقیض هر گزاره همان گزاره می‌شود.

$$\sim \left[\sim \left(\frac{1}{3} < \frac{2}{9} \right) \right] \equiv \left(\frac{1}{3} < \frac{2}{9} \right)$$

نادرستی گزینه (۴):

ارزش درست دارد. $\Rightarrow X^4 + 1$ همواره مثبت است.
ارزش نادرست دارد. (وزن، متغیر کمی نسبتی است.) \Rightarrow وزن افراد، متغیر کیفی ترتیبی است.

۱۰ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

با توجه به نکات گفته شده در درس، در گزینه‌های (۱) و (۲) نقیض‌ها کنار هم آمده‌اند. در مورد گزینه (۳) هم هر عددی فرد نباشد، حتماً زوج است. اما در مورد گزینه (۴) آیا عددی که اول نباشد حتماً مرکب است؟ خیر، زیرا عدد 1 نه اول است نه مرکب.

۱۱ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹

بررسی گزینه (۱): هر دو گزاره درست هستند. $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ می‌بینیم که الزاماً ضرب دو عدد گنگ، گنگ نمی‌باشد، پس هم‌ارز هستند.

بررسی گزینه (۲): $\sqrt{5}$ عددی گنگ است که درست است ولی $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ گویا نیست، پس هم‌ارز نیستند.

بررسی گزینه (۳): $(a > b) \equiv (a \leq b)$ ، پس درمی‌یابیم که طرف اول و دوم هم‌ارز نیستند.

بررسی گزینه (۴): می‌دانیم که $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ ، پس گزاره $\sqrt{9+16} = 3+4 = 7$ نادرست است.

هم‌چنین $9 \geq (-3)^2$ درست است. پس هم‌ارزی گزینه (۴) نادرست است.

۱۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

در ردیف اول چون حاصل درست است و گزاره عطفی می‌باشد باید هر دو گزاره p و q درست باشند، پس داریم:

$$\begin{aligned} (\sim p \wedge q) \equiv T &\implies \begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv T \end{cases} \implies \begin{cases} A \equiv F \\ \sim q \equiv B \equiv F \end{cases} \\ \text{در ردیف دوم چون حاصل نادرست است و } p \equiv F &\text{ می‌باشد، پس داریم:} \\ p \equiv F \implies \sim p \equiv T &\implies q \equiv F \implies \sim q \equiv C \equiv T \\ (\sim p \wedge q) \equiv F & \end{aligned}$$

پس $A \equiv F$ و $B \equiv F$ ، $C \equiv T$ و جواب این سؤال می‌باشد.

۱۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\text{تعداد کل دایره‌های توپر جامعه} = \frac{10}{10+8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

پارامتر دایره‌های توپر

$$\begin{aligned} \text{تعداد دایره‌های توخالی نمونه} &= \frac{\text{تعداد دایره‌های توخالی نمونه}}{\text{تعداد دایره‌های نمونه}} \\ &= \frac{5}{5+5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس می‌بینیم ارزش ارزش گزاره مطرح شده نادرست است و برای اصلاح آن باید طبق روابط بالا گزینه (۳) را انتخاب نمود.

۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{x^2} &= -\frac{2}{x} \quad \frac{x \cdot x^2}{x \neq 0} \implies 3x^2 - 1 = -2x \\ \implies 3x^2 + 2x - 1 &= 0 \implies \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(3)(-1) = 16 \\ \implies x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{6} \implies \begin{cases} x' = \frac{1}{3} \\ x'' = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس معادله، دو جواب قابل قبول دارد. پس گزاره p درست است.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= 0 \implies \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0 \\ \text{چون } \Delta &\text{ منفی است لذا معادله جواب حقیقی ندارد، پس گزاره } q \\ (p \wedge q) &\equiv (T \wedge T) \equiv T \end{aligned}$$

درست است.

۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

ارزش گزاره «شدت زلزله، متغیر کیفی اسمی است.» نادرست است. (کمی نسبتی است) پس باید در جای خالی، گزاره‌ای با ارزش درست قرار دهیم. از پارسال می‌دانید که مد، میانان و میانگین، نسبت به چهار عمل اصلی، تأثیرپذیرند پس ارزش گزاره گزینه (۳) درست است.

۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$F \text{ (چون } 2^0 \text{ و } 8 \text{ نیامده است)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\dots)} &\equiv T \\ \text{الزاماً باید درست باشد.} \\ \text{در بین گزاره‌ها فقط گزاره } (\sqrt{2} + 1) &= \sqrt{2} + 1 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

درست است، پس گزینه (۴) درست است. اما در مورد سایر گزینه‌ها شیب هر خط افقی صفر می‌باشد، ۲۱ اول نیست. و در مورد گزینه (۳) باید گفت: $(\frac{1}{0})^{-2} = (\frac{1}{0})^{-2} = 10^2 \neq -10^2$

۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

نادرست است. $\sim [(\sim (3 \notin \mathbb{N}))] \equiv (3 \notin \mathbb{N}) \implies$ بررسی گزینه (۱): هر عدد حقیقی منفی را که به توان ۳ برسانیم، حاصل منفی می‌شود پس ارزش این گزاره درست است.

بررسی گزینه (۲): آماره و پارامتر، می‌توانند مساوی باشند، پس این گزاره درست است.

بررسی گزینه (۳): می‌دانیم طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر است با $x = -\frac{b}{2a}$

$$\text{پس طول رأس این سهمی } x = \frac{-(-6)}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = -3 \text{ می‌باشد.}$$

لذا این گزاره هم درست است.

بررسی گزینه (۴): برد تابع $f(x) = 5$ فقط $\{5\}$ می‌باشد، نه کل اعداد حقیقی، پس این گزاره نادرست است.

۱۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

نمودار جعبه‌ای، فقط یک متغیر را نشان می‌دهد.

پس ارزش p نادرست و ارزش $\sim p$ درست است. از سال گذشته می‌دانید که ۴ روش برای جمع‌آوری داده‌ها وجود دارد که عبارت‌اند از: (۱) مشاهده و آزمایش (۲) پرسش‌نامه (۳) مصاحبه (۴) دادگان پس ارزش گزاره مربوطه، درست و ارزش نقیض آن، نادرست است.

۱۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

مختصات رأس هر سهمی به معادله $y = (x - k)^2 + h$ به صورت $S(k, h)$ می‌باشد پس گزاره متن سؤال نادرست است. چون مختصات رأس $S(1, 4)$ می‌باشد. در بین گزینه‌ها فقط گزاره «دامنه تابع $y = 3$ برابر $\{3\}$ می‌باشد.» نادرست است، چون می‌دانید که دامنه خط افقی $y = 3$ برابر \mathbb{R} است و این برد تابع است که $\{3\}$ می‌باشد. در بقیه گزینه‌ها، ارزش گزاره‌ها درست هستند.

۱۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

p	q	~p	~q	~p ∧ ~q	p ∧ (~p ∧ ~q)
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	ن

۱۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

از آنجایی که گزاره داده شده، ترکیب عطفی است، باید همه درست باشند تا ارزش گزاره حاصل درست باشد، در نتیجه تنها گزینه (۲) ارزش درست دارد.

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

حاصل منفی است پس قرینه می‌کنیم.

اما علت نادرستی گزینه‌های دیگر:

گزینه (۱): تقریباً ۲۵ درصد داده‌ها کم‌تر از چارک اول هستند.

گزینه (۳): $(5 \in \mathbb{Z}) \equiv 5 \notin \mathbb{Z}$

$$\text{گزینه (۴): } \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16} = \frac{(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} \cdot \frac{x \neq \pm 2}{1} = \frac{1}{x^2 + 4}$$

۲۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$f(x) = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \sqrt{1} = 1 \\ f(1) = \sqrt{4} = 2 \\ f(5) = \sqrt{16} = 4 \end{cases} \Rightarrow R_f = \{1, 2, 4\}$$

می‌دانیم ۷۵ درصد داده‌ها به عبارتی $\frac{3}{4}$ از داده‌ها بعد از چارک اول قرار دارند. در نتیجه برای گزاره متن سؤال داریم:

حال گزینه‌ای که ارزش آن نادرست باشد، پاسخ سؤال است. بررسی گزینه (۱): چون داده ۵ خیلی از داده‌های دیگر کوچک‌تر است (دورافتاده) پس شاخص میانه بهتر از میانگین است لذا ارزش این گزاره درست است.

