



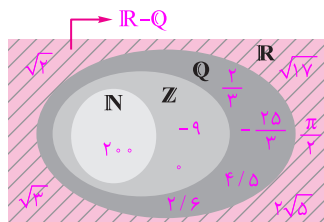
# ریاضی (۱)

## فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

### درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

#### کار در کلاس

صفحه ۲ و ۳ کتاب درسی



۱ الف) مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشورخورده بنویسید.

این مجموعه  $\mathbb{Q}'$  یا مجموعه اعداد گنگ نام دارد؛ زیرا  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  یعنی اعدادی که حقیقی هستند ولی گویا نیستند، مانند:  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ، ...

$$\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$$

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{7}, \frac{2}{6}, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیرحسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

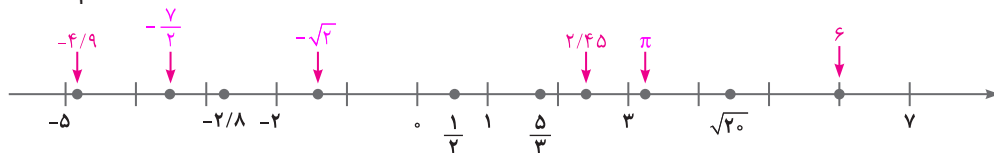
$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$

ث) مجموعه  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$  چند عضو دارد؟ یک عضو دارد و آن عدد صفر است.

۲ هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها

$$2/45, \frac{-7}{7} = -3/5, 6, -4/9, \pi, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

خط بکشید.



صفحه ۳ کتاب درسی

#### فعالیت

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	



## فعالیت

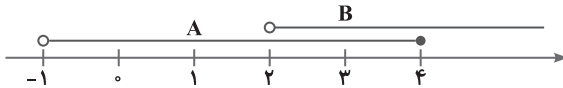
اگر  $a$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز
	$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	$[3, +\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	$(-\infty, 5)$	باز

## مثال

صفحه ۴ کتاب درسی

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه  $A = (-1, 4]$  و  $B = (2, +\infty)$  را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که  $A \cup B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از  $(-1)$  یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که  $A \cap B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

یعنی:

توضیح دهید که چرا  $2 \notin A \cap B$ .

اعضای  $A \cap B$  یعنی عضوایی که هم در بازه  $A$  و هم در بازه  $B$  هستند. عدد ۲ در بازه  $A$  هست ولی در بازه  $B$  قرار ندارد، پس  $2 \notin A \cap B$ .

صفحه ۵ کتاب درسی

## کار در کلاس

① درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف)  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$  ✓

$\frac{1}{3} = 0.333...$  و  $\frac{4}{3} = 1.333...$  و می‌دانیم که  $0.333... < 1.333... < 2$ .

ب)  $-2 \in (-2, 0]$  ✗ نماد پرانتز در سمت چپ عدد ۲- در بازه، نشان‌دهنده این است که این عدد متعلق به این بازه نیست.

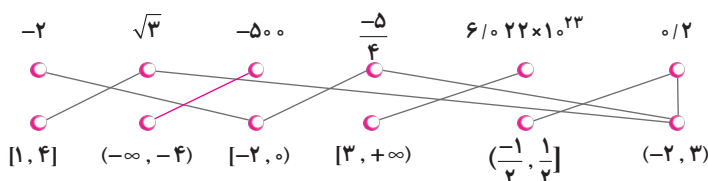
پ)  $0 \in (-2, 0]$  ✓ در سمت راست عدد صفر در بازه، نماد کروشه وجود دارد، بنابراین صفر متعلق به این بازه است.

ت)  $-2 \in \{-2, 0\}$  ✓



- ☒ ث)  $-1 \in \{-2, 0\}$   
☒ ج)  $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$  نیستند. عضو بازه  $(-1, 2)$  دو عدد، عضو بازه  $[-1, 2]$  نیستند.  
☒ چ)  $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2]$  هستند.  
☒ ح)  $\emptyset \subseteq (-17, 0]$  تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه است.  
☒ خ)  $[2, 5) = (2, 5]$  عدد ۵ به بازه سمت راست تعلق دارد ولی به بازه سمت چپ تعلق ندارد. همچنین عدد ۲ متعلق به بازه سمت راست نیست ولی به بازه سمت چپ تعلق دارد.  
☒ د)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$   $\sqrt{2} \approx 1/4$  و چون  $1/4 > 1/4$  پس  $1/4 \notin (0, 1)$ .

۲) هر یک از اعداد زیر، عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳) نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



الف)  $A \cap B = (-1, 2]$

ب)  $A \cup B = (-4, 3]$

پ)  $A - B = (-4, -1]$

ت)  $B - A = (2, 3]$

صفحه ۵ کتاب درسی

فعالیت

فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و  $B$  مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف)  $A = \{1, 2, 3\}$

این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ب)  $A$  چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) درباره تعداد اعضای  $B$  چه می‌توان گفت؟ مجموعه  $B$  دارای بی‌شمار عضو است. به این‌گونه مجموعه‌ها، مجموعه‌های نامتناهی (بی‌پایان) گفته می‌شود. همچنین مجموعه  $A$  که دارای ۳ عضو است، یک مجموعه متناهی (باپایان) است.



مجموعه‌هایی مانند مجموعه  $A$  را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

با توجه به فعالیت بالا، مجموعه  $B$  یک مجموعه متناهی نیست، زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم.



## کار در کلاس

صفحه ۶ کتاب درسی

۱) متاهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متاهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

مجموعه	نامتناهی	متاهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متاهی)
مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی		✓	$\{2, 3, 5, 7\}$ و دارای ۴ عضو است.
مجموعهٔ انسان‌های روی زمین		✓	جمعیت کرهٔ زمین تقریباً برابر با ۷ میلیارد نفر است.
مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد	✓		$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
مجموعهٔ سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	تعداد آنها تقریباً برابر ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تاست.
مجموعهٔ تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ مختصات با شعاع‌های متفاوت وجود دارد.
مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسه شما		✓	تعداد دانش‌آموزان هر مدرسه عدد مشخصی است. (اکثراً عددی سه‌رقمی است.)
مجموعهٔ اعداد طبیعی ده‌رقمی		✓	$\{100000000, 100000001, \dots, 999999999\}$ $\Rightarrow$ تعداد اعضا = ۹,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون		✓	تعداد درخت‌های این جنگل تقریباً ۳۹۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تاست.
مجموعهٔ کسره‌های مثبت با صورت یک	✓		$\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰		✓	$\{10, 20, 30, 40, \dots\}$
بازه (۰, ۱)	✓		بین صفر و یک، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد.
مجموعهٔ مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓	تعداد آنها تقریباً برابر $10^{23} \times 6$ است.

۲) دو مجموعهٔ متاهی نام ببرید. مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی، مجموعه‌ای متاهی است:  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، همچنین مجموعهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی نیز مجموعه‌ای متاهی است:  $\{100, 101, 102, \dots, 999\}$ .

۳) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد. اگر داشته باشیم:  $B = \{1, 2, 3, \dots\}$  و  $A = \{0, 11, 12, \dots\}$ ،  $A \subseteq B$  و هر دو مجموعه‌های نامتناهی هستند و  $A$  زیرمجموعهٔ  $B$  است ( $A \subseteq B$ ).

۴) دو مجموعهٔ نامتناهی مثل  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B - A$  تک‌عضوی باشد. اگر  $A$  مجموعهٔ اعداد طبیعی و  $B$  مجموعهٔ اعداد حسابی باشد، شرایط سؤال برقرار خواهد بود. زیرا:

$$A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, B = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \Rightarrow A \subseteq B$$

$$B - A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$





## تکلیف

تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی، ممکن است بسیار زیاد باشد. با این حال، با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی، می‌توان تعداد آنها را به دست آورد؛ مانند مجموعه مورچه‌های روی کره زمین.

## فعالیت

صفحه ۷ کتاب درسی

الف)  $\frac{1}{3}$  عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازه  $(0, 1)$  بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. جواب‌های مختلفی به دست می‌آید.

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$$

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله، زیرا بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه  $(0, 1)$  چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نتیجه می‌گیریم تعداد اعداد گویای بین صفر و یک، بی‌شمار هستند. به عبارت دیگر، مجموعه اعداد گویای موجود در بازه  $(0, 1)$  نامتناهی است.

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن  $Q$  چه می‌توان گفت؟  $Q$  (مجموعه اعداد گویا) مجموعه‌ای نامتناهی است.

ث) اگر  $A$  دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آنگاه  $A$  یک مجموعه نامتناهی خواهد بود.

اگر  $A$  دارای یک زیرمجموعه نامتناهی مانند مجموعه  $B$  باشد، یعنی:  $B \subseteq A$ ، آنگاه مجموعه  $A$  که مجموعه بزرگ‌تری نسبت به مجموعه  $B$  است نیز نامتناهی خواهد بود.

## تمرین

صفحه ۷ کتاب درسی

۱) فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

$$U = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

الف)  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب)  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟  $U$  یک مجموعه نامتناهی است.

$$B = \{5, 10, 15, 20, \dots, 100\}$$

پ) یک زیرمجموعه متناهی از  $U$  بنویسید.

ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید؛ به طوری که  $C \subseteq D$ .

$$C = \{15, 20, 25, \dots\} \text{ و } D = \{10, 15, 20, 25, \dots\}$$

۲) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی، زیرا برابر است با:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. متناهی، زیرا برابر است با:

پ) بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ . نامتناهی، زیرا این بازه دارای بی‌شمار عدد حقیقی بین  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{3}$  است.

ت)  $A = \{x \in N \mid 1 < x < 2\}$ . متناهی، زیرا هیچ عددی طبیعی بین ۱ و ۲ وجود ندارد و  $A = \emptyset$  است.  $n(A) = 0 \in W$

$$\{100, 200, 300, 400, \dots\}$$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی، زیرا برابر است با:

۳) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد. مجموعه اعداد طبیعی زوج  $(E)$  و مجموعه اعداد

اول  $(P)$ ، دو مجموعه نامتناهی هستند که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی است:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \Rightarrow E \cap P = \{2\}$$

## تکلیف

تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است.



۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

الف)  $(-3, 0) \cup (-2, 5] = (-3, 5]$



همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، برای به دست آوردن اجتماع دو بازه، باید تمام قسمت‌هایی که حداقل در یکی از دو بازه وجود دارد را به حساب آوریم.

ب)  $(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$



برای به دست آوردن اشتراک دو بازه، فقط قسمت‌های مشترک را می‌نویسیم. لازم به ذکر است که چون عدد ۲ به صورت بازه باز (در محور دایره توخالی) است، در اشتراک قرار ندارد.

پ)  $(3, +\infty) \cap (6, 10] = (6, 10]$



ت)  $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



ث)  $(3, +\infty) - [2, 4) = [4, +\infty)$



با توجه به شکل قسمت (ث) پاسخ می‌دهیم.

۵ مجموعه  $\mathbb{R} - \{3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مجموعه  $\mathbb{R} - \{3\}$  یعنی تمام اعداد حقیقی به جز عدد ۳. توجه کنید که روی محور، باید عدد ۳ را با دایره توخالی نشان دهیم.



این مجموعه را می‌توان به صورت اجتماع دو بازه نوشت، که یکی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳ و دیگری اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۳ باشد:

$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

۶ اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه  $A$  متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

$A$  حتماً یک مجموعه متناهی خواهد بود، زیرا  $A$  مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن با تعداد اعضای مجموعه  $B$  برابر یا از آن کمتر است.



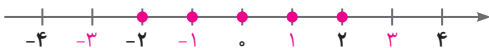
## درس دوم: متمم یک مجموعه

## فعالیت

صفحه ۸ کتاب درسی

الف) دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$



ب) A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = (-3, 2]$$

پ) در مورد A، اگر مجموعه مرجع را  $\mathbb{Z}$  در نظر بگیریم،  $A'$  را مشخص کنید.

$$A' = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\}$$

ت) در مورد B، با فرض اینکه  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

$$B' = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$$



## ریاضی

فصل ۱

## کار در کلاس

صفحه ۹ و ۱۰ کتاب درسی

۱) اگر  $U$  مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و  $A$  مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه  $A'$  را با نمایش اعضای آن بنویسید. اگر  $A$  مجموعه استان‌های غیر ساحلی باشد،  $A'$  که متمم  $A$  است؛ مجموعه استان‌های ساحلی است. در نتیجه مجموعه  $A'$  به صورت زیر است:

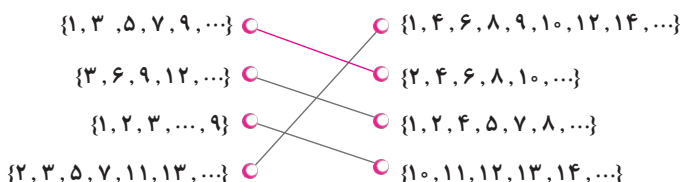
$$A' = U - A = \{\text{سیستان و بلوچستان، هرمزگان، بوشهر، خوزستان، گلستان، مازندران، گیلان}\}$$

۲) فرض کنیم  $U$  مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و  $B$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت  $B'$  چه مجموعه‌ای خواهد بود؟  $B'$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک زوج خواهد بود.



برای به دست آوردن متمم یک مجموعه کافی است مجموعه مرجع را منهای آن مجموعه کنیم. به عنوان مثال، اگر  $\mathbb{R}$  را مجموعه مرجع در نظر بگیریم، داریم: مجموعه اعداد گنگ =  $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$  متمم مجموعه اعداد گویا

۳) با فرض آنکه  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

توجه داشته باشید که اجتماع هر دو مجموعه که به هم وصل می‌شوند، باید برابر  $\mathbb{N}$  باشد.



۴) مجموعه مرجع  $U$  و زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\emptyset' = U - \emptyset = U \quad U' = U - U = \emptyset \quad A \cup A' = U \quad A \cap A' = \emptyset$$



۱- اگر دو مجموعه متمم یکدیگر باشند، اجتماع آنها برابر با مجموعه مرجع است.

۲- اگر دو مجموعه متمم یکدیگر باشند، اشتراک آنها برابر با مجموعه تهی است.

۳- متمم مجموعه تهی، مجموعه مرجع و متمم مجموعه مرجع، مجموعه تهی است.

۵) الف) اگر  $\mathbb{Z}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه  $\mathbb{N}'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

یعنی از مجموعه اعداد صحیح، اعداد طبیعی را حذف کرده‌ایم.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

ب) اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت  $\mathbb{N}'$  را روی محور نمایش دهید.

باید از مجموعه اعداد حقیقی، عددهای طبیعی را حذف کنیم.



۶) فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 4\}$ . ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول‌های

زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A' = \{4, 5\}$$

$$B' = \{1, 3, 5\}$$

$(A')'$
$\{1, 2, 3\}$

$$\Rightarrow (A')' = A$$

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$

$$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$A - B$	$A - (A \cap B)$	$A \cap B'$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$

$$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$$



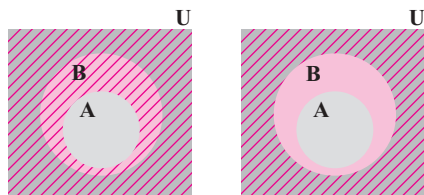
بین هر دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  قوانین زیر برقرار هستند:

$$۱) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$۲) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$۳) A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$$

به قوانین ۱ و ۲، «قوانین دمورگان» می‌گویند.



A' را هاشور بزنید

B' را هاشور بزنید

۷ الف) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل  $A'$  و  $B'$  را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است؟ بله چگونه؟ همان‌طور که در نمودار مشخص است،  $B' \subseteq A'$ .

ب) اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت  $A \subseteq B$  می‌باشد. با به‌دست آوردن  $A'$  و  $B'$  نشان دهید که بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است.

$$A' = \{c, d, e\}, B' = \{d, e\} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

اگر  $A \subseteq B$  باشد، آنگاه  $B' \subseteq A'$  خواهد بود.

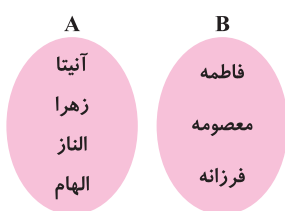


صفحه ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

### فعالیت

### ریاضی

فصل ۱



۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه  $\{آیتا، زهرا، الناز، الهام\} = A$  و اعضای دانشجوی آن مجموعه  $\{فاطمه، معصومه، فرزانه\} = B$  هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر  $A \cap B = \emptyset$ .



به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{فاطمه، معصومه، فرزانه، آیتا، زهرا، الناز، الهام\}$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه‌ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

تعداد اعضای  $A \cup B$  برابر مجموع تعداد اعضای  $A$  و  $B$  است. یعنی:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟

در صورتی که  $n(A \cap B) = 0$ ، یعنی  $A$  و  $B$  جدا از هم (مجزا) باشد.

۲ الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6$$



$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$  : مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰

$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$  : شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$

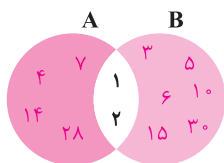
ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲

پ) چرا رابطه‌ای که در فعالیت (۱) به دست آوردید:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثال برقرار نیست؟

رابطه فعالیت (۱) در صورتی درست است که  $A \cap B = \emptyset$  یعنی  $n(A \cap B) = 0$  باشد ولی در این مثال، اشتراک  $A$  و  $B$  تهی نیست ( $A \cap B \neq \emptyset$ )، در نتیجه رابطه فعالیت (۱) برقرار نیست.

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای  $n(A \cup B)$  را حدس بزنید.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

این رابطه در حالت کلی برای هر دو مجموعه متناهی  $A$  و  $B$  برقرار است.

همان‌طور که دیدیم، اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار فوق، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید. هنگامی که تعداد اعضای مجموعه  $A$  را با تعداد اعضای مجموعه  $B$  جمع می‌کنیم، در واقع تعداد اعضای مجموعه  $A \cap B$  را دو بار شمرده‌ایم (یک بار در اعضای  $A$  و یک بار در اعضای  $B$ )؛ بنابراین باید یک بار تعداد اعضای مجموعه  $A \cap B$  را کم کنیم تا تعداد درست اعضای  $A \cup B$  به دست آید.

کار در کلاس ..... صفحه ۱۱ و ۱۲ کتاب درسی

① یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که: الف) پویانمایی یا طنزند. ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند.

**روش اول حل:** مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با  $U$ ، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با  $C$  و مجموعه فیلم‌های طنز را با  $T$  نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

الف)  $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

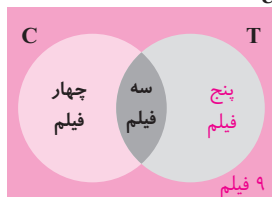
ب)  $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

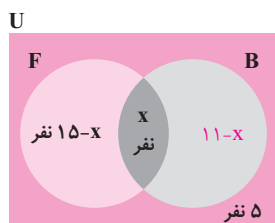
**روش دوم حل:** در نمودار مقابل، دو مجموعه  $C$  و  $T$  سطح درون  $U$  را به چهار ناحیه

جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

الف)  $12 = 4 + 3 + 5$  = تعداد کل فیلم‌های پویانمایی یا طنز (الف)

ب)  $21 - 12 = 9$  = تعداد کل فیلم‌های غیر پویانمایی و غیر طنز (ب)





۲) در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

**روش اول حل:** با تکمیل نمودار زیر مقدار  $x$  را بیابید.

$$25 - 5 = 20$$

$$15 - x + x + 11 - x = 20 \Rightarrow 26 - x = 20 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 6 \text{ نفر عضو هر دو تیم هستند.}$$

**روش دوم حل:** چون ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = 20$ . حال با نوشتن فرمول  $n(B \cup F)$  می‌توان  $n(B \cap F)$  را به دست آورد.

$$n(F) = 15, n(B) = 11, n(F \cup B) = 20$$

$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B) \Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(F \cap B) \Rightarrow 20 = 26 - n(F \cap B)$$

$$\Rightarrow n(F \cap B) = 26 - 20 = 6 \Rightarrow 6 \text{ نفر عضو هر دو تیم هستند.}$$

**تمرین** ..... صفحه ۱۲ و ۱۳ کتاب درسی

## ریاضی

### فصل ۱

۱)  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

(الف)  $A = [-2, 3)$



باید از مجموعه  $\mathbb{R}$  مجموعه  $A$  را حذف کرد. چون  $-2$  عضو مجموعه  $A$  است، پس عضو مجموعه  $A'$  نیست و با دایره توخالی نشان می‌دهیم. همچنین چون  $3$  عضو  $A$  نیست، پس عضو  $A'$  است و با دایره توپر نشان می‌دهیم.

(ب)  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$



در اینجا نیز، اعضای  $B$  را به صورت دایره توخالی نشان می‌دهیم.

(پ)  $C = (0, +\infty)$



چون عدد صفر عضو  $C$  نیست، پس عضو  $C'$  است و با دایره توپر نشان می‌دهیم.

(ت)  $D = (-\infty, 1]$



چون عدد ۱ عضو  $D$  است، پس عضو  $D'$  نیست و با دایره توخالی نشان می‌دهیم.

۲)  $\mathbb{N}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $A$  مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد.

اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد،  $A'$  مجموعه اعداد طبیعی فرد خواهد بود که هر دو مجموعه  $A$  و  $A'$  نامتناهی هستند.

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $B$  مثال بزنید که  $B'$  متناهی باشد.

اگر  $B$  اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ باشد، یعنی  $B = \{6, 7, 8, \dots\}$ ، در این صورت  $B$  نامتناهی است و متمم آن، مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۵، یعنی  $B' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه‌ای متناهی است.



پ) مجموعه‌ای متناهی مثل  $C$  مثال بزنید و  $C'$  را به دست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟

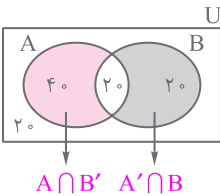
اگر  $C$  مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی باشد، آنگاه خواهیم داشت:  $C' = \{10, 11, 12, 13, \dots\}$   $\Rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  همان طور که دیده می شود، مجموعه  $C'$  نامتناهی است.

۳) اگر  $n(A) = 15$ ،  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 30$  آنگاه  $n(B)$  را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow 30 = n(B) + 10 \Rightarrow n(B) = 20$$

۴) فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ ،  $n(A) = 60$ ،  $n(B) = 40$  و

$n(A \cap B) = 20$  مطلوب است: (الف)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 40 - 20 = 100 - 20 = 80$ .



با توجه به اطلاعات داده شده، نمودار ون را رسم می‌کنیم:

برای به دست آوردن  $n(A \cap B')$  باید تعداد اعضای  $A$  را بیابیم که هم عضو  $A$  و هم عضو  $B'$  باشند.  $n(A \cap B') = 40$  (ب)

نکته

$$A \cap B' = A - B$$

برای هر دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  داریم:

پ)  $n(A' \cap B) = 20$ .

طبق قوانین دمورگان، خواهیم داشت:  $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$  (ت)

۵) در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان

این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

اگر گروه سرود را با  $S$  و گروه تئاتر را با  $T$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$n(S) = 14, n(T) = 19, n(S \cap T) = 5, n(S \cap T') = ?$$

$$n(S \cap T') = 9$$

با توجه به نمودار رسم شده، داریم:

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

با توجه به نمودار رسم شده در قسمت (الف)، ۳ نفر عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

توجه داشته باشید که بدون رسم شکل نیز می‌توان به این سؤال پاسخ داد:

$$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) = 31 - 19 - 14 + 5 = 3$$

۶) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت  $A$

و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت  $B$  خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید

کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

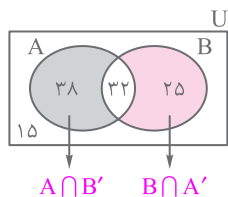
$$n(A) = 70, n(B) = 57, n(A \cap B) = 32$$

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 127 - 32 = 95$$

یعنی دست‌کم (حداقل) ۹۵ نفر از این دو شرکت خرید داشته‌اند.





(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. فقط از شرکت A خرید کرده‌اند، مانند این است که بگوییم  $n(A \cap B') = 38$  از شرکت A خرید کرده‌اند و از شرکت B خرید نکرده‌اند. بنابراین:

(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند، یعنی از A خرید کرده‌اند و از B خرید نکرده‌اند  $(A \cap B')$  یا از B خرید کرده‌اند و از A خرید نکرده‌اند  $(B \cap A')$ . بنابراین:

$$n[(A \cap B') \cup (B \cap A')] = n(A \cap B') + n(B \cap A') = 38 + 25 = 63$$

جدا از هم هستند.

(ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند، یعنی از A خرید نکرده‌اند  $(A')$  و از B هم خرید نکرده‌اند  $(B')$ . بنابراین:

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$$

## درس سوم: الگو و دنباله

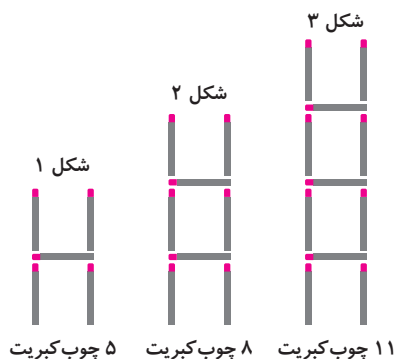
## ریاضی

## فصل ۱

صفحه ۱۴ کتاب درسی

## مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در هر یک از آنها توجه کنید.



$n$ : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	$n$	...
$a_n$ : تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	۱۴	...	$3n + 2$	...
رابطه بین $n$ و $a_n$	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$	$a_4 = 14$	...	$a_n = 3n + 2$	...

(الف) با این نمادگذاری،  $a_n$  نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

$a_n$  نشان‌دهنده تعداد چوب‌کبریت‌های شکل چهارم و برابر است با  $a_4 = 14$ .

(ب)  $a_n$  به چه معناست؟  $a_n$  برابر با تعداد چوب‌کبریت‌های شکل  $n$ ام است و در حالت کلی، جمله  $n$ ام است.

(پ) آیا می‌توانید حاصل  $a_n$  را برحسب  $n$  به‌دست آورید؟ برای این کار، فعالیت بعد را انجام دهید.

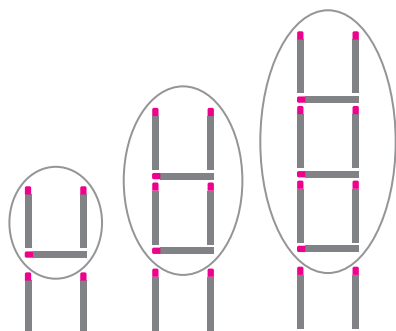
بله، حاصل  $a_n$  با توجه به چند عدد اول الگو، برابر  $a_n = 3n + 2$  است. روش‌های به‌دست آوردن آن در فعالیت‌های بعدی آمده است.



## فعالیت

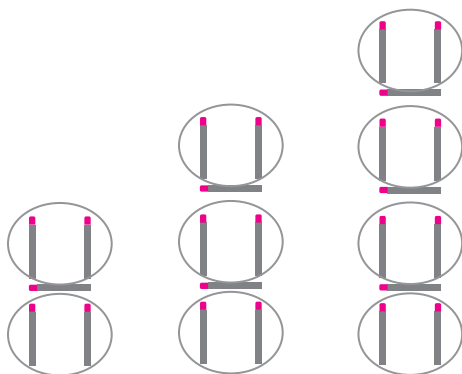
صفحه ۱۵ کتاب درسی

۱) ابتدا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل‌های الگو را به صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_{10}$  و  $a_n$  را به دست آورد.



$$a_1 = 1(2) + 2 \quad a_2 = 2(2) + 2 \quad a_3 = 3(2) + 2 \quad a_4 = 4(2) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(2) + 2 = 22 \quad \dots \quad a_n = n(2) + 2 = 2n + 2$$

۲) آیساً روش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب‌کبریت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$  دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10+1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n+1)2$$

چوب‌های افقی      چوب‌های عمودی

۳) آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  می‌دانید؟

بله، می‌توانیم با اضافه کردن یک چوب‌کبریت به هر شکل، دسته‌های سه‌تایی بسازیم. سپس یک واحد از تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل کم کنیم. یعنی:

$$a_1 = 2(3) - 1, a_2 = 3(3) - 1, a_3 = 4(3) - 1, a_4 = 5(3) - 1, \dots, a_{10} = 11(3) - 1, \dots, a_n = (n+1)(3) - 1$$

۴) همان‌طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، ابتدا و آیساً مقدار  $a_n$  را به ترتیب به صورت‌های  $a_n = 3n + 2$  و  $a_n = n + (n+1)2$  به دست آوردند. جواب آیساً را ساده کنید تا به شکل جواب ابتدا درآید.

$$a_n = n + (n+1)2 = n + 2n + 2 = 3n + 2$$

۵) به کمک رابطه  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

کافی است در این رابطه، به جای  $n$ ، عدد ۲۰ را قرار دهیم. پس:

۶) با استفاده از رابطه  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب‌کبریت است.

باید به جای  $a_n$ ، عدد ۷۷ را قرار دهیم و از معادله به دست آمده، مقدار  $n$  را بیابیم.

$$3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 77 - 2 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = \frac{75}{3} = 25$$

یعنی بیست و پنجمین شکل این الگو، دارای ۷۷ قطعه چوب‌کبریت است.

## ریاضی

فصل ۱

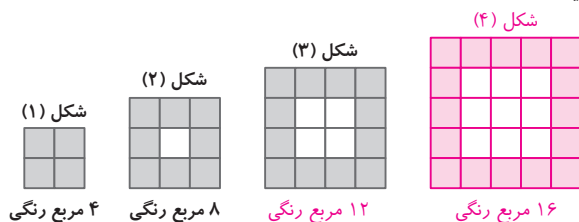


صفحه ۱۷ کتاب درسی

کار در کلاس

۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

شکل چهارم الگو به این صورت است:



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع های رنگی : $b_n$	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و $b_n$	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

$\xrightarrow{+4}$     $\xrightarrow{+4}$     $\xrightarrow{+4}$     $\xrightarrow{+4}$

## ریاضی

فصل ۱

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود. زیرا تعداد مربع های رنگی در شکل ها، ۴ تا ۴ تا افزایش می یابد. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابت ۴ است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a را رابطه  $b_n = an + h$  را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل  $b_n$  را به دست آورید. با توجه به شکل ها و جدول، تعداد مربع های رنگی در هر شکل، چهار برابر شماره شکل است. پس:

$$b_n = 4n = 4n + 0 \Rightarrow a = 4, h = 0$$

$$b_{250} = 4 \times 250 = 1000 \text{ مربع رنگی}$$

۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

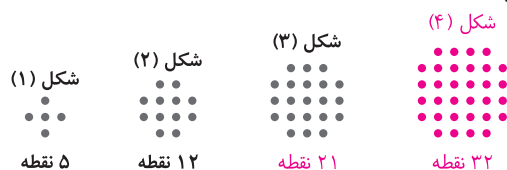
$$b_n = 4n = 144 \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36$$

کافی است  $b_n$  را برابر ۱۴۴ قرار دهیم و مقدار n را محاسبه کنیم:  
پس در مرحله سی و ششم از این الگو، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است.

صفحه ۱۷ و ۱۸ کتاب درسی

فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه ها : $t_n$	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه بین n و $t_n$	$t_1 = 5$	$t_2 = 12$	$t_3 = 21$	$t_4 = 32$	$t_5 = 45$

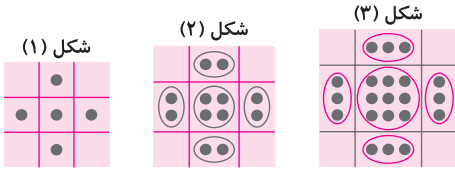
$\xrightarrow{+7}$     $\xrightarrow{+9}$     $\xrightarrow{+11}$     $\xrightarrow{+13}$



۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ خیر

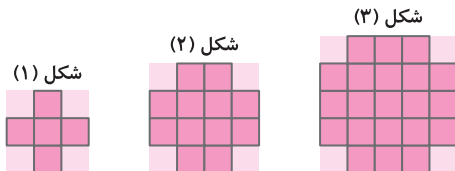
چرا؟ زیرا اختلاف بین دو جمله متوالی عدد ثابتی نیست.

۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار  $t_n$  را بیابید.



$$t_1 = (1)^2 + 4(1) \quad t_2 = (2)^2 + 4(2) \quad t_3 = (3)^2 + 4(3) \quad t_4 = (4)^2 + 4(4) \quad \dots \quad t_n = n^2 + 4n$$

۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



با توجه به جمله‌های قبلی می‌توانیم الگو را به صورت زیر بنویسیم:

$$t_1 = 3^2 - 4 \quad t_2 = 4^2 - 4 \quad t_3 = (3+2)^2 - 4 \quad t_4 = (4+2)^2 - 4 \quad \dots \quad t_n = (n+2)^2 - 4$$

$$= (1+2)^2 - 4 \quad = (2+2)^2 - 4$$

۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند.

اگر الگوی به دست آمده در قسمت (۴) را ساده کنیم به الگوی قسمت (۳) خواهیم رسید.

$$t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$$

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید. بله، با توجه به جدول زیر:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه	$1(1+4)$	$2(2+4)$	$3(3+4)$	$4(4+4)$	$5(5+4)$

الگو به صورت مقابل خواهد بود:

$$t_n = n(n+4)$$

کار در کلاس صفحه ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی

۱ دو دنباله دلخواه مثال بریزید.

(۱) دنباله ۳، ۷، ۱۱، ... (۲) دنباله -۱، ۴، ۹، ...

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $a_n = n^2 - 1$ : ۰، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴

ب)  $b_n = -n + 4$ : ۳، ۲، ۱، ۰، -۱، -۲

ج)  $c_n = -13 + 2n$ : -۱۱، -۹، -۷، -۵، -۳



۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جمله عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

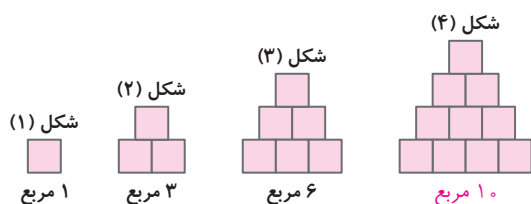
$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	$-n$	...
۱	$\sqrt{۳}$	$\sqrt{۵}$	$\sqrt{۷}$	$\sqrt{۹}$	$\sqrt{۱۱}$	$\sqrt{۱۳}$	...	$\sqrt{۲n-۱}$	...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	$n^۲$	...
$\frac{۱}{۱}$ ↓ $۱۰^{-۱}$	$\frac{۱}{۱۰}$ ↓ $۱۰^{-۲}$	$\frac{۱}{۱۰۰}$ ↓ $۱۰^{-۳}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ↓ $۱۰^{-۴}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ ↓ $۱۰^{-۵}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$ ↓ $۱۰^{-۶}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$ ↓ $۱۰^{-۷}$	...	$۱۰^{-n}$	...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)^n n^۳$	...
۵	۱۸	۳۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳	...	...	...
-۲	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$-\frac{۱}{۳۲}$	...	...	...
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۲	...	...	...
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	...	...	...
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...	...	...
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	...	...	...

دقت داشته باشید که دنباله ردیف آخر جدول، دنباله اعداد اول است.

### تکلیف

در دنباله یکی مانده به آخر که به «دنباله فیبوناتچی» معروف است، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله قبلی. این دنباله توسط فیبوناتچی، ریاضی دان ایتالیایی معرفی شده است.

۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



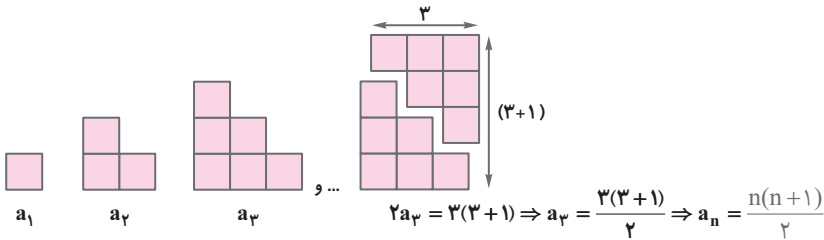
الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد مربع‌ها	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱
		+۲	+۳	+۴	+۵	+۶



ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ خیر چرا؟ زیرا اختلاف جمله‌های متوالی مقدار ثابتی نیست.

پ) شکل‌های الگوی صفحه قبل را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل  $a_n$  را برحسب  $n$  به دست آورید.



ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

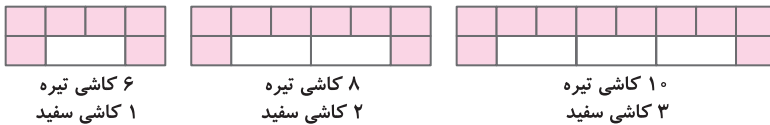
با توجه به اینکه تعداد مربع‌های شکل  $n$  برابر است با مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$ ، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

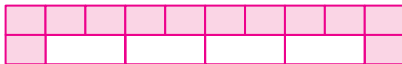
صفحه ۲۰ کتاب درسی

تمرین

۱) به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.



۱۲ کاشی تیره و ۴ کاشی سفید

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

تعداد کاشی‌های تیره: ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ...

پ) اگر  $n$  تعداد کاشی‌های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار  $t_n$  را برحسب  $n$  بنویسید.

با بررسی رابطه بین تعداد کاشی‌های سفید و تیره می‌توانیم  $t_n$  را به صورت زیر بنویسیم:

$n$ : تعداد کاشی‌های سفید	۱	۲	۳	۴	...	$n$
$t_n$ : تعدادی کاشی‌های تیره	۶	۸	۱۰	۱۲	...	$2n+4$
الگو $t_n$	$(2 \times 1) + 4$	$(2 \times 2) + 4$	$(2 \times 3) + 4$	$(2 \times 4) + 4$	...	$2n+4$

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟

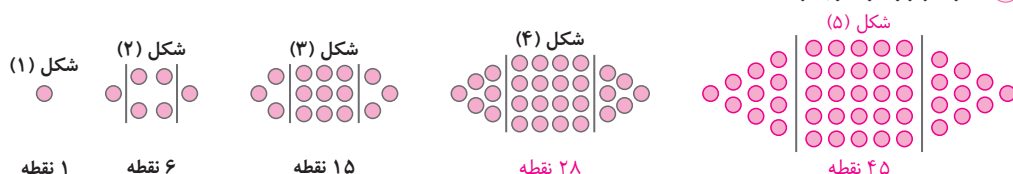
کافی است به جای  $t_n$ ، ۵۰ قرار دهیم و مقدار  $n$  را به دست آوریم:

$$2n+4=50 \Rightarrow 2n=50-4 \Rightarrow 2n=46 \Rightarrow n=\frac{46}{2}=23$$

پس برای اینکه ۵۰ کاشی تیره داشته باشیم، باید ۲۳ کاشی سفید داشته باشیم.



۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

$$+5 \quad +9 \quad +13 \quad +17 \quad +21$$

$$+4 \quad +4 \quad +4 \quad +4$$

پس دنباله مقابل را خواهیم داشت:

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد نقطه‌ها	۱	۴	۹	۱۶	...	$n(n+1)$
الگو	$1 \times 1$	$2 \times 2$	$3 \times 3$	$4 \times 4$	...	$n(n+1)$

$$a_n = n(n+1) = n^2 + n$$

پس جمله عمومی الگو برابر است با:

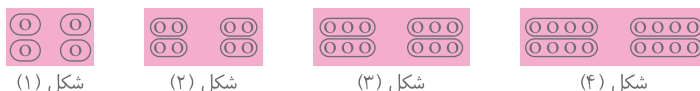
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

$$n=10 \Rightarrow a_{10} = 10^2 + 10 = 100 + 10 = 110$$

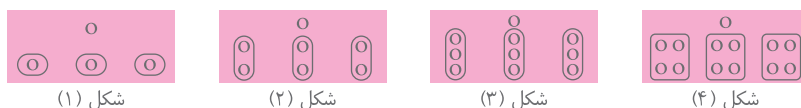
شکل دهم، ۱۱۰ نقطه دارد.

۳) جمله عمومی چند دنباله اول چهار جمله آن را بنویسید و سپس به هریک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

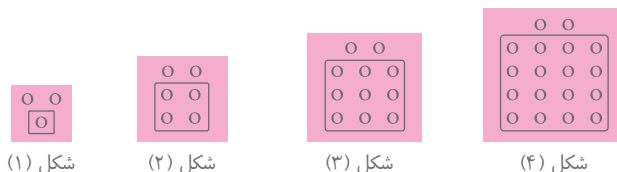
الف)  $a_n = 4n \Rightarrow a_1 = 4 \times 1 = 4, a_2 = 4 \times 2 = 8, a_3 = 4 \times 3 = 12, a_4 = 4 \times 4 = 16$



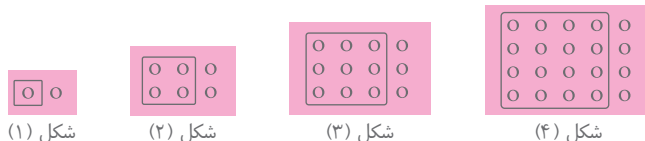
ب)  $b_n = 3n+1 \Rightarrow b_1 = 3(1)+1=4, b_2 = 3(2)+1=7, b_3 = 3(3)+1=10, b_4 = 3(4)+1=13$



پ)  $c_n = n^2 + 2 \Rightarrow c_1 = 1^2 + 2 = 3, c_2 = 2^2 + 2 = 6, c_3 = 3^2 + 2 = 11, c_4 = 4^2 + 2 = 18$



ت)  $d_n = n^2 + n \Rightarrow d_1 = 1^2 + 1 = 2, d_2 = 2^2 + 2 = 6, d_3 = 3^2 + 3 = 12, d_4 = 4^2 + 4 = 20$

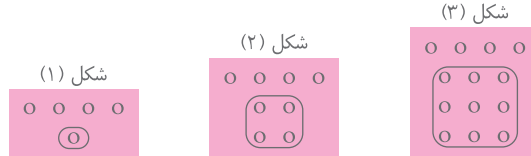




۴ برای هریک از دنباله‌های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.  
الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

شماره جمله	۱	۲	۳	۴	...	n
جمله	۵	۸	۱۳	۲۰	...	$n^2 + 4$
الگو	$1^2 + 4$	$2^2 + 4$	$3^2 + 4$	$4^2 + 4$	...	$n^2 + 4$

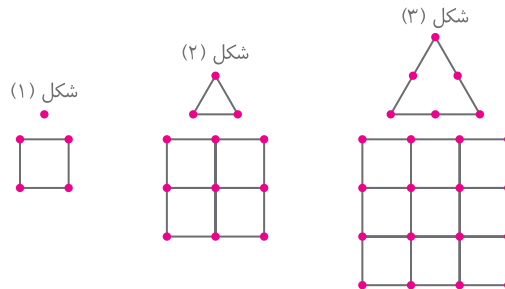
$\Rightarrow a_n = n^2 + 4$



ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

شماره جمله	۱	۲	۳	...	n
جمله	۵	۱۲	۲۲	...	$(n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$
الگو	$(1+1)^2 + \frac{(1)(1+1)}{2}$	$(2+1)^2 + \frac{(2)(2+1)}{2}$	$(3+1)^2 + \frac{(3)(3+1)}{2}$	...	$(n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow b_n = (n+1)\left(\frac{3}{2}n+1\right)$$



### درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

فعالیت صفحه ۲۱ کتاب درسی

۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.  
۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ...  
الف) جمله اول و قدرنسبت این دنباله را مشخص کنید.  
 $t_1 = 2000$  ,  $d = 4$



برای به دست آوردن قدرنسبت یک دنباله حسابی، کافی است اختلاف دو جمله متوالی را به دست آوریم. مثلاً در اینجا می‌توانیم جمله دوم را منهای جمله اول کنیم:  
 $d = 2004 - 2000 = 4$





ب) نهمین دورهٔ المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ در سال ۲۰۳۲

۲۰۳۲، ۲۰۲۸، ۲۰۲۴، ۲۰۲۰، ۲۰۱۶، ۲۰۱۲، ۲۰۰۸، ۲۰۰۴، ۲۰۰۰

پ) با تکمیل جدول زیر، جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$	...
۲۰۰۰	$۲۰۰۰ + ۱(۴)$	$۲۰۰۰ + ۲(۴)$	$۲۰۰۰ + ۳(۴)$	...	$۲۰۰۰ + (n-1)(۴)$	...

پس جملهٔ عمومی این دنباله، برابر است با:  $t_n = ۲۰۰۰ + (n-1)۴ = ۴n + ۱۹۹۶$

ت) بیست و چهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = (۴ \times ۲۴) + ۱۹۹۶ = ۹۶ + ۱۹۹۶ = ۲۰۹۲$$

بنابراین در سال ۲۰۹۲ میلادی، بیست و چهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی برگزار خواهد شد.

۲) با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$	...	$t_1 + (n-1)d$	...

$\xrightarrow{+d} \quad \xrightarrow{+d} \quad \xrightarrow{+d}$

اگر  $t_1$  جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی و  $d$  قدرنسبت آن باشد، جملهٔ عمومی این دنبالهٔ حسابی، برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

## ریاضی

### فصل ۱

کار در کلاس ..... صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی

۱) در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف)  $۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, \dots$ ,  $d = ۵$ ,  $a_n = a_1 + (n-1)d = ۵ + (n-1) \times ۵ = ۵n$

ب)  $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \dots$ ,  $d = ۲$ ,  $b_n = b_1 + (n-1)d = ۱ + (n-1) \times ۲ = ۲n - ۱$

پ)  $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, \dots$ ,  $d = ۴$ ,  $c_n = c_1 + (n-1)d = ۵ + (n-1) \times ۴ = ۴n + ۱$

ت)  $۱۳, ۷, ۱, -۵, -۱۱, -۱۷, -۲۳, \dots$ ,  $d = -۶$ ,  $d_n = d_1 + (n-1)d = ۱۳ + (n-1) \times (-۶) = ۱۳ - ۶n + ۶ = -۶n + ۱۹$

اگر جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی نزولی باشند، قدرنسبت عددی منفی خواهد بود.

۲) A و B دو شرکت عرضه‌کنندهٔ سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم‌کارت‌های شرکت B

هزینهٔ ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان

هزینهٔ هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم‌کارت‌های شرکت A

هزینهٔ ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان

هزینهٔ هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم  $a_n$  نشان‌دهندهٔ هزینهٔ کل  $n$  دقیقه مکالمه از طریق سیم‌کارت شرکت A و  $b_n$  هزینهٔ مشابه برای استفاده از سیم‌کارت شرکت B باشد.

$$a_n = ۲۰۰۰ + ۳۰n, \quad b_n = ۳۰۰۰ + ۲۰n$$

الف) مقدار  $a_n$  و  $b_n$  را برحسب  $n$  بنویسید.



ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n$ : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
$a_n$ : هزینه سیم‌کارت A	۲۰۳۰	۳۲۰۰	۳۸۰۰	۵۳۰۰	۶۸۰۰
$b_n$ : هزینه سیم‌کارت B	۳۰۲۰	۳۸۰۰	۴۲۰۰	۵۲۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا  $a_n$  و  $b_n$  هرکدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ بله چرا؟ زیرا در هر دو هر جمله از اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، پس  $a_n$  و  $b_n$  شرایط دنباله حسابی را دارند.  
اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هریک را مشخص کنید.

$$a_n \text{ قدرنسبت دنباله } = a_7 - a_1 = (2000 + 30 \times 2) - (2000 + 30 \times 1) = 2060 - 2030 = 30$$

$$b_n \text{ قدرنسبت دنباله } = b_7 - b_1 = (3000 + 20 \times 2) - (3000 + 20 \times 1) = 3040 - 3020 = 20$$

تکلیف

اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را داشته باشیم، ضریب  $n$  همان قدرنسبت خواهد بود. به عنوان نمونه، در دنباله  $a_n = 2000 + 30n$  بدون محاسبه می‌توانیم قدرنسبت را به دست آوریم که عدد ۳۰ است.

ریاضی

فصل ۱

ت) سارا در هر ماه، حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هریک از آنها کدام سیم‌کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟ سارا در هر ماه، حدود ۶۰ دقیقه مکالمه می‌کند. هزینه او را با هر دو سیم‌کارت محاسبه می‌کنیم:

$$a_{60} = 2000 + 30 \times 60 = 2000 + 1800 = 3800 \quad b_{60} = 3000 + 20 \times 60 = 3000 + 1200 = 4200$$

به سارا پیشنهاد می‌کنیم از سیم‌کارت شرکت A استفاده کند، چون برایش هزینه کمتری خواهد داشت.

حالا هزینه ۱۵۰ دقیقه مکالمه فاطمه را با هر دو سیم‌کارت محاسبه می‌کنیم:

$$a_{150} = 2000 + 30 \times 150 = 2000 + 4500 = 6500 \quad b_{150} = 3000 + 20 \times 150 = 3000 + 3000 = 6000$$

به فاطمه پیشنهاد می‌کنیم از سیم‌کارت شرکت B استفاده کند، چون برایش هزینه کمتری خواهد داشت.

مثال

صفحه ۲۳ کتاب درسی

۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ...

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.

حل: آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند.

آرتین: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_{16} = t_1 + 15d$$

$$= 4 + (15)(7)$$

$$= 109$$

آرکان: یک الگوی خطی با قدرنسبت ۷ داریم. پس:

$$t_n = 7n + b$$

$$t_1 = 7(1) + b$$

$$4 = 7 + b \Rightarrow b = -3$$

$$\rightarrow t_n = 7n - 3 \text{ جمله عمومی}$$

$$t_{16} = 7(16) - 3$$

$$t_{16} = 109$$

شما کدام روش را می‌پسندید؟ روش آرتین بهتر است، زیرا ساده‌تر و سریع‌تر به جواب رسیده است.



## کار در کلاس

صفحه ۲۳ کتاب درسی

۱ الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بنویسید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.  $4, 6, 8, 10, 12, \dots \Rightarrow d = 2$

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بنویسید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.  $19, 16, 13, 10, 7, \dots \Rightarrow d = -3$

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بنویسید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.  $5, 3, 1, -1, -3, \dots \Rightarrow d = -2$

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم.

حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = \frac{62-18}{4} = 11 \end{cases}$$

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
۱۸	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲
	+۱۱	+۱۱	+۱۱	+۱۱

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

A 

۲۰	۵۰	۸۰
----	----	----

 $\rightarrow d = 30$

B 

۲۰	۴۰	۶۰	۸۰
----	----	----	----

 $\rightarrow d = 20$

C 

۲۰	۳۵	۵۰	۶۵	۸۰
----	----	----	----	----

 $\rightarrow d = 15$

D 

۲۰	۳۲	۴۴	۵۶	۶۸	۸۰
----	----	----	----	----	----

 $\rightarrow d = 12$

E 

۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
----	----	----	----	----	----	----

 $\rightarrow d = 10$

$$A \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_3 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_1 + 2d = 80 \end{cases} \Rightarrow 20 + 2d = 80 \Rightarrow 2d = 60 \Rightarrow d = 30$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_4 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_1 + 3d = 80 \end{cases} \Rightarrow 20 + 3d = 80 \Rightarrow 3d = 60 \Rightarrow d = 20$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_5 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_1 + 4d = 80 \end{cases} \Rightarrow 20 + 4d = 80 \Rightarrow 4d = 60 \Rightarrow d = 15$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_6 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_1 + 5d = 80 \end{cases} \Rightarrow 20 + 5d = 80 \Rightarrow 5d = 60 \Rightarrow d = 12$$

$$E \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_7 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 \\ t_1 + 6d = 80 \end{cases} \Rightarrow 20 + 6d = 80 \Rightarrow 6d = 60 \Rightarrow d = 10$$



## تمرین

صفحه ۲۴ کتاب درسی

۱) از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف)  $d = 7 \Rightarrow$  دنباله حسابی است.  $\Rightarrow 3, 10, 17, 24, \dots$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_{21} = 3 + (21-1) \times 7 = 3 + 20 \times 7 = 3 + 140 = 143 \Rightarrow t_{21} = 143$$

ب) دنباله حسابی نیست.  $\Rightarrow 1, 2, 4, 8, \dots$

دقت داشته باشید که اختلاف جمله‌های متوالی، عددی ثابت نیست.

پ)  $d = \sqrt{3} \Rightarrow$  دنباله حسابی است.  $\Rightarrow \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

$$t_{21} = \sqrt{3} + (21-1)\sqrt{3} = \sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 21\sqrt{3} \Rightarrow t_{21} = 21\sqrt{3}$$

ت)  $d = -3 \Rightarrow$  دنباله حسابی است.  $\Rightarrow 10, 7, 4, 1, \dots$

$$t_{21} = 10 + (21-1) \times (-3) \Rightarrow t_{21} = 10 + (20)(-3) = 10 - 60 = -50 \Rightarrow t_{21} = -50$$

ث)  $d = \frac{1}{5} \Rightarrow$  دنباله حسابی است.  $\Rightarrow \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

$$t_{21} = \frac{2}{5} + (21-1) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + (20) \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{20}{5} = \frac{22}{5} \Rightarrow t_{21} = \frac{22}{5}$$

ج)  $d = 0 \Rightarrow$  دنباله حسابی است (این دنباله ثابت است).  $\Rightarrow 2, 2, 2, 2, \dots$

۲) در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$\begin{cases} t_3 = 20 \\ t_7 = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 20 \\ t_1 + 6d = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{t_1} + 2d = 20 \\ \cancel{t_1} + 6d = 56 \end{cases}$$

$$4d = 36 \Rightarrow d = 9$$

$$t_1 + 2d = 20 \xrightarrow{d=9} t_1 + 2(9) = 20 \Rightarrow t_1 + 18 = 20 \Rightarrow t_1 = 2$$

پس جمله اول ۲ و قدرنسبت ۹ است، یعنی جملات ۲ تا ۹ تا اضافه می‌شوند. پس داریم:

$$2, 11, 20, 29, 38, \dots$$

۳) در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

اگر ۶ جمله اول این دنباله حسابی به صورت مقابل باشند:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$$

$$\begin{cases} a + (a+d) + (a+2d) = 3 \\ (a+3d) + (a+4d) + (a+5d) = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{3a} + 3d = 3 \\ \cancel{3a} + 12d = 39 \end{cases}$$

$$9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

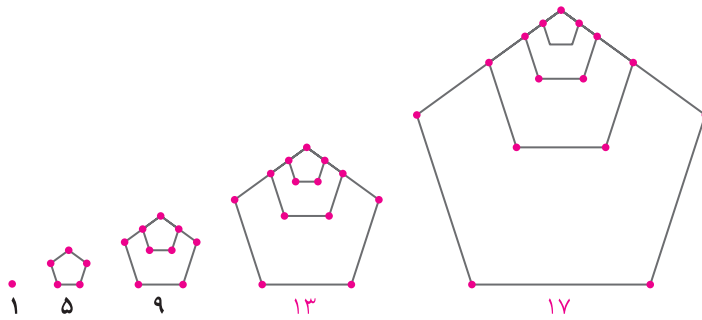
$$3a + 3d = 3 \xrightarrow{d=4} 3a + 3(4) = 3 \Rightarrow 3a + 12 = 3 \Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

$$-3, 1, 5, 9, 13, 17, \dots$$

بنابراین، دنباله به صورت روبه‌رو خواهد بود:



۴ الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



دنباله حسابی با جمله اول  $t_1 = 1$  و قدرنسبت  $d = 4$  است.

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.  $t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 1 + (n-1) \times 4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3 \Rightarrow t_n = 4n - 3$

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟ کافی است  $t_n$  را مساوی ۳۹۷ قرار دهیم:

$$t_n = 4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 397 + 3 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100 \Rightarrow \text{جمله صدم}$$

ریاضی

فصل ۱

$$\frac{5+11}{2} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow 5, \boxed{8}, 11$$

۵ الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

تکمه

اگر بخواهیم واسطه حسابی بین دو عدد را به دست آوریم، کافی است میانگین آن دو عدد را حساب کنیم. در این صورت، آن دو عدد به همراه میانگین، تشکیل دنباله حسابی خواهند داد.

$$\frac{20+30}{2} = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow 20, \boxed{25}, 30$$

ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ واسطه حسابی بین دو عدد، همان میانگین آنها است و با آن دو عدد، دنباله حسابی تشکیل می‌دهند.

۶ مسئله زیر در پاپیروس رابند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

اگر سهم نفر اول (کوچک‌ترین سهم)  $a$ ، سهم نفر دوم  $a+d$ ، سهم نفر سوم  $a+2d$ ، سهم نفر چهارم  $a+3d$  و نفر پنجم  $a+4d$  باشد، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 5a + 10d = 100 \xrightarrow{\div 5} a + 2d = 20 \quad (1)$$

همچنین طبق توضیحات سؤال، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a+4d+a+3d+a+2d}{3} = a+a+d \Rightarrow \frac{3a+9d}{3} = 2a+d \Rightarrow 3a+9d = 6a+3d \Rightarrow a = 2d \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2d + 2d = 20 \Rightarrow 4d = 20 \Rightarrow d = 5 \xrightarrow{(2)} a = 2d = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow a = 10$$

نفر پنجم نفر چهارم نفر سوم نفر دوم نفر اول

۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
----	----	----	----	----

در نتیجه، سهم‌ها عبارت‌اند از:



## فعالیت

صفحه ۲۵ کتاب درسی

$n$ : روز	$t_n$ : تعداد افراد جدیدی که در روز $n$ ام مبتلا می‌شوند
۱	(امید و محسن) ۲
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 = 2^4$
۵	$16 \times 2 = 2^5$
۶	$32 \times 2 = 2^6$
$\vdots$	$\vdots$
$n$	$t_n = 2^n$

۱) جدول مقابل را کامل کنید و  $t_n$  را بیابید.

۲) در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

در روز دهم، ۱۰۲۴ فرد جدید مبتلا می‌شوند.

$$t_{10} = 2^{10} = 1024$$

۳) در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

$$t_{11} = 2^{11} = 2 \times 2^{10} = 2 \times 1024 = 2048$$

در روز یازدهم، ۲۰۴۸ شخص جدید مبتلا می‌شوند.

۴) در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

تعداد افراد جدیدی که در روز  $n$  ام مبتلا می‌شوند، برابر است با  $2^n$ ،

$$2^n = 16384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14$$

بنابراین:

پس در روز چهاردهم، تعداد افراد جدیدی که به بیماری مبتلا می‌شوند،

برابر ۱۶۳۸۴ نفر است.

صفحه ۲۵ کتاب درسی

## فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$\dots$	$t_n$	$\dots$
$t_1$	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	$\dots$	$t_1 r^{n-1}$	$\dots$

صفحه ۲۶ کتاب درسی

## کار در کلاس

۱) نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ۹، ۳، ۱، ... روش‌های

مقابل را به کار برده‌اند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید. نگار درست حل کرده

است، زیرا برای به دست آوردن قدرنسبت دنباله هندسی، باید جمله دوم را بر جمله

اول تقسیم کرد، ولی نرگس برعکس این کار را انجام داده است. یعنی به اشتباه،

جمله اول را بر جمله دوم تقسیم کرده است.

۲) در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف)  $a_1$  ۲، ۶، ۱۸، ۵۴،  $\boxed{162}$ ،  $\boxed{486}$ ،  $\dots$ ،  $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

ب)  $b_1$  ۵، ۱۰، ۲۰، ۴۰،  $\boxed{80}$ ،  $\boxed{160}$ ،  $\dots$ ،  $b_n = b_1 r^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$



پ)  $c_1, -60, 600, -6000, \boxed{60000}, \boxed{-600000}, \dots, c_n = c_1 r^{n-1} = 6 \times (-10)^{n-1}$

$\times(-10) \quad \times(-10) \quad \times(-10) \quad \times(-10) \quad \times(-10)$

ت)  $d_1, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots, d_n = d_1 r^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$

الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4 \end{cases}$$

$$r = 4 \rightarrow \boxed{3} \quad \boxed{12} \quad \boxed{48}$$

$$r = -4 \rightarrow \boxed{3} \quad \boxed{-12} \quad \boxed{48}$$

پس به جز عدد ۱۲، عدد ۱۲- هم واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است.

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر، مسئله دارای ۲ جواب است.

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_5 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_1 r^4 = 48 \end{cases} \Rightarrow 3r^4 = 48 \Rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

پس ۲ دسته جواب وجود دارد.

$$\begin{cases} r = 2 \rightarrow \boxed{3} \quad \boxed{6} \quad \boxed{12} \quad \boxed{24} \quad \boxed{48} \\ r = -2 \rightarrow \boxed{3} \quad \boxed{-6} \quad \boxed{12} \quad \boxed{-24} \quad \boxed{48} \end{cases}$$

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$$\begin{cases} t_1 = 10 \\ t_3 = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_1 r^2 = 4000 \end{cases} \Rightarrow 10r^2 = 4000 \Rightarrow r^2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} r = 20 \\ r = -20 \end{cases}$$

$$r = 20 \rightarrow \boxed{10} \quad \boxed{200} \quad \boxed{4000}$$

$$r = -20 \rightarrow \boxed{10} \quad \boxed{-200} \quad \boxed{4000}$$

$$\begin{cases} t_1 = 10 \\ t_6 = 80000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_1 r^5 = 80000 \end{cases} \Rightarrow 10r^5 = 80000 \Rightarrow r^5 = 8000 \Rightarrow r = 20$$

$$\boxed{10} \quad \boxed{200} \quad \boxed{4000} \quad \boxed{80000}$$

$$\begin{cases} t_1 = 4 \\ t_8 = 972 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_1 r^7 = 972 \end{cases} \Rightarrow 4r^7 = 972 \Rightarrow r^7 = \frac{972}{4} = 243 = 3^5 \Rightarrow r = 3$$

$$\boxed{4} \quad \boxed{12} \quad \boxed{36} \quad \boxed{108} \quad \boxed{324} \quad \boxed{972}$$



## تمرین

صفحه ۲۷ کتاب درسی

۱) از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید.

الف)  $7, 28, 112, 448, \dots \Rightarrow r = 4$  دنباله هندسی است.  $\Rightarrow$

$$\begin{matrix} \times 4 & \times 4 & \times 4 \end{matrix}$$

ب)  $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots \Rightarrow$  دنباله هندسی نیست.

زیرا جمله‌ها از ضرب جمله قبل از خود در یک مقدار ثابت به دست نمی‌آیند. (لازم به ذکر است که دنباله حسابی با قدرنسبت  $d = 2\sqrt{5}$  است).

پ)  $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$  دنباله هندسی است.  $\Rightarrow$

$$\begin{matrix} \times (-\frac{1}{2}) & \times (-\frac{1}{2}) & \times (-\frac{1}{2}) \end{matrix}$$

همچنین دنباله حسابی با قدرنسبت  $d = 0$  نیز است.  $r = 1 \Rightarrow$  دنباله هندسی است.  $\Rightarrow$

$$\begin{matrix} \times 1 & \times 1 & \times 1 \end{matrix}$$

۲) چند دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{4}{5}$  می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \frac{64}{125}, \dots \\ 2, \frac{8}{5}, \frac{32}{25}, \frac{128}{125}, \dots \end{array} \right.$$

بی‌شمار، زیرا ما می‌توانیم جمله اول را هر عدد دلخواهی در نظر بگیریم. مثلاً:

۳) درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. نادرست است. زیرا مثلاً دنباله  $1, 4, 9, 16, \dots$  که جمله عمومی آن  $t_n = n^2$  است، نه حسابی است و نه هندسی. یعنی نه به جملات آن مقدار ثابتی اضافه می‌شود و نه جملات آن در عدد ثابتی ضرب می‌شوند.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی. نادرست است. زیرا مثلاً دنباله  $5, 5, 5, \dots$  یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d = 0$  است، یعنی به همه جملات، مقدار ثابت صفر اضافه می‌شود و همچنین این دنباله، یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $r = 1$  است، یعنی همه جملات در عدد ثابت ۱ ضرب می‌شوند.

۴) علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

وقتی قیمت دوچرخه ۲۰٪ کاهش می‌یابد، یعنی در سال جدید ۸۰٪ ارزش سال قبل را دارد. پس برای به دست آوردن قیمت در سال‌های بعد، باید جمله‌ها را در عدد  $\frac{80}{100}$  یا  $\frac{4}{5}$  ضرب کنیم.

$$\begin{array}{ccccccc} 500000 & \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} & 400000 & \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} & 320000 & \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} & 256000 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{پس از یک سال} & & \text{پس از دو سال} & & \text{پس از سه سال} \end{array}$$

بنابراین پس از ۳ سال، علی دوچرخه را به قیمت ۲۵۶۰۰۰ تومان می‌تواند بفروشد.

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت  $n$  سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قیمت پس از } n \text{ سال } t_1 = 400000 \\ \text{قدرنسبت } r = \frac{4}{5} \end{array} \right. \Rightarrow t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = 400000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

## ریاضی

فصل ۱





۲, ۴, ۸, ...

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

$$۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, \dots \Rightarrow \text{جمله اول } ۲^۰ = ۱ \Rightarrow \text{حاصل ضرب } ۲^۰ \times ۲^۱ \times ۲^۲ \times \dots \times ۲^{۱۹} = ۲^{۱+۲+۳+\dots+۱۹}$$

نکته

برای به دست آوردن حاصل جمع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$ ، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۰ = \frac{۲۰(۲۰+۱)}{۲} = \frac{۲۰ \times ۲۱}{۲} = ۲۱۰$$

پس حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی داده شده، برابر است با:

$$۲^{۱+۲+۳+\dots+۲۰} = ۲^{۲۱۰}$$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_3 = ۱۲ \\ t_6 = ۹۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 r^2 = ۱۲ \\ t_1 r^5 = ۹۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{t_1 r^2}{t_1 r^5} = \frac{۱۲}{۹۶} \Rightarrow \frac{۱}{r^3} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r^3 = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

$$\Rightarrow t_1 r^2 = ۱۲ \xrightarrow{r=۲} t_1 \times ۲^2 = ۱۲ \Rightarrow t_1 \times ۴ = ۱۲ \Rightarrow t_1 = ۳$$

$$\Rightarrow ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, \dots$$

ریاضی

فصل ۱

۷ بنابر آمار منتشرشده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر

در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۳	۱۲۱۹۱

$$\begin{array}{ccccccc} \times ۰/۹۵ & \times ۰/۹۵ & \times ۰/۹۵ & \times ۰/۹۵ & \times ۰/۹۵ & \times ۰/۹۵ & \times ۰/۹۵ \end{array}$$

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

دنباله هندسی، زیرا هر جمله از حاصل ضرب جمله قبل در مقدار ثابت ۰/۹۵ به دست می‌آید.



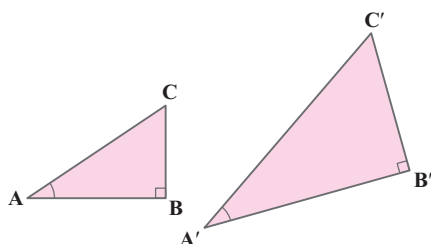
## فصل ۲: مثلثات

### درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

صفحه ۳۰ کتاب درسی

کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $A'B'C'$ ،  $\hat{A} = \hat{A}'$ ، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$  (چرا؟).

می‌دانیم اگر طرفین یک تساوی را در یک عبارت یکسان ضرب کنیم، باز هم تساوی برقرار خواهد بود. بنابراین:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \xrightarrow{\times \left(\frac{A'B'}{AC}\right)} \frac{AC}{A'C'} \times \frac{A'B'}{AC} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{A'B'}{AC} \Rightarrow \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

نتیجه

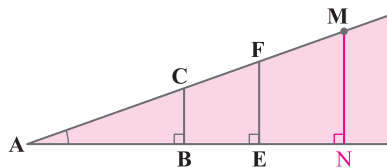
اگر زاویه  $A$  از مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  با زاویه  $A'$  از مثلث قائم‌الزاویه  $A'B'C'$  (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

صفحه ۳۰ کتاب درسی

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی  $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$  را بررسی کنید.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ (مشترک)} \\ \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AEF \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

بنابراین تساوی داده‌شده در سؤال، درست است.

۲ نقطه دیگری مثل  $M$  را در امتداد  $AC$  در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه  $A$  رسم کنید و پای عمود را  $N$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

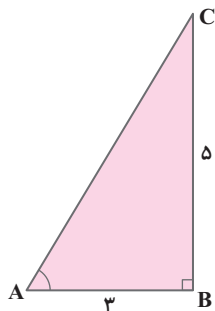
بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:



## فعالیت

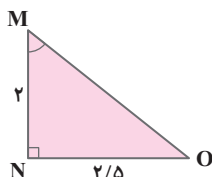
صفحه ۳۱ کتاب درسی

۱ در هریک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



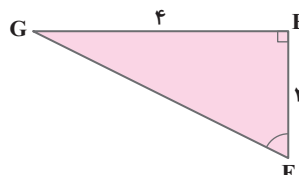
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$



$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$



$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص

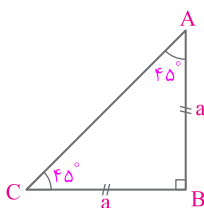
مثلث متساوی‌الساقین، AM عمود منصف BC است. بنابراین:

$$BM = MC = 1$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهایی زیر را به دست آورید.

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \Rightarrow AM^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow AM^2 + 1 = 4 \Rightarrow AM^2 = 3 \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$



پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵° را پیدا کنید.

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

اگر  $AB = BC = a$  باشد، آنگاه:

$$\cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

صفحه ۳۱ کتاب درسی

## پرسش متن

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه A می‌نامیم و آن را با

$$\cos A \text{ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

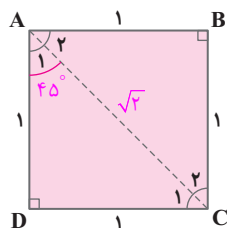
صفحه ۳۲ کتاب درسی

## مثال

خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا

یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم

کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

فربیا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم  $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$ .در نتیجه  $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  و از این‌رو  $(AC)^2 = 2$ . چون اندازه قطر همواره عددی مثبتاست، پس  $AC = \sqrt{2}$ .معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$ .



مینا: طبق تعریف سینوس،  $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{وتر} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{AD}{وتر} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

سبا: من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس  $45^\circ$  را پیدا کنم.

مریم: اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ADC، طبق تعریف داریم.  $\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$  و  $\cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ .

صفحه ۳۲ کتاب درسی

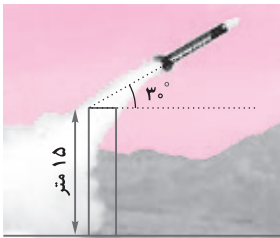
کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $3^\circ$  و  $6^\circ$ ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرهارا گویا کنید).

مقدار	$3^\circ$	$45^\circ$	$6^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

صفحه ۳۳ کتاب درسی

مثال

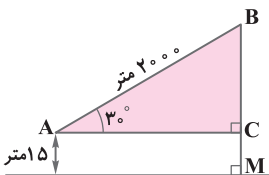


یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $3^\circ$  پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟ حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:  $BC + MC = BC + 15$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم  $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$ . پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = 1000$$

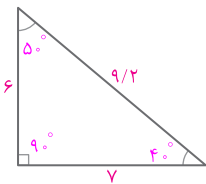
و از این رو ارتفاع موشک  $1000 + 15 = 1015$  متر



صفحه ۳۳ کتاب درسی

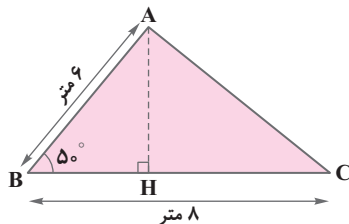
فعالیت

① یک زاویه  $5^\circ$  رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $5^\circ$  را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 5^\circ = \frac{7}{9/2} \approx 0/76 \\ \cos 5^\circ = \frac{6}{9/2} \approx 0/64 \\ \tan 5^\circ = \frac{7}{6} \approx 1/19 \\ \cot 5^\circ = \frac{6}{7} \approx 0/83 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{مقادیر واقعی} \\ \text{(ماشین حساب)} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin 5^\circ \approx 0/76 \\ \cos 5^\circ \approx 0/64 \\ \tan 5^\circ \approx 1/19 \\ \cot 5^\circ \approx 0/83 \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، مقادیر نوشته‌شده توسط ما، تقریباً با مقادیر به دست آمده توسط ماشین حساب، برابرند.



۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث ABC}$$

الف) با توجه به اینکه  $\sin 5^\circ \approx 0.087$ ، داریم:

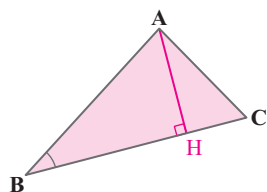
$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \approx 6 \times 0.087 = 0.522 \text{ متر}$$

ب) با توجه به قسمت الف)، داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC \approx \frac{1}{2} \times 0.522 \times 8 = 2.088 \text{ متر مربع}$$

۳ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

$$\Delta \text{ مساحت ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$



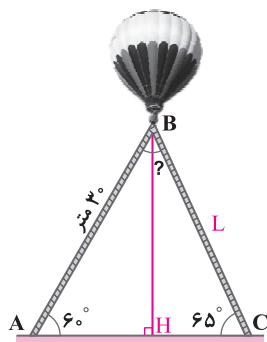
ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه AHB خواهیم داشت:

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B \quad (1)$$

$$\Delta \text{ مساحت ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times \underbrace{AB \times \sin B}_{(1)} \times BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

صفحه ۳۴ کتاب درسی

کار در کلاس



۱ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است.

طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

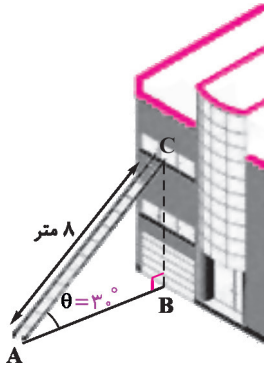
$$\hat{B} + 6^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + 71^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 109^\circ$$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

$$\sin \hat{A} = \sin 6^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3} \times 30}{2} = 15\sqrt{3} \approx 15 \times 1.732 = 25.98 \text{ متر}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه C، طول طناب دوم را پیدا کنید. ( $\sin 65^\circ \approx 0.9$ )

$$\sin 65^\circ = \frac{BH}{L} \approx 0.9 \Rightarrow L \approx \frac{25.98}{0.9} \approx 28.87 \text{ متر}$$



۲) مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین  $\theta = 30^\circ$  باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4 \text{ متر}$$

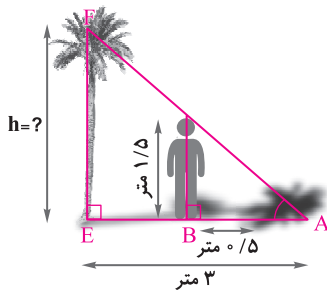
اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \text{ متر}$$

صفحه ۳۴ و ۳۵ کتاب درسی

تمرین



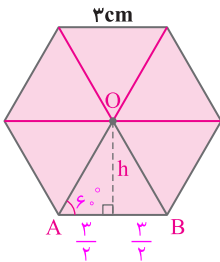
۱) علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۵/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ \\ \hat{F} = \hat{F} = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AEF \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{1/5}{5/5}$$

$$\Rightarrow h = \frac{3 \times 1/5}{5/5} = 9 \text{ متر}$$

۲) مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.

ابتدا مساحت مثلث متساوی الاضلاع OAB را به دست می‌آوریم. سپس حاصل را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم.



$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{\frac{3}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\triangle OAB \text{ مساحت} = \frac{1}{2} \times h \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

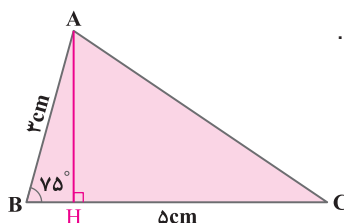
$$\text{مساحت شش ضلعی} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{54\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

۳) یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود  $13^\circ$  باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.

$$\tan 13^\circ \approx 0/23$$



پس هواپیما تقریباً در فاصله  $8/69$  کیلومتری از نقطه A فرود می‌آید.  $\tan 13^\circ = \frac{2}{x} \Rightarrow 0/23 \approx \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{0/23} \approx 8/69 \text{ km}$



۴) فرض کنید  $\sin 75^\circ \approx 0.96$ . مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

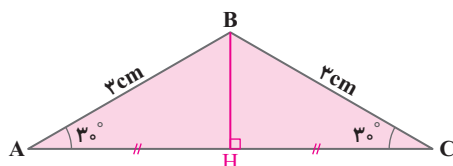
روش اول:  $\sin 75^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow 0.96 = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH \approx 0.96 \times 3 = 2.88 \text{ cm}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2.88 \times 5 = 7.2 \text{ cm}^2$$

روش دوم: با توجه به اینکه اندازه دو ضلع از مثلث و زاویه بین آنها را داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 75^\circ \approx \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 0.96 = 7.2 \text{ cm}^2$$

۵) مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



با توجه به اینکه:  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  و  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

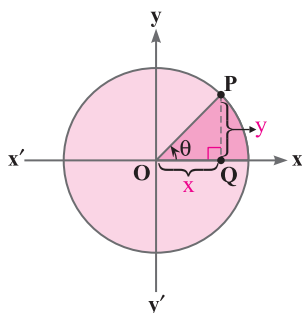
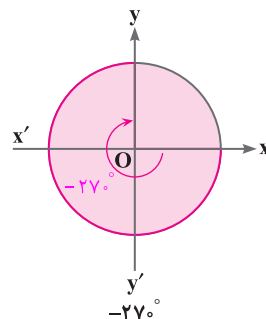
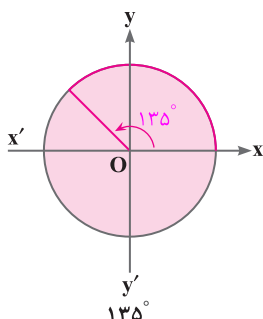
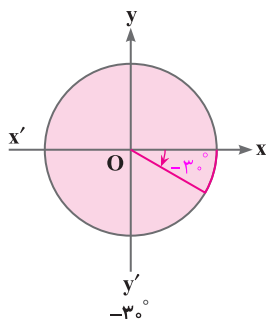
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

### درس دوم: دایره مثلثاتی

#### فعالیت

صفحه ۳۶ و ۳۷ کتاب درسی

۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.

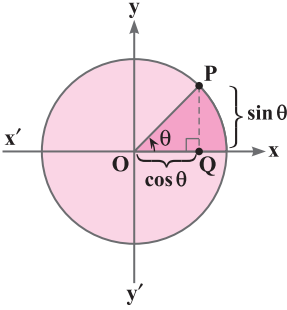


۲) فرض کنید  $P(x, y)$  نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبه‌رو باشد و  $\theta$  زاویه‌ای است که نیم خط  $\vec{OP}$  با محور  $\vec{Ox}$  می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور  $\vec{Ox}$  عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.

الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$$OP = 1 = \text{شعاع دایره مثلثاتی}$$

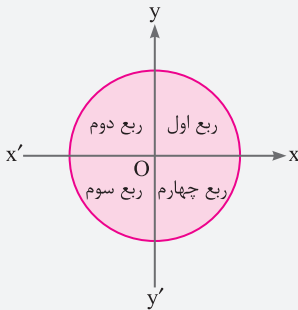
$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$



ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصله  $Q$  تا مبدأ با  $\cos \theta$  برابر است و فاصله نقطه  $P$  تا پای عمود، یعنی نقطه  $Q$  با  $\sin \theta$  برابر است.

با توجه به قسمت (ب) محور  $x'Ox$  محور  $x$  ها را محور کسینوس ها و محور  $y'Oy$  یا محور  $y$  ها را محور سینوس ها می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط  $OP$  با قسمت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $\theta$  می‌سازد، آنگاه  $P$  نقطه‌ای با مختصات  $(x, y)$  است که در آن  $x = \cos \theta$  و  $y = \sin \theta$ .

### نکته



۱- دو محور عمود برهم  $x'Ox$  و  $y'Oy$  صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هریک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه  $xOy$  را ربع اول، ناحیه  $x'Oy$  را ربع دوم، ناحیه  $x'Oy'$  را ربع سوم و ناحیه  $xOy'$  را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

۲- زاویه‌های  $0^\circ$ ،  $90^\circ$ ،  $180^\circ$  و  $270^\circ$  و  $360^\circ$  زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

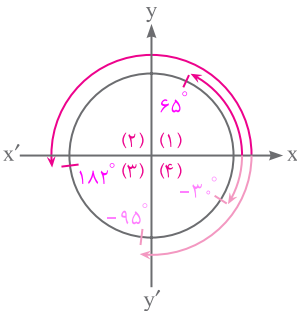
### ریاضی

فصل ۲

صفحه ۳۷ کتاب درسی

### کار در کلاس

۱) مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی



چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف)  $-3^\circ$ : ربع چهارم

ب)  $65^\circ$ : ربع اول

پ)  $182^\circ$ : ربع سوم

ت)  $-95^\circ$ : ربع سوم

۲) با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟ در ربع اول،  $x$  و  $y$  هر دو مثبت هستند ( $y > 0$ ،  $x > 0$ ). بنابراین:

$$\sin \theta = y > 0 \Rightarrow \sin \theta > 0, \cos \theta = x > 0 \Rightarrow \cos \theta > 0, \tan \theta = \frac{y}{x} > 0 \Rightarrow \tan \theta > 0, \cot \theta = \frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \cot \theta > 0.$$

صفحه ۳۷ کتاب درسی

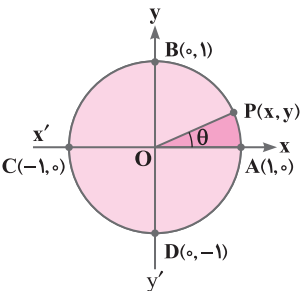
### مثال

می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $^\circ$  را به دست آوریم. می‌دانیم در دایره مثلثاتی روبه‌رو،

$\sin \theta = y$  و  $\cos \theta = x$ . اگر  $\theta = 0^\circ$ ، آنگاه نقطه  $P$  روی نقطه  $A$  قرار می‌گیرد و داریم

$\sin 0^\circ = 0$ ، همچنین  $\cos 0^\circ = 1$  و  $\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$ ، اما  $\cot 0^\circ$  تعریف نمی‌شود (چرا؟).

صفر در مخرج کسر نمی‌تواند قرار بگیرد. تعریف نشده  $\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ .

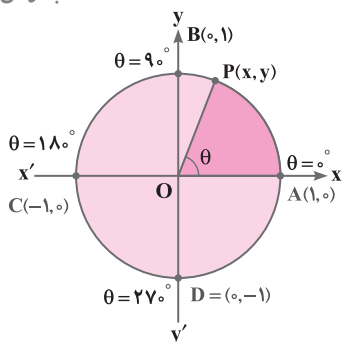






## فعالیت

صفحه ۳۸ کتاب درسی



۱ در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر  $\theta = 90^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

اگر  $\theta = 90^\circ$ ، آنگاه  $P$  روی نقطه  $B(0, 1)$  قرار می‌گیرد. پس  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ، بنابراین:

$$\sin 90^\circ = y = 1, \quad \cos 90^\circ = x = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \text{تعریف نشده}, \quad \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

۲ اگر  $\theta = 180^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

اگر  $\theta = 180^\circ$  باشد، آنگاه  $P$  روی نقطه  $C(-1, 0)$  قرار می‌گیرد. پس  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ ، بنابراین:

$$\sin 180^\circ = y = 0, \quad \cos 180^\circ = x = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0, \quad \cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{تعریف نشده}$$

۳ اگر  $\theta = 270^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

اگر  $\theta = 270^\circ$  باشد، آنگاه  $P$  روی نقطه  $D(0, -1)$  قرار می‌گیرد. پس  $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ ، بنابراین:

$$\sin 270^\circ = y = -1, \quad \cos 270^\circ = x = 0, \quad \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \text{تعریف نشده}, \quad \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

## ریاضی

فصل ۲

## کار در کلاس

صفحه ۳۸ کتاب درسی

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

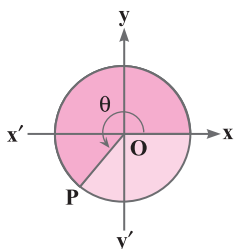
مقدار	$^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \theta$	$^\circ$	۱	$^\circ$	-۱	$^\circ$
$\cos \theta$	۱	$^\circ$	-۱	$^\circ$	۱
$\tan \theta$	$^\circ$	تعریف نشده	$^\circ$	تعریف نشده	$^\circ$
$\cot \theta$	تعریف نشده	$^\circ$	تعریف نشده	$^\circ$	تعریف نشده

## فعالیت

صفحه ۳۸ کتاب درسی

۱ فرض کنید  $\theta$  زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه  $y = \sin \theta$  و  $x = \cos \theta$  و در ربع سوم،  $x, y < 0$ ، علامت

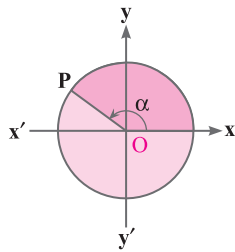
هر یک از نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را در ربع سوم مشخص کنید.



$$\sin \theta = y < 0 \Rightarrow \sin \theta < 0, \quad \cos \theta = x < 0 \Rightarrow \cos \theta < 0$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \xrightarrow{\text{منفی} / \text{منفی}} > 0 \Rightarrow \tan \theta > 0, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} \xrightarrow{\text{منفی} / \text{منفی}} > 0 \Rightarrow \cot \theta > 0$$

پس در ربع سوم، سینوس و کسینوس منفی و تانژانت و کتانژانت مثبت هستند.



۲) فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای  $\alpha$  نیز تکرار کنید.  
در ربع دوم،  $x < 0$  و  $y > 0$  مثبت است. بنابراین:

$$\sin \alpha = y > 0 \Rightarrow \sin \alpha > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} < 0 \Rightarrow \cot \alpha < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \text{مثبت} < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0, \quad \cos \alpha = x < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

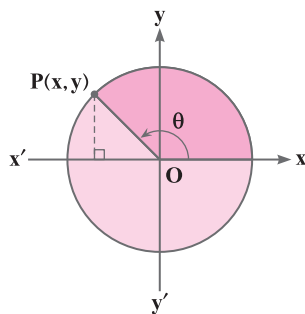
پس در ربع دوم، سینوس مثبت و کسینوس، تانژانت و کتانژانت منفی هستند.

۳) جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

صفحه ۳۹ کتاب درسی

مثال



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید: اگر  $\theta$  زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و

$$\sin \theta = \frac{5}{y}$$

آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کرد؟  
امین: می‌دانیم  $\sin \theta = y = \frac{5}{y}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض  $\frac{5}{y}$  است.

معلم: درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم:  $x^2 + y^2 = 1$ . بنابراین

$$x^2 + \left(\frac{5}{y}\right)^2 = 1 \quad \text{و در نتیجه} \quad x^2 = \frac{24}{49} \quad \text{پس داریم:} \quad x = \pm \sqrt{\frac{24}{49}} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

معلم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

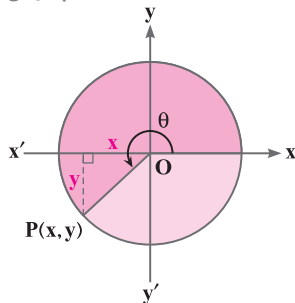
محمد مهدی: چون  $\theta$  زاویه‌ای در ربع دوم است، پس طول نقطه P منفی است و از این رو  $x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$  قابل قبول است.