بررسی گزینه (۲): داده ۹۹۹۹ دورافتاده است یعنی از داده‌های دیگر خیلی بزرگ‌تر است، پس میانه و دامنه میان چارکی، پراکندگی را بهتر نشان می‌دهد تا میانگین و انحراف معیار. لذا این گزاره درست است.

بررسی گزینه (۳): طبق اطلاعات سال گذشته این گزاره نیز درست است. بررسی گزینه (۴):

$$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2 \\ f(0) = 0 - 1 = -1 \\ f(2) = 4 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = \{-1, 2, 3\}$$

در حالی که در گزینه (۴) برد تابع $\{1, 2, 3\}$ عنوان شده است که نادرست می‌باشد.

پس گزاره مربوط به گزینه (۴) هم‌ارز با گزاره سؤال نیست.

۲۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$[\sim p \vee \sim (q \vee \sim p)] \equiv [\sim p \vee (\sim q \wedge p)]$$

دمورگان
جابه‌جا می‌کنیم.

$$\equiv [\sim p \vee (p \wedge \sim q)] \equiv \sim p \vee \sim q$$

نقیض هم هستند.
شبه‌جذب

۲۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$[\sim (q \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge \sim p)] \equiv (\sim T \wedge \sim F) \equiv (F \wedge T) \equiv F$$

۲۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

ارزش $(\sim p \vee \sim q) \equiv (p \wedge q)$ درست است، پس هم p و هم q درست هستند، در نتیجه:

$$[q \vee (p \wedge r)] \equiv [T \vee (T \wedge r)] \equiv T$$

۲۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$[(\sim q \vee T) \wedge (F \wedge p)] \equiv (T \wedge F) \equiv F$$

۲۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

بررسی گزینه (۱):

$$[(81 \text{ عددی اول است.}) \wedge (537 \text{ عددی فرد است.})] \equiv F$$

بررسی گزینه (۲):

$$[(\sqrt{3} \text{ عددی گنگ است.}) \wedge (\text{ضرب دو عدد فرد، عددی زوج است.})] \equiv F$$

بررسی گزینه (۳):

$$(2 + \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}) \vee [(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32] \equiv T$$

بررسی گزینه (۴):

$$[(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}) \vee (\frac{3}{5} < \frac{5}{9})] \equiv F$$

گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نادرست هستند پس گزینه (۳) درست می‌باشد.

۲۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$(\sim p \wedge p) \equiv F \quad \text{بررسی گزینه (۱):}$$

$$[\sim (\sim p) \vee (\sim p \wedge T)] \equiv [p \vee (\sim p)] \equiv T \quad \text{بررسی گزینه (۲):}$$

$$[\sim (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p)] \equiv [(\sim F) \vee F] \equiv (T \vee F) \equiv T \quad \text{بررسی گزینه (۳):}$$

$$[\sim p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r)] \quad \text{بررسی گزینه (۴):}$$

$$\equiv [\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge r)]$$

۲۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$[\sim q \vee \sim (p \vee q)] \equiv [(\sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv \sim q$$

قانون جذب
دمورگان

۳۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به نکات گفته‌شده در درس موارد «پ» و «ت» نادرست هستند. پس ۴ مورد «درست» است.

۳۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

در مورد (ب) طبق نکات اشاره‌شده، داریم: $(p \wedge q) \equiv \sim [\sim (p \wedge q)]$ ، یعنی نقیض نقیض هر گزاره، همان گزاره می‌شود.