معلم: استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و P نقطه‌ای به مختصات  $(-\frac{2\sqrt{6}}{7}, \frac{5}{7})$  است. در نتیجه:

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-2\sqrt{6}}, \quad \cos \theta = x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

صفحه ۳۹ کتاب درسی

فعالیت



۱) فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که  $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ .

می‌دانیم  $\theta$  در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین  $y = \sin \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ .

الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.

$$P(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$



(ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

(۲) اگر  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که  $\alpha$  در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

با توجه به اینکه  $\cos \alpha = x < 0$  و  $x$  در ربع‌های دوم و سوم منفی است، پس  $\alpha$  در ربع دوم یا سوم قرار دارد.

(۳) زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

ربع چهارم  $\Rightarrow y < 0, \sin \theta < 0 \Rightarrow y < 0$ ,  $\cos \theta > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x > 0, y < 0 \Rightarrow$

$$\theta = 300^\circ, 330^\circ, \dots$$

در نتیجه زاویه موردنظر باید در ربع چهارم ( $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ) قرار داشته باشد. مانند:

صفحه ۴۰ کتاب درسی

### فعالیت

نمودار خط  $y = 2x - 4$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه  $B$  و  $C$  روی

این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور  $x$  ها عمود کنید. پای عمودها را

به ترتیب  $E$  و  $F$  بنامید.

$$\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{2}{1} = 2$$

الف) تانژانت زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$B(3, 2), C(5, 6)$$

(ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6 - 2}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2$$

(پ) از مقایسه قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

در واقع، اگر خطی با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $\alpha$  بسازد، شیب این خط با  $\tan \alpha$  برابر خواهد بود.



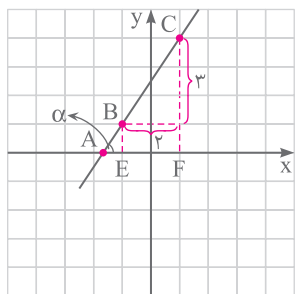
شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

صفحه ۴۰ کتاب درسی

### کار در کلاس

$$2y - 3x = 5 \quad \text{الف)}$$



$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

(۱) مراحل فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ y & 1 & 4 \end{array} \Rightarrow B(-1, 1) \text{ و } C(1, 4)$$

دو نقطه روی خط  $A$  را محاسبه می‌کنیم.

$$2y - 3x = 5 \xrightarrow{y=0} -3x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \Rightarrow A(-\frac{5}{3}, 0)$$

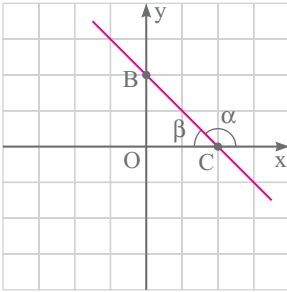
$$\Rightarrow AE = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 1}{1 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، داریم:

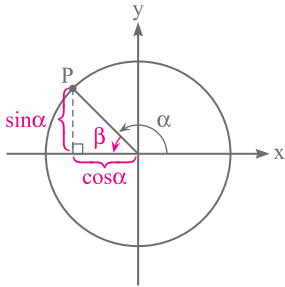


ب)  $x + y = 2$



$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array} \right. \Rightarrow B(0, 2) \text{ و } C(2, 0) \text{ دو نقطه روی خط}$$

توجه داشته باشید که  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، بنابراین  $\alpha$  در ربع دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد و در نتیجه  $\tan \alpha < 0$  خواهد بود. همچنین با توجه به شکل زیر، مقدار  $\tan \alpha$  برابر با تانژانت زاویه مکمل آن ( $\tan \beta$ ) در مثلث قائم‌الزاویه است.



$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \alpha = \tan \beta$$

بنابراین مقدار عددی  $\tan \alpha$  (بدون در نظر گرفتن علامت)، با مقدار عددی  $\tan \beta$  برابر خواهد بود. یعنی:

$$\tan \beta = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{2} = 1 \xrightarrow{\tan \alpha < 0} \tan \alpha = -1$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\tan \alpha = \text{شیب خط}$$

همان‌طور که که دیده می‌شود، داریم:

۲) معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور  $x$  ها  $30^\circ$  است و از نقطه  $(1, 0)$  می‌گذرد.

$$\tan \alpha = \text{شیب خط} \Rightarrow a = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{\text{جایگذاری } (1, 0)} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

تمرین صفحه ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی

۱) هریک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف)  $270^\circ$

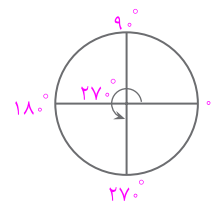
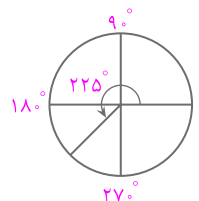
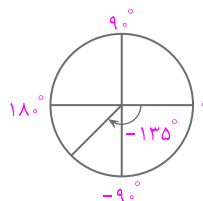
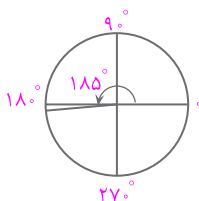
ب)  $225^\circ$

ج)  $185^\circ$

د)  $-135^\circ$

ه) ربع سوم

مرکز ربع‌های سوم و چهارم





۲) در هریک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف)  $\cos \alpha = \frac{3}{y}$  (در ربع چهارم)

$$x = \cos \alpha = \frac{3}{y}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{y}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{y^2} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{49} \Rightarrow y = \pm \frac{2}{7}$$

در ربع چهارم  $y$  منفی است.  $y = -\frac{2}{7}$

$$\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{10}}{7} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-2\sqrt{10}}{7}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{-7}} = \frac{-2\sqrt{10}}{3}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{3}{-7}}{\frac{-2\sqrt{10}}{7}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

گویا کردن مخرج  $\frac{3}{2\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$

ب)  $\sin \beta = \frac{-1}{y}$  (در ربع سوم)

$$y = \sin \beta = \frac{-1}{y}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{-1}{y}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{y^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

در ربع سوم  $x$  منفی است.  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3}$$

گویا کردن مخرج  $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ریاضی

فصل ۲

۳) اگر  $\tan \theta$  و  $\sin \theta$  هم علامت باشند، آنگاه  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در ربع اول  $\tan \theta$  و  $\sin \theta$  هر دو مثبت هستند.  $\Rightarrow$  پس  $\theta$  در ربع اول یا در ربع چهارم قرار دارد.

در ربع چهارم  $\tan \theta$  و  $\sin \theta$  هر دو منفی هستند.

۴) حدود زاویه  $\theta$  را در هریک از حالات زیر مشخص کنید.

الف)  $\cos \theta > 0$ ,  $\sin \theta > 0$ : در ربع اول، سینوس و کسینوس هر دو مثبت هستند، پس:

ب)  $\cos \theta > 0$ ,  $\sin \theta < 0$ : در ربع چهارم، سینوس منفی و کسینوس مثبت است، پس:

۵) اگر  $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه  $\alpha$  در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

با توجه به این شرط سینوس و کسینوس غیر هم علامت هستند. دو حالت وجود دارد:

حالت اول: سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد، یعنی:  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha < 0$  که در این حالت،  $\alpha$  در ربع دوم قرار می‌گیرد.

حالت دوم: سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد، یعنی:  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$  که در این حالت،  $\alpha$  در ربع چهارم قرار می‌گیرد.

بنابراین  $\alpha$  می‌تواند در ربع‌های دوم یا چهارم باشد.

۶) زاویه‌ای مثل  $\alpha$  پیدا کنید به طوری که  $\tan \alpha > \cot \alpha$ .

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \cot \alpha = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha > \cot \alpha \end{cases}$$

اکنون زاویه‌ای مثل  $\beta$  پیدا کنید، به طوری که  $\cot \beta > \tan \beta$ .

$$\beta = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \tan \beta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot \beta = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot \beta > \tan \beta \end{cases}$$

از این تمرین، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توجه داشته باشید که  $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$ .

اگر  $\theta$  زاویه‌ای بزرگ‌تر از  $45^\circ$  (بین  $45^\circ$  و  $90^\circ$ ) باشد، آنگاه  $\tan \theta > \cot \theta$  خواهد بود. مانند:

اگر  $\theta$  زاویه‌ای کوچک‌تر از  $45^\circ$  (بین صفر درجه و  $45^\circ$ ) باشد، آنگاه  $\cot \theta > \tan \theta$  خواهد بود. مانند:



۷ در تمرین ۶ به جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.

زاویه‌ای مثل  $\alpha$  پیدا کنید به طوری که  $\sin \alpha > \cos \alpha$ :

$$\alpha = 6^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \alpha = \cos 6^\circ = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha > \cos \alpha$$

اکنون زاویه‌ای مثل  $\beta$  پیدا کنید به طوری که  $\cos \beta > \sin \beta$ :

$$\beta = 3^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \sin 3^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos \beta = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \beta > \sin \beta$$

نتیجه: توجه داشته باشید که  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

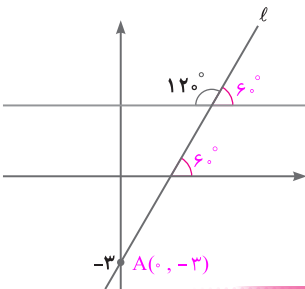
اگر  $\theta$  زاویه‌ای بزرگ‌تر از  $45^\circ$  (بین  $45^\circ$  و  $90^\circ$ ) باشد، آنگاه  $\sin \theta > \cos \theta$  خواهد بود.

اگر  $\theta$  زاویه‌ای کوچک‌تر از  $45^\circ$  (بین صفر درجه و  $45^\circ$ ) باشد، آنگاه  $\cos \theta > \sin \theta$  خواهد بود.

۸ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور  $x$  ها  $45^\circ$  است و نقطه  $(0, 2)$  روی آن قرار دارد.

$$y = ax + b \Rightarrow y = \tan 45^\circ x + b \Rightarrow y = x + b \xrightarrow{\text{جایگذاری } (0, 2)} 2 = 0 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = x + 2$$

۹ با توجه به شکل زیر، معادله خط  $\ell$  را به دست آورید.



$$(a) \text{ شیب خط } = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad A = (0, -3)$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{\text{جایگذاری } A(0, -3)} -3 = \sqrt{3} \cdot 0 + b \Rightarrow -3 = b$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

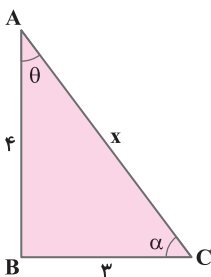
## فعالیت

صفحه ۴۲ کتاب درسی

مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  را در نظر بگیرید.

الف) اندازه وتر یعنی  $x$  را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه  $\theta$  و  $\alpha$  به دست آورید.

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = 5$$



$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$



ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف)، مقدار  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$  و  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

پ) درستی رابطه  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

ت) مشابه قسمت (پ)، درستی رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  را بررسی کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

**نکته**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

برای هر زاویه دلخواه  $\alpha$  همواره داریم:

ریاضی

فصل ۲

صفحه ۴۳ کتاب درسی

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  جاهای خالی را پر کنید:

الف)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

ب)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

**تذکره**

در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه  $\alpha$ ، با توجه به ناحیه‌ای که زاویه  $\alpha$  در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

صفحه ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی

کار در کلاس

در این قسمت، رابطه‌ای برای تانژانت برحسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$



۳ اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1 = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

ربع دوم:  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$   
در این ربع، کسینوس منفی است.

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

در ربع دوم:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \rightarrow \sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}$$

کار در کلاس ..... صفحه ۴۴ و ۴۵ کتاب درسی

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف)  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

اتحاد مزدوج

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \text{طرف راست}$$

ب)  $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

طرف چپ

$$\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} + \cot \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \text{طرف راست}$$

۲ کدام یک از تساوی‌های زیر، یک اتحاد است؟ چرا؟

الف)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 \Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow \text{تساوی (ب) یک اتحاد است.}$$

دقت داشته باشید که اگر  $\alpha = 30^\circ$  باشد، تساوی (الف)، برقرار نیست:

$$\left. \begin{aligned} \sin^4 30^\circ + \cos^4 30^\circ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \\ 1 - 2 \sin^2 30^\circ \times \cos^2 30^\circ &= 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{5}{8} \neq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳ با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  در  $\cot \alpha$  یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

$$\cot \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = \cot \alpha \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \Rightarrow \cot \alpha + \cot \alpha \cdot \tan^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha + \underbrace{\cot \alpha \cdot \tan^2 \alpha}_{\tan \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad (\text{اتحاد مورد نظر})$$

درستی اتحاد به دست آمده را ثابت می‌کنیم:

$$\text{طرف راست} = \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \times \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$





## تمرین

صفحه ۴۵ و ۴۶ کتاب درسی

۱) فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \xrightarrow[\text{سینوس مثبت است.}]{\text{در ناحیه دوم}} \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

۲) اگر  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \xrightarrow[\text{سینوس منفی است.}]{\text{در ناحیه چهارم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow[\text{کسینوس مثبت است.}]{\text{در ناحیه چهارم}} \cos \alpha = +\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

دقت کنید که می‌توانستیم برای محاسبه کسینوس، از رابطه  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$  نیز استفاده کنیم.

۳) اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را به دست آورید. زاویه  $135^\circ$  در ربع دوم قرار دارد.

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \xrightarrow[\text{در ربع دوم کسینوس منفی است.}]{\text{در ربع دوم کسینوس منفی است.}} \cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{2}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow[\text{گویا کردن مخرج}]{\text{گویا کردن مخرج}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \Rightarrow \tan 135^\circ = -1, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \cot 135^\circ = -1$$

۴) اگر  $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $24^\circ$  را به دست آورید. زاویه  $24^\circ$  در ربع سوم قرار دارد.

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow[\text{گویا کردن مخرج}]{\text{گویا کردن مخرج}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

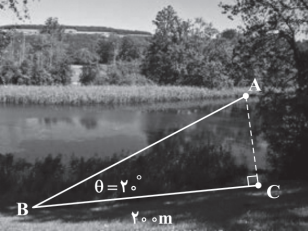
$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + \frac{3}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \xrightarrow[\text{منفی است.}]{\text{در ربع سوم سینوس منفی است.}} \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\xrightarrow[\text{کسینوس منفی است.}]{\text{در ربع سوم}} \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

دقت کنید می‌توانستیم برای محاسبه کسینوس، از رابطه  $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$  نیز استفاده کنیم.



۵ شخصی می‌خواهد عرض رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)،  $2^\circ$  باشد و  $\sin 2^\circ \approx 0/34$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.) ابتدا کتانژانت زاویه  $2^\circ$  را به دست می‌آوریم:

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow 1 + \cot^2 2^\circ = \frac{1}{\sin^2 2^\circ} \approx \frac{1}{(0/34)^2} = \frac{1}{0/1156} \approx 8/65$$

$$\Rightarrow \cot^2 2^\circ = 8/65 - 1 = 7/65 \Rightarrow \cot 2^\circ \approx 2/76$$

$$\cot 2^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow 2/76 = \frac{200}{AC} \Rightarrow AC = \frac{200}{2/76} = 72/46 \text{ متر}$$

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف)  $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

طرف چپ =  $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$  = طرف راست

ب)  $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

طرف چپ =  $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{\underbrace{1 - \sin^2 \theta}_{\cos^2 \theta}} = \frac{\cancel{\cos \theta} (1 - \sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$  = طرف راست

پ)  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

طرف چپ =  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha (\cancel{\cos \alpha + \sin \alpha})}{\cos \alpha (\cancel{\sin \alpha + \cos \alpha})} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$  = طرف راست

ت)  $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

طرف چپ =  $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - (1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - 1 + \sin^2 x}{1 + \sin x}$

=  $\frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \sin x$  = طرف راست

ث)  $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

طرف چپ =  $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\overbrace{1 - \sin^2 x}^{\cos^2 x}}{\cos x (1 + \sin x)}$

=  $\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$  = طرف راست



## فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

### درس اول: ریشه و توان

#### فعالیت

صفحه ۴۸ کتاب درسی

اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$(-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81$$

$$(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow (5\sqrt{2})^2 = 50$$

$$(0/25)^2 = 0/0625 \Leftrightarrow \sqrt{0/0625} = 0/25$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8$$

$$(0/5)^2 = 0/25 \Leftrightarrow \sqrt{0/25} = 0/5$$

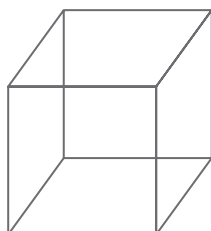
$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2 = 45$$

#### کاردکلاس

صفحه ۴۸ تا ۵۰ کتاب درسی

#### ریاضی

فصل ۳



۱) حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هر گاه طول ضلع مکعب  $a$  متر باشد، حجم آن برابر  $a^3$  متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

با توجه به جدول، متوجه می‌شویم  $8 < 25 < 27$  و در نتیجه  $2 < \sqrt[3]{25} < 3$ . چون ۲۵ خیلی به ۲۷ نزدیک‌تر است، بنابراین حدس می‌زنیم  $\sqrt[3]{25}$  خیلی به ۳ نزدیک باشد، مثلاً:  $\sqrt[3]{25} \approx 2/9$ .

دو دانش آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به دست آورده‌اند:

احمد: چون  $27 = 3^3$  و  $8 < 25 < 27$ ، پس  $2 < \sqrt[3]{25} < 3$ ، بهتر است  $2/8$  را امتحان کنیم. آیا  $(2/8)^3 = 25$ ؟

$$(2/8)^3 = (2/8)^2 \times (2/8) = 21/952 \approx 22$$

محسن: به ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد  $2/9$  را امتحان کنم.  $(2/9)^3 = (2/9)^2 \times 2/9 = 24/389 \approx 24/4$

روش‌های این دو دانش آموز را توضیح دهید.

هر دو نفر از روش‌های حدس و آزمایش استفاده کرده‌اند. محسن با استدلال بهتر، عدد مناسب و نزدیک‌تری را برای حدس خود انتخاب کرده است، به همین دلیل پاسخ محسن به جواب اصلی نزدیک‌تر است.

۲) مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:

الف) چون  $36 < 30 < 25$  پس  $5 < \sqrt{30} < 6$ . همچنین چون  $8 < 5 < 1$  پس  $1 < \sqrt[3]{5} < 2$ .

ب)  $3 < \sqrt{10} < 4$ :  $9 < 10 < 16 \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4$

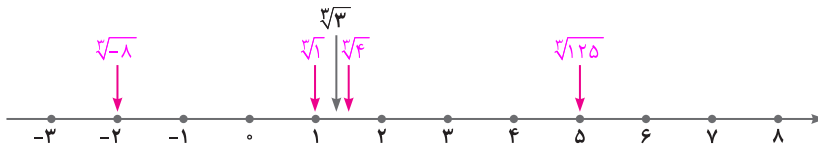
پ)  $-3 < \sqrt[3]{-17} < -2$ :  $-27 < -17 < -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-17} < \sqrt[3]{-8} \Rightarrow -3 < \sqrt[3]{-17} < -2$

ت)  $2 < \sqrt[3]{20} < 3$ :  $8 < 20 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{20} < 3$



۳ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} = 1 \quad \sqrt[3]{3} \approx 1/4 \quad \sqrt[3]{4} \approx 1/5 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$

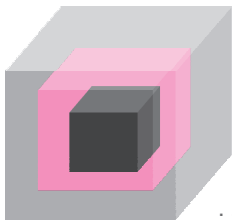


۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف)  $4 < \sqrt{x} < 5$ :  $4 < \sqrt{x} < 5 \Rightarrow 16 < x < 25 \Rightarrow x \in (16, 25) \xrightarrow{\text{مانند}} x = 16/1, 18, 24/9, \dots$

ب)  $9 < \sqrt[3]{x} < 10$ :  $9 < \sqrt[3]{x} < 10 \Rightarrow 9^3 < x < 10^3 \Rightarrow 729 < x < 1000 \Rightarrow x \in (729, 1000)$

$\xrightarrow{\text{مانند}} x = 729/5, 900, 999/9, \dots$



۵ سه مکعب تودرتو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم

مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل

سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

اگر  $x$  طول ضلع مکعب میانی باشد:  $27 < x^3 < 64 \Rightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{64} \Rightarrow 3 < x < 4$

بنابراین تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۴ می‌توانند به جای  $x$  قرار گیرند، مانند:  $3/3, 3/2, 3/1, \dots$

فعالیت صفحه ۵۰ کتاب درسی

۱ آیا ۱۶- ریشه چهارم دارد؟ خیر آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶- شود؟

نامنفی  $x^4 = x^2 \times x^2$   
نامنفی نامنفی

خیر، زیرا توان چهارم هر عددی مانند  $x$ ، نامنفی است.

اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای دو- ریشه چهارم است که -قرینه یکدیگرند. عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

کاردر کلاس صفحه ۵۱ کتاب درسی

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰,۰۰۰		۳۱۲۵		۸۱	
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	۱۰	-۱۰	$5\sqrt[4]{5}$	$-5\sqrt[4]{5}$	۳	-۳

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	-۳	-۱	-۱۰	۴



$$\sqrt[5]{0} = 0, \sqrt[5]{1} = 1, \sqrt[5]{-1} = -1$$

۳ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟ ۱، ۰ و -۱، یعنی:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{1000000}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\sqrt[5]{-0.00032} = -0.2$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

۴ محاسبه کنید.

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی، دارای یک ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن منفی است.

تمرین صفحه ۵۱ تا ۵۳ کتاب درسی

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{20} \Rightarrow 4 < \sqrt{20} < 5$$

$$\sqrt[4]{400} \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{400} < 5$$

$$\sqrt{75} \Rightarrow 8 < \sqrt{75} < 9$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[5]{400} \Rightarrow 3 < \sqrt[5]{400} < 4$$

$$\sqrt[3]{-90} \Rightarrow -5 < \sqrt[3]{-90} < -4$$

$$\sqrt[3]{250} \Rightarrow 6 < \sqrt[3]{250} < 7$$

$$\sqrt[5]{1} = 1$$

$$-\sqrt[4]{20} \Rightarrow -3 < -\sqrt[4]{20} < -2$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

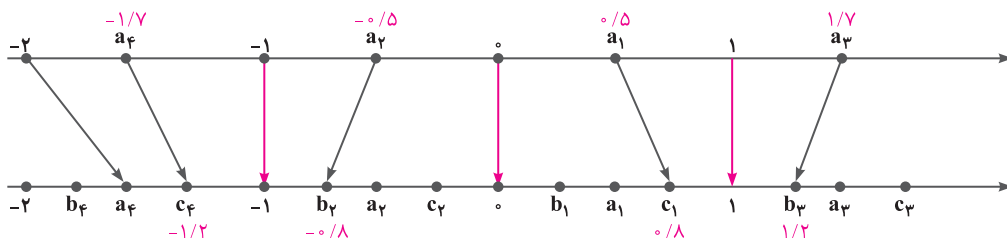
$$\sqrt{10} \approx 3.2$$

$$\sqrt[3]{7/25} \approx 1/9$$

$$\sqrt[5]{16} \approx 1.7$$

$$\sqrt[9]{64} \approx 2/3$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف)  $a$  عددی مثبت است و  $\sqrt[3]{a} > a$ . چه عددی می‌تواند باشد؟ هر عددی بین صفر و یک، مانند:  $0/5, 0/6, \dots$

ب)  $a$  عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی  $\sqrt[3]{a} = a$ . چه اعدادی می‌تواند باشد؟ صفر، ۱ و -۱

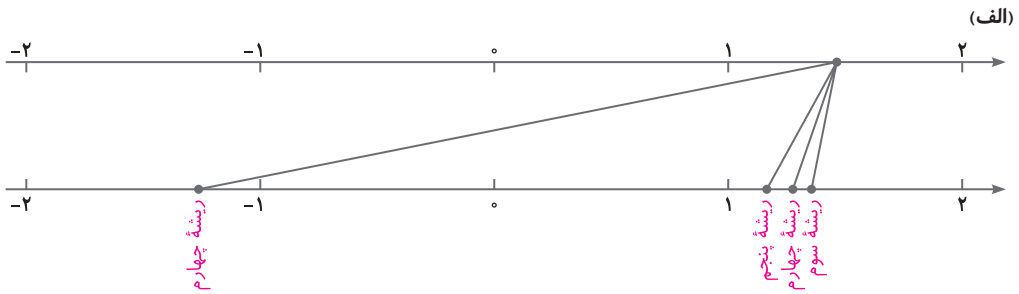
پ)  $a$  عددی مثبت است و  $\sqrt[3]{a} < a$ . چه اعدادی می‌تواند باشد؟ هر عددی بزرگ‌تر از یک، مانند: ۲، ۳، ...

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که  $a$  عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

$$\begin{cases} a < 0, \sqrt[3]{a} > a \Rightarrow a < -1 \\ a < 0, \sqrt[3]{a} < a \Rightarrow -1 < a < 0 \end{cases}$$

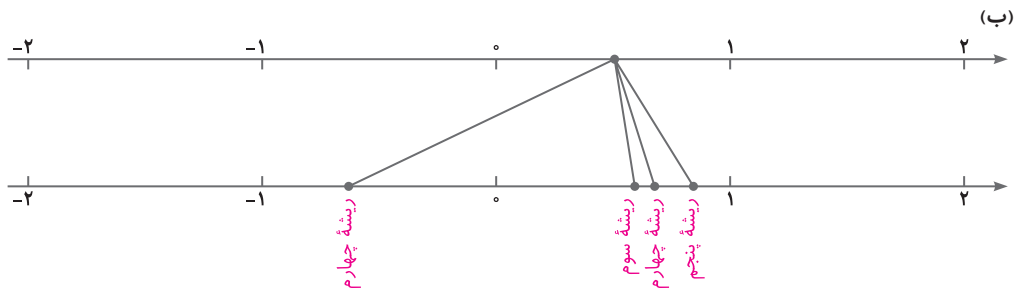


۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



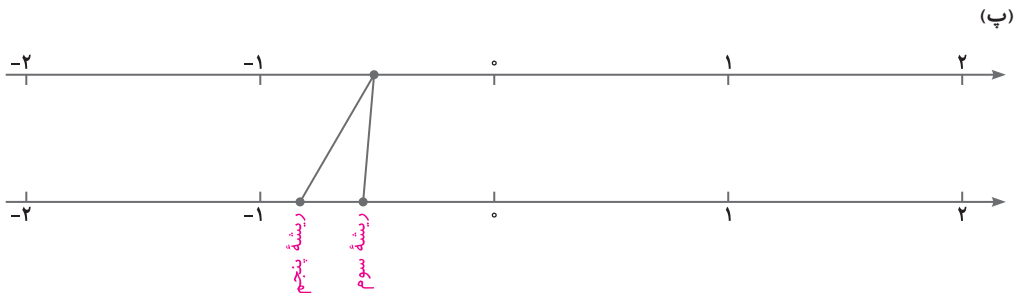
$$\sqrt[3]{1/5} \approx 1/14, \sqrt[4]{1/5} \approx \pm 1/10, \sqrt[5]{1/5} \approx 1/0.8$$

به عنوان مثال:



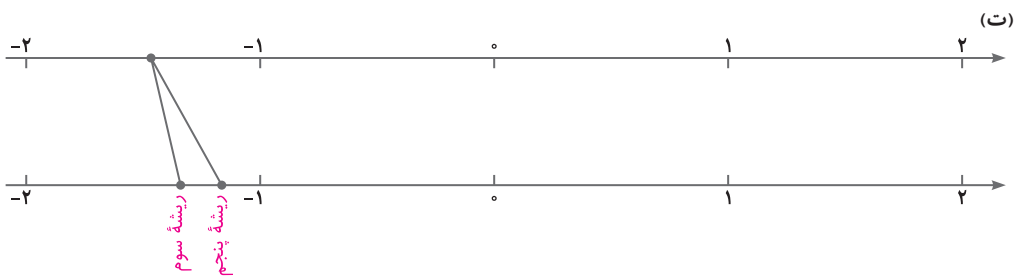
$$\sqrt[3]{0/5} = 0/79, \sqrt[4]{0/5} \approx \pm 0/84, \sqrt[5]{0/5} = 0/87$$

به عنوان مثال:



$$\sqrt[3]{-0/5} \approx -0/79, \sqrt[5]{-0/5} \approx -0/87$$

به عنوان مثال:



$$\sqrt[3]{-1/5} \approx -1/14, \sqrt[5]{-1/5} \approx -1/0.8$$

به عنوان مثال:



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ۳- ریشه‌های چهارم عدد ۸- می‌باشند.

ب) اگر  $a = \sqrt[4]{16}$  باشد، در این صورت حاصل عبارت  $a^3 + 5$  برابر است با ۱۳.

$$a = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \Rightarrow a^3 + 5 = 2^3 + 5 = 8 + 5 = 13$$

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

زیرا:  $0/0001 < 0/001$  ( $0/1)^3 < (0/1)^5$ )      زیرا:  $-0/0001 > -0/001$  ( $-0/1)^3 > (-0/1)^5$ )

زیرا:  $0/1 = 0/1$  ( $0/1 = 0/1$ )      زیرا:  $-32 < 16$  ( $-2)^4 < (-2)^5$ )

### درس دوم: ریشه nام

#### فعالیت

صفحه ۵۴ و ۵۵ کتاب درسی

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد.

جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه‌های پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$\sqrt[7]{64}$ و $-\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد  $\sqrt[6]{64}$  و  $-\sqrt[6]{64}$  یا همان ۲ و ۲- هستند؛ زیرا  $2^6 = 64$  و  $(-2)^6 = 64$

درباره ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ ریشه هفتم عدد ۶۴ برابر با  $\sqrt[7]{64}$  است، زیرا  $(\sqrt[7]{64})^7 = 64$ .

همچنین ریشه‌های هشتم عدد ۶۴ اعداد  $\sqrt[8]{64}$  و  $-\sqrt[8]{64}$  هستند، زیرا  $(\sqrt[8]{64})^8 = 64$  و  $(-\sqrt[8]{64})^8 = 64$ .

به‌طور کلی اگر  $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر n عددی فرد باشد، آنگاه ریشه nام عدد ۶۴ برابر با  $\sqrt[n]{64}$  است، زیرا  $(\sqrt[n]{64})^n = 64$  و اگر n عددی زوج باشد، آنگاه

ریشه‌های nام عدد ۶۴ با اعداد  $\sqrt[n]{64}$  و  $-\sqrt[n]{64}$  برابر هستند، زیرا  $(\sqrt[n]{64})^n = 64$  و  $(-\sqrt[n]{64})^n = 64$ .

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و  $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه‌های nام a چه می‌توان گفت؟

اگر n زوج باشد، آنگاه عدد مثبت a دارای دو ریشه nام و اگر n فرد باشد، آنگاه عدد مثبت a دارای یک ریشه nام خواهد

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

بود. بنابراین در حالت کلی داریم:

۲ جدول زیر را که درباره ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه هشتم	ریشه هفتم	ریشه ششم	ریشه پنجم	ریشه چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان زوج برسد و مساوی ۶۴- شود.

درباره ریشه‌های nام ۶۴- ( $n \in \mathbb{N}$ ) بحث کنید. اگر n فرد باشد، عدد ۶۴- فقط یک ریشه nام دارد ولی اگر n زوج باشد،

عدد ۶۴- ریشه nام ندارد.

اگر a یک عدد منفی و  $n \in \mathbb{N}$  باشد، درباره ریشه nام a چه می‌توان گفت؟ عدد منفی a زمانی ریشه nام دارد که n فرد باشد

و اگر n زوج باشد  $\sqrt[n]{a}$  وجود ندارد.



۳ جدول زیر را کامل کنید.

$a > 0$	زوج $n$	$a$ دارای دو ریشه $n$ ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.	$a = 81$ $n = 4$	۸۱ دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است.
	فرد $n$	$a$ دارای یک ریشه $n$ ام، $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = 27$ $n = 3$	۲۷ دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{27} = 3$ است.
$a < 0$	زوج $n$	ریشه $n$ ام وجود ندارد.	$a = -9$ $n = 2$	-۹ ریشه دوم ندارد.
	فرد $n$	$a$ دارای یک ریشه $n$ ام، $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = -8$ $n = 3$	-۸ دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{-8} = -2$ است.

۴ در سال نهم دیدید که:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} : b \text{ و } a \text{ برای هر دو عدد مثبت}$$

آیا رابطه بالا درباره  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$  نیز برقرار می‌باشد؟ بله مثال بزنید. برای  $a$  و  $b$  نامنفی برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[4]{256} &= 4 \\ \sqrt[4]{81} &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{256} \times \sqrt[4]{81} = 4 \times 3 = 12, \quad \sqrt[4]{256 \times 81} = \sqrt[4]{20736} = 12 \Rightarrow \sqrt[4]{256} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{256 \times 81}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید  $a$  و  $b$  نامنفی باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = 6$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \times 81} = 6$$

درباره  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  چه می‌توان گفت؟ این تساوی، به‌ازای هر مقداری برای  $a$  و  $b$ ، همواره برقرار است.

آیا  $a$  و  $b$  حتماً باید نامنفی باشند؟ خیر مثالی از  $a$  و  $b$  نامنفی و مثالی از  $a$  و  $b$  منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} a, b > 0: \sqrt[5]{32} &= 2 \\ \sqrt[5]{243} &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{32 \times 243}$$

$$\sqrt[5]{32 \times 243} = \sqrt[5]{7776} = 6$$

$$\left. \begin{aligned} a, b < 0: \sqrt[5]{-32} &= -2 \\ \sqrt[5]{-243} &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{-32} \times \sqrt[5]{-243} = (-2) \times (-3) = 6 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} \times \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-32) \times (-243)}$$

$$\sqrt[5]{(-32) \times (-243)} = \sqrt[5]{7776} = 6$$

کار در کلاس صفحه ۵۵ کتاب درسی

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$$

$$\sqrt[5]{256} = \sqrt[5]{2^8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$$

$$-\sqrt[4]{0.0016} = -\sqrt[4]{(0.02)^4} = -0.02$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{-1}{2}\right)^5} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2$$

$$\sqrt[6]{0} = 0$$





## تمرین

صفحه ۵۶ کتاب درسی

درستی رابطه  $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$  را با مقاداردهی‌های مختلف به  $k$ ،  $m$  و  $a$  بررسی کنید (اگر  $k$  زوج باشد،  $a$  باید مثبت باشد).

$$a = 2, m = 6, k = 3 \rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2^6} = 4 \\ (\sqrt[3]{2})^6 = 4 \end{cases} \quad a = -2, m = 2, k = 2 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2 \\ (\sqrt{-2})^2 \text{ وجود ندارد} \end{cases}$$

$$a = -2, m = 9, k = 3 \rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{(-2)^9} = -8 \\ (\sqrt[3]{-2})^9 = -8 \end{cases}$$

پس اگر  $k$  فرد باشد، رابطه همیشه برقرار است ولی اگر  $k$  زوج باشد، رابطه در صورتی برقرار است که  $a$  حتماً نامنفی باشد.

## فعالیت

صفحه ۵۶ و ۵۷ کتاب درسی

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	$a \geq 0$	زوج $n$	$n = 4$ $a = 2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ $(2 =  2 )$
		فرد $n$	$n = 3$ $a = 2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
	$a < 0$	زوج $n$	$n = 4$ $a = -2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ $(2 =  -2 )$
		فرد $n$	$n = 3$ $a = -2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

اگر  $a \geq 0$  از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

و اگر  $a < 0$  آنگاه

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	$a \geq 0$	زوج $n$	$n = 4$ $a = 16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		فرد $n$	$n = 3$ $a = 8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$
	$a < 0$	زوج $n$	$n = 4$ $a = -16$	تعریف نشده $\rightarrow (\sqrt[4]{-16})^4$
		فرد $n$	$n = 3$ $a = -8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

اگر  $a \geq 0$  آنگاه از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

و اگر  $a < 0$  آنگاه



## کار در کلاس

صفحه ۵۷ کتاب درسی

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$$

تساوی زیر به‌ازای چه مقادیری از  $a$  و  $n$  برقرار نیست؟

به‌ازای  $a < 0$  و  $n$  زوج رابطه برقرار نیست، زیرا به‌ازای این مقادیر  $\sqrt[n]{a}$  تعریف نشده است.

## تمرین

صفحه ۵۷ و ۵۸ کتاب درسی

۱ الف) یکی از علامت‌های  $>$  یا  $<$  یا  $=$  را در  $\square$  قرار دهید.

$$0/25 = (0/5)^2 \square (0/5)^3 = 0/125$$

$$0/70 = \sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5} = 0/79$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$2 = \sqrt{4} \square \sqrt[3]{4} = 1/58$$

ب) وقتی  $0 < a < 1$  است، یکی از علامت‌های مقایسه را در  $\square$  قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

پ) وقتی  $a > 1$  است، یکی از علامت‌های مقایسه را در  $\square$  قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

۲ الف) یکی از علامت‌های  $< = >$  را در مربع قرار دهید.

$$0/25 = (-0/5)^2 \square (-0/5)^3 = -0/125$$

$$4 = (-2)^2 \square (-2)^3 = -8$$

$$-0/125 = (-0/5)^3 \square (-0/5)^5 = -0/0.3125$$

$$-8 = (-2)^3 \square (-2)^5 = -32$$

$$0/0.625 = (0/5)^4 \square (-0/5)^2 = 0/25$$

$$16 = (-2)^4 \square (-2)^2 = 4$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر  $\sqrt[n]{a} = b$  آنگاه  $b^n = a$ )، نشان دهید برای هر عدد  $a$  و هر عدد طبیعی  $n$  (به شرط بامعنا بودن

رادیكال) رابطه زیر برقرار است:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{n \text{ تا}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \times a \times \dots \times a}}_{n \text{ تا}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

۴ آیا تساوی  $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  برقرار است؟ این رابطه در حالت کلی برقرار نیست.

$n$  را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به‌جای  $a$  و  $b$  مقادیر عددی بدهید.

اگر  $n=3$ ،  $a=1$ ،  $b=8$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1+8} = \sqrt[3]{9} \\ \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} = 1+2=3 \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt[3]{9} \neq 3 \Rightarrow \sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

اگر  $n=4$ ،  $a=1$ ،  $b=16$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[4]{1+16} = \sqrt[4]{17} \\ \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{16} = 1+2=3 \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt[4]{17} \neq 3 \Rightarrow \sqrt[4]{a+b} \neq \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$$

اگر  $n=5$ ،  $a=1$ ،  $b=32$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[5]{1+32} = \sqrt[5]{33} \\ \sqrt[5]{1} + \sqrt[5]{32} = 1+2=3 \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt[5]{33} \neq 3 \Rightarrow \sqrt[5]{a+b} \neq \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}$$



## رياضی

$$\Delta^{-r} = \frac{1}{\Delta^r} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^r \rightarrow \sqrt[r]{\Delta^{-r}} = \frac{1}{\Delta}$$

$$\sqrt[\Delta]{r^{-\Delta}} : r^{-\Delta} = \frac{1}{r^{\Delta}} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\Delta} \Rightarrow \sqrt[\Delta]{r^{-\Delta}} = \frac{1}{r}$$

$$\sqrt[y]{\frac{1}{128}} : \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow \sqrt[y]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[f]{\psi^{-f}} : \psi^{-f} = \frac{1}{\psi^f} = \left(\frac{1}{\psi}\right)^f \Rightarrow \sqrt[f]{\psi^{-f}} = \frac{1}{\psi}$$

۶ به جای  $a$  و  $b$  و عدد طبیعی  $n$  عددهایی قرار دهید؛ به طوری که:

$$\sqrt{\frac{r}{1}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{1}} \Rightarrow r = \frac{2}{1}$$

(الف) تساوی  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  برقرار باشد. اگر  $a = 4$ ،  $b = 1$  و  $n = 2$  باشد، رابطه برقرار است.

(ب) تساوی  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  برقرار نباشد.

اگر  $a = -8$ ،  $b = -2$  و  $n = 2$  باشد، رابطه برقرار نیست.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{-8}{-2}} = \sqrt{4} = 2 \\ \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{\frac{-8}{-2}} \neq \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$$

## درس سوم: توان‌های گویا

فعاليات

هر یک از عبارت‌های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3}$$

$$r^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{r} = \sqrt[r]{2^2} = \sqrt{2}$$

$$5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5}$$

$$c^{\frac{1}{f}} = \sqrt[f]{c}$$

$$\lambda_1^{\frac{1}{F}} = \sqrt[F]{\lambda_1} = 3$$

فعالیت صفحه ۶۰ کتاب درسی

اکنون شما اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

الف)  $5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2}$

$$c) \sqrt[2]{3^2} = \sqrt[2]{3^2}$$

$$\text{پ) } 11^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{11^3} = \sqrt[4]{(11^4)^3} = \sqrt[4]{(11^3)^4} = 11^3 = 1331$$

$$\text{ت) } 16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{(2^4)^{-1}} = \sqrt[4]{2^{-4}} = \frac{1}{2}$$

کارد در کلاس ..... صفحه ۶۱ کتاب درسی

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\mu^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\mu^2}$$

$$\frac{\Delta}{\psi^F} = \frac{F\sqrt{\psi^\Delta}}{F\sqrt{\psi^F}} = \frac{F\sqrt{\psi^F} \times \psi}{F\sqrt{\psi^F}} = \psi \sqrt{\psi}$$

$$f^{\frac{1}{\Delta}} = \sqrt[\Delta]{f}$$

$$\frac{2}{2^2} \times \frac{3}{2^2} = \frac{2}{2^3 + 2} = \frac{13}{2^6} = \sqrt[6]{2^{13}} = \sqrt[6]{2^{12}} \times \sqrt[6]{2^1} = 2^2 \times \sqrt[6]{2} = 4\sqrt[6]{2}$$

$$(x \times y)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{x} = \sqrt[x]{x^x} = x$$

$$\Delta^{-\frac{r}{3}} = \sqrt[3]{\Delta^{-r}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\Delta}\right)^r} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\Delta}\right)^r} \times \sqrt[3]{\frac{1}{\Delta}} = \frac{1}{\Delta} \sqrt[3]{\frac{1}{\Delta}}$$

$$(16^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$



۲) رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{3^2} &= 3^{\frac{2}{2}} & \sqrt[5]{2^5} &= 2^{\frac{5}{5}} & \sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} &= \sqrt[6]{2} \\ \sqrt[5]{19^{\frac{1}{5}}} &= 19^{\frac{1}{25}} & \sqrt[5]{64} &= 64^{\frac{1}{5}} = (2^6)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} & \sqrt[5]{2^5} &= 2^1\end{aligned}$$

۳) با استفاده از نمای کسری نشان دهید که  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$  است. تساوی را کامل کنید ( $a > 0$ ).

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[nm]{a}$$

## تمرین

۱) هریک از توان‌های کسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$\begin{aligned}16^{\frac{1}{2}} &= \sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{4^2} = 4 & 5^{\frac{1}{2}} &= \sqrt[2]{5} = \sqrt{5} \\ 4^{\frac{3}{2}} &= \sqrt[2]{4^3} & \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} &= \sqrt[3]{3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \\ (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} &= 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} & 4^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2} \\ 32^{\frac{-1}{5}} &= \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2} & 32^{\frac{2}{5}} &= \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{(2^5)^2} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = \sqrt[5]{4^5} = 4 \\ 125^{\frac{-2}{3}} &= \sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(5^{-2})^3} = 5^{-2} = \frac{1}{25}\end{aligned}$$

۲) می‌دانیم

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \qquad \sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی  $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$  همواره برقرار است ( $a > 0$ )؟  $n$ ،  $m$  و  $k$  طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد  $\sqrt[6]{2^3}$ ،  $\sqrt[4]{2^2}$  و  $\sqrt[2]{2}$  برابرند. بله، وقتی  $a > 0$  و  $n$ ،  $m$  و  $k$  اعدادی طبیعی هستند، رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left. \begin{aligned}\sqrt[2]{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[4]{2^2} &= 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[6]{2^3} &= 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2}$$

۳) فرض کنیم  $a = 64$ ،  $r = \frac{1}{3}$  و  $s = \frac{1}{4}$  مقدارهای عددی  $a^r$  و  $a^{r-s}$  را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$\left. \begin{aligned}\frac{a^r}{a^s} &= \frac{64^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[4]{64}} = \frac{\sqrt[3]{8^3}}{\sqrt[4]{4^4}} = \frac{8}{4} = 2 \\ a^{r-s} &= 64^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[2]{2} = 2\end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$



اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای  $a$ ،  $r$ ،  $s$  انتخاب کنید و بار دیگر مقادیرهای  $\frac{a^r}{a^s}$  و  $a^{r-s}$  را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید.

$$a = 16, r = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^r}{a^s} &= \frac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt[4]{4^2}} = \frac{4}{2} = 2 \\ a^{r-s} &= 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ در تقسیم اعداد توان‌دار (با پایه مثبت) با توان‌های گویا، اگر پایه‌ها با هم برابر باشند، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و سپس توان‌ها را از هم کم می‌کنیم، یعنی توان صورت را منهای توان مخرج می‌کنیم.