۳۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

مورد (ا):

$$[(\underbrace{(x+y)(x-y) = x^2 - y^2}_T) \vee (\underbrace{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}_T)] \equiv T$$

مورد (ب):

$$[(\underbrace{2^0 \text{ مضرب } 5 \text{ است.}}_T) \wedge (\underbrace{X^2 - 3X = 0 \text{ دو ریشه غیرصفر دارد.}}_F)] \equiv F$$

(ریشه‌ها عبارتند از ۰ و ۳)

مورد (پ):

$$[(\underbrace{f(x) = \sqrt{x+2} \text{ متغیر } x \text{ وابسته است.}}_F) \wedge (\underbrace{\text{شیب‌های هر دو خط موازی با هم برابرند.}}_T)] \equiv F$$

مورد (ت):

$$[(\underbrace{\text{درآمد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است.}}_F) \vee (\underbrace{\text{انحراف معیار، جذر واریانس است.}}_T)] \equiv T$$

۳۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

(ا) درست است. زیرا:

$$[\sim p \vee (p \wedge q)] \equiv [(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (\sim p \vee q)$$

(ب) درست است (خاصیت شرکت‌پذیری) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$$[\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim p$$

قانون جذب

(ت) درست است. $[p \vee (\sim p \vee \sim q)] \equiv [(p \vee \sim p) \vee (\sim q)] \equiv T$

پس ۳ مورد از هم‌ارزی‌ها درست هستند.

مورد (ت): $(\text{جامعه آماری زیرمجموعه نمونه تصادفی است.})$

$$\underbrace{F}_{F} \equiv \underbrace{F}_{T} \equiv \underbrace{F}_{T}$$
 می‌بینیم که گزاره ۲ نادرست هستند، پس گزینه (۳) پاسخ سؤال است.

۳۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌دانیم: $p \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv (p \wedge \sim q)$
 قانون شبه‌جذب
 از طرفی $(\sim p \wedge q) \equiv F$ است، پس برای p و q حالت‌های زیر وجود دارد:

حالت اول: $(\sim p \wedge q) \equiv F \rightsquigarrow \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} (p \wedge \sim q) \\ T \quad T \end{matrix} \equiv T$
 حالت دوم: $(\sim p \wedge q) \equiv F \rightsquigarrow \begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} (p \wedge \sim q) \\ F \quad T \end{matrix} \equiv F$
 حالت سوم: $(\sim p \wedge q) \equiv F \rightsquigarrow \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} (p \wedge \sim q) \\ T \quad F \end{matrix} \equiv F$
 پس ارزش گزاره $(p \wedge \sim q)$ ، بستگی به ارزش p و q دارد. پس گزینه (۴) درست می‌باشد.

۳۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

p	q	~p	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p ∨ q	~(p ∨ q) ∧ (~p ∨ q)
د	د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د	د	د

۴۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

گزاره p نادرست است. چون $\sqrt{2}$ گنگ است، حاصل نیز گنگ خواهد بود. گزاره q درست است.

$$\begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv T \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A \equiv F \\ B \equiv T \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \sim p \equiv T \\ \sim q \equiv F \end{cases}$$

$$[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee \sim q)] \equiv (T \vee F) \equiv T \rightsquigarrow C \equiv T$$

۴۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

گزاره p : $(\frac{1}{p})^{-3} < 0$ نادرست است، چون هر عدد مثبت به هر توانی برسد، مثبت می‌گردد، حتی اگر توان منفی داشته باشد، پس $p \equiv A \equiv F$
 گزاره q : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ درست است، پس $q \equiv B \equiv T$
 گزاره r : $1 - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ درست است $r \equiv C \equiv T$
 گزاره s : $\sim [(p \wedge q) \vee r] \equiv \sim (F \vee T) \equiv \sim T \equiv F$
 پس $D \equiv F$

۳۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

همان‌طور که در صورت سؤال اشاره شده $(1) [\sim p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \equiv T$
 از طرفی می‌دانیم طبق قانون جذب $(2) [\sim p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \equiv \sim p$
 $(1) \cdot (2) \Rightarrow \sim p \equiv T \rightsquigarrow p \equiv F, \sim r \equiv F \rightsquigarrow r \equiv T$

$$[\underbrace{\sim p}_{T} \vee \underbrace{(q \wedge r)}_q] \equiv T$$

۳۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$(\sim p \vee F) \wedge (\sim p \vee q) \equiv [\underbrace{\sim p}_{\sim p} \wedge (\sim p \vee q)] \equiv \sim p$
 قانون جذب

۳۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

(آ) $[(\underbrace{17}_{T} \text{ عددی اول است.}) \vee (\underbrace{17}_{F} \text{ عددی گنگ است.})] \equiv T$
 (ب) $[(\underbrace{\sqrt{2}}_T \text{ عددی گنگ است.}) \vee (\underbrace{20}_F \text{ عددی اول است.})] \equiv T$
 (پ) $[(\underbrace{10^{-2}}_T = 0.01) \wedge ((\underbrace{\sqrt{3}}_T)^0 = 1)] \equiv T$
 (ت)

$$\left[\begin{matrix} \text{میان، نقطه وسط} \\ \text{داده‌های مرتب‌شده} \\ \text{است.} \end{matrix} \right] \wedge \left[\begin{matrix} \text{اگر مقدار ثابتی به داده‌ها} \\ \text{افزوده شود، به میانگین نیز} \\ \text{همان مقدار اضافه می‌شود.} \end{matrix} \right] \equiv T$$

هر چهار گزاره درست هستند.

۳۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌دانیم مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس مجموع ریشه‌های معادله $0 = 3x^2 - 5x + 2$ برابر $\frac{5}{3}$ می‌باشد.

$$[(\text{مجموع ریشه‌های } 0 = 3x^2 - 5x + 2 \text{ برابر } \frac{5}{3} \text{ است.})] \equiv T$$

$$(\text{پارامتر همیشه از آماره بزرگ‌تر است.}) \equiv F$$

پس گزاره‌هایی با ارزش نادرست هم‌ارز با این گزاره هستند.
 مورد (آ):

$$[(\text{یکی از مشکلات سرشماری، عدم امکان بررسی‌های مخرب است.})] \equiv T$$

$$[(\text{مراحل رشد انسان، متغیر کیفی ترتیبی است.})] \equiv T$$

 مورد (ب):

$$[(\text{در تجزیه } (x^2 - 5x - 6) \text{ عبارت } (x - 2) \text{ وجود ندارد.})] \equiv T$$

$$[(\text{۲۱ عددی اول است.})] \equiv F$$

مورد (پ):
$$[(\text{معکوس هر عدد از خود آن کوچک‌تر است.})] \equiv F$$

$$[(\text{تعداد دوچرخه‌ها متغیر کمی فاصله‌ای است.})] \equiv F$$



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی

۱. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} = 3^{10}$			
		$-1400 \geq +26$	
میانۀ داده‌های ۴۰۵، ۶۰۷، ۴۰۵ عدد ۵/۵ است.			
		مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد، کوچک‌تر است.	
معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.			
		در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل (۱۳۳۱) نیستند.	

۲. کدام یک از جملات یا عبارات‌های زیر، گزاره محسوب می‌شوند؟ ارزش هر گزاره را مشخص کنید.

(آ) کسر $\frac{3x-2}{5\sqrt{x}+1}$ عبارتی گویا است.

(ب) عدد طبیعی x ، مربع کامل است.

(پ) روزی چند عدد تست حل می‌کنی؟

(ت) دامنه تابع $f = \{(2,5), (7,2), (3,11)\}$ برابر است با $D_f = \{2,3,7\}$

(ث) کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۱ است.

(ج) تعداد دندان‌های خراب هر فرد، متغیر کمی نسبتی است.

(چ) اگر همه داده‌های آماری با هم برابر باشند دامنه تغییرات آن‌ها صفر است.

(ح) عدد $(-6)^n$ همیشه عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

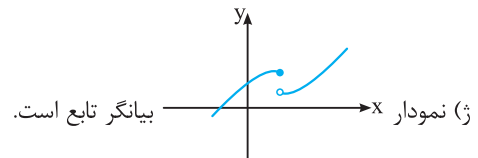
(خ) روزی ۲ ساعت ریاضی بخوان.

(د) عدد 2^{10} عدد بسیار بزرگی است.

(ذ) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$

(ر) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ز) نمودار خط $y = 3x - 4$ از نواحی اول و سوم نمی‌گذرد.



۳. هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید.