۴ حساب کنید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \times 2]{5} = \sqrt[6]{5} \qquad \sqrt[4]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[4]{64^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[12]{64} = 2 \qquad \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

## ریاضی

فصل ۳

## درس چهارم: عبارت‌های جبری

### فعالیت

صفحه ۶۲ و ۶۳ کتاب درسی

۱ با محاسبه  $(a+b)^3$  اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} + \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر درمی‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم  $b$  را در سرتاسر اتحاد فوق به  $-b$  تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۲ یک بار دیگر  $(a-b)^3$  را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره ۲ محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - \underline{a^2b} - \underline{2ab^2} + \underline{2ab^2} + \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

صفحه ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی

### کاردکلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$



۲) با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های  $a^3 + b^3$  و  $a^3 - b^3$  را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

۳) عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$$

$$x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - (1)^3 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

### فعالیت

صفحه ۶۴ و ۶۵ کتاب درسی

آیا  $a + b$  مضرب دیگری دارد؟ بله، بی‌شمار مضرب دارد. مانند:  $a^4 - b^4$ ،  $a^6 - b^6$ ، ...

۱) مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به دست می‌آیند:

... و  $(a + b)(a - b)$  و  $-4(a + b)$  و  $(a + b)(a + b)^2$  و  $2(a + b)$  و  $a + b$ : بعضی از مضرب‌های  $a + b$

بعضی از مضرب‌های  $a - b$  را بنویسید.

۲) دو عبارت بنویسید که  $a - b$  شمارندهٔ هر یک از آنها باشد.

۳) عبارت  $27a^3 - 1$  مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف)  $a - 1$       ب)  $3a - 1$       پ)  $9a^2 + 3a + 1$       ت)  $3a + 1$

$$27a^3 - 1 = (3a)^3 - (1)^3 = (3a - 1)((3a)^2 + 3a(1) + 1) = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$$

پس  $27a^3 - 1$  مضرب عبارت‌های (ب) و (پ) است.



عبارت  $\sqrt{3}(a + b)$  یک مضرب  $a + b$  محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی، فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴) کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

الف)  $\frac{3x - \sqrt{7}}{x^2}$ : گویا هست.      ب)  $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ : گویا هست.

پ)  $\sqrt[3]{x} - 1$ : گویا نیست (به علت وجود  $x$  زیر رادیکال)      ت)  $\sqrt[3]{x^2} + x - 1$ : گویا نیست (به علت وجود  $x$  زیر رادیکال)



یک عبارت گویا، به‌ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌شود (مقدار ندارد).

۵) عبارت گویای زیر به‌ازای چه مقدارهایی از  $x$  تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4} : x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{و} \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{و} \quad x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm 2i$$

نامنفی      منفی

بنابراین عبارت گویای داده‌شده، به‌ازای  $x = 1$  و  $x = -1$  تعریف نمی‌شود.



۶ حاصل کسره‌ای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) 
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{3}{x-1}$$

با توجه به اینکه  $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x-1$ ، پس مخرج مشترک کسرها برابر است با:  $x-1$

عبارت = 
$$\frac{1(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-1) + 3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2+3}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$$

ب) 
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

با توجه به اینکه  $(x-1)(x+1) = x^2-1$ ، پس مخرج مشترک کسرها برابر است با:  $x^2-1$

عبارت = 
$$\frac{x+1+x-1-1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

کارد در کلاس ..... صفحه ۶۵ کتاب درسی

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید (جاهای خالی را پر کنید).

الف) 
$$\frac{x^6+1}{x^6+2x^2+1} = \frac{(x^2)^3+(1)^3}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{\cancel{(x^2+1)}(x^2+1)} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$$

ب) 
$$\frac{x^3-1}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-1)^2} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$$

پ) 
$$\frac{x^2+1}{x^6-1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}}{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}} = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

ت) 
$$\frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{\cancel{y}(y-2)\cancel{(y+2)}(y^2+3)}{8\cancel{y}\cancel{(y+2)}} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$$

۲ در اتحاد

$$a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$$

قرار دهید  $a = \sqrt[3]{x^2}$  و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3+1 = (\sqrt[3]{x^2}+1)((\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1) = (\sqrt[3]{x^2}+1)(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+1)$$

فعالیت ..... صفحه ۶۵ تا ۶۷ کتاب درسی

۱ از سال گذشته به یاد داریم که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را

در یک عبارت رادیکالی مناسب، ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود. در زیر کسره‌ای  $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$  و  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$  گویا شده‌اند. جاهای

خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\frac{5}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{5}{2\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[3]{3}}{2 \times 3} = \frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \times 2^4}}{4} = \frac{\sqrt[3]{2^6 \times 2}}{4} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{4} = \sqrt[3]{2}$$



مانند نمونه بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

ب)  $\frac{8}{3\sqrt{2}+4} = \frac{8}{3\sqrt{2}+4} \times \frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}-4} = \frac{8(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2})^2-4^2} = \frac{8(3\sqrt{2}-4)}{18-16} = \frac{8(3\sqrt{2}-4)}{2} = 12\sqrt{2}-16$

پ)  $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

ت)  $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{x+h-x} = \sqrt{x+h}+\sqrt{x}$

۱۳) از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها که به صورت زیر هستند، برای گویا کردن کسرهایی مانند  $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$  و  $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$  استفاده می‌کنیم. در هر کدام از اتحادهای زیر، قرار دهید  $x = \sqrt[3]{a}$ ،  $y = \sqrt[3]{b}$  و آنها را بازنویسی کنید.

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3 \\ (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}^2) = a-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3 \\ (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}^2) = a+b \end{cases}$$

آیا سمت راست تساوی‌های بالا، شامل یک عبارت رادیکالی است؟ خیر

مانند نمونه بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} \times \frac{\sqrt[3]{5}^2-\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{5}^2-\sqrt[3]{5}+1} = \frac{2(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)}{5+1} = \frac{2(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)}{6}$

ب)  $\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{7}^2+\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}^2}{\sqrt[3]{7}^2+\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}^2} = \frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}{7-3} = \frac{(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})}{4}$

پ)  $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} = \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} \times \frac{\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2^2}{\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2^2} = \frac{(x+8)(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)} = \sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+4$

ت)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}^2-\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$

تمرین صفحه ۶۷ کتاب درسی

۱) هر یک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف)  $x^6-y^6 = (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

ب)  $x^6-y^6 = (x^3)^2-(y^3)^2 = (x^3-y^3)(x^3+y^3) = (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

پ)  $8a^3+27 = (2a)^3+3^3 = (2a+3)(4a^2-6a+9)$

ت)  $a^2b^6-8 = (ab^2)^3-2^3 = (ab^2-2)(a^2b^4+2ab^2+4)$





۲) مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{3}{3+\sqrt{7}} = \frac{3}{3+\sqrt{7}} \times \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{3(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{3(3-\sqrt{7})}{9-7} = \frac{3(3-\sqrt{7})}{2}$$

$$\text{ب) } \frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = 4(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$\text{پ) } \frac{1}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+2^2}{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+2^2} = \frac{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$$

$$\text{ت) } \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1} = \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1}{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1} = \frac{6(4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)}{16-1} = \frac{2(4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)}{5}$$

۳) با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$\text{الف) } 16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$$

$$\text{ب) } 10 \cdot 5^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2(100)(5) + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$$

$$\text{پ) } 9999^2 = (10^4 - 1)^2 = 10^8 - 2 \times 10^4 \times 1 + 1 = 10^8 - 20000 + 1 = 99980001$$

$$\text{ت) } 10 \cdot 5^3 = (100 + 5)^3 = 100^3 + 3 \times (100)^2 \times 5 + 3 \times 100 \times 5^2 + 5^3 = 1157625$$

۴) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}, \frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$\text{عبارت} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1} : \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

$$\text{عبارت} = \frac{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1-1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$$

۵) اگر  $3 = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}$ ، حاصل عبارت  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$  را به دست آورید.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4} = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}) \times \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-4})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}} = \frac{x+2-x+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

خواندنی ..... صفحه ۶۸ کتاب درسی

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

سه عدد ۳، ۴ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. (۵، ۱۳، ۱۲)

چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

تعداد زیادی. هر سه‌تایی به صورت  $(3k, 4k, 5k)$  یا  $(\Delta k, 12k, 13k)$  به شرط اینکه  $k > 0$  باشد، تشکیل سه‌تایی فیثاغورسی

می‌دهند.



❶ (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(1/0.1)^{365} = 37/8$$

$$(0.99)^{365} = 0.03$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ پایه‌های توان‌ها در محدوده متفاوتی قرار دارند.  $1 < 0.99 < 1$  است، به همین دلیل با افزایش توان کوچک‌تر می‌شود و  $1 < 0.1 < 1$  است که با افزایش توان بزرگ‌تر می‌شود.

حال  $(1/0.1)^{73}$  و  $(0.99)^{73}$  را محاسبه و مقایسه کنید.

با افزایش  $n$  مقدار عدد  $(0.99)^n$  کوچک‌تر می‌شود.  $(1/0.1)^{73} = 1427/6$   $(0.99)^{73} = 0.0007$

❷ (مثلث خیام)

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟ در هر بسط به توان  $n$ ، ضرایب آن از سطر  $(n+1)$  مثلث خیام به دست می‌آید. برای مثال ضرایب بسط  $(a+b)^2$  از سطر سوم مثلث خیام یعنی عددهای «۱، ۲، ۱» به دست می‌آید:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \end{aligned}$$

از ضرب  $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$  در  $(a+b)$  می‌توان  $(a+b)^4$  را محاسبه کرد. برای رسیدن سریع‌تر به جواب می‌توان از سطر پنجم مثلث خیام استفاده کرد. ضرایب را نوشته، سپس از توان ۴ متغیر  $a$  شروع می‌کنیم. در هر ضریب بعدی، یک واحد از توان  $a$  کم و به توان  $b$  اضافه می‌کنیم. به این ترتیب نیز حاصل  $(a+b)^4$  به دست می‌آید.



## فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها

### درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صفحه ۷۰ کتاب درسی

پرسش متن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم‌الزاویه است (چرا؟).  
مثلث قائم‌الزاویه است.  $\Rightarrow 25 = 9 + 16 \Rightarrow 25 = 3^2 + 4^2 = 5^2$

صفحه ۷۱ کتاب درسی

فعالیت

معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 3 = 0$  را که درس در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.  
۱) با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.  
 $(x+1)(x-3) = 0$

نکته

ویژگی حاصل ضرب صفر:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و  $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

ریاضی

فصل ۴

۲) از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x+1=0 \text{ یا } x-3=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=3$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل‌شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست‌آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم.  
یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(3)^2 - 2(3) - 3 = 0$$

$$9 - 6 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً درباره آن بحث شده است؟ خیر

توضیح دهید. زیرا طول اضلاع مثلث باید اعداد مثبت باشند، پس  $x = -1$  نمی‌تواند طول ضلع مثلث باشد. بنابراین فقط یک مثلث قائم‌الزاویه داریم که اضلاع آن سه عدد متوالی باشند.

صفحه ۷۱ کتاب درسی

کار در کلاس

$$x^2 - 3x = 10 \quad \text{الف)}$$

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$x=5 \Rightarrow 5^2 - 3(5) - 10 = 0 \Rightarrow 25 - 15 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^2 - 3(-2) - 10 = 0 \Rightarrow 4 + 6 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

آزمایش جواب‌ها:



ب)  $3t^2 - t = 0$

$$t(3t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ 3t-1=0 \Rightarrow 3t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$$t=0 \Rightarrow 3(0)^2 - (0) = 0 \Rightarrow 0=0 \quad \checkmark$$

$$t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 0=0 \quad \checkmark$$

صفحه ۷۲ کتاب درسی

فعالیت

معادله درجه دوم  $x^2 = 25$  را در نظر بگیرید.

۱) جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

$$x^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

۲) ریشه‌های دوم عدد ۲۵ را به دست آورید و آنها را با جواب‌های حاصل از تجزیه به دست آورید. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید. ریشه‌های دوم عدد ۲۵ برابر  $\pm 5$  است. جواب‌های حاصل از تجزیه ( $x^2 = 25$ ) و ریشه‌های دوم عدد با هم برابر هستند.

۳) اگر  $x^2 = a$  یک معادله درجه دوم باشد که در آن  $a$  یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت  $x = \pm\sqrt{a}$  نوشت؟ خیر توضیح دهید. فقط در صورتی می‌توان این کار را انجام داد که  $a$  یک عدد حقیقی مثبت باشد.

نکته

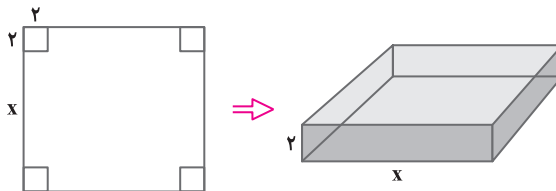
اگر  $a$  یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 = a$  عبارت‌اند از:

$$x = -\sqrt{a} \quad \text{و} \quad x = \sqrt{a}$$

صفحه ۷۲ و ۷۳ کتاب درسی

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جدا شده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از:

$$2x^2 = (x)(x)(2) = 2x^2$$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باید باشد، داریم:  $2x^2 = 200$ . بنابراین  $x^2 = 100$  و با محاسبه ریشه‌های دوم این معادله، جواب‌های  $x = \pm 10$  به دست می‌آید.

و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها  $x = 10$  مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه  $10 + 4 = 14$  سانتی‌متر است.



## کار در کلاس

صفحه ۷۳ کتاب درسی

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید.

الف)  $5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x = \pm 2$

ب)  $t^2 + 7 = 0 \Rightarrow t^2 = -7$

مربع یک عدد مانند  $t^2$ ، همواره نامنفی است و هرگز نمی‌تواند با یک عدد منفی مانند  $-7$  برابر باشد. پس این معادله جواب ندارد.

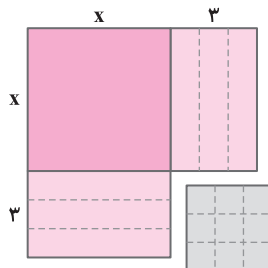
پ)  $(r-2)^2 = 16 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} r-2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} r-2 = 4 \Rightarrow r = 4+2 \Rightarrow r = 6 \\ r-2 = -4 \Rightarrow r = -4+2 \Rightarrow r = -2 \end{cases}$

## فعالیت

صفحه ۷۳ کتاب درسی

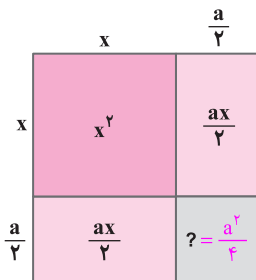
۱) دوجمله‌ای  $x^2 + 6x$  را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دوجمله‌ای اضافه شود تا چندجمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$



اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید، چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟ هر دو طرف تساوی، مساحت کل شکل را محاسبه می‌کنند. عبارت سمت راست تساوی، یعنی  $(x+3)^2$ ، مساحت شکل را به عنوان یک مربع بزرگ به طول ضلع  $x+3$  حساب می‌کند و عبارت سمت چپ تساوی، یعنی  $x^2 + 6x + 9$ ، مجموع مساحت‌های ۴ قسمت مشخص شده روی شکل است. همان‌طور که دیده می‌شود، عدد ۹ مساحت مربع کوچک به ضلع ۳ است که با اضافه کردن آن، کل شکل به یک مربع کامل تبدیل می‌شود.

۲) اگر  $a$  یک عدد حقیقی باشد، به دوجمله‌ای  $x^2 + ax$  چه جمله‌ای باید اضافه شود



تا به شکل مربع کامل درآید؟  $\frac{a^2}{4}$

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$



اگر بخواهیم معادله درجه دوم را به روش مربع کامل حل کنیم، باید به دوجمله‌ای  $x^2 + ax$ ، جمله  $\frac{a^2}{4}$  را اضافه کنیم. یعنی ضرب  $x$  را ابتدا نصف می‌کنیم  $\left(\frac{a}{2}\right)$  و سپس آن را به توان ۲ می‌رسانیم، یعنی  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ . در این صورت می‌توانیم به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، معادله را حل کنیم.



## مثال

معادله  $x^2 - 6x + 4 = 0$  را به روش مربع کامل حل می‌کنیم.

صفحه ۷۳ کتاب درسی

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

معادله درجه دوم

$$x^2 - 6x = -4$$

به دو طرف معادله،  $-4$  را اضافه کرده‌ایم

$$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$$

به دو طرف معادله  $9$  را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x - 3)^2 = 5$$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم

$$x - 3 = \pm\sqrt{5}$$

از دو طرف معادله، ریشه دوم می‌گیریم

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

به دو طرف معادله عدد  $3$  را اضافه کرده‌ایم

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از  $3 + \sqrt{5}$  و  $3 - \sqrt{5}$ .

## کار در کلاس

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ x^2 + 2x = 24 \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$a = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 24 + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 25 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x+1 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 5 \Rightarrow x = 4 \\ x+1 = -5 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ t^2 + 3t = 3 \end{array} \quad \text{ب)}$$

$$a = 3 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 + 3t + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} t + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{21} - 3}{2} \\ t + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow t = \frac{-\sqrt{21} - 3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ n^2 - 4n + 5 = 0 \end{array} \quad \text{پ)}$$

$$a = -4 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 4$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n + 4 = -5 + 4 \Rightarrow \underbrace{(n-2)^2}_{\text{نامنفی}} = \underbrace{-1}_{\text{منفی}}$$

این معادله جواب ندارد، زیرا یک عبارت نامنفی نمی‌تواند برابر با یک عدد منفی شود.

$$\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ 2r^2 + r - 2 = 0 \end{array} \quad \text{ت)}$$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 2r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} = 2 + \frac{1}{16} \Rightarrow \left(r + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} r + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \\ r + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow r = \frac{-\sqrt{17} - 1}{4} \end{cases}$$



## فعالیت

صفحه ۷۴ کتاب درسی

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  که در آن  $a \neq 0$  است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟

معلم: بله. برای حل معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف معادله را بر  $a$  تقسیم می‌کنیم

به دو طرف معادله،  $\frac{c}{a}$  را اضافه کرده‌ایم

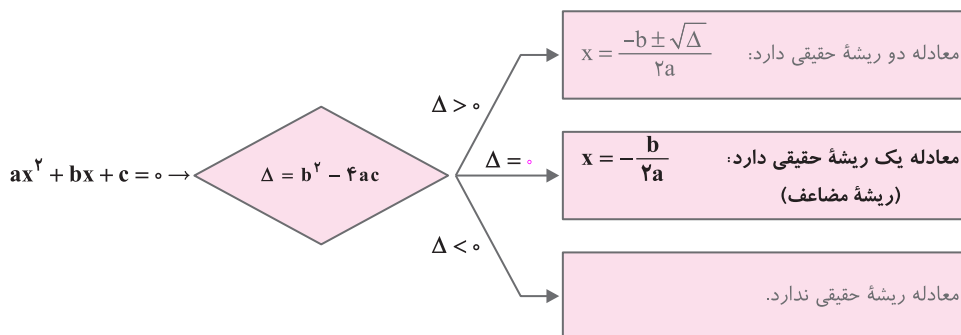
به دو طرف معادله،  $\frac{b^2}{4a^2}$  را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ، مربع کامل شود

دو طرف را ساده کرده‌ایم

## کار در کلاس

صفحه ۷۵ کتاب درسی

۱) با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.



۲) معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف)  $x^2 - x + 1 = 0$

$a = 1, b = -1, c = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \xrightarrow{\Delta < 0}$  معادله ریشه حقیقی ندارد.

ب)  $-2x^2 + x + 3 = 0$

$a = -2, b = 1, c = 3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-2)(3) = 1 + 24 = 25 \xrightarrow{\Delta > 0}$  معادله دو ریشه حقیقی دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پ)  $-x^2 + 4x - 4 = 0$

$a = -1, b = 4, c = -4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0}$  معادله یک ریشه مضاعف دارد.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x = 2$$



## تمرین

صفحه ۷۶ و ۷۷ کتاب درسی

۱)  $x^2 - 1 \mid x = -1$

① معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$x^2 - 1 \mid x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

۲)  $5t^2 = 2$

$$5t^2 - 2 = 0 \Rightarrow 5(t^2 - \frac{2}{5}) = 0 \Rightarrow 5(t-2)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-2=0 \Rightarrow t=2 \\ t+2=0 \Rightarrow t=-2 \end{cases}$$

۳)  $5a^2 - 7a = 2a(a-3)$

$$5a^2 - 7a = 2a^2 - 6a \Rightarrow 5a^2 - 2a^2 - 7a + 6a = 0 \Rightarrow 3a^2 - a = 0 \Rightarrow a(3a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3a-1=0 \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

۴)  $4k^2 - 12k + 8 = 0$

$$4(k^2 - 3k + 2) = 0 \Rightarrow 4(k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k-2=0 \Rightarrow k=2 \end{cases}$$

② هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

۱)  $n^2 - 2 = 26$

$$n^2 = 26 + 2 \Rightarrow n^2 = 28 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} n = \pm\sqrt{28} = \pm\sqrt{4 \times 7} = \pm 2\sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} n = 2\sqrt{7} \\ n = -2\sqrt{7} \end{cases}$$

۲)  $x^2 + 12 = 3$

معادله ریشه حقیقی ندارد.  $x^2 = -9 \Rightarrow \begin{matrix} \text{منفی} \\ \text{نامنفی} \end{matrix}$

۳)  $(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} 3t-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3t-2=2 \Rightarrow 3t=4 \Rightarrow t=\frac{4}{3} \\ 3t-2=-2 \Rightarrow 3t=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

۴)  $3-3k = 3k(2k-1) \Rightarrow 3-3k = 6k^2 - 3k \Rightarrow -6k^2 - 6k^2 + 3k = -3 \Rightarrow -6k^2 = -3$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} k = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

③ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱)  $x^2 - 6x = 7$   $a = -6 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 9$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 7 + 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 16 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x-3 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=4 \Rightarrow x=4+3 \Rightarrow x=7 \\ x-3=-4 \Rightarrow x=-4+3 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$





$$۲) s^2 - 3s + 3 = 0 \Rightarrow s^2 - \overset{a}{3}s = -3 \quad a = -3 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4} \Rightarrow \text{این معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$۳) r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 + \overset{a}{4}r = -4 \quad a = 4 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 4$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = -4 + 4 \Rightarrow (r+2)^2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} r+2=0 \Rightarrow r=-2$$

توجه داشته باشید که صفر، فقط یک ریشه دوم دارد و آن هم خود صفر است.

$$۴) 2a^2 + 5a - 3 = 0 \xrightarrow{+2} a^2 + \frac{5}{2}a = \frac{3}{2} \quad a = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} \Rightarrow \left(a + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{12}{4} \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

۴) هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$۱) 4x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$a=4, b=-13, c=3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(4)(3) = 169 - 48 = 121 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{121}}{2(4)} = \frac{13 \pm 11}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13+11}{8} = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{13-11}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$۲) r - r^2 = 3 \Rightarrow -r^2 + r - 3 = 0$$

$$a=-1, b=1, c=-3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(-3) = 1 - 12 = -11 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$۳) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \Rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0$$

$$a=1, b=2\sqrt{3}, c=-9 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9) = 12 + 36 = 48 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد.}$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2(1)} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = \sqrt{3} \\ a_2 = \frac{-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{-6\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \Rightarrow a_2 = -3\sqrt{3} \end{cases}$$



$$۴) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} ۲t^2 - 3t - 9 = 0$$

معادله دو ریشه حقیقی دارد.  $\Delta > 0 \Rightarrow a = 2, b = -3, c = -9 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{3 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow t_1 = 3 \\ t_2 = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

۵) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱)  $2x^2 = 250$

حل به روش ریشه‌گیری:

$$x^2 = \frac{250}{2} \Rightarrow x^2 = 125 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x = \pm \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = 5\sqrt{5}, x_2 = -5\sqrt{5}$$

۲)  $9 - 6z + z^2 = 0$

حل به روش مربع کامل:

$$z^2 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow (z - 3)^2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$$

۳)  $4a^2 + 3a = 1 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 1 = 0$

حل به روش فرمول کلی:

معادله دو ریشه حقیقی دارد.  $\Delta > 0 \Rightarrow a = 4, b = 3, c = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(4)} = \frac{-3 \pm 5}{8} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-3+5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{-3-5}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \Rightarrow a_2 = -1 \end{cases}$$

۴)  $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

حل به روش فرمول کلی:

معادله دو ریشه حقیقی دارد.  $\Delta > 0 \Rightarrow a = 1, b = \sqrt{2}, c = -4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4(1)(-4) = 2 + 16 = 18$

$$b = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow b_1 = \sqrt{2} \\ b_2 = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

۶) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

اگر عدد فرد اول را  $x$  در نظر بگیریم، عدد فرد بعدی  $x+2$  خواهد بود، زیرا فاصله هر دو عدد فرد متوالی، برابر ۲ است. بنابراین:

$$x^2 + (x+2)^2 = 290 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 290 \xrightarrow{-290} x^2 + 2x + 2 = 145$$

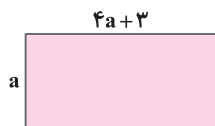
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 - 145 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 143 = 0 \Rightarrow (x+13)(x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+13 = 0 \Rightarrow x = -13 \Rightarrow x+2 = -11 \\ x-11 = 0 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow x+2 = 13 \end{cases}$$

پس مسئله دو دسته جواب دارد:  $\{11, 13\}$  و  $\{-13, -11\}$ .



- ۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.



$$4a + 3 = \text{طول و } a = \text{عرض}$$

$$\text{مساحت} = a(4a + 3) = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0$$

$$a = 4, b = 3, c = -45 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(4)(-45)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 + 720 = 729 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد.}$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2(4)} = \frac{-3 \pm 27}{8} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow a_1 = \text{عرض} = 3 \text{ cm} \\ \Rightarrow \text{طول} = 4a_1 + 3 = 4(3) + 3 = 15 \text{ cm} \\ a_2 = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} = -\frac{15}{4} \\ \Rightarrow \text{اندازه ضلع نمی‌تواند منفی باشد، پس قابل قبول نیست.} \end{cases}$$

## ریاضی

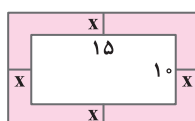
فصل ۴

- ۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$\begin{cases} \text{سن برادر کوچکتر} = x \\ \text{سن برادر بزرگتر} = x + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{پس از ۴ سال}} \begin{cases} \text{سن برادر کوچکتر} = x + 4 \\ \text{سن برادر بزرگتر} = x + 4 + 4 = x + 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x + 8) = 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 - 60 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل به روش تجزیه}} (x + 14)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14 \text{ سن نمی‌تواند منفی باشد، پس این جواب قابل قبول نیست.} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{سن برادر بزرگتر} = 2 + 4 = 6 \end{cases}$$



- ۹ یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد.

اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

$$\text{مساحت قاب عکس} = (\underbrace{2x + 10}_{\text{عرض}})(\underbrace{2x + 15}_{\text{طول}}) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 25x - 75 = 0$$

$$a = 2, b = 25, c = -75 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (25)^2 - 4(2)(-75) = 625 + 600 = 1225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25 \pm \sqrt{1225}}{2(2)} = \frac{-25 \pm 35}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-25 + 35}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow x_1 = 2.5 \\ x_2 = \frac{-25 - 35}{4} = \frac{-60}{4} = -15 \\ \Rightarrow x \text{ نمی‌تواند منفی باشد، پس قابل قبول نیست.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{سانتی‌متر طول} = 2x + 15 = 2(2.5) + 15 = 5 + 15 = 20 \\ \text{سانتی‌متر عرض} = 2x + 10 = 2(2.5) + 10 = 5 + 10 = 15 \end{cases} \Rightarrow \text{بنابراین ابعاد این قاب عکس ۲۰ در ۱۵ سانتی‌متر است.}$$



۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد،

تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد تیم‌ها برابر  $n$  باشد، چون هر تیم با  $n-1$  تیم بازی می‌کند، پس تعداد بازی‌ها  $n(n-1)$  است و چون بازی تیم  $A$  با تیم  $B$  همان بازی تیم  $B$  با تیم  $A$  است، بنابراین باید تعداد بازی‌ها را بر ۲

تقسیم کنیم و حاصل برابر  $\frac{n(n-1)}{2}$  می‌شود.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n^2 - n = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$$

تعداد تیم‌ها  $n-1=0 \Rightarrow n=1$  تعداد تیم‌ها  $n+9=0 \Rightarrow n=-9$  پس قابل قبول نیست.

اگر تعداد بازی‌های تیمگان  $N$  و تعداد تیم‌ها  $n$  باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به دست آورید.

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

اگر همه تیم‌ها فقط یک بار با هم بازی کنند  $N = n(n-1)$  اگر بازی‌ها به صورت رفت و برگشت باشند، یعنی تیم‌ها دو بار با هم بازی کنند

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه  $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$

محاسبه می‌شود که در آن،  $P$  فشار خون نرمال یک فرد با سن  $s$  است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

$$0.006s^2 - 0.02s + 120 = 125 \Rightarrow 0.006s^2 - 0.02s - 5 = 0 \xrightarrow{\times 1000} 6s^2 - 20s - 5000 = 0$$

$$a = 6, b = -20, c = -5000 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(6)(-5000)$$

معادله دو ریشه حقیقی دارد.  $\Delta > 0 \Rightarrow 400 + 120000 = 120400$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{120400}}{2(6)} \approx \frac{20 \pm 347}{12} \Rightarrow \begin{cases} s_1 \approx \frac{20 + 347}{12} = \frac{367}{12} \approx 30.5 \\ s_2 \approx \frac{20 - 347}{12} = \frac{-327}{12} \end{cases}$$

### درس دوم: سهمی

فعالیت صفحه ۷۸ کتاب درسی

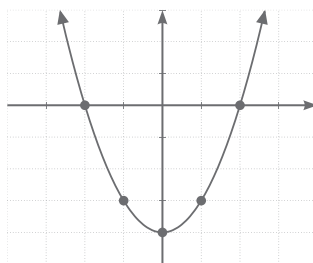
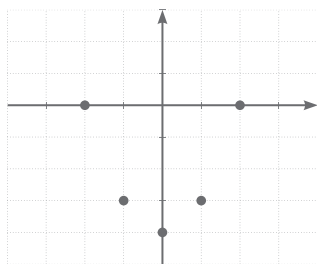
معادله  $y = x^2 - 4$  را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

$x$	$y = x^2 - 4$	$(x, y)$
-۲	$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$(-2, 0)$
-۱	$y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	$(-1, -3)$
۰	$y = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
۱	$y = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	$(1, -3)$
۲	$y = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$(2, 0)$



نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).



ب) پایین‌ترین نقطه این نمودار چه نقطه‌ای است؟  $(-4, 0)$  آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ بله، محور تقارن این نمودار، محور  $y$ ها  $(x = 0)$  است.

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ ۵ نقطه آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ بله، با ۳ نقطه هم می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم، ولی هر چه تعداد نقاط بیشتر باشد، می‌توانیم نمودار دقیق‌تری را رسم کنیم.

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور  $x$ ها در چه نقاطی است؟

منحنی رسم شده، در دو نقطه به طول ۲ و  $-2$  محور  $x$ ها را قطع کرده است. یعنی در نقاط  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$ .

## ریاضی

فصل ۴

فعالیت صفحه ۷۹ کتاب درسی

معادله یک سهمی به صورت  $y = x^2 - 4x + 5$  است.

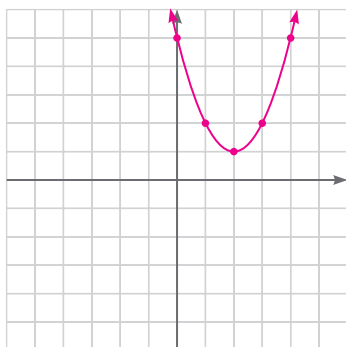
$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

ب) ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارات‌های مناسب پر کنید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$x$	$y = x^2 - 4x + 5$	$(x, y)$
۰	$y = 0^2 - 4(0) + 5 = 5$	$(0, 5)$
۱	$y = 1^2 - 4(1) + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$	$(1, 2)$
۲	$y = 2^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$	$(2, 1)$
۳	$y = 3^2 - 4(3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$	$(3, 2)$
۴	$y = 4^2 - 4(4) + 5 = 16 - 16 + 5 = 5$	$(4, 5)$



پ) پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.



ت) آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل  $y = (x-2)^2 + 1$  به دست آورید؟

بله، نقطهٔ  $(2, 1)$  (که رأس سهمی است) پایین‌ترین نقطهٔ سهمی است و برای به دست آوردن طول این نقطه، کافی است

عبارت داخل پرانتز را برابر صفر قرار دهیم:

$$y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow \text{رأس } (2, 1)$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

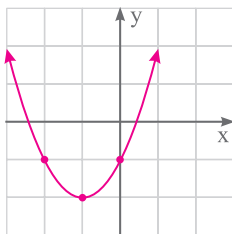
**نکته**

هر سهمی به صورت  $y = a(x-h)^2 + k$  که  $a \neq 0$  است، رأسی به مختصات  $(h, k)$  و خط تقارنی به معادلهٔ  $x = h$  دارد.

صفحهٔ ۸۰ کتاب درسی

کار در کلاس

۱) در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.



$$y = (x+1)^2 - 2 \quad \text{الف}$$

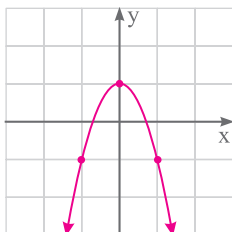
$x$	-2	-1	0
$y$	-1	-2	-1

ریاضی

فصل ۴

**نکته**

برای رسم سهمی، پس از محاسبهٔ مختصات رأس، یک نقطه در سمت راست و یک نقطه در سمت چپ رأس با فاصله‌های یکسان از آن را نیز به دست می‌آوریم تا بتوانیم سهمی را رسم کنیم.



$$y = -2x^2 + 1 \quad \text{ب}$$

$$y = -2x^2 + 1 = -2(x-0)^2 + 1 \Rightarrow \text{رأس } (0, 1)$$

$x$	-1	0	1
$y$	-1	1	-1

صفحهٔ ۸۰ کتاب درسی

فعالیت

معادلهٔ سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{سمت راست} = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow \text{ضریب } x = \frac{b}{a} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{b}{2a} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{b^2}{4a^2}$$

پس در این مرحله، عبارت  $\frac{b^2}{4a^2}$  را در داخل پرانتز، اضافه و کم می‌کنیم:

$$\text{سمت راست} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$  و خط تقارن آن نیز  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

برای به دست آوردن طول رأس سهمی، باید ریشه عبارت داخل پرانتز در عبارت  $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$  را به دست آوریم:

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \text{خط تقارن و طول رأس سهمی}$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \xrightarrow{x = -\frac{b}{2a}} y = a(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \Rightarrow y = \frac{4ac-b^2}{4a} \Rightarrow \text{عرض رأس سهمی}$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به صورت  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$  است.

صفحه ۸۱ کتاب درسی

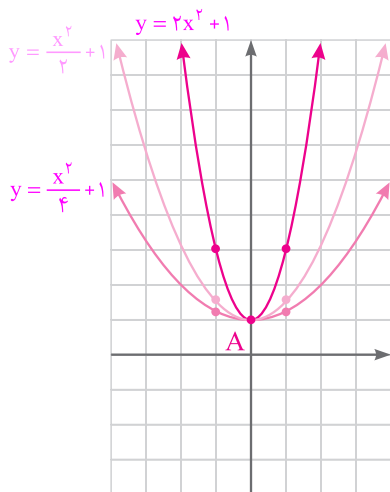
فعالیت

معادله دو سهمی به صورت  $y = \frac{x^2}{2} + 1$  و  $y = 2x^2 + 1$  است.

الف) مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه  $A(0, 1)$  است.

$$y = 2x^2 + 1 \Rightarrow y = 2(x-0)^2 + 1 \Rightarrow x = 0 \text{ طول رأس سهمی}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-0)^2 + 1 \Rightarrow x = 0 \text{ طول رأس سهمی}$$



x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)
-1	$y = 2(-1)^2 + 1 = 3$	$(-1, 3)$
0	$y = 2(0)^2 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 2(1)^2 + 1 = 3$	$(1, 3)$

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x, y)
-1	$y = \frac{(-1)^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	$(-1, \frac{3}{2})$
0	$y = \frac{0^2}{2} + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	$(1, \frac{3}{2})$

همان طور که از نمودارهای رسم شده دیده می شود، مختصات رأس هر دو سهمی، نقطه  $A(0, 1)$  است.

ب) معادله سهمی دیگری را که نقطه A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

$$y = \frac{1}{4}(x-0)^2 + 1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + 1 \Rightarrow \text{رأس } (0, 1)$$

x	-1	0	1
y	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$



تمرین

دریافتی در [gajmarket.com](http://gajmarket.com)

ریاضی

فصل ۴

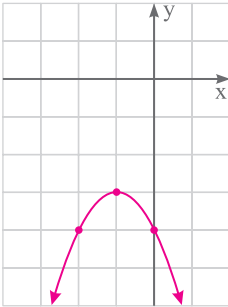
صفحه ۸۱ و ۸۲ کتاب درسی

۱) نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $y = -(x+1)^2 - 3$

$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \text{رأس} (-1, -3)$

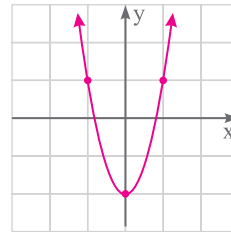
x	0	-1	-2
y	-4	-3	-4



ب)  $y = 3x^2 - 2$

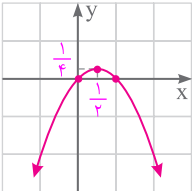
$\Rightarrow y = 3(x-0)^2 - 2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{رأس} (0, -2)$

x	-1	0	1
y	1	-2	1



پ)  $y = x - x^2 \Rightarrow y = -x^2 + x$

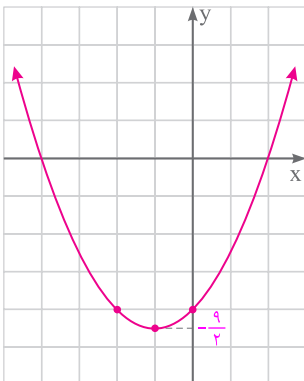
$\Rightarrow a=-1, b=1, c=0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}, y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(0) - (1)^2}{4(-1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{رأس} (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



x	0	1/2	1
y	0	1/4	0

ت)  $y = \frac{x^2}{4} + x - 4$

$\Rightarrow a=\frac{1}{4}, b=1, c=-4 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(\frac{1}{4})} = -1, y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(\frac{1}{4})(-4) - (1)^2}{4(\frac{1}{4})} = -\frac{9}{4} \Rightarrow \text{رأس} (-1, -\frac{9}{4})$



x	-2	-1	0
y	-4	-9/4	-4





۲ اگر  $(-2, 5)$  و  $(0, 5)$  دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید. با توجه به اینکه عرض دو نقطه

با هم برابر هستند، پس کافی است میانگین طول‌ها را به دست آوریم: خط تقارن سهمی  $x = \frac{-2+0}{2} = -1 \Rightarrow x = -1$

۳ نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$ ، محور  $y$ ‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$ ‌ها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است.

معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید. چون نمودار سهمی، محور  $y$ ‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، پس

نقطه  $A(0, 2)$  روی سهمی قرار دارد. از طرفی نمودار سهمی، محور  $x$ ‌ها را نیز در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع می‌کند، پس

نقاط  $B(-1, 0)$  و  $C(2, 0)$  روی سهمی قرار دارند. بنابراین:

$$A(0, 2), y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$$B(-1, 0), y = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 2 \Rightarrow 0 = a - b + 2 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (1)$$

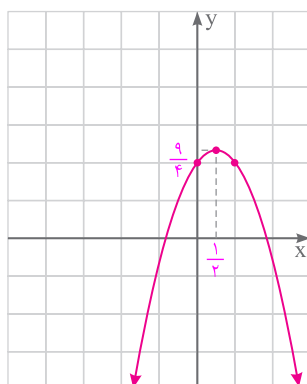
$$C(2, 0), y = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + 2 \Rightarrow 0 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow -4a - 2b = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} -a + b = 2 \\ -4a - 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ -4a - 2b = 2 \end{cases}$$

$$-6a = 6 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -a + b = 2 \Rightarrow 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین معادله سهمی به این صورت خواهد بود:  $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = -x^2 + x + 2$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(2) - (1)^2}{4(-1)} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{رأس} \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$



x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	$\frac{9}{4}$	2

۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$  که  $\alpha < \beta$  است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویه

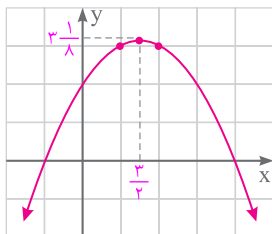
$\alpha$  را انتخاب می‌کند و مسیری طی شده از رابطه  $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x + 2$  به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویه  $\beta$  را انتخاب می‌کند و مسیری طی شده

از رابطه  $y = -2x^2 + 3x + 2$  به دست می‌آید. در هر دو معادله،  $y$  ارتفاع وزنه از سطح زمین و  $x$  مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

$$A \text{ وزنه } y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}, c = 2$$

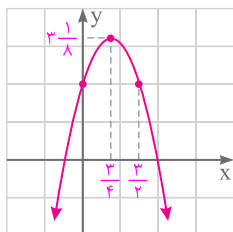
$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = -\frac{\frac{3}{4}}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{3}{2}, y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-\frac{1}{4})(2) - (\frac{3}{4})^2}{4(-\frac{1}{4})} = \frac{-4 - \frac{9}{16}}{-1} = 4 + \frac{9}{16} = 4\frac{9}{16} \Rightarrow \text{رأس} \left(\frac{3}{2}, 4\frac{9}{16}\right)$$



x	۱	$\frac{3}{2}$	۲
y	۳	$3\frac{1}{8}$	۳

B وزنه:  $y = -2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow a = -2, b = 3, c = 2$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}, y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(2) - (3)^2}{4(-2)} = \frac{-16 - 9}{-8} = 3\frac{1}{8} \Rightarrow \text{رأس} \left(\frac{3}{4}, 3\frac{1}{8}\right)$$



x	۰	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
y	۲	$3\frac{1}{8}$	۲

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

A وزنه:  $y = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{محل برخورد وزنه A با محور xها: } (4, 0) \text{ و } (-1, 0) \Rightarrow \text{مسافت افقی طی شده} = 4 - (-1) = 5$$

B وزنه:  $y = 0 \Rightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, b = 3, c = 2$

$\Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(-2)(2) = 9 + 16 = 25 \xrightarrow{\Delta > 0}$  معادله دو ریشه حقیقی دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+5}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-3-5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{محل برخورد وزنه B با محور xها: } \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ و } (2, 0)$$

بنابراین وزنه A مسافت افقی بیشتری را طی کرده است.  $\Rightarrow \text{مسافت افقی طی شده} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = 2.5$

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

بیشترین ارتفاع وزنه A از سطح زمین، برابر  $3\frac{1}{8}$  و بیشترین ارتفاع وزنه B از سطح زمین نیز برابر  $3\frac{1}{8}$  است، در نتیجه هر دو وزنه به یک اندازه از سطح زمین، ارتفاع پیدا کرده‌اند.



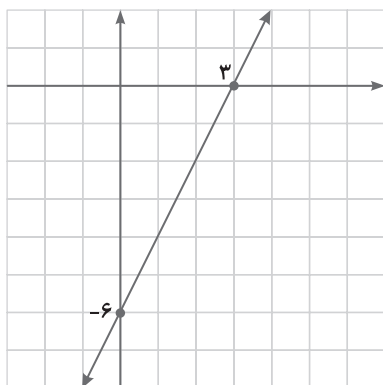
ارتفاع وزنه‌ها، در حقیقت، عرض رأس سهمی است.



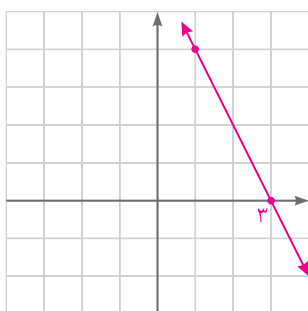
## درس سوم: تعیین علامت

## فعالیت

صفحه ۸۳ و ۸۴ کتاب درسی

۱) نمودار خط  $y = 2x - 6$  در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن،علامت  $y$  را در جدول زیر بنویسید.

$x$	$x < 3$	$3$	$x > 3$
$y = 2x - 6$	-	۰	+

۲) نمودار خط  $y = -2x + 6$  را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت  $y$  رابرای  $x$  های مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

$x$	۱	۳
$y$	۴	۰

$x$	$x < 3$	$3$	$x > 3$
$y = -2x + 6$	+	۰	-

۳) در دو قسمت بالا علامت عددی که ضرب  $x$  است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟ جای

علامت‌های مثبت و منفی مربوط به  $y$  را جابه‌جا کرده است. یعنی در جدول بالایی، علامت (+) در سمت راست صفر و علامت (-) در سمت چپ صفر است، ولی در جدول پایینی، علامت (+) در سمت چپ صفر و علامت (-) در سمت راست صفر است.

۴) نشان دهید که علامت عبارت  $y = ax + b$ ، برای  $x$  های مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

$x$	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت $a$	۰	موافق علامت $a$

حالت اول: فرض می‌کنیم  $x < -\frac{b}{a}$  باشد، در این صورت:

$$\text{اگر } a < 0 \Rightarrow ax > a\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \underbrace{ax + b}_y > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow a < 0, y > 0$$

$$\text{اگر } a > 0 \Rightarrow ax < a\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow ax < -b \Rightarrow \underbrace{ax + b}_y < 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow a > 0, y < 0$$

همان‌طور که دیده می‌شود، اگر  $x < -\frac{b}{a}$  باشد، آنگاه علامت  $y$  مخالف علامت  $a$  است.حالت دوم: فرض می‌کنیم  $x = -\frac{b}{a}$  باشد، در این صورت:

$$x = -\frac{b}{a} \xrightarrow{\times a} ax = a\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \underbrace{ax + b}_y = 0 \Rightarrow y = 0$$



همان‌طور که دیده می‌شود، اگر  $x = -\frac{b}{a}$  باشد، آنگاه مقدار  $y$  برابر با صفر خواهد بود.

حالت سوم: فرض می‌کنیم  $x > -\frac{b}{a}$  باشد، در این صورت:

$$\text{اگر } a < 0 \Rightarrow ax < a\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow ax < -b \Rightarrow \frac{ax+b}{y} < 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow a < 0, y < 0$$

$$\text{اگر } a > 0 \Rightarrow ax > a\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \frac{ax+b}{y} > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow a > 0, y > 0$$

همان‌طور که دیده می‌شود، اگر  $x > -\frac{b}{a}$  باشد، آنگاه علامت  $y$  موافق علامت  $a$  است.

مثال ..... صفحه ۸۴ کتاب درسی

عبارت  $y = 5x - 2$  را تعیین علامت می‌کنیم.

ریشه عبارت  $5x - 2 = 0$  از معادله  $5x - 2 = 0$  به دست می‌آید که برابر  $x = \frac{2}{5}$  است.

با توجه به اینکه علامت ضریب  $x$ ؛ یعنی  $a = 5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

$x$	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	۰	+

مقدار  $y$  را برای  $x = 3$  و  $x = -1$  به دست آورید و صحت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$x = 3 \Rightarrow y = 5(3) - 2 = 13 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{5}, y > 0 \quad \text{و} \quad x = -1 \Rightarrow y = 5(-1) - 2 = -7 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{5}, y < 0$$

همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای  $x > \frac{2}{5}$  علامت  $y$ ، مثبت و به ازای  $x < \frac{2}{5}$  علامت  $y$ ، منفی است.

مثال ..... صفحه ۸۵ کتاب درسی

$x$	$\frac{1}{2}$	۳
$2x - 1$	-	+
$3 - x$	+	-
$A$	-	-

دقت کنید که روی ستون‌ها نیز قاعده ضرب انجام شده است.

مقدار  $A$  را برای  $x = 4$  و  $x = 0$  به دست آورید و صحت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$A = (2x - 1)(3 - x) \xrightarrow{x=4} A = 7 \times (-1) = -7 \Rightarrow x > 3, A < 0$$

$$A = (2x - 1)(3 - x) \xrightarrow{x=0} A = (-1) \times (3) = -3 \Rightarrow x < \frac{1}{2}, A < 0$$

همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای  $x > 3$  یا  $x < \frac{1}{2}$  علامت  $A$ ، منفی است.



## صفحه ۸۵ کتاب درسی

## کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف)  $A = (3x+1)(x-2)$

$$\begin{cases} 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{3}$		2		
$3x+1$	-	o	+	+	
$x-2$	-	-	o	+	
A	+	o	-	o	+

ب)  $B = (2x-3)^2 \Rightarrow B = (2x-3)(2x-3)$

$$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

چون توان  $2x-3$  برابر با ۲ است، در جدول، دو ردیف را به  $2x-3$  اختصاص می‌دهیم.

x	$\frac{3}{2}$		
$2x - 3$	-	o	+
$2x - 3$	-	o	+
B	+	o	+

## ریاضی

فصل ۴

پ)  $C = x^3(y-x) \Rightarrow C = x \cdot x \cdot x \cdot (y-x)$

$$\begin{cases} x=0 \\ y-x=0 \Rightarrow x=y \end{cases}$$

چون توان  $x$ ، برابر ۳ است، در جدول، سه ردیف را به  $x$  اختصاص می‌دهیم.

X	Y				
X	-	o	+	+	
X	-	o	+	+	
X	-	o	+	+	
Y-X	+	+	o	-	
C	-	o	+	o	-

ت)  $D = \frac{x-1}{5-2x}$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 5-2x=0 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

x	1		$\frac{5}{2}$	
$x-1$	-	o	+	+
$5-2x$	+	+	o	-
D	-	o	+	-

تعریف نشده

چون  $\frac{5}{2}$  باعث صفر شدن مخرج کسر و در نتیجه تعریف نشدن  $D$  می‌شود، پس در ردیف مربوط به  $D$  برای  $\frac{5}{2}$  «تعریف نشده» می‌نویسیم.

توجه



## فعالیت

صفحه ۸۶ کتاب درسی

۱) فرض کنید که معادله  $P(x) = 0$ ، دو ریشه متمایز  $x_1$  و  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) داشته و به شکل  $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت  $P(x)$  را برای  $x$  های مختلف تعیین کنید.

$x$	$x_1$	$x_2$
$x - x_1$	-	+
$x - x_2$	-	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	+
$P(x)$	موافق علامت $a$	مخالف علامت $a$

۲) اگر معادله  $P(x) = 0$  ریشه مضاعف برابر با  $x_1$  داشته باشد، می‌توانیم  $P(x) = a(x-x_1)^2$  بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت  $P(x)$  را برای  $x$  های مختلف تعیین کنید.

$x$	$x_1$
$(x - x_1)^2$	+
$P(x)$	موافق علامت $a$

۳) اکنون فرض کنید  $\Delta < 0$  باشد، در این صورت معادله  $P(x) = 0$  ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه  $P(x) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  علامت  $P(x)$  را در جدول زیر تعیین کنید.

$x$	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت $a$

$$\left. \begin{aligned} \Delta < 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Rightarrow P(x) = a \text{ علامت } a$$

۴) با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر  $P(x)$  برای هر  $x \in \mathbb{R}$  مثبت باشد،  $a$  و  $\Delta$  چه علامتی دارند؟ برای وقتی که  $P(x)$  منفی است، نیز علامت  $a$  و  $\Delta$  را تعیین کنید.

با توجه به فعالیت (۳)، اگر  $P(x)$  برای هر  $x \in \mathbb{R}$  مثبت باشد:

$$\Delta < 0 \text{ و } a > 0$$

اگر  $P(x)$  برای هر  $x \in \mathbb{R}$  منفی باشد:

$$\Delta < 0 \text{ و } a < 0$$



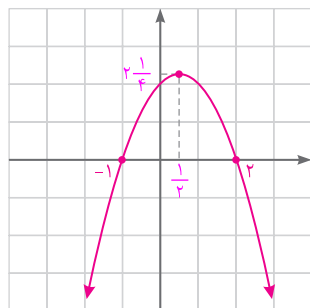
صفحه ۸۸ کتاب درسی

کار در کلاس

۱) چند جمله‌ای  $y = -x^2 + x + 2$  را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست‌آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

معادله دو ریشه حقیقی دارد.  $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \xrightarrow{\Delta > 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$



x	-1	2
$y = -x^2 + x + 2$	-	+

$$y = -x^2 + x + 2 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{رأس} \left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(2) - (1)^2}{4(-1)} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
y	0	$2\frac{1}{4}$	0

همان‌طور که در نمودار نیز مشخص است، اگر  $-1 < x < 2$  باشد، آنگاه  $y > 0$  و اگر  $x = -1$  یا  $x = 2$  باشد، آنگاه  $y = 0$  خواهد بود.

۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف)  $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x = \pm 3 \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	-3	$\frac{1}{3}$	3
$x^2 - 9$	+	-	+
$3x - 1$	-	-	+
A	-	+	+

ب)  $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

ریشه مضاعف  $-x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow -(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow -(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

مخرج  $x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 3$

معادله ریشه حقیقی ندارد.  $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11 \Rightarrow \Delta < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره مثبت}$

x	3
$-x^2 + 6x - 9$	-
$x^2 + x + 3$	+
B	-



## فعالیت

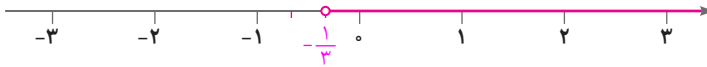
صفحه ۸۹ کتاب درسی

فرض کنید  $x$  متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$-2 < 3x - 1, \quad 3x - 1 \leq 8$$

۱) هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow -2 + 1 < 3x - 1 + 1 \Rightarrow -1 < 3x \xrightarrow{+3} -\frac{1}{3} < x$$



$$3x - 1 \leq 8 \Rightarrow 3x - 1 + 1 \leq 8 + 1 \Rightarrow 3x \leq 9 \xrightarrow{+3} x \leq 3$$



به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



## ریاضی

فصل ۴

۲) می‌توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به صورت  $-2 < 3x - 1 \leq 8$  بنویسیم. از خواص جمع

و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

به دو نامعادله  $+1$  را اضافه می‌کنیم.  $-2 < 3x - 1 \leq 8$

دو نامعادله را در  $\frac{1}{3}$  ضرب می‌کنیم.  $-1 < 3x \leq 9$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 3$$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

با جواب به دست آمده در بالا، برابر است.

نامعادله دوگانه فوق را به صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

صفحه ۹۰ کتاب درسی

## کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل

می‌کند، به صورت  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید  $15 \leq C \leq 25$ ;

سپس از رابطه داده شده، C را بر حسب F بنویسید و نامعادله دوگانه به دست آمده را حل کنید.)

$$15 \leq C \leq 25 \Rightarrow 15 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 25 \xrightarrow{\times 9} 135 \leq 5(F - 32) \leq 225 \xrightarrow{+5} 27 \leq F - 32 \leq 45$$

$$\xrightarrow{+32} 27 + 32 \leq \underbrace{F - 32 + 32}_{= F} \leq 45 + 32 \Rightarrow 59 \leq F \leq 77$$





صفحه ۹۰ کتاب درسی

## فعالیت

سهمی  $y = x^2 - 2x - 3$  را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از  $x$ ، نمودار سهمی، پایین محور

$x$  هاست؟

اگر  $-1 < x < 3$  باشد، نمودار سهمی، پایین محور  $x$  ها قرار می‌گیرد.

ب) جدول تعیین علامت عبارت  $y = x^2 - 2x - 3$  را رسم کنید و مشخص کنید

برای چه مقادیری از  $x$ ، علامت  $y$  منفی است؟

روش اول:

$$y = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{\text{تجزیه}} y = (x-3)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$x$	$-1$	$3$
$x-3$	$-$	$+$
$x+1$	$+$	$-$
$y = x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$

$$y = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow a=1, b=-2, c=-3$$

روش دوم:

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ معادله دو ریشه حقیقی دارد.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

$x$	$-1$	$3$
$y = x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$

همان‌طور که در هر دو روش مشاهده می‌شود، اگر  $-1 < x < 3$  باشد، علامت  $y$ ، منفی و در نتیجه نمودار سهمی پایین محور  $y$  ها خواهد بود.

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادله  $x^2 - 2x - 3 < 0$

استفاده کرد. برای حل این نامعادله، باید مقادیری از  $x$  را پیدا کنیم که به ازای آنها نمودار سهمی  $y = x^2 - 2x - 3$ ، پایین

محور  $x$  ها (یعنی  $y < 0$ ) باشد. همان‌طور که مشاهده شد، به ازای  $-1 < x < 3$  این اتفاق می‌افتد و در نتیجه مجموعه جواب

نامعادله  $x^2 - 2x - 3 < 0$  برابر  $-1 < x < 3$  است.



## کار در کلاس

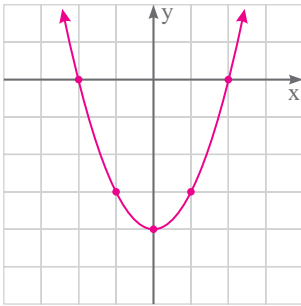
صفحه ۹۰ کتاب درسی

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف)  $x^2 \leq 4$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow y = x^2 - 4 \leq 0$$

روش هندسی:



چون  $y \leq 0$ ، بنابراین باید  $x$  هایی را پیدا کنیم که به ازای آنها، نمودار سهمی روی محور  $x$  ها یا پایین آن قرار گیرد.

$x$	-1	0	1
$y$	-3	-4	-3

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (2, 0), (-2, 0)$$

همان طور که دیده می شود، نمودار سهمی به ازای  $-2 \leq x \leq 2$  روی محور  $x$  ها یا پایین آن قرار دارد. بنابراین مجموعه جواب نامعادله  $x^2 \leq 4$  به صورت  $-2 \leq x \leq 2$  است.

$$x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow y = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

روش جدول تعیین علامت:

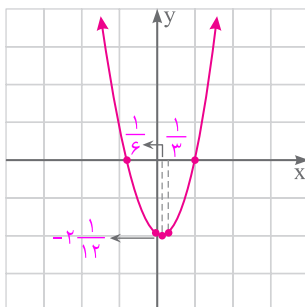
$x$	-2	2
$y \leq 0$	+	-
	جواب	جواب

با توجه به جدول، به ازای  $-2 \leq x \leq 2$ ،  $y = 0$  (نمودار سهمی روی محور  $x$  ها) یا  $y < 0$  (نمودار سهمی، پایین محور  $x$  ها) است؛ بنابراین مجموعه جواب نامعادله داده شده، به صورت  $-2 \leq x \leq 2$  است.

ب)  $3x^2 - x - 2 \geq 0$

$$y = 3x^2 - x - 2 \geq 0$$

روش هندسی:



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(3)(-2) - (-1)^2}{4(3)} = \frac{-24 - 1}{12} = \frac{-25}{12} = -2\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \text{رأس} \left( \frac{1}{6}, -2\frac{1}{12} \right)$$

$x$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$y$	-2	$-2\frac{1}{12}$	-2

$$\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها: } y = 0 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -1, c = -2$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ معادله دو ریشه حقیقی دارد.}$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow (1, 0), (-\frac{2}{3}, 0)$$

همان طور که دیده می‌شود، نمودار سهمی به ازای  $x \geq 1$  یا  $x \leq -\frac{2}{3}$  روی محور  $x$ ‌ها یا بالای آن قرار دارد. بنابراین مجموعه جواب

نامعادله  $3x^2 - x - 2 \geq 0$  به صورت  $x \geq 1$  یا  $x \leq -\frac{2}{3}$  است.

روش جدول تعیین علامت:

$$3x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow y = 3x^2 - x - 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -1, c = -2 \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$$

x	$-\frac{2}{3}$	1	
$y \geq 0$	+ جواب	- جواب	+ جواب

با توجه به جدول، به ازای  $x \geq 1$  یا  $x \leq -\frac{2}{3}$ ،  $y = 0$  (نمودار سهمی روی محور  $x$ ‌ها) یا  $y > 0$  (نمودار سهمی بالای محور  $x$ ‌ها) است؛ بنابراین مجموعه جواب نامعادله داده شده، به صورت  $x \geq 1$  یا  $x \leq -\frac{2}{3}$  است.

**فعالیت** صفحه ۹۱ و ۹۲ کتاب درسی

۱) نامعادله  $|x| \leq 3$  را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی  $x$  است که فاصله آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۲) نامعادله  $|x| \geq 3$  را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی  $x$  است که فاصله آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند. این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

$$x \leq -3 \text{ یا } x \geq 3 \Rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

۳) با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{cases} |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = [-3, 3] \\ |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{cases}$$



### نکته

اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $u$  یک عبارت جبری باشد، در این صورت:

۱- اگر  $a \geq u \geq -a$  آنگاه  $|u| \leq a$ .

۲- اگر  $u \geq a$  یا  $u \leq -a$  آنگاه  $|u| \geq a$ .

اگر در هریک از نامعادله‌ها علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ‌کدام از جواب‌ها نیز، علامت مساوی ندارند.

### کار در کلاس ..... صفحه ۹۳ کتاب درسی

۱) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف)  $|\frac{x}{3} + 1| < \frac{2}{3}$

$$-\frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} \xrightarrow{-1} -\frac{2}{3} - 1 < \frac{x}{3} < \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} -5 < x < -1 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-5, -1)$$

ب)  $|5 - 2x| \geq 1$

$$\begin{aligned} 5 - 2x \geq 1 &\Rightarrow -2x \geq 1 - 5 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow (-\infty, 2] \\ \text{یا} & \\ 5 - 2x \leq -1 &\Rightarrow -2x \leq -1 - 5 \Rightarrow -2x \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow [3, +\infty) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$



توجه: در حل نامعادله، اگر طرفین نامعادله را در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

۲) یک نامعادله قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه  $(1, 9)$  باشد.

$$|x - 5| < 4$$

برای به دست آوردن نامعادله، باید میانگین ۹ و ۱ را به دست آوریم و سپس  $x$  را منهای میانگین کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$1 < x < 9 \Rightarrow 1 - 5 < x - 5 < 9 - 5 \Rightarrow -4 < x - 5 < 4 \Rightarrow |x - 5| < 4$$

برای به دست آوردن نامعادله قدرمطلق که مجموعه جواب آن بازه  $(a, b)$  باشد، به این صورت عمل می‌کنیم:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

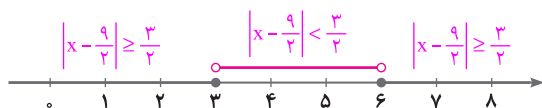
$$x \in (a, b) \Rightarrow a < x < b \xrightarrow{-c} a - c < x - c < b - c \xrightarrow{|a-c|=|b-c|=d} |x - c| < d$$

### نکته

در صورتی که مجموعه جواب به صورت  $[a, b]$  باشد، علامت‌های  $<$  یا  $>$  را به صورت  $\leq$  یا  $\geq$  استفاده می‌کنیم.



۳) یک نامعادله قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن  $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$  باشد.



می‌توانیم یک نامعادله برای مجموعه جواب  $(3, 6)$  مانند سؤال قبل بسازیم و در نهایت جهت نامساوی‌ها را برعکس کنیم.

$$\frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow 3 < x < 6 \Rightarrow 3 - \frac{9}{2} < x - \frac{9}{2} < 6 - \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x - \frac{9}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow |x - \frac{9}{2}| < \frac{3}{2}$$

بنابراین نامعادله مربوط به مجموعه جواب  $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$  به صورت  $|x - \frac{9}{2}| \geq \frac{3}{2}$  خواهد شد.

تمرین ..... صفحه ۹۳ کتاب درسی

۱) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف)  $1 < 2x - 3 \leq 3 \xrightarrow{+3} 4 < 2x \leq 6 \xrightarrow{+2} 2 < x \leq 3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب: } 2 < x \leq 3 \Rightarrow x \in (2, 3]$

## ریاضی

فصل ۴

ب)  $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

برای حل، دستگاه نامعادله‌های زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} x + 1 \leq 5 - x \Rightarrow x + 1 + x \leq 5 - x + x \Rightarrow 2x + 1 \leq 5 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] \\ 5 - x < 2x + 3 \Rightarrow 5 - x + x < 2x + 3 + x \Rightarrow 5 < 3x + 3 \Rightarrow 2 < 3x \Rightarrow x > \frac{2}{3} \Rightarrow x \in (\frac{2}{3}, +\infty) \end{cases}$$

مجموعه جواب:  $\frac{2}{3} < x \leq 2 \Rightarrow x \in (\frac{2}{3}, 2]$

اشتراک دو جواب را به دست می‌آوریم:

پ)  $-2 < \frac{5-x}{2} < 0 \xrightarrow{\times 2} -4 < 5-x < 0 \xrightarrow{-5} -9 < -x < -5 \xrightarrow{\times (-1)} 9 > x > 5$

$\Rightarrow$  مجموعه جواب:  $5 < x < 9 \Rightarrow x \in (5, 9)$

ت)  $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \Rightarrow A = \frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{صورت: } 4 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2 \\ \text{مخرج: } 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  مجموعه جواب:  $-\frac{1}{3} < x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\frac{1}{3}, 2]$

x	$-\frac{1}{3}$	2
$4-2x$	+	+
$3x+1$	-	+
$A \geq 0$	-	+

تعریف نشده

معادله ریشه حقیقی ندارد.  $\Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(1)(4) = -16 = -16 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  مجموعه جواب:  $x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$

x	0
x	-
$x^2 + 4$	+
$A < 0$	-

جواب



$$ج) \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \Rightarrow A = \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

$$\text{صورت : } x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.  $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$

x	-1	0	1
x	-	-	+
$x^2 - 1$	+	-	-
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+
$A \leq 0$	-	+	-
	جواب	جواب	جواب

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب : } x \leq -1 \text{ یا } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$ج) |7 - 2x| < 1$$

$$-1 < 7 - 2x < 1 \xrightarrow{-7} -1 - 7 < -2x < 1 - 7 \Rightarrow -8 < -2x < -6 \xrightarrow{+(-2)} 4 > x > 3$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب : } 3 < x < 4 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

$$ح) \left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 3+1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 4 \xrightarrow{\times 2} x-1 \geq 8 \Rightarrow x \geq 8+1 \Rightarrow x \geq 9 \Rightarrow x \in [9, +\infty) \\ \text{یا} \\ \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq -3+1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq -2 \xrightarrow{\times 2} x-1 \leq -4 \Rightarrow x \leq -4+1 \Rightarrow x \leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب : } x \leq -3 \text{ یا } x \geq 9 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$$

۲) به ازای چه مقادیری از k، عبارت  $A = x^2 + 3x + k$  همواره مثبت است؟ باید ۲ شرط به صورت هم‌زمان برقرار باشد:

۱- ضریب  $x^2$  باید مثبت باشد که در اینجا برقرار است:  $1 > 0$ .

$$2- \text{باید } \Delta < 0 \text{ باشد، پس: } \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \Rightarrow -4k < -9 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$$

۳) به ازای چه مقادیری از m، سهمی  $y = mx^2 - mx - 1$  همواره پایین محور x هاست؟

دو شرط باید به صورت هم‌زمان برقرار باشد:

۱- ضریب  $x^2$  باید منفی باشد که در این صورت، داریم:  $m < 0$  (۱)

$$2- \text{باید } \Delta < 0 \text{ باشد، پس: } \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta = (-m)^2 - 4(m)(-1) < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \Rightarrow m(m+4) < 0$$



به روش تعیین علامت، مجموعه جواب این نامعادله را به دست می‌آوریم:

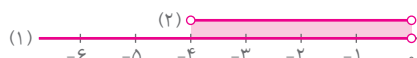
$$m(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m+4=0 \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب (۲): } -4 < m < 0$$

m	-4	0
m	-	-
m+4	-	+
m(m+4)	+	-

حالا اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم:

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -4 < m < 0 \Rightarrow \text{مجموعه جواب}$$



۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه  $t$  از رابطه  $h = -5t^2 + 18t + 13$  محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

$$h > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 13 > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t > 0 \Rightarrow A = t(-5t + 18) > 0$$

$$t(-5t + 18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -5t + 18 = 0 \Rightarrow t = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب: } 0 < t < \frac{18}{5}$$

t	0	$\frac{18}{5}$
t	-	+
-5t+18	+	-
A > 0	-	+

پس در فاصله زمانی  $0 < t < \frac{18}{5}$  یا  $t \in (\frac{18}{5}, 18)$  ارتفاع جسم از سطح زمین، بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود.

۵ تعداد ضربان قلب، پس از  $x$  دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه  $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$  به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟

$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0 \xrightarrow{\times 8} 15x^2 - 240x + 720 > 0$$

$$\Rightarrow 15(x^2 - 16x + 48) > 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} A = 15(x-4)(x-12) > 0$$

$$\Rightarrow 15(x-4)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x-12=0 \Rightarrow x=12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب: } x \in (-\infty, 4) \cup (12, +\infty)$$

x	4	12
x-4	-	+
x-12	-	+
A > 0	+	-

آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟ خیر، زیرا  $x$  بیانگر دقیقه است و زمان همواره مثبت است، یعنی تنها  $x$ های مثبتی که در مجموعه جواب هستند، قابل قبول هستند. پس مجموعه جواب قابل قبول در این تمرین، به این صورت است:

$$x \in [0, 4) \cup (12, +\infty)$$



## فصل ۵: تابع

### درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

فعالیت (۱) صفحه ۹۵ کتاب درسی

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد. دربارهٔ بقیهٔ جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	۱۹

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛  
یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش	پاک‌کن
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	۸۰۰

به هر کالا فقط یک قیمت می‌توان نسبت داد،  
یعنی یک کالای معین، دو قیمت متفاوت ندارد.

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	زبان
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹

به هر درس فقط یک نمره می‌توان نسبت داد،  
یعنی یک درس معین دو نمرهٔ متفاوت ندارد.

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	زینالی
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنج‌شنبه	سه‌شنبه

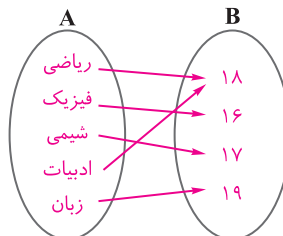
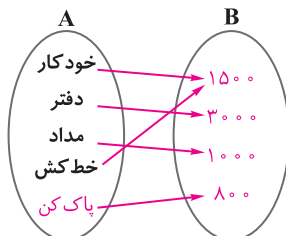
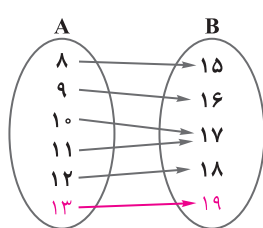
یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

فرد	رضا	محمد	علی	احسان	آرش	ایمان
سن (سال)	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹	۱۶	۱۹

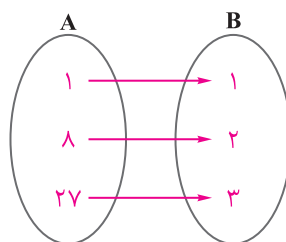
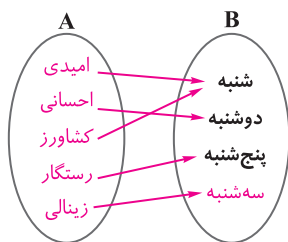
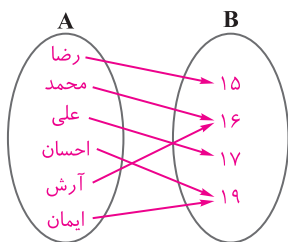
به هر شخص فقط یک سن را می‌توان نسبت داد،  
یعنی یک فرد مشخص در یک زمان معین دو سن متفاوت ندارد.

فعالیت (۲) صفحه ۹۶ کتاب درسی

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوهٔ نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.







برای تکمیل این مورد از مثال‌های مطرح شده در کلاس کمک بگیرید.

توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

### نکته

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

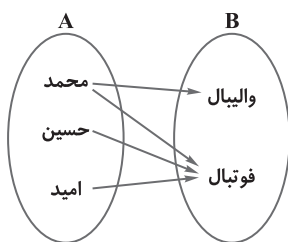
## ریاضی

### فصل ۵

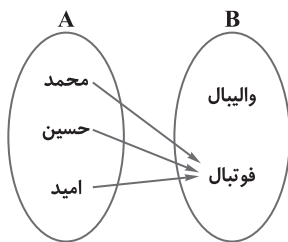
صفحه ۹۶ و ۹۷ کتاب درسی

## کار در کلاس

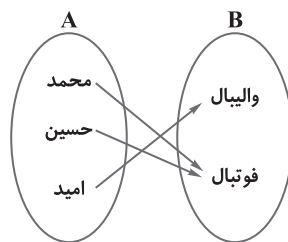
۱) مجموعه A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



نمودار (۱)



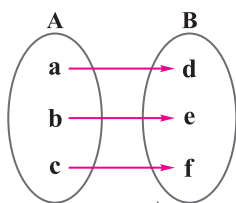
نمودار (۲)



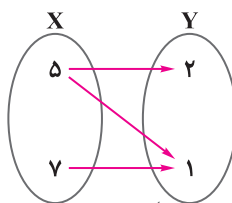
نمودار (۳)

نمودار (۱) تابع نیست، زیرا به یکی از اعضای مجموعه A (محمد) بیش از یک عضو از مجموعه B نسبت داده شده است. یعنی از یکی از عضوهای مجموعه A (محمد)، بیش از یک پیکان (۲ پیکان) خارج شده است. نمودارهای (۲) و (۳) تابع هستند، زیرا از هر عضو مجموعه A فقط یک پیکان خارج شده است.

۲) از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد.



تابع هست.



تابع نیست.



پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

پاسخ‌های متفاوتی به دست می‌آید ولی در همه پاسخ‌ها از هر عضو مجموعه A فقط یک پیکان خارج شده است و از هر عضو مجموعه X یا حداقل یکی از آنها، پیکانی خارج نشده است یا حداقل ۲ پیکان خارج شده است.

۳ الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟

بله، زیرا هر فرد، در یک زمان معین، فقط یک سن دارد.

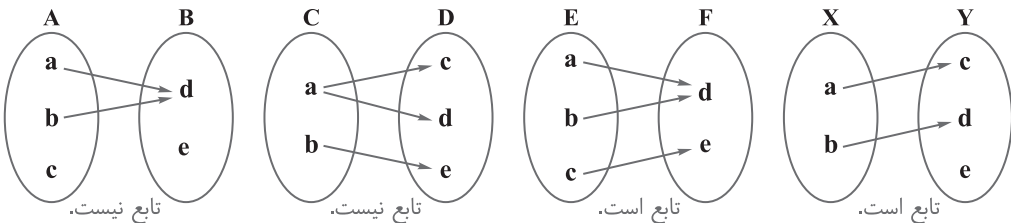
رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟

بله، زیرا هر فرد در یک زمان معین، فقط یک وزن دارد.

ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ خیر

توضیح دهید. ممکن است یک فرد، در یک زمان معین به چندین غذا علاقه داشته باشد.

۴ کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



توجه داشته باشید که نمودار پیکانی، زمانی یک تابع است که هر دو شرط زیر، همزمان برقرار باشند:

(۱) از هر عضو مجموعه اول، حتماً پیکان خارج شده باشد.

(۲) از هر عضو مجموعه اول، فقط یک پیکان خارج شده باشد.

فعالیت ..... صفحه ۹۷ و ۹۸ کتاب درسی

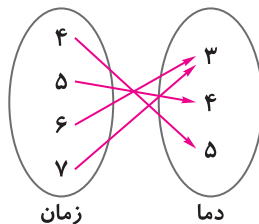
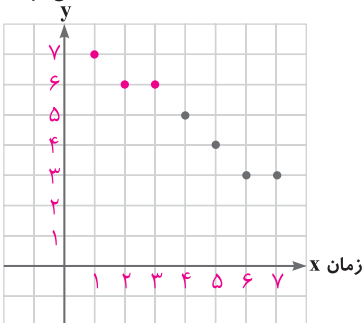
نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد.

رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ بله، زیرا به هر عضو

از مجموعه اول، فقط یک عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.

از جدول را هم کامل کنید.

دما (سانتی گراد)



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳

برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار، دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

$$g = \{(1, 7), (2, 6), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 3)\}$$

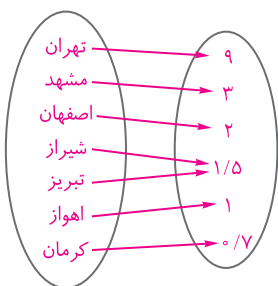


صفحه ۹۸ و ۹۹ کتاب درسی

کار در کلاس

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به‌طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت (میلیون)	۹	۳	۲	۱/۵	۱/۵	۱	۰/۷



رابطه بالا را به‌صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟ بله

$\{(۹, تهران), (۳, مشهد), (۲, اصفهان), (۱/۵, شیراز), (۱/۵, تبریز), (۱, اهواز), (۰/۷, کرمان)\}$

ریاضی

فصل ۵

۲ در هر سطر جدول زیر، نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

تابع	جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
نیست			$\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
است			$\{(2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$	به هر عدد طبیعی بین ۱ و ۵، مربع آن را نسبت می‌دهد.
نیست			$\{(4, 2), (4, -2), (\sqrt{7}, \sqrt{7}), (\sqrt{7}, -\sqrt{7})\}$	به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.



است			$\{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$	به اعداد صحیح بین $-2$ و $2$ دو برابر آنها را نسبت می‌دهد.
است			$\{(1, 1), (-1, -1)\}$	به عددهای $1$ و $-1$ ریشه سوم آنها را نسبت می‌دهد.

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟  $g = \{(1, 5), (2, 9), (2, 5), (3, 10)\}$

$$f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 10)\}$$

$f$  تابع است، زیرا هیچ یک از مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب باهم برابر نیستند، به عبارت دیگر، به هر مؤلفه اول، فقط یک مؤلفه دوم نسبت داده شده است.  $g$  تابع نیست، زیرا در دو زوج مرتب  $(2, 5)$  و  $(2, 9)$  مؤلفه‌های اول برابرند، به عبارت دیگر، به عدد  $2$  دو عدد متفاوت  $5$  و  $9$  نسبت داده شده است.

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید: اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.

تمرین ..... صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

۱) کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

تابع است، زیرا برای یک مربع با طول ضلع مشخص فقط یک عدد برای محیط می‌توان پیدا کرد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

تابع است، زیرا در یک زمان معین بدن هر فرد، نمی‌تواند دو دمای متفاوت داشته باشد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

تابع است، زیرا هر فرد فقط یک گروه خونی دارد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

تابع نیست، زیرا یک دانش‌آموز ممکن است چندین دوست داشته باشد.

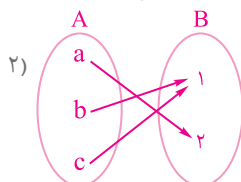
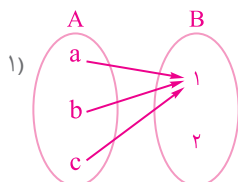
ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد. تابع نیست، زیرا هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم است؛ بنابراین به هر عدد مثبت، بیش از یک عدد، نسبت داده می‌شود.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد. تابع است، زیرا هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

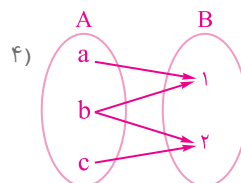
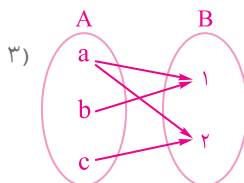


۲) مجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{1, 2\}$  داده شده‌اند.

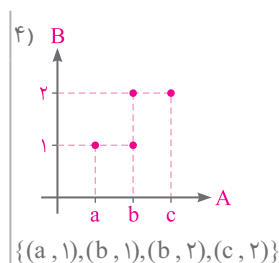
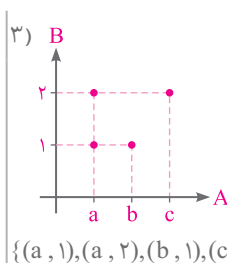
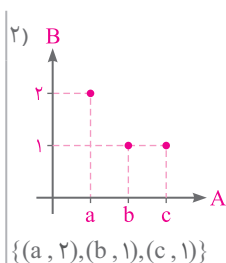
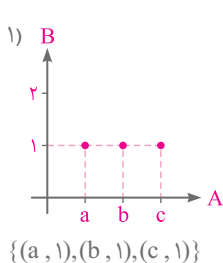
الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از  $A$  به  $B$  ارائه کنید که تابع باشند.



ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.



ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.



۳) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$  تابع نیست، زیرا دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه اول برابر یعنی:  $(3, -5)$  و  $(3, 7)$  وجود دارد.

$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$  تابع است، زیرا مؤلفه‌های اول هیچ دو زوج مرتبی، با هم برابر نیست.

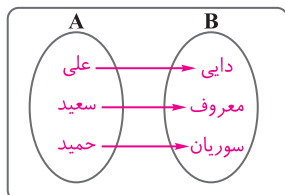
$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$  تابع است، زیرا مؤلفه‌های اول هیچ دو زوج مرتبی، با هم برابر نیست.

$k = \{(2, 5)\}$  تابع است، زیرا فقط یک زوج مرتب دارد.

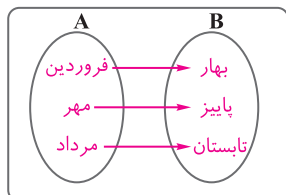
$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$  تابع است.

$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$  تابع است.

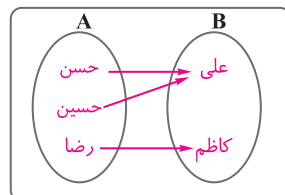
۴)  $A$  و  $B$  مجموعه‌هایی غیرعددی‌اند، در شکل زیر در  $A$  و  $B$  اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از  $A$  به  $B$  به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لاکل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



نام سه نفر را به نام خانوادگی‌شان نسبت می‌دهد.



هر ماه را به فصل مربوط به آن نسبت می‌دهد.



هر فرد را به پدرش نسبت می‌دهد.



## درس دوم: دامنه و برد توابع

### فعالیت

صفحه ۱۰۱ کتاب درسی

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چندضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چندضلعی
۵۴°	۳۶°	۳۶°	۱۸۰°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.  $f = \{(۵۴°, \text{پنج ضلعی}), (۳۶°, \text{لوزی}), (۳۶°, \text{مربع}), (۱۸۰°, \text{مثلث})\}$

چرا  $f$  یک تابع است؟ زیرا مؤلفه‌های اول تمام زوج‌های مرتب، با هم متفاوت هستند. به عبارت دیگر، مجموع زوایای داخلی هر چندضلعی، نمی‌تواند دو مقدار متفاوت داشته باشد.

### نکته

مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

### ریاضی

فصل ۵

در فعالیت بالا:  $f = \{\text{پنج ضلعی}, \text{لوزی}, \text{مربع}, \text{مثلث}\}$  دامنه  $f$

$f$  برد  $= \{۱۸۰, ۳۶۰, ۵۴۰\}$

### کار در کلاس

صفحه ۱۰۱ کتاب درسی

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۵	$\frac{۵}{۲}$	۲	$\frac{۳}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	محیط
۲۰	۱۰	۸	۶	۴	۲		

نمایش رابطه داده‌شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.  $f = \{(۱, ۲), (\frac{۳}{۲}, ۴), (\frac{۵}{۲}, ۶), (۲, ۸), (۳, ۱۰), (۵, ۲۰)\}$

چرا این رابطه تابع است؟ زیرا تمام مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب آن، متفاوت هستند.

دامنه و برد این تابع را بنویسید.  $f$  برد  $= \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۲۰\}$  دامنه  $f = \{۱, \frac{۳}{۲}, ۲, \frac{۵}{۲}, ۵\}$

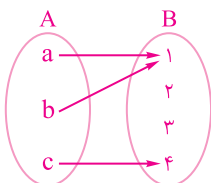
۲ الف تابعی مثال بنویسید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

$$f = \{(۱, ۵), (۲, ۶), (۳, ۵)\} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ دامنه} = \{۱, ۲, ۳\} \\ f \text{ برد} = \{۵, ۶\} \end{cases}$$

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر، زیرا اگر دامنه تعداد عضوهای کمتری نسبت به برد داشته باشد، در دو تا از زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول برابر خواهند شد.

۳ اگر  $f$  تابعی از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  باشد، می‌دانیم که دامنه  $f$  همان مجموعه  $A$  است. آیا همیشه برد تابع  $f$  با مجموعه  $B$

برابر است؟ خیر مثال بزنید.



برد تابع  $f$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $B$  است. مانند:

$$\Rightarrow f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 4)\} \Rightarrow f \text{ دامنه} = \{a, b, c\}, f \text{ برد} = \{1, 4\} \subseteq B$$



## فعالیت

صفحه ۱۰۲ کتاب درسی

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



جدول را کامل کنید.

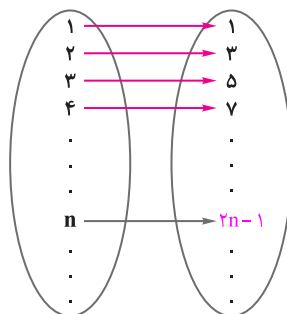
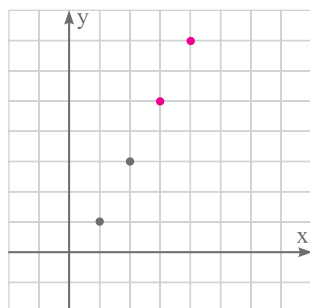
شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	$2n-1$	...

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ زیرا تمام اعداد سطر اول (مؤلفه‌های اول) با هم متفاوت هستند.

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100,199), \dots, (n, 2n-1), \dots\}$$

نمایش زوج مرتبی این تابع:

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.



دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$$f \text{ دامنه} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$f \text{ برد} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

$$f \text{ دامنه} = \text{مجموعه اعداد طبیعی}$$

$$f \text{ برد} = \text{مجموعه اعداد فرد}$$

## ریاضی

## فصل ۵

صفحه ۱۰۲ کتاب درسی

## کار در کلاس

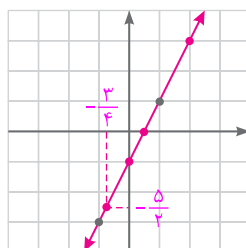
اگر تابعی با نمایش جبری  $f(n) = n^2 + 1$  داده شده باشد و دامنه آن  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد، برد تابع  $f$  را به دست آورید.