(آ) $(46 \text{ عددی مرکب است.}) \equiv ?$

(پ) $(-130 \leq -80) \equiv ?$

(ث) $(\sim [3^3 \leq 5^3]) \equiv ?$

نمونه $\sim(x > y) \equiv x \leq y$

(ب) $(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv ?$

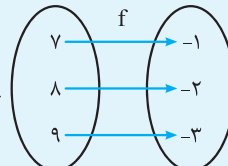
(ت) $(\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}) \equiv ?$

قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی

۴. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	در تابع $f(x) = 3x^2 - 5x $ متغیر مستقل برابر $f(x)$ است و بین افراد متغیر کمی نسبتی است.		
۲	حاصل $(-3)^4$ عددی منفی نیست و رنگ اتومبیل‌ها، متغیر کیفی اسمی نیست.		
۳	۸۱ مضر ۹ است و	✓	
۴ و شیب هر خط عمودی (موازی محور عرض‌ها) تعریف نشده است.		✓
۵	طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 8x + 3$ برابر -2 است و $\{0, 1, 2\} \not\subseteq \mathbb{Z}$		
۶	مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۰ عبارتند از $1, 2, 4, 5, 10, 20$ و میانه یک سری از داده‌ها همان چارک دوم است.		
۷	$(\sqrt{121-36} = 11-6) \wedge ((\frac{7}{3})^{-5} \neq (\frac{3}{7})^5)$		
۸	مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچکتر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.		

۵. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	عدد ۲۹ زوج یا اول است.		
۲	عدد ۳۷ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.		
۳	کسر $\frac{5x^2}{ x +4}$ عبارتی گویاست یا ۸۲ عددی مرکب	✓	
۴	$(\sqrt{3} \in \mathbb{N}) \vee ((-4)^2 > (-2)^5)$		
۵	اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.		
۶	نمودار ون  تابع نیست یا	✓	
۷	تجزیه عبارت $9x^2 - 6x + 1$ به صورت $(3x-1)^2$ است یا	✓	
۸	معکوس هر عدد مثبت، کوچکتر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد زوج با هر عدد فرد، عددی فرد است.		

۶. با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

- (ا) $(p \wedge \sim p) \equiv F$ (ب) $(p \vee \sim p) \equiv F$ (پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
 (ت) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ (ث) $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ (ج) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
 (چ) $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$ (ح) $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$ (خ) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$
 (د) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (ویژه علاقمندان) (ذ) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (ویژه علاقمندان)
 (ز) $[p \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \equiv F$ (ز) $[\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \equiv p$

۷. بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید.

- (ا) $[\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T)] \equiv ?$ (ب) $[(\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p)] \equiv ?$ (پ) $[\sim(p \vee \sim p) \wedge \sim(q \wedge \sim q)] \equiv ?$
 اگر فرض کنیم که گزاره $p \wedge r$ گزاره‌ای درست باشد و q گزاره‌ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۹. بدون رسم جدول، طرف دیگر هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید (T گزاره‌ای همواره درست و F گزاره‌ای همواره نادرست است).

(ا) $(\sim p \wedge \sim F) \equiv ?$ (ب) $[(p \wedge \sim p) \vee (q \vee T)] \equiv ?$

۱۰. اگر گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(ا) $[\sim p \vee (q \wedge r)] \equiv ?$ (ب) $[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv ?$

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c، مطابق شکل، اگر ضلع a را سه برابر کنیم، آنگاه وتر مثلث جدید، سه برابر وتر مثلث اولیه است.



استدلال: $c^2 = a^2 + b^2$: رابطه فیثاغورس در مثلث اولیه
 $c'^2 = (3a)^2 + b^2 = 9a^2 + b^2 = 9(a^2 + b^2) = 9c^2 \Rightarrow c' = 3c$: رابطه فیثاغورس در مثلث جدید

پس وتر مثلث، سه برابر شده است.

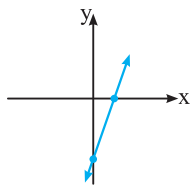
ب) تساوی $\sqrt{\frac{15 \times 7 + 25 \times 2}{14}} = 2\sqrt{10}$ برقرار است.