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2, \quad f(2) = 2^2 + 1 = 5, \quad f(3) = 3^2 + 1 = 10, \quad f(4) = 4^2 + 1 = 17 \Rightarrow f \text{ برد} = \{2, 5, 10, 17\}$$

توجه داشته باشید که  $f(n) = n^2 + 1$  بیانگر این است که زوج‌های مرتب این تابع، به صورت  $(n, n^2 + 1)$  هستند.

صفحه ۱۰۳ کتاب درسی

## کار در کلاس

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط  $y = 2x - 1$  استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-۲
y	۱	۳	۵	-۳	-۱	۰	$-\frac{5}{2}$	-۵

آیا می‌توانید شباهت و تفاوت این جدول را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ شباهت این جدول با جدول قبل، این است که در هر دو جدول رابطه بین سطر اول (x) و سطر دوم (y) به صورت  $y = 2x - 1$  است. در هر دو با کاهش x، y نیز کاهش می‌یابد. تفاوت دو جدول، در این است که در جدول فعالیت قبل (شماره شکل) متعلق به اعداد طبیعی بود ولی در این جدول x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.



چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را  $g$  بنامید. این جدول هم یک تابع است، زیرا به هر عضو از سطر اول ( $x$ )، فقط یک عضو از سطر دوم ( $y$ ) نسبت داده می‌شود.

نمودار این تابع و تابع داده‌شده در فعالیت قبل، چه تفاوتی باهم دارند؟ در نمودار تابع فعالیت قبل، نقاط به هم وصل نبودند (نقاط جدا از هم) ولی در این نمودار، نقاط به هم وصل هستند و تشکیل یک خط داده‌اند.

دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع  $f(n) = 2n - 1$  که در آن  $n \in \mathbb{N}$  مقایسه کنید.

چون تمام اعداد حقیقی می‌توانند به جای  $x$  قرار گیرند، پس دامنه تابع  $g$ ، برابر مجموعه اعداد حقیقی است. همچنین چون  $y = 2x - 1$  است؛ بنابراین  $y$  نیز می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند. پس:

$$\text{برد } g = \mathbb{R}, \text{ دامنه } g = \mathbb{R}$$

$$\text{برد } f \subseteq \text{برد } g, \quad \text{دامنه } f \subseteq \text{دامنه } g$$

بنابراین:

جاهای خالی را کامل کنید.

### نکته

برای کامل کردن جاهای خالی، می‌توانیم خط  $y = 2x - 1$  را به صورت  $g(x) = 2x - 1$  نشان دهیم و مقادیر داده‌شده را به جای  $x$  قرار دهیم.

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = 2\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{2}{5} - 1 = -\frac{7}{5}$$

$$g(0) = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$g(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 1$$

$$g(10) = 2(10) - 1 = 20 - 1 = 19$$

$$g(x) = 2x - 1$$

نمایش جبری تابع داده‌شده در این «کار در کلاس» را بنویسید.

که در اینجا  $x$  یک عدد حقیقی است.

### نکته

هر تابع که بتوان آن را به شکل  $y = ax + b$  نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

فعالیت صفحه ۱۰۳ و ۱۰۴ کتاب درسی

جدول زیر نشان‌دهنده وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

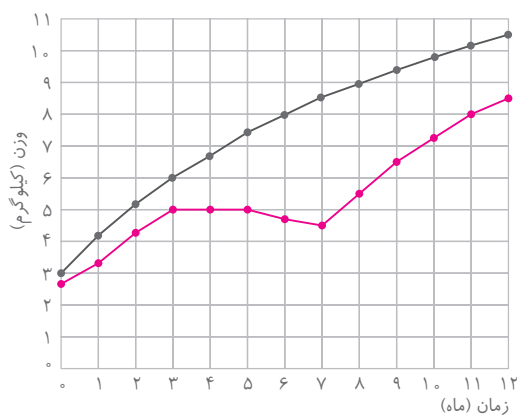
زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان‌دهنده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ وزن این کودک در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، به ۵ کیلوگرم رسیده است. در حالی که نمودار وزن یک کودک طبیعی (شکل (۱)) نشان می‌دهد که وزن طبیعی یک کودک در این مدت، باید تقریباً ۶ کیلوگرم باشد، پس در اینجا کندی رشد وجود دارد که با نمودار (ب) در شکل (۲) نشان داده می‌شود.





(ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ در فاصله زمانی ۳ تا ۵ ماهگی، وزن کودک در ۵ کیلوگرم ثابت مانده است.



(پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید.

نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی

به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک

از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

در زمان تولد، وزن کودک  $۲/۸$  کیلوگرم بوده است که نسبت

به وزن طبیعی یعنی  $۳$  کیلوگرم، مقدار  $۲/۰$  کیلوگرم کمتر است.

در فاصله تولد تا سه ماهگی، وزن کودک با کندی رشد مواجه

بوده است، به طوری که در ماه سوم به جای  $۶$  کیلوگرم وزن

دارای  $۵$  کیلوگرم وزن است. از سه ماهگی تا پنج ماهگی،

وزن کودک ثابت مانده (توقف رشد) و از پنج ماهگی تا هفت ماهگی وزن کودک کاهش یافته (افت رشد)، به طوری که وزن

کودک در ماه هفتم به  $۴/۵$  کیلوگرم رسیده که نسبت به وزن طبیعی  $۵/۸$  کیلوگرمی، مقدار  $۴$  کیلوگرم کمتر است. پس از هفت

ماهگی افزایش وزن کودک آغاز شده و این افزایش تا آخر سال (دوازده ماهگی) ادامه می یابد که در ماه دوازدهم وزن کودک

به  $۸/۵$  کیلوگرم می رسد که نسبت به وزن طبیعی  $۵/۱۰$  کیلوگرمی، باز هم  $۲$  کیلوگرم کمتر است.

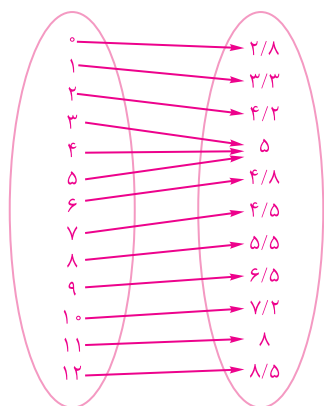
وزن کودک در فاصله بین ماه ها اندازه گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده اید، می توانید وزن او را در فاصله بین

ماه ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

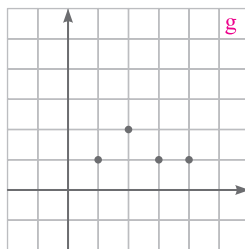
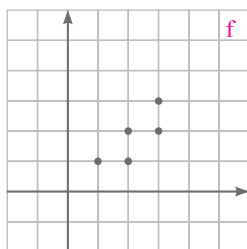
(ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

دامنه  $= \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}$

برد  $= \{۲/۸, ۳/۳, ۴/۲, ۵, ۴/۸, ۴/۵, ۵/۵, ۶/۵, ۷/۲, ۸, ۸/۵\}$



کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نمایش می دهند؟ توضیح دهید.





می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

تابع نیست، زیرا دو زوج مرتب  $(۴, ۲)$  و  $(۴, ۳)$  دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند.  $f = \{(۱, ۱), (۲, ۱), (۳, ۲), (۴, ۲), (۴, ۳)\}$

تابع است، زیرا مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب، متفاوت هستند.  $g = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۱), (۴, ۱)\}$

$g$  دامنه  $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$  برد  $\{۱, ۲\}$

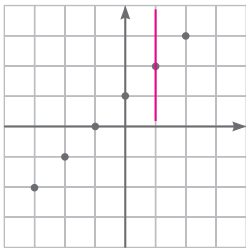
با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

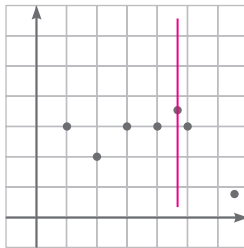
صفحه ۱۰۵ کتاب درسی

کار در کلاس

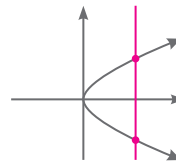
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



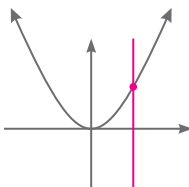
تابع است.



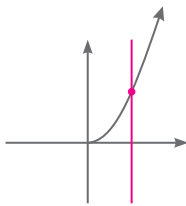
تابع است.



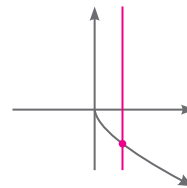
تابع نیست.



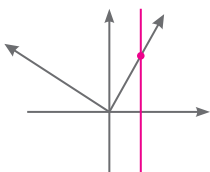
تابع است.



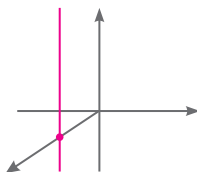
تابع است.



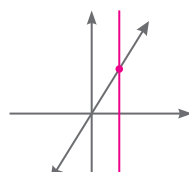
تابع است.



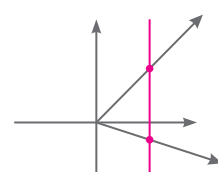
تابع است.



تابع است.



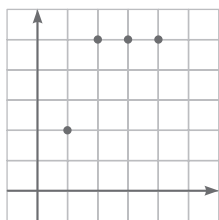
تابع است.



تابع نیست.



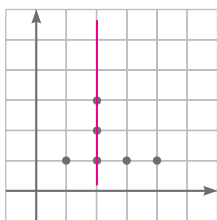
۱ کدام یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



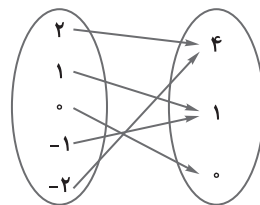
تابع است.

$$\text{دامنه} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{برد} = \{2, 5\}$$



تابع نیست، زیرا خط عمودی رسم شده، نمودار را در ۳ نقطه (بیش از یک نقطه) قطع می‌کند.



تابع است.

$$\text{دامنه} = \{2, 1, 0, -1, -2\}$$

$$\text{برد} = \{4, 1, 0\}$$

۲ تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

$$f = \{(1, 3), (2, 6)\} \Rightarrow \text{دامنه} = \{1, 2\}$$

$$g = \{(5, 1), (6, 1)\} \Rightarrow \text{برد} = \{1\}$$

$$h = \{(1, 2)\} \Rightarrow \text{دامنه} = \{1\}$$

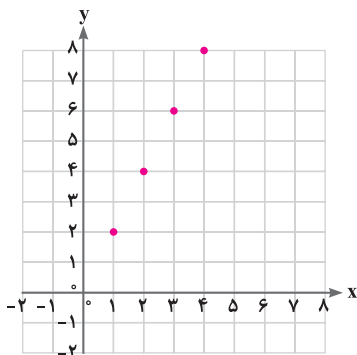
$$k = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots\} \rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{N} & (\text{نامتناهی}) \\ \text{برد} = \{0\} \end{cases} \quad \text{ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.}$$

$$l = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \dots\} \rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{N} & (\text{نامتناهی}) \\ \text{برد} = \mathbb{N} & (\text{نامتناهی}) \end{cases} \quad \text{ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.}$$

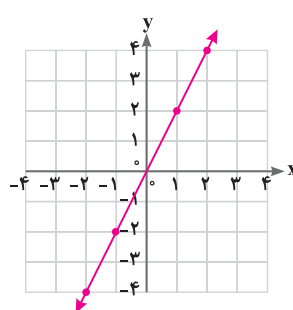
۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[4, 6]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی

(الف)

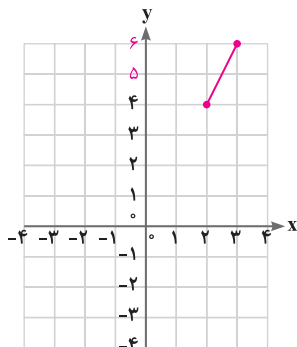


(ب)

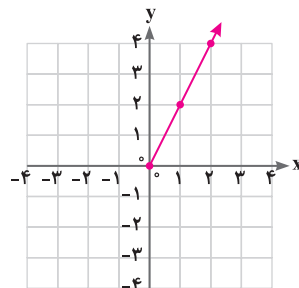




(پ)



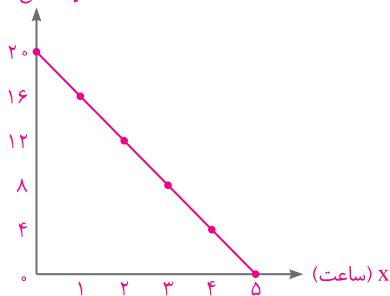
(ت)



۴ یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟  
پس از ۵ ساعت، شمع خاموش خواهد شد.  
جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

y (سانتی‌متر)



نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

زیرا نمودار آن، به صورت یک خط راست است.

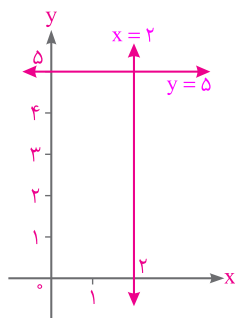
۵ آیا خط  $x = 2$  را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ خیر چرا؟ زیرا همان‌طور که

در شکل نیز مشخص است، اگر یک خط عمودی را روی خط  $x = 2$  رسم کنیم، آن را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

خط  $y = 5$  را چطور؟ بله، زیرا هر خط عمودی آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

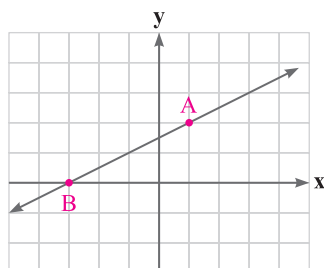
همه خط‌ها تابع هستند به جز خط‌های عمودی که معادله آنها به صورت  $x = a$  است، مانند خط  $x = 2$ .



۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه  $[-3, 5]$  باشد.

دامنه این توابع را می‌توانیم  $[-3, 5]$  در نظر بگیریم.  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = 5x - 3$ ,  $h(x) = 7 - 3x$ ,  $k(x) = 4$ , ...

چه تعداد از این‌گونه توابع وجود دارند؟ بی‌شمار



۷) نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

معادله هر تابع خطی به صورت  $y = ax + b$  است، بنابراین:  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{-3 - 1} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + b$$

با جای گذاری  $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$  در این معادله، خواهیم داشت:

$$0 = \frac{3}{4} \times (-3) + b \Rightarrow 0 = -\frac{9}{4} + b \Rightarrow b = \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

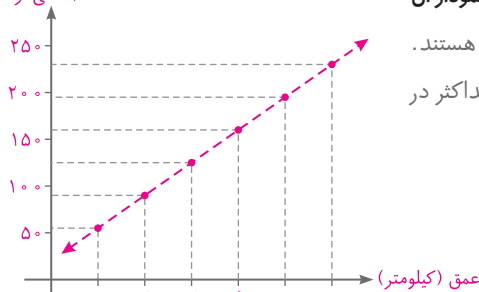
از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟ نمایش جبری برای این تابع مناسب‌تر است.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

۸) جدول زیر، دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح

زمین را نشان می‌دهد.

دما (سانتی‌گراد)



الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن

را رسم کنید. زیرا، تمام اعداد سطر اول (مؤلفه‌های اول) متفاوت هستند.

همچنین می‌توانیم بگوییم که هر خط عمودی، نمودار آن را حداکثر در

یک نقطه قطع می‌کند. پس تابع است.

ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

این تابع، یک تابع خطی است. بنابراین دو نقطه  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 55 \end{bmatrix}$

و  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 90 \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم و معادله خط را می‌نویسیم:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{90 - 55}{2 - 1} = 35 \xrightarrow{y = ax + b} y = 35x + b \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} 1 \\ 55 \end{bmatrix}} 55 = 35(1) + b \Rightarrow b = 20$$

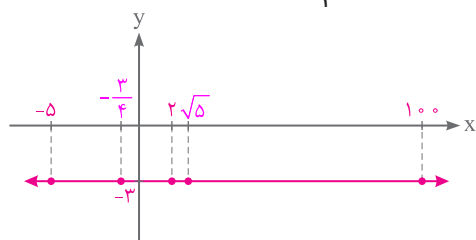
$$\Rightarrow y = 35x + 20$$

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

$$x = 10 \Rightarrow y = 35(10) + 20 = 350 + 20 = 370$$

بنابراین دمای یک سنگ که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، تقریباً ۳۷۰ درجه سانتی‌گراد است.

۹) الف) تابع  $f(x) = -3$  را رسم کنید و مقادیر  $f(2)$  و  $f(100)$  و  $f(-5)$  و  $f(\sqrt{5})$  و  $f(-\frac{3}{4})$  را به دست آورید.



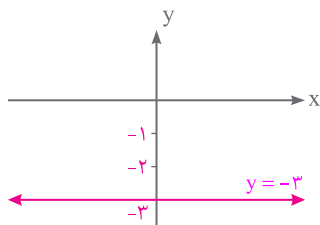
به تابعی مانند  $f(x) = -3$  که  $f(x)$  برابر با یک عدد ثابت

است، تابع ثابت گفته می‌شود. در این توابع، اگر به جای  $x$  هر

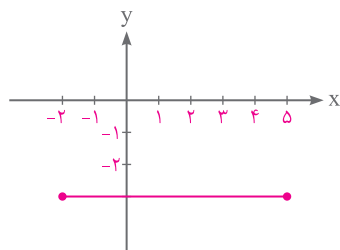
عددی حقیقی قرار گیرد، حاصل، برابر همان عدد ثابت خواهد شد.

بنابراین:

$$f(x) = -3 \Rightarrow f(2) = -3, f(100) = -3, f(-5) = -3, f(\sqrt{5}) = -3, f(-\frac{3}{4}) = -3$$



ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.  
همیشه می‌توانیم به جای  $f(x)$ ، از  $y$  استفاده کنیم، زیرا همواره  $y = f(x)$  است.  
پس باید نمودار خط  $y = -3$  را رسم کنیم.



پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه  $[-2, 5]$  باشد، نیز رسم کنید.

۱۰) برای یک تابع خطی می‌دانیم که:  $f(2) = 11$  و  $f(0) = 7$ . نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

با توجه به اینکه  $f(x) = y$  است، خواهیم داشت:

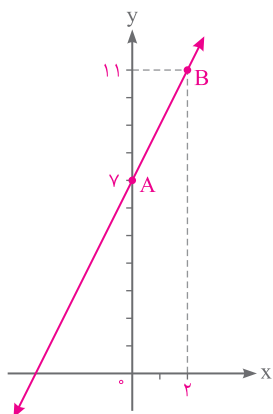
$$f(0) = 7 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad f(2) = 11 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{دو نقطه روی خط}$$

$$\text{شیب خط: } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{11 - 7}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}} 7 = 2 \times 0 + b \Rightarrow b = 7$$

بنابراین معادله خط گذرنده از نقاط A و B یا نمایش جبری تابع  $f$ ، به این صورت خواهد بود:

$$y = 2x + 7$$



x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۱) آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

بله، زیرا اعداد سطر اول (مؤلفه‌های اول)، با هم برابر نیستند.

۱۲) علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت  $\frac{1}{10}$  کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در  $t$  دقیقه طی می‌کند، با  $f(t)$  نمایش

دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

الف)  $f(t) = t - \frac{1}{10}$

ب)  $f(t) = \frac{1}{10}t$

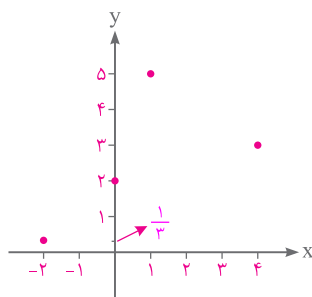
پ)  $f(t) = t + \frac{1}{10}$

ت)  $f(t) = \frac{1}{10} - t$

می‌توانیم این جدول را تشکیل دهیم:

t (دقیقه)	۱	۲	۳	...	t
f(t) (کیلومتر)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	...	$\frac{1}{10} \times t$

پس  $f(t) = \frac{1}{10}t$ ، یعنی گزینه (ب) درست است.



(۱۳) اگر درباره تابع  $g$  داشته باشیم:  $g(0) = 2, g(1) = 5, g(-2) = \frac{1}{3}, g(4) = 3$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g = \left\{ \left(0, 2\right), \left(1, 5\right), \left(-2, \frac{1}{3}\right), \left(4, 3\right) \right\}$$

(۱۴) برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه  $F = \frac{9}{5}C + 32$  به یکدیگر وابسته‌اند.

الف)  $-20$  - درجه سانتی‌گراد، چند درجه فارنهایت است؟

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{C=-20} F = \frac{9}{5}(-20) + 32 = -\frac{180}{5} + 32 = -36 + 32 = -4 \Rightarrow F = -4$$

پس  $-20$  - درجه سانتی‌گراد برابر  $-4$  - درجه فارنهایت است.

ب)  $104$  - درجه فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{F=104} 104 = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\times 5} 520 = 9C + 160 \Rightarrow 9C = 360 \Rightarrow C = 40$$

پس  $104$  - درجه فارنهایت برابر  $40$  - درجه سانتی‌گراد است.

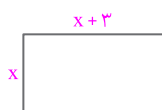
پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به دست آورد.

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\times 5} 5F = 9C + 160 \Rightarrow -9C = -5F + 160 \xrightarrow{\div (-9)} C = \frac{-5F}{-9} + \frac{160}{-9} \Rightarrow C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

بله، زیرا اگر  $a = \frac{5}{9}$  و  $b = -\frac{160}{9}$  آنگاه  $C = aF + b$  است که بیانگر یک تابع خطی بین  $C$  و  $F$  است.

(۱۵) طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند. اگر عرض مستطیل را  $x$  در نظر بگیریم، طول آن برابر  $x+3$  خواهد بود. بنابراین اگر محیط مستطیل را با  $P$  نمایش دهیم، خواهیم داشت:



$$P = 2(\text{عرض} + \text{طول}) \Rightarrow P = 2(x + x + 3) \Rightarrow P = 2(2x + 3) \Rightarrow P = 4x + 6$$

همان‌طور که دیده می‌شود، این رابطه بیانگر یک تابع خطی بین محیط و عرض مستطیل است.

(۱۶) دو تابع مثال بنزید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

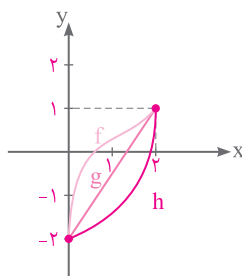
$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$$

$$g = \{(1, 6), (2, 4), (3, 5)\}$$

$$\text{دامنه هر دو تابع} = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{برد هر دو تابع} = \{4, 5, 6\}$$

(۱۷) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $[0, 2]$  و برد آن  $[-2, 1]$  باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟ بی‌شمار تابع به این صورت می‌توان رسم کرد. به عنوان نمونه، در نمودار روبه‌رو، ۳ تابع را با این ویژگی رسم کرده‌ایم.





درس سوم: انواع تابع

فعالیت

صفحه ۱۰۹ و ۱۱۰ کتاب درسی

۱) جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱	۳	۴	$\frac{2}{5}$	۶	۱۲	x
مساحت آن	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	۱	۹	۱۶	$\frac{4}{25}$	۳۶	۱۴۴	$x^2$

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	۶	r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	$4\pi$	$9\pi$	$25\pi$	$36\pi$	$\pi r^2$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت  $f(x) = x^2$  قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به صورت  $g(r) = \pi r^2$  قابل نمایش است.

چون f و g به صورت یک چندجمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم.

حجم یک کره را بر حسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چندجمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر، همگی توابع چندجمله‌ای‌اند:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت  $y = 2x^2 + 5x + 1$  نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

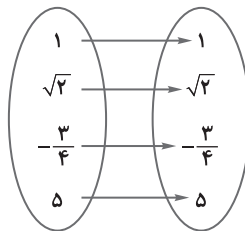
$$g(x): y = 4x^2 - 3$$

$$h(a): y = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t): y = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

۲) دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید.

$$f = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

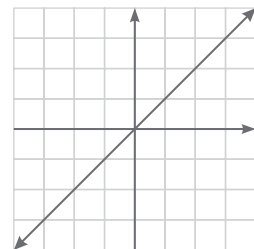


$$f \text{ دامنه} = \{a, b, c\}$$

$$f \text{ برد} = \{a, b, c\}$$

$$\text{دامنه} = \{1, \sqrt{2}, -\frac{3}{4}, 5\}$$

$$\text{برد} = \{1, \sqrt{2}, -\frac{3}{4}, 5\}$$



$$\text{دامنه} = \mathbb{R}$$

$$\text{برد} = \mathbb{R}$$

این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی باهم دارند؟ شباهت این سه تابع، در این است که در هر تابع، دامنه و برد با هم مساوی هستند.

همچنین در هر سه این توابع، هر عضو در دامنه به خودش در برد، نظیر شده است. تفاوت این سه تابع، در این است که تعداد

اعضای دامنه و برد آنها با هم مساوی نیست. همچنین نوع نمایش این سه تابع نیز با یکدیگر متفاوت است.





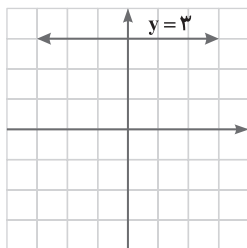
## نکته

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را  $\mathbb{R}$  در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط  $y = x$  است که با معادله  $f(x) = x$  هم نمایش داده می‌شود.

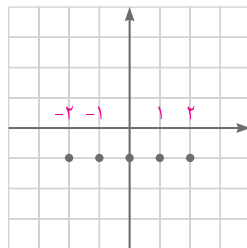
سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \{۸, ۹, ۱۰\} \\ \text{برد} = \{۱۹\} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = \{۳\} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\} \\ \text{برد} = \{-۱\} \end{cases}$$

این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟

ویژگی مشترک این سه تابع در این است که برد هر سه تابع تنها شامل یک عضو است. پس هر سه تابع، تابعی ثابت هستند، یعنی هر عضو در دامنه را به یک مقدار ثابت در برد نظیر می‌کنند.

## نکته

تابعی مانند  $f$  را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را  $k$  بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله  $f(x) = k$  نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس ..... صفحه ۱۱۰ و ۱۱۱ کتاب درسی

۱) برای هر مورد، مثالی به دلخواه ارائه کنید.

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5$$

مثالی از یک تابع چندجمله‌ای ارائه کنید.

$$g = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (۲, ۲), (۵, ۵)\}$$

یک تابع همانی مثال بنویسید که دامنه آن  $\{\alpha, \beta, ۲, ۵\}$  باشد.

$$h = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\} \Rightarrow \text{دامنه } h = \{۱, ۲\} \text{ و } \text{برد } h = \{۱, ۲\} \text{ ولی تابع همانی نباشد.}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، هر عضو از دامنه، به خودش در برد نظیر نشده است؛ بنابراین این تابع، همانی نیست.

$$\{(۱, ۱), (۲, ۱), (۳, ۱), (۴, ۱), (۵, ۱)\}$$

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

به عنوان مثال، سرعت یک اتومبیل در حال حرکت، تابعی از زمان است. حال اگر این اتومبیل با سرعت ثابت مثلاً  $۲۰ \text{ m/s}$

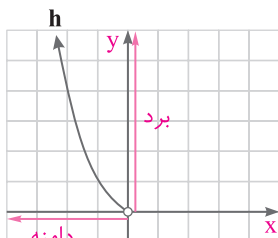
حرکت کند، در هر زمان دلخواه نیز، سرعت آن برابر با مقدار ثابت  $۲۰ \text{ m/s}$  خواهد بود، یعنی:  $V(t) = ۲۰$



۲ نمودارهای توابع داده‌شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع  $h$  رسم شده است. جدول را کامل کنید.

تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد	$\{0, 1, 4\}$	$[0, 9]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$

دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



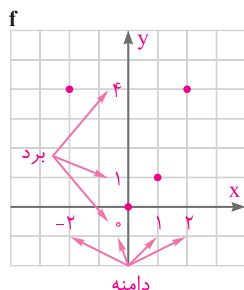
در تابع  $h(x)$  نمودار روی محور  $x$ ها در بخش منفی اعداد حقیقی وجود دارد، پس:

$$h \text{ دامنه} = (-\infty, 0)$$

همچنین نمودار، فقط در بالای محور  $x$ ها وجود دارد، پس برد این تابع مجموعه اعداد

$$h \text{ برد} = (0, +\infty)$$

حقیقی مثبت است.

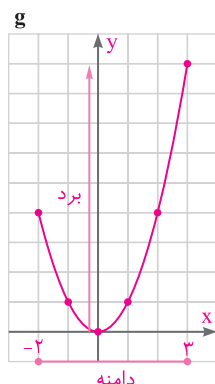


در تابع  $f(x)$  نمودار روی محور  $x$ ها فقط در نقاط  $-2, 0, 1, 2$  دیده می‌شود، پس:

$$f \text{ دامنه} = \{-2, 0, 1, 2\}$$

و روی محور  $y$ ها نمودار فقط در نقاط  $0, 1, 4$  دیده می‌شود، پس:

$$f \text{ برد} = \{0, 1, 4\}$$

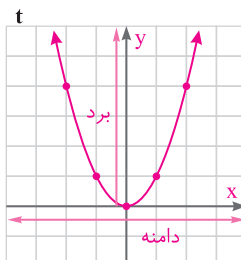


در تابع  $g(x)$  نمودار روی محور  $x$ ها از  $(-2)$  تا  $3$  ادامه می‌یابد، پس:

$$g \text{ دامنه} = [-2, 3]$$

و روی محور  $y$ ها از صفر تا  $9$  ادامه دارد، پس:

$$g \text{ برد} = [0, 9]$$



در تابع  $t(x)$  همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، نمودار در تمام محور  $x$ ها دیده

می‌شود، پس دامنه آن، مجموعه اعداد حقیقی است.

$$t \text{ دامنه} = \mathbb{R}$$

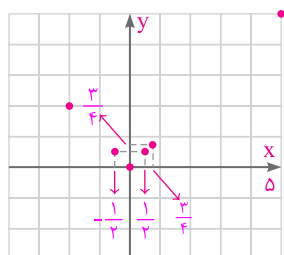
همچنین نمودار، تنها در قسمت نامنفی محور  $y$ ها دیده می‌شود، پس:

$$t \text{ برد} = [0, +\infty)$$



صفحه ۱۱۱ و ۱۱۲ کتاب درسی

x	-۲	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۵
f(x)	۲	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۵



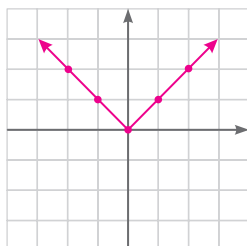
$$f \text{ دامنه} = \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5\right\}$$

$$f \text{ برد} = \left\{2, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, 5\right\}$$

توجه

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با  $f(x) = |x|$  یا  $y = |x|$  نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.



$$\text{دامنه} = \mathbb{R}, \quad \text{برد} = [0, +\infty)$$

توجه

۱- تابع قدرمطلق را به صورت  $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$  نیز نمایش می‌دهند.

۲- با توجه به اینکه برای  $x \geq 0$  و  $x < 0$  تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

صفحه ۱۱۲ کتاب درسی

فعالیت

توابع  $f$ ،  $g$ ،  $h$  و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

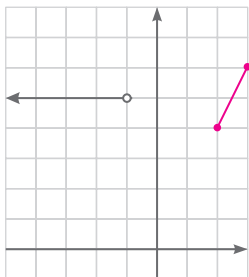
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

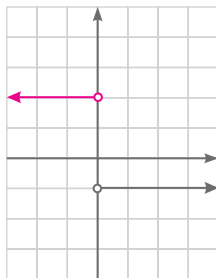


توجه داشته باشید که نمودارها را با نقطه‌یابی، در بازه‌های مربوط به آنها رسم کرده‌ایم.



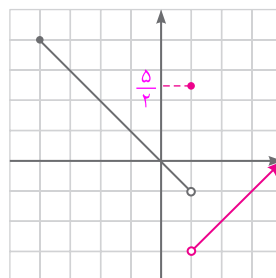
$h(x)$

$$\begin{cases} \text{دامنه } h = (-\infty, -1) \cup [2, 3] \\ \text{برد } h = [4, 6] \end{cases}$$



$f(x)$

$$\begin{cases} \text{دامنه } f = \mathbb{R} - \{0\} \\ \text{برد } f = \{-1, 2\} \end{cases}$$



$g(x)$

$$\begin{cases} \text{دامنه } g = [-4, +\infty) \\ \text{برد } g = (-3, +\infty) \end{cases}$$

مقادیر  $g(0)$ ،  $f(-\frac{1}{5})$ ،  $h(\sqrt{5})$  و  $g(0)$  را بیابید.

با توجه به نمودارها و ضابطه‌ی توابع، داریم:

ریاضی

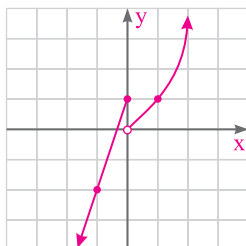
فصل ۵

$$f(3) = -1, \quad g(-2) = -(-2) = 2, \quad f(-\frac{1}{5}) = 2, \quad h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, \quad g(0) = 0.$$

صفحه ۱۱۳ کتاب درسی

کار در کلاس

۱) نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

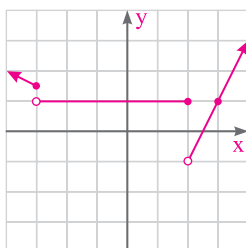


$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	0	1	4

$$\begin{cases} \text{دامنه } f = \mathbb{R} \\ \text{برد } f = \mathbb{R} \end{cases}$$

x	-1	0
y	-2	1



$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

x	2	3
y	-1	1

$$\begin{cases} \text{دامنه } g = \mathbb{R} \\ \text{برد } g = [-1, +\infty) \end{cases}$$

x	-4	-3
y	2	3/2

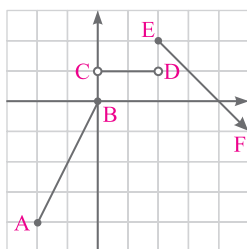
مقادیر  $f(0)$ ،  $g(0)$ ،  $f(5)$ ،  $g(2)$ ،  $f(-2)$  و  $g(-\frac{1}{5})$  را به دست آورید.

با توجه به ضابطه‌های تابع و نمودارهای رسم شده، خواهیم داشت:

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 1, \quad f(5) = 5^2 = 25, \quad g(2) = 1, \quad f(-2) = 3(-2) + 1 = -5, \quad g(-\frac{1}{5}) = 1$$



۲) نمودار تابع قطعه‌ای  $f$  داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن ضابطه تابع قطعه‌ای  $f$ ، ابتدا باید معادله خط‌های  $AB$  و  $CD$  و  $EF$  را به دست آوریم:

معادله خط  $AB$ :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = x + b \xrightarrow{B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} 0 = 1 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x$$

معادله خط  $CD$ : خطی افقی است که محور  $y$  را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس معادله خط  $CD$  برابر  $y = 1$  است.

معادله خط  $EF$ :

$$a = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{0 - 2}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow y = -x + b \xrightarrow{E = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}} 2 = -2 + b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = -x + 4$$

با توجه به نمودار، خط  $AB$  در دامنه  $[-2, 0]$ ، خط  $CD$  در دامنه  $(0, 2]$  و خط  $EF$  در دامنه  $[2, +\infty)$  رسم شده است.

بنابراین:

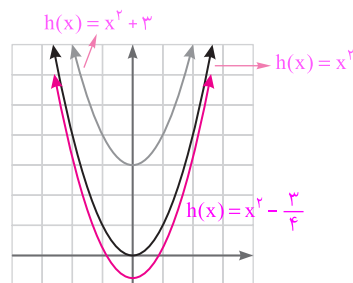
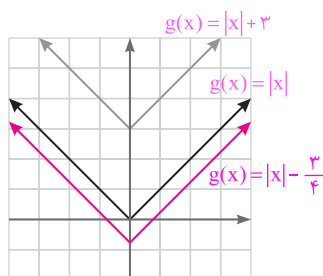
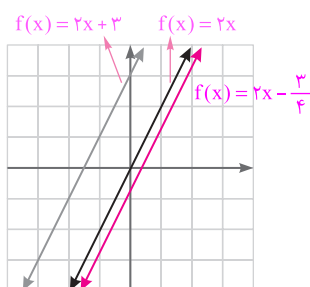
$$f(x) = \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} f \text{ دامنه} = [-2, +\infty) \\ f \text{ برد} = (-\infty, 2] \end{cases}$$

فعالیت صفحه ۱۱۳ کتاب درسی

نمودارهای توابع  $f(x) = 2x$  و  $g(x) = |x|$  و  $h(x) = x^2$  و توابع  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(x) = |x| + 3$  و  $h(x) = x^2 + 3$  داده شده‌اند.

توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع  $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$  و  $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$  و

$h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$  را به همین روش رسم کنید.



اگر هر کدام از سه تابع اول را ۳ واحد در امتداد محور  $y$  ها به بالا منتقل کنیم، سه تابع دوم به وجود می‌آیند. یعنی اگر

نمودار  $f(x) = 2x$  را ۳ واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع  $f(x) = 2x + 3$  به وجود می‌آید و همچنین برای توابع  $g(x)$  و

$h(x)$  نیز این موضوع برقرار است. برای رسم توابع  $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ ،  $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$  و  $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$  باید نمودارهای

اول را به اندازه  $\frac{3}{4}$  واحد به پایین منتقل کنیم.

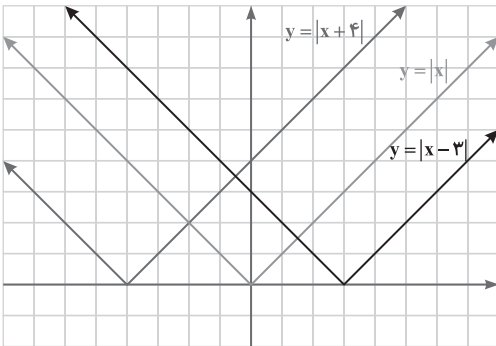


### نکته

با داشتن نمودار تابعی مانند  $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع  $f(x) + k$  را با انتقال نمودار  $f(x)$  به اندازه  $k$  واحد در امتداد محور  $y$ ‌ها به‌دست آورد. اگر  $k > 0$  باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر  $k < 0$  باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

صفحه ۱۱۴ کتاب درسی

### کار در کلاس



- ۱ در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع  $f(x) = |x|$  رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟
- دامنه هر سه تابع، مجموعه اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ ) است، همچنین برد هر سه تابع، برابر است با اعداد حقیقی نامنفی، بنابراین:  $\text{دامنه} = \mathbb{R}$ ،  $\text{برد} = [0, +\infty)$

### ریاضی

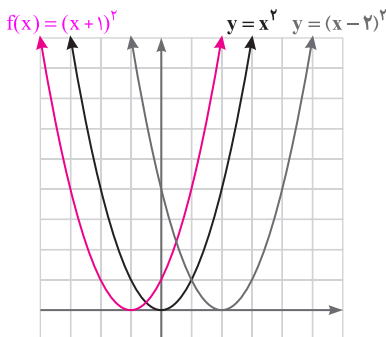
فصل ۵

برای رسم نمودار تابع  $f(x) = |x - 3|$ ، کافی است نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را ۳ واحد در امتداد محور  $x$ ‌ها به سمت راست منتقل کنیم. همچنین برای رسم نمودار تابع  $f(x) = |x + 4|$ ، کافی است نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را ۴ واحد در امتداد محور  $x$ ‌ها به سمت چپ منتقل کنیم.

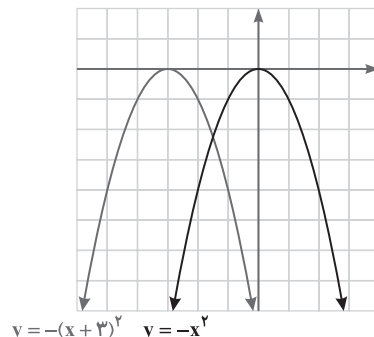
### نکته

برای رسم نمودار تابع  $f(x) + k$  کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در امتداد محور  $x$ ‌ها انتقال دهیم. اگر  $k > 0$  باشد، انتقال در جهت منفی و اگر  $k < 0$  باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

- ۲ در شکل‌های زیر، به کمک نمودار تابع  $f(x) = x^2$  و  $f(x) = -x^2$  نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار  $f(x) = (x + 1)^2$  را نیز رسم کنید.



$\begin{cases} \text{دامنه هر سه نمودار} = \mathbb{R} \\ \text{برد هر سه نمودار} = [0, +\infty) \end{cases}$



$\begin{cases} \text{دامنه هر دو نمودار} = \mathbb{R} \\ \text{برد هر دو نمودار} = (-\infty, 0] \end{cases}$



صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

کار در کلاس

در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم  $f$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  رسم شده‌اند.

$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

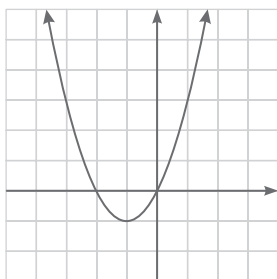
$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

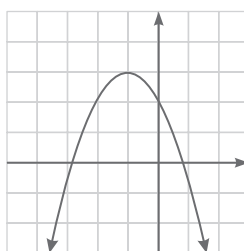
الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:



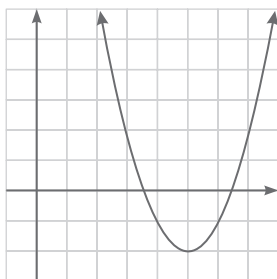
$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-1, +\infty) \end{cases}$$



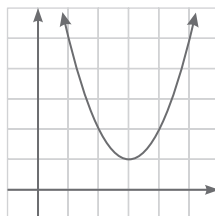
$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, 3] \end{cases}$$



$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-2, +\infty) \end{cases}$$



$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [1, +\infty) \end{cases}$$

ریاضی

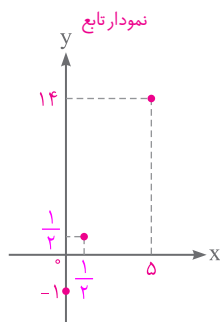
فصل ۵

صفحه ۱۱۵ تا ۱۱۷ کتاب درسی

تمرین

۱) تابع  $f(x) = 3x - 1$  را که دامنه آن مجموعه  $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$  است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید.

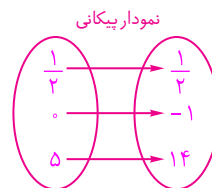
$$f(x) = 3x - 1, f \text{ دامنه } = \left\{\frac{1}{2}, 0, 5\right\} \rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ f(0) = 3(0) - 1 = 0 - 1 = -1 \\ f(5) = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14 \end{cases} \Rightarrow f \text{ برد} = \left\{\frac{1}{2}, -1, 14\right\}$$

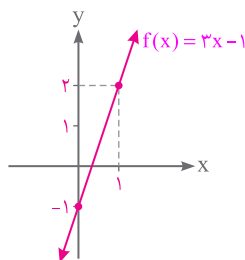


نمودار تابع

نمایش زوج مرتبی

$$f = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, -1), (5, 14)\right\}$$





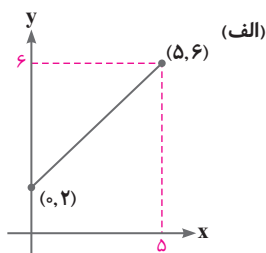
x	۰	۱
y	-۱	۲

اگر دامنه این تابع IR باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

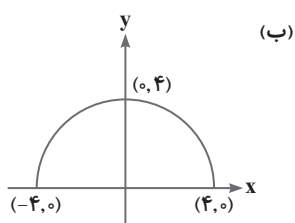
حال اگر دامنه این تابع IR باشد، برد تابع نیز IR خواهد بود. زیرا هر عدد حقیقی که به جای x قرار گیرد، حاصل هم عددی حقیقی خواهد بود و چون در این حالت، هم دامنه و هم برد تابع نامتناهی هستند، بهتر است نمودار آن را در صفحه مختصات رسم کنیم.