استدلال: $\sqrt{\frac{15 \times 7 + 25 \times 2}{14}} = \sqrt{\frac{15 + 25 \times 2}{2}} = \sqrt{15 + 25} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$

پاسخ فصل ۱

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- ث) گزاره نادرست است. کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۲ است نه ۱
- ج) گزاره درست است (سال گذشته خوانده‌اید).
- چ) گزاره درست است (سال گذشته خوانده‌اید).
- ح) گزاره نادرست است، چون اگر n زوج باشد حاصل $(-6)^n$ عددی مثبت می‌شود، مثلاً $(-6)^2 = +36$.
- خ) گزاره نیست (جمله امری است).
- د) گزاره نیست (جمله خبری است ولی قابل ارزش‌گذاری نیست).
- ذ) گزاره نادرست است، زیرا می‌دانیم که $-\frac{1}{4} < -\frac{3}{5}$ است.
- ر) گزاره درست است (اتحاد مربع دوجمله‌ای است).
- ز) گزاره نادرست است، زیرا نمودار این خط از نواحی اول، سوم و چهارم می‌گذرد، پس فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد.



$y = 3x - 4$

ژ) گزاره درست است، چون هر خط عمودی دلخواه، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

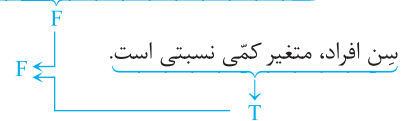
ارزش $\sim p$	گزاره $\sim p$	ارزش p	گزاره p
د	$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} \neq 3^{10}$	ن	$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} = 3^{10}$
د	$26 \geq -1400$	ن	$26 < -1400$
ن	میانۀ داده‌های $4, 5, 6, 7$ عدد $5/5$ نیست.	د	میانۀ داده‌های $4, 5, 6, 7$ عدد $5/5$ است.
ن	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر است.	د	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر نیست.
ن	معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز ندارد.	د	معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ چون دلتای معادله مثبت است، دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
ن	در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل $(1 \ 3 \ 3 \ 1)$ نیستند.	د	در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل $(1 \ 3 \ 3 \ 1)$ هستند.

- آ) $(46 \text{ عددی مرکب نیست}) \equiv (46 \text{ عددی مرکب است})$
- ب) $(\sqrt{25+9} = 5+3) \equiv (\sqrt{25+9} \neq 5+3)$
- پ) $(-130 > -80) \equiv (-130 \leq -80)$
- ت) $(\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}) \equiv \sqrt{3} \in \mathbb{Z}$
- ث) $(\sim[2(3^3 \leq 5^3)]) \equiv 3^3 \leq 5^3$

- ۲) آ) گزاره است و ارزش نادرست دارد، چون x زیر رادیکال است و لذا عبارت مذکور، گویا محسوب نمی‌شود.
- ب) گزاره نیست، چون مقدار دقیق x به ما داده نشده است.
- پ) گزاره نیست (جمله پرسشی است).
- ت) گزاره درست است. زیرا می‌دانیم دامنه تابع، شامل عضوهای اول زوج مرتب‌ها می‌باشد.

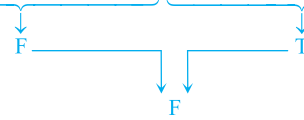
۴

ردیف ۱: در تابع $f(x) = |3x^2 - 5x|$ متغیر مستقل $f(x)$ است و



توجه کنید که در تابع ذکرشده، متغیر مستقل X است و متغیر وابسته $f(x)$ است.

ردیف ۲: حاصل $(-3)^4$ عددی منفی نیست و رنگ اتومبیل‌ها، کیفی اسمی نیست.



ردیف ۳: ۸۱ مضرب ۹ است و ۳ عددی زوج است.

باید F باشد. (یک گزاره نادرست دلخواه)

ردیف ۴: ۲ عددی اول است و شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.



ردیف ۵: طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 8x + 3$ برابر -2 است و

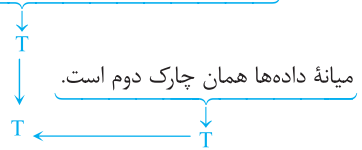
$$\{0, 1, 2\} \not\subseteq \mathbb{Z}$$

یادآوری: طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر با $x = -\frac{b}{2a}$ است.