۲) در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در

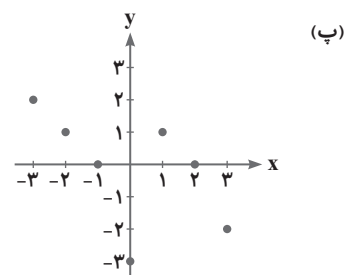
هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



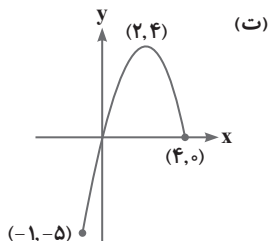
$$\begin{cases} \text{دامنه} = [0, 5] \\ \text{برد} = [2, 6] \end{cases}$$



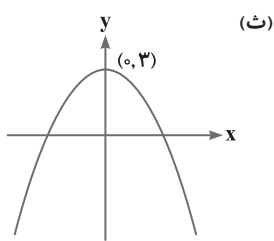
$$\begin{cases} \text{دامنه} = [-4, 4] \\ \text{برد} = [0, 4] \end{cases}$$



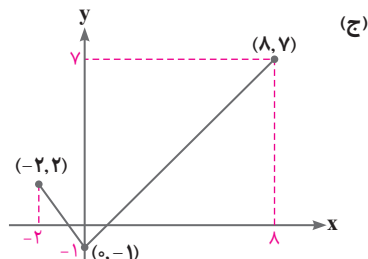
$$\begin{cases} \text{دامنه} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ \text{برد} = \{-3, -2, 0, 1, 2\} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{دامنه} = [-1, 4] \\ \text{برد} = [-5, 4] \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \\ \text{برد} = (-\infty, 3] \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{دامنه} = [-2, 8] \\ \text{برد} = [-1, 7] \end{cases}$$

نمایش جبری تابع (الف) را به دست می‌آوریم. دو نقطه  $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  روی خط هستند، بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{AB شیب خط: } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} &= \frac{6 - 2}{5 - 0} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + b \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} 2 = \frac{4}{5} \times 0 + b \Rightarrow b = 2 \\ \Rightarrow y &= \frac{4}{5}x + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{5}x + 2 \end{aligned}$$

نمایش جبری تابع (ج) را به دست می‌آوریم: تابع (ج) دو قطعه دارد که معادله هر قطعه را به دست می‌آوریم. با توجه به

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

نمودار، داریم:





برای معادله خط AB داریم:

$$AB \text{ شیب خط } a = \frac{-1-2}{0-(-2)} = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + b \xrightarrow{B=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}} -1 = -\frac{3}{2} \times 0 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - 1$$

برای معادله خط BC داریم:

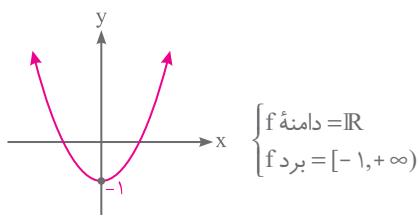
$$BC \text{ شیب خط } a = \frac{1-(-1)}{1-0} = 1 \Rightarrow y = 1x + b \xrightarrow{B=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}} -1 = 0 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

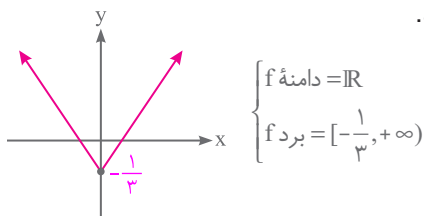
پس نمایش جبری تابع (ج) به صورت مقابل است:

**۳۳** درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.الف) دامنه تابع  $f(x) = x^2 - 1$  برابر  $(0, +\infty)$  و بُرد آن نیز  $(0, +\infty)$  است.

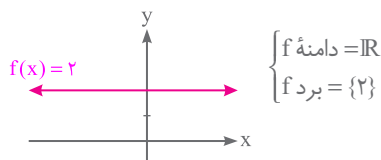
نادرست است، زیرا همان طور که در نمودار نیز مشخص است:

ب) دامنه تابع  $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$  همه اعداد حقیقی و بُرد آن  $(2, +\infty)$  است.

نادرست است، زیرا همان طور که در شکل نیز مشخص است:

پ) دامنه تابع ثابت  $f(x) = 2$  برابر  $(-\infty, +\infty)$  است.

درست است.

ت) اگر  $f(x) = 2x + 1$  آنگاه،  $f(1) = \frac{f(2)}{2}$ .

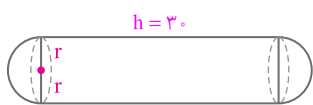
نادرست است، زیرا:

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \neq \frac{5}{2} \Rightarrow f(1) \neq \frac{f(2)}{2}$$

$$f(2) = 2(2) + 1 = 5 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} = \frac{5}{2}$$

**۴۴** یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع  $r$  در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد،حجم تانکر را بر حسب تابعی از  $r$  بنویسید.

دو نیم کره روی هم، یک کره را تشکیل می دهند. پس حجم تانکر برابر است با مجموع حجم های یک کره و یک استوانه:

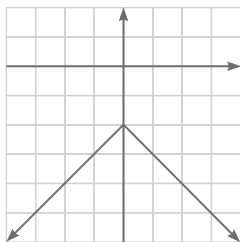


$$V(r) = V_{\text{کره}} + V_{\text{استوانه}} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \times 30$$

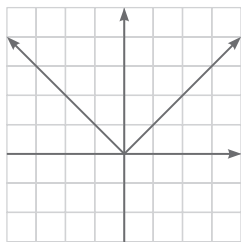
$$\Rightarrow V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2 = 2\pi r^2 \left( \frac{2}{3}r + 15 \right)$$



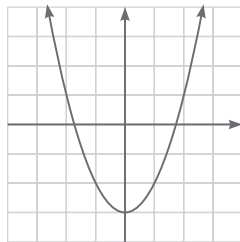
۵) هریک از نمودارهای زیر کدامیک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



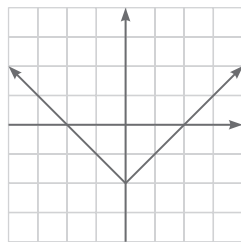
(خ)



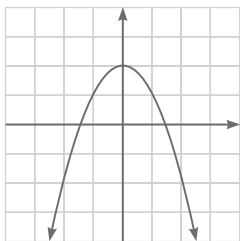
(پ)



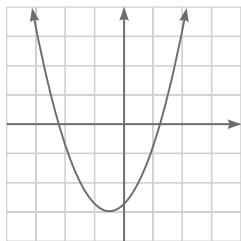
(الف)



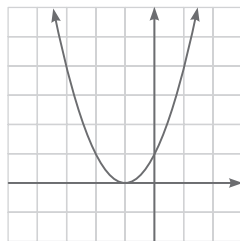
(ذ)



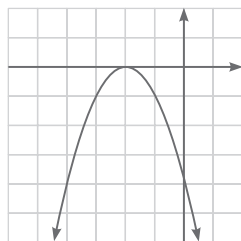
(ب)



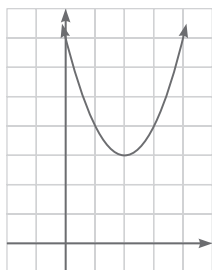
(ر)



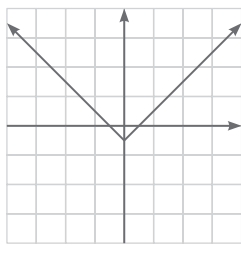
(ث)



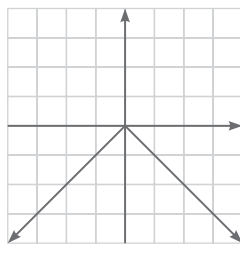
(ج)



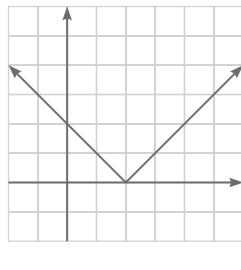
(د)



(ج)



(ت)



(چ)

$$\text{الف) } y = x^2 - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{پ) } y = |x| \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [0, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ث) } y = (x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [0, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ج) } y = |x-2| \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [0, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{خ) } y = -|x| - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, -2] \end{cases}$$

$$\text{ذ) } y = |x| - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ب) } y = -x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, 2] \end{cases}$$

$$\text{ت) } y = -|x| \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\text{چ) } y = |x| - \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ح) } y = -(x+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\text{د) } y = (x-2)^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [3, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ر) } y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-3, +\infty) \end{cases}$$



۶ فرض کنیم دامنه هر یک از توابع تمرین ۵ به بازه  $[-۲, ۳]$  محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

(الف) $\text{برد} = [-۳, ۶]$	(ب) $\text{برد} = [-۷, ۲]$	(پ) $\text{برد} = [۰, ۳]$
(ت) $\text{برد} = [-۳, ۰]$	(ث) $\text{برد} = [۰, ۱۶]$	(ج) $\text{برد} = [-\frac{1}{۲}, \frac{۵}{۲}]$
(چ) $\text{برد} = [۰, ۴]$	(ح) $\text{برد} = [-۲۵, ۰]$	(خ) $\text{برد} = [-۵, -۲]$
(د) $\text{برد} = [۳, ۱۹]$	(ذ) $\text{برد} = [-۲, ۱]$	(ر) $\text{برد} = [-۳, \frac{۳۷}{۴}]$

۷ نمودار تابع  $f$  داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$$f(\sqrt{۵}) \quad f(۶) \quad f(۳) \quad f(\frac{1}{۲}) \quad f(۰) \quad f(-\frac{۵}{۲})$$

با توجه به نمودار، مختصات نقاط به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

معادله خط EA:

$$y = -۲$$

این خط یک خط افقی است:

معادله خط AB:

$$\text{شیب خط AB: } a = \frac{۳ - (-۲)}{-۲ - (-۳)} = ۵ \Rightarrow y = ۵x + b \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}} -۲ = ۵(-۳) + b \Rightarrow -۲ = -۱۵ + b \Rightarrow b = ۱۳$$

$$\Rightarrow y = ۵x + ۱۳$$

معادله خط BC:

$$\text{شیب خط BC: } a = \frac{۰ - ۳}{۲ - (-۲)} = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + b \xrightarrow{B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}} ۳ = -\frac{۳}{۴} \times (-۲) + b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲}$$

معادله خط CD:

$$\text{شیب خط CD: } a = \frac{۴ - ۰}{۳ - ۲} = ۴ \Rightarrow y = ۴x + b \xrightarrow{C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}} ۰ = ۴ \times ۲ + b \Rightarrow b = -۸ \Rightarrow y = ۴x - ۸$$

$$f(x) = \begin{cases} -۲ & x < -۳ \\ ۵x + ۱۳ & -۳ \leq x < -۲ \\ -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲} & -۲ \leq x < ۲ \\ ۴x - ۸ & ۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

$$f(\sqrt{۵}) = ۴\sqrt{۵} - ۸$$

$$f(۳) = ۴(۳) - ۸ = ۴$$

$$f(۰) = -\frac{۳}{۴} \times ۰ + \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

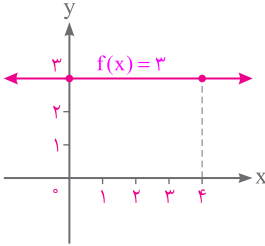
۶ در دامنه وجود ندارد.  $\rightarrow$  قابل محاسبه نیست:  $f(۶)$

$$f(\frac{1}{۲}) = -\frac{۳}{۴}(\frac{1}{۲}) + \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۸}$$

$$f(-\frac{۵}{۲}) = ۵(-\frac{۵}{۲}) + ۱۳ = \frac{1}{۲}$$

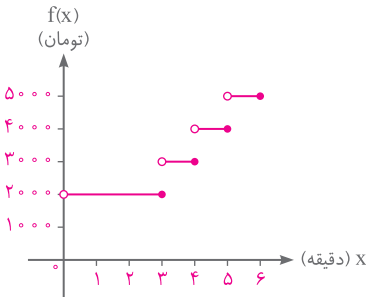


۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط  $(۰, ۳)$  و  $(۴, ۳)$  می‌گذرد.  $f(-۴)$  و  $f(-۱)$  را به دست آورید.



همان‌طور که در نمودار رسم شده مشاهده می‌شود، معادله این خط برابر است با  $f(x) = 3$  که یک تابع ثابت است؛ بنابراین:  $f(-۴) = 3$ ,  $f(-۱) = 3$

۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.



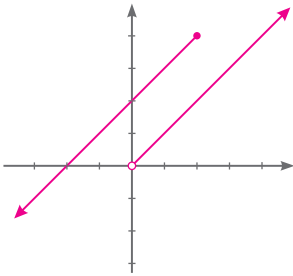
اگر  $x$  مدت زمان برقراری تماس و  $f(x)$  هزینه آن باشد، داریم:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2000 & 0 < x \leq 3 \\ 3000 & 3 < x \leq 4 \\ 4000 & 4 < x \leq 5 \\ 5000 & 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

۱۰ کدام یک از رابطه‌های زیر، یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟

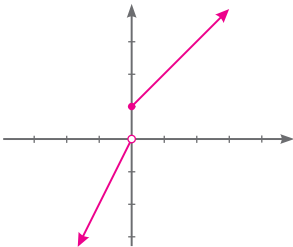
نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 2 \\ \hline y & 2 \quad 4 \end{array}$$



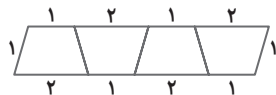
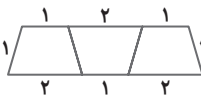
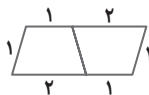
هر خط عمودی بین  $0$  و  $2$ ، نمودار را در  $2$  نقطه قطع می‌کند، پس  $f$  تابع نیست.

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline y & -2 \quad -1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 1 \quad 2 \end{array}$$



هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس  $g$  تابع است.

۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



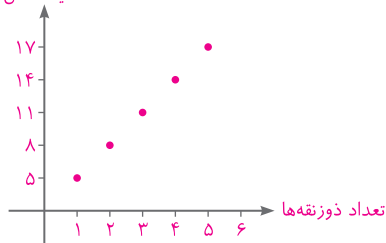
الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$

+۳ +۳ +۳ +۳



محیط شکل



ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟

زیرا هر شکل، فقط یک مقدار را برای محیط خود، اختیار می‌کند.

دامنه و برد این تابع چیست؟  $\{3n+2 \mid n \in \mathbb{N}\}$  برد،  $\mathbb{N}$  دامنه

نمودار آن را رسم کنید.

(۱۲) نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط  $(1, -2)$  و  $(2, -3)$  می‌گذرد و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند.

نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

معادله سهمی به صورت:  $y = ax^2 + bx + c$  است و نقاط  $(1, -2)$  و  $(2, -3)$  روی آن قرار دارند. بنابراین:

$$(1, -2) \Rightarrow -2 = a(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow a + b + c = -2 \quad (1)$$

$$(2, -3) \Rightarrow -3 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = -3 \quad (2)$$

چون سهمی محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. پس نقطه  $(0, 1)$  نیز روی سهمی قرار دارد. بنابراین:

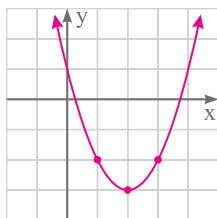
$$1 = a \times (0)^2 + b \times 0 + c \Rightarrow 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \begin{cases} (1): a + b + 1 = -2 \Rightarrow a + b = -3 \\ (2): 4a + 2b + 1 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-2) \times \begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = 6 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow 1 + b = -3 \Rightarrow b = -4$$

بنابراین معادله سهمی به صورت  $y = x^2 - 4x + 1$  است. حال این سهمی را رسم می‌کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2 \quad \text{و} \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(1) - (-4)^2}{4(1)} = \frac{4 - 16}{4} = -3 \Rightarrow \text{رأس}(2, -3)$$



x	1	2	3
y	-2	-3	-2

$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-3, +\infty) \end{cases}$$



## فصل ۶: شمارش، بدون شمردن

### درس اول: شمارش

صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

پیش متن

می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟



در پلاک خودروها از عدد صفر نمی‌توان استفاده کرد، پس فقط از رقم‌های ۱ تا ۹ و ۳۲ حرف الفبا استفاده می‌شود:

$$\text{حالت } ۹ \times ۹ \times ۳۲ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۳۲ \times ۹^۷$$

دقت داشته باشید که در پلاک‌های جدید خودروهای شهر تهران، در دو رقم سمت راست، از رقم صفر (به صورت ایران ۱۰) استفاده می‌شود. در این صورت پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

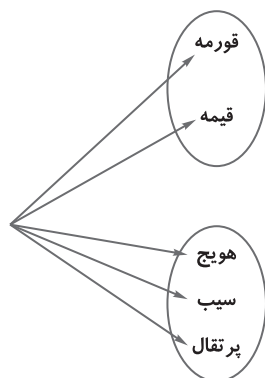
$$۹ \times ۹ \times ۳۲ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۳۲ \times ۹^۷$$

$$۹ \times ۹ \times ۳۲ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times \overset{\text{عدد ۱۰}}{۱} = ۳۲ \times ۹^۵$$

$$\Rightarrow \text{حالت } ۳۲ \times ۹^۷ + ۳۲ \times ۹^۵ = ۳۲ \times ۹^۵ (۹^۲ + ۱) = ۳۲ \times ۸۲ \times ۹^۵ = ۴۱ \times ۲^۶ \times ۹^۵$$

صفحه ۱۱۹ و ۱۲۰ کتاب درسی

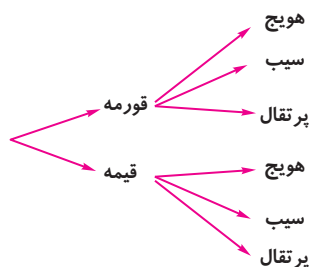
فعالیت



۱) امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای جلوخوردشت قورمه‌سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوه هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند.

چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟ ۵ انتخاب.

$$\{ \text{پرتقال, سیب, هویج, قورمه, قیمه} \}: ۲ + ۳ = ۵$$



۲) هفته بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟ ۶ انتخاب.

$$۲ \times ۳ = ۶$$

{(هویج, قیمه), (پرتقال, قورمه), (سیب, قورمه), (هویج, قورمه)},  
{(پرتقال, قیمه), (سیب, قیمه)}



۳) چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟ در سؤال اول، چون باید فقط یک مورد از یکی از گروه‌ها انتخاب می‌شد (غذا یا آب‌میوه)، پس تعداد انتخاب‌های گروه‌ها را با هم جمع کردیم و در کل ۵ انتخاب وجود داشت. ولی در سؤال دوم، باید از هر گروه یک مورد انتخاب می‌شد و باید در کل، ۲ انتخاب پشت سر هم انجام می‌دادیم (یک غذا و یک آب‌میوه)، پس تعداد انتخاب‌های گروه‌ها را در هم ضرب کردیم.

۴) در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟ با توضیحات داده‌شده، در سؤال اول از عمل جمع ( $2+3=5$ ) و در سؤال دوم، از عمل ضرب ( $2 \times 3 = 6$ ) استفاده می‌کنیم.

### کار در کلاس

۱) پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمش. او چند انتخاب دارد؟

$$\begin{array}{c} \text{شیرینی گل} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 4 + 3 = 7 \end{array}$$

چون فقط باید یک مورد از یکی از گروه‌ها را انتخاب کند، طبق اصل جمع پژمان ۷ انتخاب دارد.

۲) هفته بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

چون از هر گروه می‌خواهد یک انتخاب داشته باشد (در واقع ۲ انتخاب پشت سر هم)، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت برای خرید او وجود دارد:

$$\begin{array}{c} \text{شیرینی گل} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 4 \times 3 = 12 \end{array}$$

{(گردویی، زنبق)، (کشمشی، گلایل)، (نارگیلی، گلایل)، (گردویی، گلایل)، (کشمشی، مریم)، (نارگیلی، مریم)، (گردویی، مریم)}  
{(کشمشی، رُز)، (نارگیلی، رُز)، (گردویی، رُز)، (کشمشی، زنبق)، (نارگیلی، زنبق)}

۳) در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در قسمت اول، فقط یک انتخاب از یکی از گروه‌ها داریم، پس ۳ و ۴ را با هم جمع می‌کنیم یعنی از اصل جمع و در قسمت دوم، باید از هر گروه یک انتخاب داشته باشیم، پس ۳ و ۴ را در هم ضرب می‌کنیم یعنی از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۴) دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

۱- دانش‌آموزی می‌خواهد به مناسبت روز پدر، هدیه‌ای بخرد. او می‌خواهد یک عطر یا یک پیراهن بخرد. اگر دو نوع عطر مختلف و سه نوع پیراهن مختلف موردنظر او باشد، این دانش‌آموز چند انتخاب برای خریدن هدیه دارد؟

$$\text{اصل جمع: } 2 + 3 = 5$$

۲- دانش‌آموز دیگری برای روز پدر، تصمیم گرفته هم عطر بخرد و هم پیراهن. او از بین دو نوع عطر مختلف و سه نوع پیراهن مختلف، به چند حالت می‌تواند خرید کند؟

$$\text{اصل ضرب: } 2 \times 3 = 6$$



## کار در کلاس

صفحه ۱۲۲ و ۱۲۳ کتاب درسی

الف، با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتن عدد سه‌رقمی را به‌صورت پر کردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پر کردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب

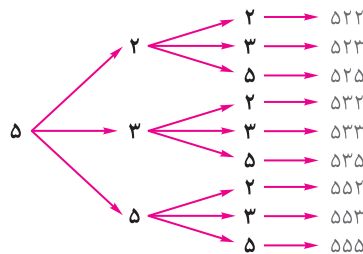
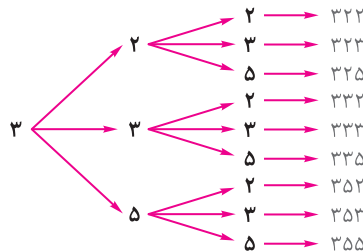
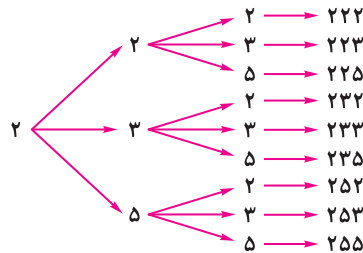
در هم ضرب شود.

هر جایگاه را به ۳ حالت می‌توان پُر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۲ یا ۳ یا ۵    ۲ یا ۳ یا ۵    ۲ یا ۳ یا ۵

$$۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳ = \text{تعداد حالت‌ها}$$

با نمودار درختی، در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد مورد نظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده‌شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب) با همان سه رقم چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پر کردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟ ۳ حالت وجود دارد. یعنی یکی از ارقام ۲، ۳ یا ۵.







۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پر کردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

به‌عنوان مثال، اگر رقم ۵ را در جایگاه اول قرار داده باشیم، دو رقم ۳ و ۲ باقی می‌مانند؛ بنابراین ۲ حالت وجود دارد.



۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟ ۱ حالت



لذا  $1 \times 2 \times 3 = 6$  عدد سه‌رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

این اعداد، عبارت‌اند از:

۵۳۲، ۵۲۳، ۳۵۲، ۳۲۵، ۲۵۳، ۲۳۵

پ) با همان سه عدد چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟

به ۱ روش، زیرا فقط یک رقم زوج داریم و آن هم باید در سمت راست عدد قرار گیرد.

۲- دو جایگاه دیگر، هر یک به چند روش می‌توانند پر شوند؟ هرکدام به ۳ روش

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با  $3 \times 3 \times 1 = 9$

ت) با همان سه عدد چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟

به ۱ روش، زیرا تنها یک رقم زوج داریم و آن هم باید در سمت راست عدد قرار گیرد.

۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟ به ۲ طریق، زیرا پس از نوشتن رقم زوج در جایگاه سمت راست، تنها دو رقم باقی‌مانده است.

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پر شود؟ به ۱ طریق، زیرا از سه رقم موجود، دو رقم در جایگاه‌های قبلی نوشته شده‌اند و تنها یک رقم باقی‌مانده است.

۴- لذا تعداد اعداد موردنظر در این حالت، برابر است با  $2 \times 1 \times 1 = 2$

**تمرین** ..... صفحه ۱۲۴ تا ۱۲۶ کتاب درسی

① تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

اصل جمع:  $42 = 32 + 10 \Rightarrow$  حالت ۴۲ = ۳۲ + ۱۰  
 دقت داشته باشید که با انتخاب یک رقم یا یک حرف، رمز موردنظر ایجاد می‌شود.  
 {  $10 =$  تعداد رقم‌ها  
 $32 =$  تعداد حروف الفبای فارسی }

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

اصل ضرب:  $320 = 32 \times 10$   
 توجه داشته باشید که با انتخاب یک رقم و یک حرف، رمز موردنظر ایجاد می‌شود.  
 ↓ حرف رقم



پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

هم اصل ضرب و هم اصل جمع:

برای انجام این کار، دو حالت وجود دارد: (گزینه اول حرف و گزینه دوم رقم) یا (گزینه اول رقم و گزینه دوم حرف)

$$10 \times 32 + 32 \times 10 = 320 + 320 = 640 \text{ حالت}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 رقم حرف حرف رقم

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

هم اصل ضرب و هم اصل جمع: (گزینه اول رقم و گزینه دوم رقم) یا (گزینه اول حرف و گزینه دوم حرف)

$$26 \times 26 + 10 \times 10 = 676 + 100 = 776 \text{ حالت}$$

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیرتکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

$$10 \times 9 \times 26 \times 25 = 58500 \text{ حالت}$$

حروف اعداد

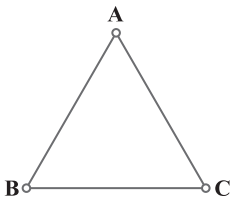
۲) در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین

۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

کوچک‌ترین اعداد را برای به‌دست آوردن حداقل و بزرگ‌ترین اعداد را برای به‌دست آوردن حداکثر انتخاب می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حداقل} = 5 \times 8 \times 10 \times 20 = 8000 \\ \text{حداکثر} = 5 \times 10 \times 12 \times 30 = 18000 \end{array} \right. \Rightarrow \text{حداکثر ۱۸۰۰۰ کارخانه در این شهرک صنعتی وجود دارد.}$$

۳) می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برای هر رأس ۲ انتخاب وجود دارد، پس:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 2 \times 2 \times 2 = 8 & \text{حالت} \end{array}$$

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.

به هیچ طریقی نمی‌توان این کار را انجام داد، زیرا ۳ رأس وجود دارد و ما فقط ۲ رنگ داریم. مثلاً اگر رأس A را با آبی و

رأس B را با قرمز رنگ کنیم، آنگاه رأس C را هر رنگی که بزنیم، با یکی از رأس‌های A یا B هم‌رنگ می‌شود. پس این کار

غیرممکن است و تعداد راه‌های انجام این کار، صفر است.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3 \times 2 \times 3 = 18 & \text{حالت} \end{array}$$

الف) اگر از ۳ رنگ استفاده کنیم، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

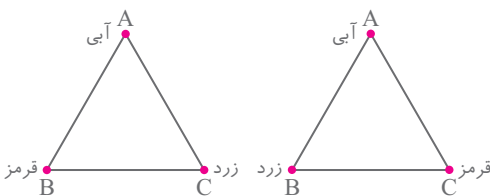
ب) **روش اول:** اگر رأس A آبی باشد، مانند شکل‌های روبه‌رو،

به ۲ صورت می‌توان رأس‌ها را رنگ‌آمیزی کرد.

به همین ترتیب، اگر رأس A قرمز باشد، ۲ حالت و اگر رأس A

زرد باشد، نیز ۲ حالت وجود دارد. پس در کل  $2 + 2 + 2 = 6$

حالت وجود دارد.



$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3 \times 2 \times 1 = 6 & \text{حالت} \end{array}$$

**روش دوم:** از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:



۴ با پلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟



۹ عدد  $A = \{11, 22, \dots, 99\} \rightarrow$

۹ عدد  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow$

۱۳ حرف  $C = \{ \text{ی, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب} \} \rightarrow$

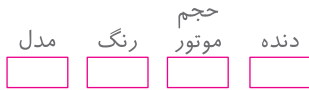
از A از B از C از B از A از



$$9 \times 9 \times 13 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^6 \times 13 = 6908733 \text{ حالت}$$

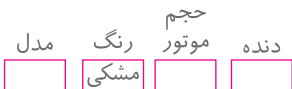
توجه داشته باشید که ارقام می‌توانند به صورت تکراری انتخاب شوند.

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود. الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟



$$\text{نوع} = 2 \times 3 \times 10 \times 5 = 300$$

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکي باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکي تولید می‌شود؟



$$\text{نوع} = 2 \times 3 \times 1 \times 5 = 30$$

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکي دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟



$$\text{نوع} = 1 \times 3 \times 1 \times 5 = 15$$

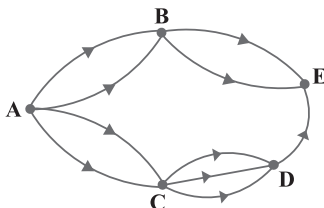
۶ یک آزمون چندگزینه‌ای، شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟ برای پاسخ دادن به هر سؤال ۴ گزینه‌ای، ۴ حالت و برای پاسخ دادن به هر سؤال ۲ گزینه‌ای، ۲ حالت وجود دارد. بنابراین:

$$2^{25} = \text{تعداد کل روش‌ها} \Rightarrow 2^5 \times 2^{20} = 4^{10} \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{25}$$

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟ در این صورت، برای پاسخ دادن به هر سؤال ۴ گزینه‌ای، ۵ حالت و برای پاسخ دادن به هر سؤال ۲ گزینه‌ای، ۳ حالت وجود دارد. بنابراین:

$$75^5 = \text{تعداد کل روش‌ها} \Rightarrow 5^5 \times 3^5 = (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 5^{10} \times 3^5 = (5^2)^5 \times 3^5 = 75^5$$



۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد

و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

برای این کار دو حالت وجود دارد:  $A \rightarrow B \rightarrow E$  یا  $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

حالت ۱:  $2 \times 3 \times 1 + 2 \times 2 = 6 + 4 = 10$  تعداد کل حالت‌ها



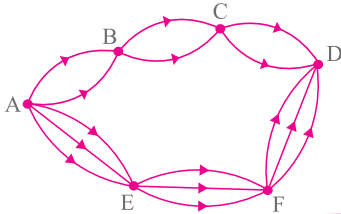
۸ مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه‌شده، درست باشد.

مسئله: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به طوری که همه ارقامشان فرد باشد؟

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



اگر شکل مقابل، نشان‌دهنده جاده‌های بین شهرهای A، B، C، D، E و F باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟

### درس دوم: جایگشت

### ریاضی

فصل ۶

صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

### پرسش متن

سه فیش و سه درگاه مانند شکل صفحه ۱۲۷ کتاب درسی وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟

درگاه ۱ درگاه ۲ درگاه ۳

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ حالت}$$

بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟ هر فیش و درگاه آن را با یک رنگ مشخص می‌کنند.

صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

### فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ خیر، زیرا باید از هر فیش یکی داشته باشیم و وجود حرف تکراری، به معنی این است که از یک فیش، بیش از یکی داشته باشیم که امکان‌پذیر نیست.

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟ درگاه ۱ را می‌توان با ۳ فیش پر کرد، سپس برای درگاه ۲ فقط ۲ فیش باقی مانده است، زیرا یکی از فیش‌ها را قبلاً وصل کرده‌ایم. در آخر، برای درگاه ۳، فقط یک فیش باقی می‌ماند.

درگاه ۱ درگاه ۲ درگاه ۳

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

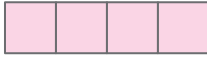


## فعالیت

صفحه ۱۲۷ و ۱۲۸ کتاب درسی

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل



وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار

مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پر کردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱) اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟ به ۴ روش، زیرا هر کدام از ۴ عدد را می‌توان در آن قرار داد.

– پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ ۳ عدد

– حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ دومین مربع را به ۳ روش می‌توان پر کرد.

سومین و چهارمین مربع را چگونه؟ سومین مربع را به ۲ روش و چهارمین مربع را به ۱ روش می‌توان پر کرد.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

– حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

## ریاضی

## فصل ۶



اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا می‌گوییم.

۲) به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  و  $\theta$  (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

۳) تعداد کلمات هفت حرفی (بامعنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه»

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

۴) با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

۵) تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

۶) اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

$$n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

که در ریاضی این حاصل ضرب را با  $n!$  (بخوانید  $n$  فاکتوریل) نشان می‌دهند، بنابراین:

$$n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

## پرسش متن

صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا  $n$  را به صورت  $n!$  (فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 \quad \text{و الی آخر.}$$

قرار دارد:  $1 = 1!$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز، برابر است با  $n!$ .



## کار در کلاس

۱) مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

$$\text{الف) } 6! = \overbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{5!} = 6 \times 5!$$

$$\text{ب) } 8! = \overbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{7!} = 8 \times 7!$$

$$\text{پ) } 10! = \overbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{9!} = 10 \times 9!$$

$$\text{ت) } n! = \overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}^{(n-1)!} = n \times (n-1)!$$

۲) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{5!}{4!} = \frac{\overbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{4!}}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!}} = 5$$

$$\text{ب) } \frac{10!}{9!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$$

$$\text{پ) } \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\text{ت) } \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

$$\text{ث) } \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$\text{چ) } \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

$$\text{ح) } \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\text{خ) } \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$$

$$\text{د) } \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\text{ذ) } \frac{n!}{(n-5)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$\text{ر) } \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-k+1)$$

۳) حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\text{الف) } 9 \times 8 = \frac{9 \times \overbrace{8 \times 7 \times 6 \times \dots \times 1}^{7!}}{\underbrace{7 \times 6 \times \dots \times 1}_{7!}} = \frac{9!}{7!}$$

$$\text{ب) } 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = \frac{9!}{5!}$$

$$\text{پ) } 11 \times 10 \times 9 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = \frac{11!}{8!}$$

$$\text{ت) } 8 = \frac{8 \times 7!}{7!} = \frac{8!}{7!}$$

$$\text{ث) } n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\text{ج) } n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$



## فعالیت

صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

۱) تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف  $a, b, e, f, s, t$  می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با  $۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰$ .

## تکلیف

تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز برابر است با  $n!$ .

۲) حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم.

برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه سه حرفی، چند انتخاب داریم؟ ۷ انتخاب

برای انتخاب دوم و سوم حرف چطور؟ برای دومین حرف ۶ انتخاب و برای سومین حرف ۵ انتخاب باقی می‌ماند.

$$۷ \times ۶ \times ۵ = ۲۱۰$$

بنابراین تعداد کلمات سه حرفی مورد نظر برابر است با: ۲۱۰.

در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

## ریاضی

### فصل ۶

$$۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۰۲۴$$

۳) تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید.

۴) اعداد به‌دست‌آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$$\frac{۹!}{۵!} = ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \Rightarrow \text{مرحله ۳}, \quad \frac{۷!}{۴!} = ۷ \times ۶ \times ۵ \Rightarrow \text{مرحله ۲}$$

۵) تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از  $n$  شیء متمایز را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$$\frac{n!}{(n-3)!} = n \times (n-1) \times (n-2)$$

۶) تعداد جایگشت‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز ( $0 \leq r \leq n$ ) را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \times (n-r)!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$$

## تعمیم

تعداد جایگشت‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های  $r$  شیء از بین  $n$  شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با  $P(n, r)$  نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

## کار در کلاس

۱) یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟ باید تعداد جایگشت‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را به‌دست آوریم.

$$\text{حالت } P(6, 4) = \frac{۶!}{(۶-۴)!} = \frac{۶!}{۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۲ \times ۱} = ۳۶۰$$



۲) با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه‌رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟ باید تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از چهار شیء متمایز را به دست آوریم:

$$P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24 \text{ حالت}$$

تمرین صفحه ۱۳۱ و ۱۳۲ کتاب درسی

۱) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟ باید تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از ۱۸ شیء متمایز را به دست آوریم:

$$P(18,3) = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896 \text{ حالت}$$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چقدر است؟

اگر تعداد کتاب‌ها  $n$  تا باشد، در این صورت تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از  $n$  شیء متمایز برابر ۲۱۰ تا است. بنابراین:

$$P(n,3) = 210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = 210$$

یعنی حاصل ضرب سه عدد متوالی ۲۱۰ شده است، با راهبرد حدس و آزمایش، مشخص می‌شود که  $n = 7$  است.

$$\begin{array}{ccccccc} n(n-1)(n-2) & = & 210 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \\ 7 & \times & 6 & \times & 5 & & \end{array}$$

بنابراین تعداد کتاب‌ها ۷ تا است.

۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$6! = 3! + 3!$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$3! + 3! = (3 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 6 + 6 = 12 \Rightarrow 720 \neq 12 \Rightarrow 6! \neq 3! + 3!$$

نادرست است، زیرا:

$$6! = 6 \times 5!$$

$$6! = 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 6 \times 5!$$

درست است، زیرا:

$$8! = 4! \times 2!$$

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

$$4! \times 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 24 \times 2 = 48 \Rightarrow 40320 \neq 48 \Rightarrow 8! \neq 4! \times 2!$$

نادرست است، زیرا:

$$2 \times 3! = 6!$$

$$2 \times 3! = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \Rightarrow 12 \neq 720 \Rightarrow 2 \times 3! \neq 6!$$

نادرست است، زیرا:

$$(3!)^2 = 9!$$

$$(3!)^2 = (3 \times 2 \times 1)^2 = 6^2 = 36$$

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880 \Rightarrow 36 \neq 362880 \Rightarrow (3!)^2 \neq 9!$$

نادرست است، زیرا:

$$4! = \frac{8!}{2!}$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\frac{8!}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 20160 \Rightarrow 24 \neq 20160 \Rightarrow 4! \neq \frac{8!}{2!}$$

نادرست است، زیرا:





۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص، باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید موردنظر کدامند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور موردنظر را اجرا کند؟ ابتدا تعداد حالت های انتخاب ۳ دکمه از ۲۰ دکمه با اهمیت ترتیب قرار گرفتن آنها (جایگشت های سه تایی از بیست شیء متمایز) را به دست می آوریم:

$$P(20, 3) = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840 \text{ حالت}$$

چون برای فشردن سه کلید در هر حالت به ۲ ثانیه زمان نیاز داریم، پس در بدترین حالت، حداکثر زمان برابر است با:

$$6840 \times 2 = 13680 = 228 \text{ دقیقه} = 3:48'$$

#### ۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ برای نوشتن تمام کلمات ۶ حرفی بدون حروف تکراری، باید تعداد جایگشت های ۶ شیء متمایز را به دست آوریم، یعنی:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟ برای به دست آوردن تعداد کلمات ۶ حرفی که با «گل» شروع می شوند، باید تعداد جایگشت های ۴ حرف بعدی را به دست آوریم، زیرا «گل» در ابتدای کلمات ثابت است و به تعداد حالت هایی که ۴ حرف بعدی می توانند در کنار هم قرار بگیرند، کلمه جدید ساخته می شود. بنابراین:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

یعنی از تعداد ۷۲۰ کلمه ۶ حرفی، فقط تعداد ۲۴ تا از آنها با «گل» شروع می شود.

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟ باید تعداد جایگشت های چهار تایی از شش شیء متمایز را به دست آوریم.

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند.

پ \_ \_ \_ \_ \_

اگر دو حرف «پ» و «ر» کنار هم باشند، شبیه حالتی است که می خواهیم یک کلمه ۵ حرفی بنویسیم (جایگاه «پ» و «ر» را با هم یک جایگاه می گیریم که این جایگاه نیز ممکن است در جاهای مختلف کلمه قرار گیرد):

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

از طرفی دو حرف «پ» و «ر» نیز به ۲ حالت ( $2! = 2 \times 1$ ) ممکن است با هم جابه جا شوند، در نتیجه:

$$\text{حالت } 2 \times 120 = 240$$

ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

اگر دو حرف «پ» و «ر» کنار هم باشند، برای نوشتن کلمه چهار حرفی نیاز به انتخاب دو حرف دیگر داریم:

$$P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

از طرفی با انتخاب دو حرف «پ» و «ر» و ۱۲ حالت برای دو حرف دیگر، به ۳ حالت می توان آنها را کنار هم قرار داد:

پ \_ \_ \_ \_ پ \_ \_ \_ \_ یا \_ \_ \_ \_ پ \_ \_ \_ \_

همچنین این دو حرف نیز به ۲ حالت ( $2! = 2 \times 1$ ) در کنار هم قرار می گیرند، پس:

حالت  $2 \times 3 \times 12 = 72$  تعداد کل حالت ها



ث) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «پیرا» در کنار هم، برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی  $4!$ . سپس برای نوشتن کلمه‌های ۵ حرفی، تنها باید یک حرف دیگر را از بین «گ» و «ل» انتخاب کنیم که ۲ حالت دارد. همچنین حرف پنجم اضافه شده، ممکن است اول کلمه بیاید یا آخر کلمه، پس ۲ حالت هم در اینجا ایجاد می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$4! \times 2 \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 4 = 24 \times 4 = 96$$

حالت ۹۶

### درس سوم: ترکیب

#### فعالیت

صفحه ۱۳۳ کتاب درسی

۱) همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد  $5! = \frac{5!}{(5-3)!}$  عدد سه‌رقمی با رقم‌های غیر تکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از:

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

#### ریاضی

فصل ۶

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟ همه آنها از سه رقم خاص ساخته شده‌اند و فقط جای این ارقام در آنها تغییر کرده است.

۲) با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  را بنویسیم؟ کافی است از هر ستون، رقم‌های اولین عدد را انتخاب کنیم. زیرا در نمایش مجموعه، اگر اعضا، جایشان عوض شود مجموعه جدیدی به وجود نمی‌آید.

این زیرمجموعه‌ها چقدر هستند؟ آنها را بنویسید. ۱۰ تا هستند.

$\{1, 2, 3\}$  و  $\{2, 3, 4\}$  و  $\{2, 3, 5\}$  و  $\{1, 3, 4\}$  و  $\{1, 3, 5\}$  و  $\{1, 2, 4\}$  و  $\{1, 2, 5\}$  و  $\{1, 4, 5\}$  و  $\{2, 4, 5\}$  و  $\{3, 4, 5\}$

۳) چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟ در فعالیت ۱، ترتیب کنار هم قرار گرفتن رقم‌ها مهم است، ولی در فعالیت ۲ ترتیب کنار هم قرار گرفتن رقم‌ها مهم نیست.

۴) هر ستون در فعالیت ۱، چند زیرمجموعه سه‌عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟ هر ستون در فعالیت ۱، معادل یک زیرمجموعه سه‌عضوی در فعالیت ۲ است، زیرا با جابه‌جا کردن رقم‌ها، زیرمجموعه جدیدی ایجاد نمی‌شود.

۵) با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ تقسیم بر ۶

این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟ عدد ۶ برابر است با تعداد جایگشت‌های ۳ شیء متمایز، یعنی:  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

#### نکته

به هر انتخاب  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه  $r$  عضوی

از یک مجموعه  $n$  عضوی، یک ترکیب  $r$  تایی از  $n$  شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز را معمولاً با

$$C(n, r) \text{ یا } \binom{n}{r} \text{ نمایش می‌دهیم و داریم: } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$



## پرسش متن

صفحه ۱۳۶ کتاب درسی

تعداد افراد دسته دوم برابر  $\binom{5}{5} = 1$  است. چرا؟

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-5)!5!} = \frac{1}{1} = 1$$

## کاردر کلاس

صفحه ۱۳۶ کتاب درسی

۱) در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی).

ترتیب مهم است. پس باید از جایگشت استفاده شود.  $P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$  حالت

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.