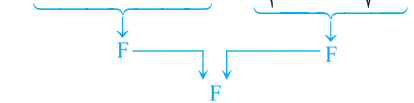
$$x = \frac{-(-8)}{2(2)} = 2$$

در سؤال بالا داریم:

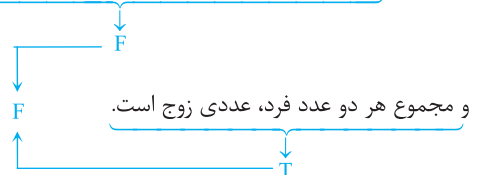
ردیف ۶: مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۰ عبارتند از: $1, 2, 4, 5, 10, 20$ و



ردیف ۷: $(\sqrt{121-36} = 11-6) \wedge ((\frac{7}{3})^{-5} \neq (\frac{3}{7})^5)$

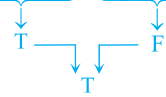


ردیف ۸: مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچک‌تر است

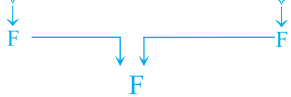


۵

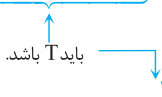
ردیف ۱: عدد ۲۹ زوج یا ۲۹ اول است.



ردیف ۲: عدد ۳۷ بر ۳ بخش پذیر است یا عدد ۳۷ بر ۵ بخش پذیر است.



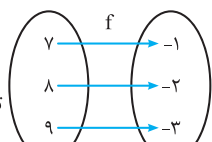
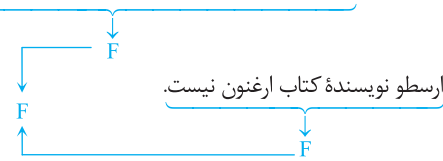
ردیف ۳: کسر $\frac{5x^2}{|x|+4}$ گویاست یا ۸۲ عددی مرکب است.



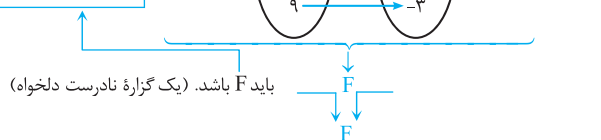
ردیف ۴: $(\sqrt{3} \in \mathbb{N}) \vee ((-4)^2 > (-2)^5)$



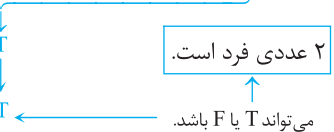
ردیف ۵: اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا



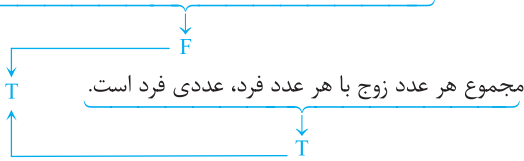
ردیف ۶: نمودار وین تابع نیست یا ۲ عددی فرد است.



ردیف ۷: تجزیه عبارت $9x^2 - 6x + 1$ به صورت $(3x-1)^2$ است یا



ردیف ۸: معکوس هر عدد مثبت، کوچک‌تر از خود آن عدد است یا



دقت کنید که معکوس عدد $\frac{1}{5}$ می‌شود ۵ که از خود $\frac{1}{5}$ بزرگ‌تر است، پس گزاره اول نادرست است.

۶

(\bar{A}) هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

(ب) هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

(پ) سمت راست هم‌ارزی سمت چپ هم‌ارزی

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است. ضمناً به این هم‌ارزی، قانون دیمورگان می‌گوییم.

(ت) سمت راست هم‌ارزی سمت چپ هم‌ارزی

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. به این هم‌ارزی هم، قانون دیمورگان می‌گوییم.

(ج)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee q$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی درست است.

(خ)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge q$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی درست است.

(د)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی درست است.

(ذ)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی درست است.

(ج)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

این دو ستون، یکسان هستند پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

سمت راست هم‌ارزی سمت چپ هم‌ارزی

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \vee q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F

هم‌ارزی درست است.

(چ)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

هم‌ارزی داده‌شده درست است.