ترتیب مهم نیست. پس باید از ترکیب استفاده شود.  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$  حالت

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند. ترتیب مهم است. پس باید از جایگشت استفاده شود.

حالت  $P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.

ترتیب مهم نیست. پس باید از ترکیب استفاده شود. حالت  $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.

ترتیب مهم نیست. پس باید از ترکیب استفاده شود. حالت  $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.

چون نوع مدال‌ها متفاوت است، پس ترتیب مهم است. بنابراین باید از جایگشت استفاده شود.

حالت  $P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

۲) در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

در کار در کلاس (۱) پاسخ داده شده است.

۳) از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند

انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

$$\left. \begin{aligned} & 2: \text{نفر از ۸ ریاضی‌دان} \quad \binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} = 28 \\ & 2: \text{نفر از ۶ فیزیک‌دان} \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15 \\ & 2: \text{نفر از ۵ شیمی‌دان} \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 28 \times 15 \times 10 = 4200 \text{ حالت}$$



ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ کمیته سه نفره که حداقل ۱ نفر از هر رشته در آن عضو باشند، به این معنی است که از ۸ ریاضی‌دان ۱ نفر، از ۶ فیزیک‌دان ۱ نفر و از ۵ شیمی‌دان نیز ۱ نفر باید انتخاب شوند. بنابراین:

$$\binom{8}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} = \frac{8!}{7! \times 1!} \times \frac{6!}{5! \times 1!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} = \frac{8 \times 7!}{7!} \times \frac{6 \times 5!}{5!} \times \frac{5 \times 4!}{4!} = 8 \times 6 \times 5 = 240 \text{ حالت}$$

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟ حداقل یک ریاضی‌دان یعنی ۱ ریاضی‌دان انتخاب شود یا ۲ ریاضی‌دان

انتخاب شود که هر دو حالت، بررسی می‌شوند.

حالت اول:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1: \binom{8}{1} = \frac{8!}{7! \times 1!} = \frac{8 \times 7!}{7!} = 8 \\ 2: \binom{6}{1} + \binom{5}{1} = \frac{6!}{5! \times 1!} + \frac{5!}{4! \times 1!} = 6 + 5 = 11 \end{array} \right.$$

حالت دوم:

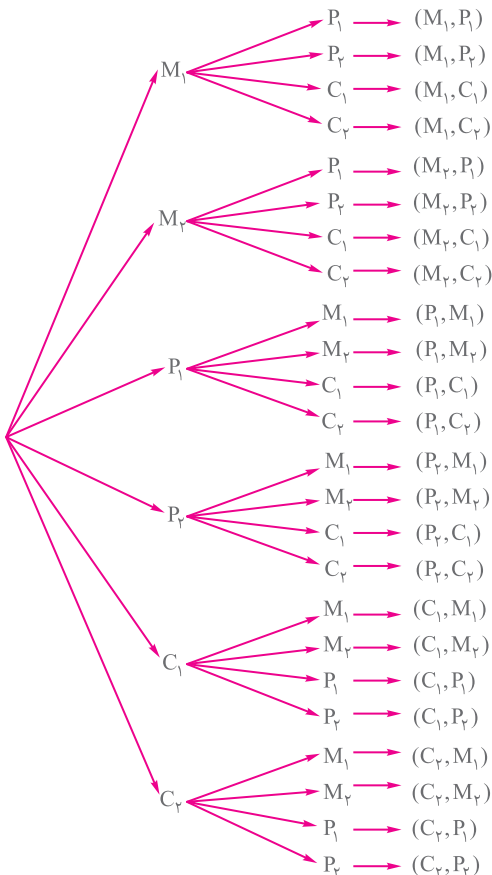
$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

حالت ۸۸ + ۲۸ = ۱۱۶

از آنجا که حالت اول یا حالت دوم رخ می‌دهند، پس طبق اصل جمع خواهیم داشت:

## فعالیت

صفحه ۱۳۶ و ۱۳۷ کتاب درسی



دو نفر مدرس ریاضی را  $M_1$  و  $M_2$ ، دو نفر مدرس فیزیک را  $P_1$  و  $P_2$ ،

و دو نفر مدرس شیمی را  $C_1$  و  $C_2$  در نظر بگیرید و تمام حالت‌های

ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

تمام حالت‌های ممکن برابر است با:

$(M_1, P_1), (M_1, P_2), (M_2, P_1), (M_2, P_2), (M_1, C_1), (M_1, C_2),$

$(M_2, C_1), (M_2, C_2), (P_1, C_1), (P_1, C_2), (P_2, C_1), (P_2, C_2)$

پس ۱۲ حالت وجود دارد، بنابراین جواب حمید غلط است.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را

مشخص نمایید.

نمودار درختی روش حمید، به صورت روبه‌رو است:

۲۴ حالت به وجود آمده است و علت این است که از هر

حالت ۲ تا وجود دارد. مثلاً  $(M_1, P_1)$  و  $(P_1, M_1)$  فرقی با هم

ندارند؛ بنابراین به جای ۱۲ حالت به ۲۴ حالت رسیده‌ایم که

نادرست است.



## فعالیت

صفحه ۱۳۷ و ۱۳۸ کتاب درسی

۱) می‌دانیم که  $\binom{n}{r}$  همان تعداد زیرمجموعه‌های  $r$  تایی از یک مجموعه  $n$  عضوی است. حال  $\binom{n}{0}$  و  $\binom{n}{1}$  را یک‌بار با توجه به این تعبیر از  $\binom{n}{r}$ ، و یک‌بار با فرمول، به دست آورید. با توجه به اینکه  $0! = 1$ ،  $1! = 1$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = 1 & \text{تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی از یک مجموعه } n \text{ عضوی} \\ \binom{n}{1} = n & \text{تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی از یک مجموعه } n \text{ عضوی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \times 0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1 \\ \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)! \times 1} = n \end{cases}$$

فرمول:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{0} = 1$$

توجه داشته باشید که همواره داریم:

## ریاضی

فصل ۶

۲) الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند

حالت برای این کار امکان دارد؟

با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید. با توجه به ستون اول جدول، مشاهده می‌شود که ۱۰ حالت برای این کار امکان دارد.

ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

با توجه به ستون دوم جدول، مشخص است که برای انتخاب دو بازیکن نیمکت‌نشین هم ۱۰ حالت وجود دارد.

پ) بین تعداد انتخاب‌های  $\binom{5}{2}$  و  $\binom{5}{3}$  چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟ همان‌طور که در قسمت‌های الف) و ب) مشخص شد، با هم برابرند، یعنی:  $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ ، زیرا تعداد راه‌های انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر در حقیقت، همان تعداد راه‌های انتخاب نکردن ۲ نفر از ۵ نفر است.

ت) درستی تساوی  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$  را یک‌بار با استفاده از توجیه بالا و یک‌بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

روش اول: تعداد حالت‌های انتخاب  $r$  شیء از  $n$  شیء در صورتی که ترتیب مهم نباشد  $\binom{n}{r}$ ، برابر است با تعداد حالت‌های

انتخاب نکردن اشیای باقی‌مانده  $(n-r)$  از  $n$  شیء  $\binom{n}{n-r}$ . بنابراین:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

روش دوم:



۳) جاهای خالی را پر کنید.

(الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با:  $\binom{26}{5}$

(ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با:  $\binom{25}{4}$

در زیرمجموعه‌های ۵ عضوی که a در آنها باشد، در حقیقت تکلیف یکی از اعضا مشخص شده و ما باید ۴ عضو دیگر را از بین ۲۵ حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم که برابر  $\binom{25}{4}$  است.

(پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با:  $\binom{25}{5}$

اگر نخواهیم از a استفاده کنیم، با کنار گذاشتن آن، ۵ حرف را باید از ۲۵ حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم.

(ت) بنابراین:  $\binom{26}{5} = \binom{25}{4} + \binom{25}{5}$ ، زیرا جمع حالت‌های (ب) و (پ) برابر حالت (الف) است.

۴) فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ( $a \in A$ )

(الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه A برابر است با:  $\binom{n}{r}$

(ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با:  $\binom{n-1}{r-1}$

(پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با:  $\binom{n-1}{r}$

(ت) بنابراین  $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

تمرین ..... صفحه ۱۳۹ و ۱۴۰ کتاب درسی

۱) یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه زائنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظار او یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟ پاسخ برابر است با انتخاب حداقل ۵ شیء از ۷ شیء به طوری که ترتیب انتخاب در آنها مهم نیست.

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = \frac{7!}{2! \times 5!} + \frac{7!}{1! \times 6!} + \frac{7!}{0! \times 7!} = 21 + 7 + 1 = 29 \text{ حالت}$$

۲) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

(الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟ حضور رئیس، یعنی انتخاب ۱ نفر از ۱ نفر، یعنی:  $\binom{1}{1}$ .

حضور یک کارشناس امور حقوقی، یعنی انتخاب ۱ نفر از ۳ نفر، یعنی:  $\binom{3}{1}$ .

۳ نفر بعدی فرقی نمی‌کند که معاون یا حسابدار یا کارشناس اداری یا کارمند کارگزینی باشند. پس انتخاب ۳ نفر از ۱۴ نفر را خواهیم داشت، یعنی:  $\binom{14}{3}$ . بنابراین طبق اصل ضرب می‌توان نوشت:

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{14}{3} = 1 \times 3 \times \frac{14!}{11! \times 3!} = 3 \times \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 364 = 1092 \text{ حالت}$$



ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\left( \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) = \text{رئیس و} \left( \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) = \text{یک معاون و} \left( \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) = \text{یک کارشناس امور حقوقی}$$

۲ نفر باقی مانده باید از بین ۲ حسابدار و ۶ کارشناس اداری و ۳ کارمند کارگزینی انتخاب شوند، یعنی ۲ نفر از بین ۱۱ نفر، یعنی:  $\left( \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right)$ . بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\left( \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right) = 1 \times 3 \times 3 \times \frac{11!}{9! \times 2!} = 9 \times \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2} = 9 \times 11 \times 5 = 495 \text{ حالت}$$

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟ با انتخاب رئیس و یک معاون و یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی، چهار نفر انتخاب شده اند. ۱ نفر دیگر هم باید از بین ۹ نفر باقی مانده (۶ کارشناس اداری و ۳ کارمند کارگزینی) انتخاب شود. در نتیجه طبق اصل ضرب داریم:

$$\left( \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right) = 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 9 = 162 \text{ حالت}$$

### ریاضی

#### فصل ۶

۳) در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

اگر تعداد دانش آموزان داوطلب  $n$  باشد، با استفاده از ترکیب، خواهیم داشت:

$$\left( \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right) = 28 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ n = -7 \text{ غ ق} \end{cases}$$

دقت داشته باشید که تعداد دانش آموزان، نمی تواند منفی باشد.

۴) گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

$$\left. \begin{aligned} &\text{شاخه ۳ با} \left( \begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} \right) = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2} = 120 \\ &\text{یا} \\ &\text{شاخه ۴ با} \left( \begin{matrix} 10 \\ 4 \end{matrix} \right) = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4 \times 3 \times 2} = 210 \\ &\text{یا} \\ &\text{شاخه ۵ با} \left( \begin{matrix} 10 \\ 5 \end{matrix} \right) = \frac{10!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 252 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اصل جمع}} 120 + 210 + 252 = 582 \text{ حالت}$$



۵) یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$\text{تعداد حالت‌های ترکیب ۲ رنگ} \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = 6$$

یا

$$\text{تعداد حالت‌های ترکیب ۳ رنگ} \quad \binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$$

یا

$$\text{تعداد حالت‌های ترکیب ۴ رنگ} \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\text{تعداد کل رنگ‌هایی که می‌تواند داشته باشد} = \underbrace{1}_{\text{رنگ‌های جدید}} + \underbrace{4}_{\text{رنگ‌های اصلی}} = 5$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل، بیشتر از جواب شماس است؟ در کارهای هنری وقتی رنگ‌ها را با نسبت‌های مختلف باهم ترکیب می‌کنند، تعداد رنگ‌های بیشتری به وجود می‌آورند. در حالی که ما، در این سؤال، رنگ‌ها را با نسبت‌های مساوی ترکیب کردیم.

۶) هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟ توجه کنید که نقاطی که روی دایره رسم می‌شوند، طوری هستند که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط راست واقع نمی‌شوند، پس با انتخاب هر ۳ نقطه روی دایره، می‌توان یک مثلث تشکیل داد. بنابراین باید تعداد راه‌های انتخاب ۳ نقطه از ۷ نقطه را به دست آوریم که ترتیب انتخاب در آنها مهم نیست:

$$\text{مثلث} \quad \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2} = 35$$

۷) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

$$\text{الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد} \quad \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2} = 120$$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟ اگر این دو نوع ادویه کنار هم باشند، ادویه سوم به ۸ حالت انتخاب می‌شود. پس تعداد کل حالت‌هایی که این دو ادویه با هم استفاده می‌شوند، برابر است با:

$$1 \times 8 = 8 \quad \text{طعم} \quad 120 - 8 = 112$$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟ از ۱۲۰ حالت کل، تنها یک حالت است که سه ادویه مورد نظر با هم می‌توانند استفاده شوند. پس اگر نخواهیم آن سه ادویه باهم استفاده شوند، خواهیم داشت:

$$120 - 1 = 119 \quad \text{طعم}$$

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵‌تایی تقسیم می‌شوند که هیچ‌یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟ اگر هر سه نوع ادویه را از دسته ۵‌تایی اول انتخاب کنیم،  $\binom{5}{3}$  حالت خواهیم داشت و اگر هر سه نوع ادویه را از دسته ۵‌تایی دوم انتخاب کنیم، باز هم  $\binom{5}{3}$  حالت خواهیم داشت. بنابراین:

$$\text{طعم} \quad \binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$





۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

$$\text{الف), } \binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$$

مادر علی می‌خواهد برای او کلاه و کفش بخرد. مادر او از بین ۵ نوع کلاه مختلف ۳ نوع و از بین ۶ نوع کفش مختلف ۲ نوع را انتخاب می‌کند. علی به چند طریق می‌تواند کلاه و کفش خود را انتخاب کند؟

$$\text{حالت } \Rightarrow \binom{6}{2} \times \binom{5}{3} = 10 \times 10 = 100$$

$$\text{ب), } \binom{6}{2} + \binom{5}{3}$$

مادر علی می‌خواهد برای او کلاه یا کفش بخرد. اگر او کلاه بخرد، از بین ۵ نوع مختلف ۳ نوع و اگر کفش بخرد، از بین ۶ نوع مختلف ۲ نوع را می‌تواند انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند خرید را انجام دهد؟

$$\text{حالت } \Rightarrow \binom{6}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

## ریاضی

فصل ۶



## فصل ۷: آمار و احتمال

### درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

#### فعالیت

صفحه ۱۴۲ و ۱۴۳ کتاب درسی

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

تاس قرمز    تاس آبی  
 $\uparrow$              $\uparrow$   
 حالت  $36 = 6 \times 6$ : تعداد کل حالت‌ها

#### ریاضی

فصل ۷

۲ قطر آبی‌رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟

پیشامد اینکه مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس، برابر ۷ باشند. یعنی:

$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هاشور بزنید؛ چه الگویی به‌دست می‌آید؟

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

یک صفحهٔ شطرنجی به‌وجود می‌آید، زیرا خانه‌ها یکی در میان هاشور خورده‌اند (رنگی شده‌اند). (در واقع نصف خانه‌ها هاشور خورده‌اند.)

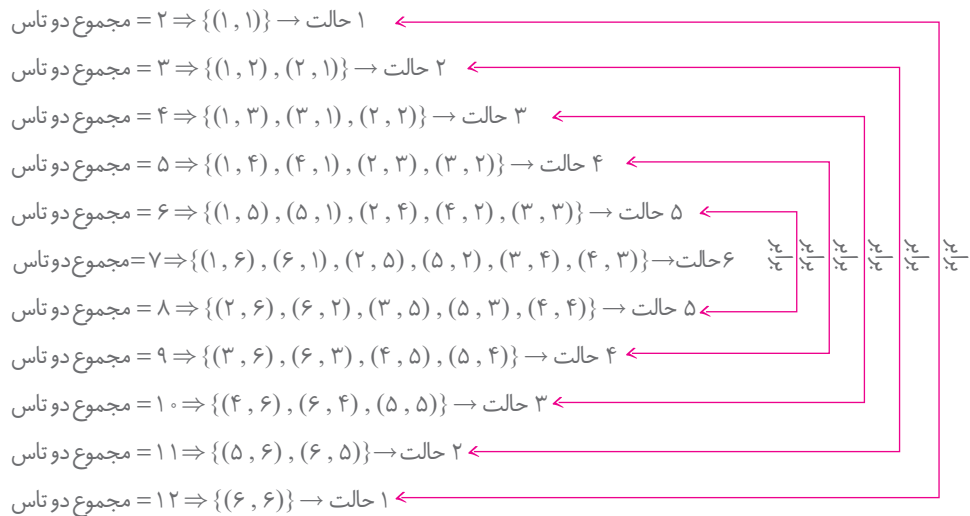
۴ با توجه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

سؤال: اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم، در چند حالت یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است؟

پاسخ: با توجه به جدول رسم‌شده، در نصف حالت‌ها یعنی ۱۸ حالت  $(36 \div 2 = 18)$  یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است.



۵) با توجه به جدول و قطره‌های آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است)



بنابراین تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس ۶ و ۸ با هم، برای مجموع دو تاس ۵ و ۹ با هم، برای مجموع دو تاس ۴ و ۱۰ با هم، برای مجموع دو تاس ۳ و ۱۱ با هم و برای مجموع دو تاس ۲ و ۱۲ با هم برابرند.

کار در کلاس ..... صفحه ۱۴۳ کتاب درسی

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱) آیا می‌توانید نتیجه حاصل را به صورت قطعی بیان کنید؟ خیر

۲) آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ بله چرا؟ زیرا نتیجه آن را نمی‌توان به طور دقیق مشخص کرد.

۳) همه حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

سکه دو حالت پشت «پ» و رو «ر» دارد و تاس هم، یکی از اعداد ۱ تا ۶ را نمایش می‌دهد. بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\}$$

۴) تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc} & \text{تاس} & \text{سکه} \\ & \uparrow & \uparrow \\ \text{حالت} & 6 & \times & 2 = 12 \end{array}$$

تمام حالت‌ها

۵) جدول  $6 \times 2$  یا  $2 \times 6$  مربوط به این آزمایش را رسم کنید.

تاس \ سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پ	(پ, ۱)	(پ, ۲)	(پ, ۳)	(پ, ۴)	(پ, ۵)	(پ, ۶)
ر	(ر, ۱)	(ر, ۲)	(ر, ۳)	(ر, ۴)	(ر, ۵)	(ر, ۶)



### مثال (۱)

صفحه ۱۴۳ و ۱۴۴ کتاب درسی

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ اما از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجه به اصل ضرب تعداد همه حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از:  $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ . حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید. حالت (د، پ، پ، پ) به معنای این است که سه فرزند اول پسر و فرزند چهارم دختر هستند. پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف) پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد»  $A =$

$$A = \{(د، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، د)\}$$

ب) پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد»  $B =$

$$B = \{(پ، پ، پ، پ) و (د، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، د)\}$$

پ) پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند»  $C =$

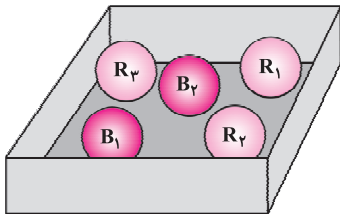
$$C = \{(پ، پ، د، د) و (د، د، پ، پ) و (پ، د، پ، د) و (د، پ، د، پ) و (پ، پ، د، د) و (د، د، پ، پ)\}$$

ت) پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد»  $D =$

$$D = \{(پ، پ، پ، پ) و (پ، پ، پ، د) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، د، پ، د) و (د، پ، د، پ)\}$$

صفحه ۱۴۴ کتاب درسی

### مثال (۲)



در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از  $\binom{5}{3} = 10$ . زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = \{R_1R_2R_3 \text{ و } R_1R_2B_1 \text{ و } R_1R_2B_2 \text{ و } R_1R_3B_1 \text{ و } R_1R_3B_2 \text{ و } R_1B_1B_2 \text{ و } R_2R_3B_1 \text{ و } R_2R_3B_2 \text{ و } R_2B_1B_2 \text{ و } R_3B_1B_2\}$$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب  $A$  و  $B$  و  $C$  بنامیم؛ خواهیم داشت:

$$A = \{B_1R_1R_2 \text{ و } B_1R_1R_3 \text{ و } B_1R_2R_3 \text{ و } B_2R_1R_2 \text{ و } B_2R_1R_3 \text{ و } B_2R_2R_3 \text{ و } B_1B_2R_1 \text{ و } B_1B_2R_2 \text{ و } B_1B_2R_3\}$$

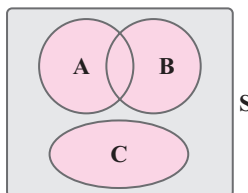
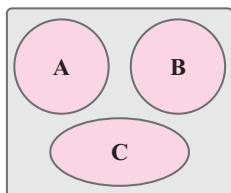
$$B = \{B_1R_1R_2 \text{ و } B_1R_1R_3 \text{ و } B_1R_2R_3 \text{ و } B_2R_1R_2 \text{ و } B_2R_1R_3 \text{ و } B_2R_2R_3 \text{ و } R_1R_2R_3\}$$

$$C = \{R_1R_2R_3\}$$

اگر  $S$  را مجموعه مرجع فرض کنیم؛ متمم  $A$  یعنی  $A'$  با کدام یک از مجموعه‌های  $B$  یا  $C$  برابر است؟  $C$

صفحه ۱۴۵ کتاب درسی

### مثال (۳)



کدام یک از شکل‌های زیر سه پیشامد دوه‌و ناسازگار را نشان می‌دهد؟ شکل سمت چپ



## کار در کلاس

صفحه ۱۴۵ و ۱۴۶ کتاب درسی

۱) با توجه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هریک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پر کنید.

$$A = \text{پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$B = \text{پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد} = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$$

$$C = \text{پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید}$$

$$= \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

توجه داشته باشید که در قسمت C، فقط تاس آبی باید مضرب ۳ بیاید و در مورد عددی که تاس قرمز نشان می‌دهد، هیچ صحبتی نشده است.

الف) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$$(A \cap B) = \{(1, 5), (5, 1), (3, 3)\} \rightarrow n(A \cap B) = 3$$

ب) پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$$A \cup B = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\} \Rightarrow n(A \cup B) = 11$$

پ) پیشامد آنکه  $(A - C)$  رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی تاس آبی مضرب ۳ نیاید». پس داریم:

$$A - C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

ت) پیشامد  $(C - B)$  را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید.

پیشامد  $C - B$  یعنی پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.

$$C - B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

ث) اگر پیشامد D را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم، آیا D و E ناسازگارند؟ بله چرا؟

$$D = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$E = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$D \cap E = \emptyset \Rightarrow D \text{ و } E \text{ ناسازگارند}$$

۲) تاسی را می‌اندازیم، روی فضای نمونه‌ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که:

الف) A و B ناسازگار باشند. اگر A پیشامد رو شدن عدد زوج و B پیشامد رو شدن عدد فرد باشد، ناسازگار خواهند بود، زیرا:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

ب) A و B و C دوتایی ناسازگار باشند. اگر A پیشامد رو شدن عدد اول، B پیشامد رو شدن عدد مرکب و C پیشامد رو شدن عددی که نه اول و نه مرکب است باشد، آنگاه A، B و C دوتایی ناسازگار خواهند بود، زیرا:

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{4, 6\}, C = \{\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$$

پ)  $(A \cap B)$  و C ناسازگار باشند. اگر A پیشامد رو شدن عدد اول و B پیشامد رو شدن عدد فرد و C پیشامد رو شدن عدد زوج باشد، خواهیم داشت:

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{3, 5\} \Rightarrow (A \cap B) \cap C = \emptyset \Rightarrow C \text{ و } (A \cap B) \text{ ناسازگارند. پس}$$



### مثال (۵)

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 6 = 24$$

الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

$$A = \{(ر, ر, ۲), (ر, ر, ۴), (ر, ر, ۶), (ر, پ, ۲), (ر, پ, ۴), (ر, پ, ۶), (پ, ر, ۲), (پ, ر, ۴), (پ, ر, ۶), (پ, پ, ۲), (پ, پ, ۴), (پ, پ, ۶)\}$$

ب) پیشامد آنکه «هر دو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

پ) پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.

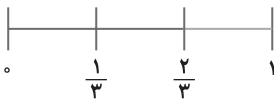
$$B = \{(ر, ر, ۵), (ر, پ, ۵), (پ, ر, ۵), (پ, پ, ۵), (ر, ر, ۱), (ر, ر, ۲), (ر, ر, ۳), (ر, ر, ۴), (ر, ر, ۶), (پ, ر, ۱), (پ, ر, ۲), (پ, ر, ۳), (پ, ر, ۴), (پ, ر, ۶), (پ, پ, ۱), (پ, پ, ۲), (پ, پ, ۳), (پ, پ, ۴), (پ, پ, ۶)\}$$

### مثال (۱)

صفحه ۱۴۷ کتاب درسی

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم:

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$$S = \{۴۳, ۳۴, ۲۴, ۴۲, ۲۳, ۳۲\}$$

$$A = \{۳۴, ۲۴, ۴۲, ۳۲\}, B = \{۴۳, ۲۳\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

واضح است که  $P(A) > P(B)$  پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال، تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد، بیشتر است)

### فعالیت

صفحه ۱۴۷ و ۱۴۸ کتاب درسی

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این صورت:

$$I) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{زیرا } A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$II) P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$$

$$\text{زیرا } P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0, P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

$$III) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{زیرا: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } n(S)} \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### نکته

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می‌شود:

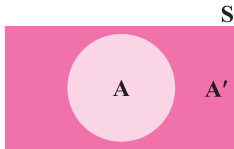
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



## کار در کلاس

صفحه ۱۴۸ کتاب درسی

اگر  $A'$  متمم پیشامد  $A$  در فضای نمونه‌ای  $S$  باشد،  $A$  و  $A'$  ناسازگارند نشان دهید.



$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A \cup A') = P(S) = 1 \quad \text{می‌دانیم}$$

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

صفحه ۱۴۸ و ۱۴۹ کتاب درسی

## مثال (۱)

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

(الف) هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس  $n(S) = 6^2 = 36$ )

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(3, 5), (5, 3), (2, 6), (6, 2), (4, 4)\} \rightarrow \text{مجموع دو تاس } 8$$

(ب) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند؟

$$C = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\} \rightarrow \text{هر دو تاس فرد}$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$(B \cap C) = \{(3, 5), (5, 3)\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{36}$$

(پ) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

$$D = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\} \rightarrow \text{مجموع دو تاس } 7$$

$$A = \text{مجموع دو تاس زوج} \rightarrow n(A) = 9, (A \cap B) = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(D \cup A) = P(D) + P(A) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(ت) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبه

آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

$$A' = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \rightarrow \text{پیشامد مجموع بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱}$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{3}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

$$A = \{(2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

(ث) حاصل ضرب دو عدد ریشه ۱۲ باشد؟

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

صفحه ۱۵۰ و ۱۵۱ کتاب درسی

## تمرین

① هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید.

(ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ به تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، می‌توان

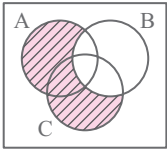
پیشامد تصادفی تعریف کرد و می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۵ عضوی برابر است با:  $2^5 = 32$



$$A = \{4, 8\}$$

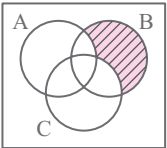
پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.

۲) فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارات‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.



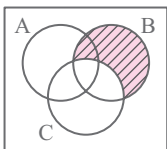
$$(A \cup C) - B$$

الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.



$$B - (A \cup C) \text{ یا } (B - A) \cap (B - C)$$

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.



$$B - C$$

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.

۳) هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ) پیشامد C که در آن «عدد روشده بزرگ‌تر از ۲ باشد».

۴) خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

$$S = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)\}$$

$$A = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)\}$$

۵) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

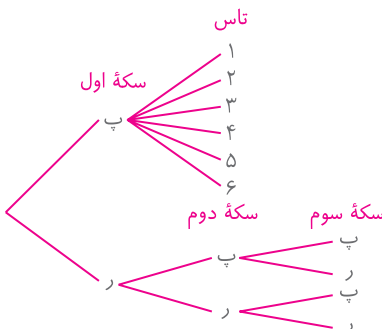
$$S = \{(پ, پ), (پ, ر), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, پ), (ر, ر), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\}$$

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

$$A = \{(پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶)\}$$

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$$B = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (پ, ر, ر)\}$$







۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟ تعداد کل حالت‌ها یعنی  $n(S)$ ، انتخاب ۲ نفر از بین ۵ نفر بدون اهمیت ترتیب در انتخاب است:

$$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10.$$

اگر A پیشامد این باشد که هر دو نفر از دانش‌آموزان کلاس دهم رشته ریاضی باشند، آنگاه:

$$n(A) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{1! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{10}.$$

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟ در قسمت (الف)، احتمال اینکه هر دو نفر، کلاس دهم رشته ریاضی باشند، به‌دست آمد. حال احتمال اینکه هر دو نفر، کلاس دهم رشته تجربی باشند را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم B پیشامد این باشد که هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم رشته تجربی باشند، آنگاه:

$$n(B) = \binom{2}{2} = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{10}.$$

برای به‌دست آوردن احتمال هم‌کلاسی بودن دو نفر، با توجه به ناسازگاری پیشامدهای A و B، احتمال‌های به‌دست‌آمده را با هم جمع می‌کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟ اگر C پیشامد این باشد که ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد، آنگاه طبق اصل ضرب، داریم:

$$n(C) = \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۷ یک فروشگاه، دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A  $(P(A) = \frac{34}{100})$  و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A) = 0.34, \quad P(B) = 0.62, \quad P(A \cap B) = 0.15$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.34 + 0.62 - 0.15 = 0.81$$

بنابراین ۸۱٪ (۸۱ درصد) احتمال دارد که مشتریان، با داشتن حداقل یکی از دو کارت، از این فروشگاه خرید کنند.

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟ تعداد کل حالت‌هایی که ۷ نفر می‌توانند در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند، برابر است با:  $n(S) = 7!$  اگر A پیشامد این باشد که دو برادر در کنار یکدیگر نباشند، برای سادگی می‌توانیم  $A'$  را محاسبه کنیم، یعنی پیشامد اینکه دو برادر در کنار یکدیگر باشند:



۲ برادر = ۱ نفر



با توجه به شکل، باید جایگشت ۶ نفر را به دست آوریم یعنی ۶!، زیرا دو برادر را می‌توانیم ۱ نفر به حساب بیاوریم و چون می‌خواهند در کنار یکدیگر باشند، خود دو برادر هم، می‌توانند جایشان را به ۲ طریق باهم عوض کنند. بنابراین:

$$n(A') = 2 \times 6! \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{2 \times 6!}{7!} = \frac{2 \times \cancel{6!}}{7 \times \cancel{6!}} = \frac{2}{7} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟



این دو برادر، به ۲ حالت می‌توانند در ابتدا و انتهای ردیف، قرار بگیرند.

همچنین ۵ نفر بقیه می‌توانند به ۵! حالت، در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین، اگر B پیشامد این باشد که یکی از دو برادر در ابتدا و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند، داریم:

$$n(B) = 2 \times 5! \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2 \times 5!}{7!} = \frac{2 \times \cancel{5!}}{7 \times 6 \times \cancel{5!}} = \frac{2}{7 \times 6} = \frac{1}{21}$$

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و  $A \subseteq B$ ، ثابت کنید،  $P(A) \leq P(B)$ .

اگر  $A \subseteq B$  باشد، آنگاه:  $n(A) \leq n(B)$ . یعنی تعداد اعضای مجموعه A کمتر یا مساوی تعداد اعضای مجموعه B

$$\frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

خواهد بود و با توجه به تعریف احتمال، خواهیم داشت:

### درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

### ریاضی

فصل ۷

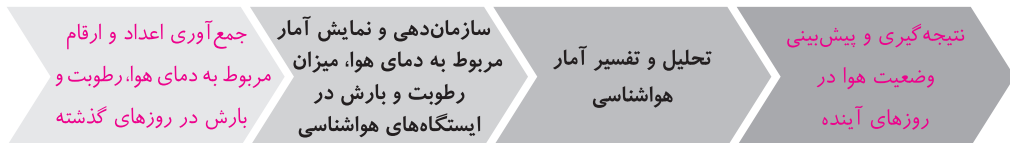
کار در کلاس ..... صفحه ۱۵۳ و ۱۵۴ کتاب درسی

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی براساس اعداد و ارقام بیاورید. حرکت هواپیماها و کشتی‌ها بر اساس وضعیت آب و هوایی، ثبت‌نام در یک باشگاه ورزشی یا آموزشگاه علمی بر اساس عملکرد دوره‌های گذشته آنها.

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۳ با در نظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. در حالی که علم آمار، مجموعه روش‌هایی برای جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی را ارائه می‌دهد.



۵) مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور، تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع‌آوری کرده است.

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان‌دهنده چه چیزی است؟ وقتی تعداد لامپ‌های معیوب روز به روز افزایش می‌یابد، نشان‌دهنده وجود یک نقص اساسی در سیستم تولید است که مدیر کارخانه باید با انجام بررسی‌های لازم، مشکل را شناسایی و حل کند. (توجه داشته باشید که به نظر می‌رسد، در روزهای کاری بعدی نیز، تعداد لامپ‌های معیوب زیادتر از روزهای قبل شود.)  
ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟ در این تمرین، آمار یعنی جدول مربوط به تعداد لامپ‌های معیوب در هر یک از این ۵ روز کاری.

## ریاضی

فصل ۷

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه بر اساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ☒ ادامه خط تولید لامپ‌ها ☐

۶) کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع‌آوری داده‌هاست. درست

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه استفاده از «علم آمار» است. درست

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است. نادرست

۷) به شکل روبه‌رو توجه کنید: آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ بله

اعداد و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید. این تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک به نام پیکسل تشکیل شده است. به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن پیکسل است. در واقع، هر تصویر از یک جدول عددی تشکیل می‌شود که هریک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهد.



قرمز	سبز	زرد
قرمز	زرد	مشکی
سبز	مشکی	سبز

شکل

۱	۳	۲
۱	۲	۰
۳	۰	۳

جدول عددی

۸) جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود.

اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ

مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

مثال (۱) ..... صفحه ۱۵۶ کتاب درسی

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۷۴ سانتی‌متر باشد. شاخص توده بدن شخص به صورت زیر است:

$$\text{شاخص توده بدن} = \frac{۱۰۰}{(۱/۷۴)^۲} = ۳۳/۰۲$$

۱) با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، درباره چاق بودن این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

این شخص دچار چاقی درجه یک است.



## فعالیت

صفحه ۱۵۶ کتاب درسی

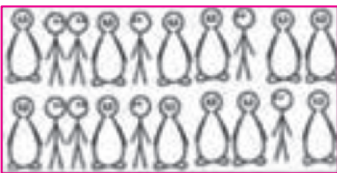


ب) شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می‌دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می‌باشند.

با هدف به‌دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این کار به سادگی انجام می‌شود؟ خیر، زیرا جمع‌آوری این آمار در کل سطح شهر، کاری بسیار دشوار، زمان‌بر و پرهزینه است.

همان‌گونه که احتمالاً حدس زده‌اید، جمع‌آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان‌گونه که در شکل «ب» دیده می‌شود، به جای شمارش کل افراد این شهر، می‌توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش‌بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق‌اند.



به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند. همان‌طور که در شکل «ب» مشاهده می‌شود، از ۲۰ نفر، تعداد ۱۲ نفر چاق هستند. بنابراین:

$$\frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۶۰}{۱۰۰} = ۶۰\%$$

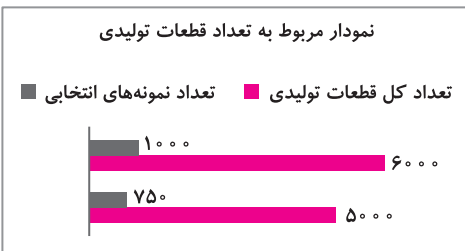
بنابراین می‌توان پیش‌بینی کرد که تقریباً ۶۰٪ از افراد این شهر، بر اساس افراد انتخاب‌شده، چاق هستند.

صفحه ۱۵۷ و ۱۵۸ کتاب درسی

## کار در کلاس

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانه «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است.

با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحه بعد را کامل کنید.



اندازه نمونه	نمونه	اندازه جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه الف
۷۵۰	قطعات تولیدی انتخابی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه ب

صفحه ۱۵۸ کتاب درسی

## تمرین

۱) می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولیدشده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه
کیفیت محصولات تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	کل محصولات تولیدی کارخانه موردنظر



۲) کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است. نادرست؛ اندازهٔ جامعه، همواره بیشتر از اندازهٔ نمونه است.

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند. نادرست؛ اعضای نمونه، بخشی از اعضای جامعه هستند.

پ) نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است. درست.

۳) در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند. هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان

یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.



جامعه در اینجا مدرسه و اعضای جامعه، دانش‌آموزان این مدرسه

هستند. دو نمونه از این جامعه، می‌توانند به صورت زیر باشند:

۱- انتخاب ۳ شاگرد برتر از هر کلاس

۲- انتخاب دانش‌آموزانی که حداقل در یک رشتهٔ ورزشی، مهارت

دارند.

## ریاضی

فصل ۷

### درس سوم: متغیر و انواع آن

کار در کلاس ..... صفحهٔ ۱۶۰ و ۱۶۱ کتاب درسی

۱) به نظر شما، چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟ نوع دنده (دستی- اتوماتیک)، حجم باک بنزین و ...

در سطرهای خالی، مقدار هر یک از متغیرهای معرفی‌شدهٔ جدید را

بیان کنید.

مقدار متغیر	متغیرهای یک خودرو
۱۲۰	حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده
۸	میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر
سفید	رنگ خودرو
۴۰	حجم باک بنزین
دستی	نوع دنده

۳) با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست،

متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول روبه‌رو

بنویسید.

مقدار متغیر	متغیر
۱/۲ متر	طول بدن
بین ۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم	وزن (جرم)
بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر	ارتفاع شانه
بین ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر	طول دُم

۴) در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را براساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط

و ضعیف درجه‌بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید.

متغیر: مهارت کارگردان

مقدار متغیر: بسیار ماهر، ماهر، متوسط، ضعیف



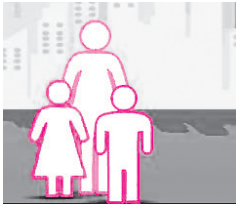
## فعالیت

صفحه ۱۶۲ کتاب درسی

در یک شهر، با افراد مختلفی روبه‌رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال:

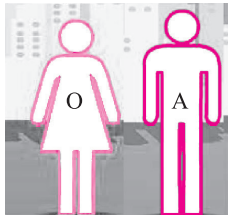
از مادر یک خانواده می‌پرسیم:

«چند فرزند دارید؟»



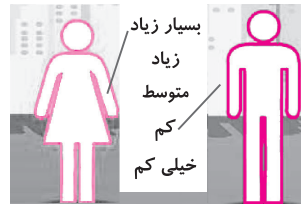
و سؤال آخر:

«گروه خونی خود را بگویید؟»



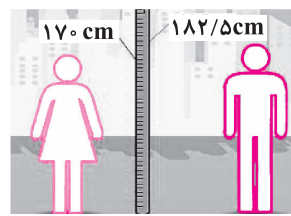
از یک آقا و خانم می‌پرسیم:

«چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»





از همان خانم و آقا می‌پرسیم:

«قد شما چند سانتی‌متر است؟»

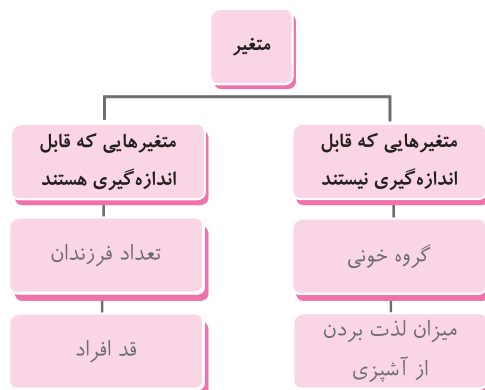


حال به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) با توجه به شکل‌های موردنظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر		
تعداد فرزندان	۲	-
قد افراد	۱۷۰ cm	۱۸۲ / ۵ cm
گروه خونی	O	A
میزان لذت بردن از آشپزی	بسیار زیاد	کم

ب) با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری اند و کدام نیستند؟ به جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.





صفحه ۱۶۳ کتاب درسی

کار در کلاس

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید:



شکل ب

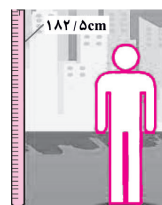


شکل الف

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر کمی است. در شکل «ب»، اقوام ایرانی، یک متغیر کیفی است.



شکل ت



شکل پ

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر کمی است. در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر کیفی است.

۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده)

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای)

۳ جدول زیر را کامل کنید.

- ☒ کیفی      ☐ کمی  
☐ کیفی      ☒ کمی  
☒ کیفی      ☐ کمی

نوع متغیر	سؤال (متغیر)
کیفی	موی شما چه رنگی است؟
کمی	وزن شما چه عددی است؟
کیفی	چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟

صفحه ۱۶۴ کتاب درسی

فعالیت

همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع متغیر کمی‌اند.

۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم: چند فرزند دارید؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۰، ۱، ۲، ۳ و ...

پاسخ، متغیر کمی از نوع گسسته است زیرا قابل شمردن است.

۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...

پاسخ، متغیر کمی از نوع پیوسته است زیرا قابل شمردن نیست.



۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعه دانش‌آموزان پایه دهم کشور به ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازه [۴۶, ۷۵] قرار می‌گیرد.

آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ بله، زیرا وزن، یک متغیر کمی از نوع پیوسته است.

۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به ترتیب ۰ و ۲۰ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازه [۰, ۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهنده تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟ خیر، زیرا تعداد فرزندان یک خانواده، یک متغیر کمی از نوع گسسته است و تنها، اعداد صحیح متعلق به بازه [۰, ۲۰] می‌توانند تعداد فرزندان یک خانواده باشند.

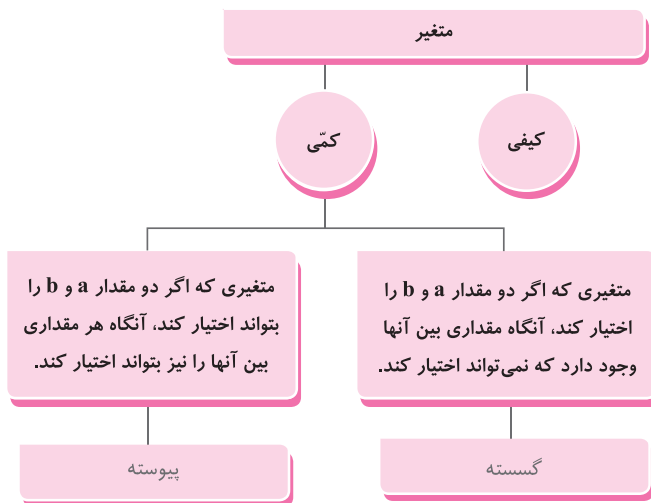
۵ متغیرهای مطرح‌شده در قسمت‌های ۳ و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟

هر دو متغیر کمی هستند، زیرا قابل اندازه‌گیری هستند.

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح‌شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟

در قسمت ۳ متغیر پیوسته است، یعنی هر عددی بین دو مقدار ۴۶ و ۷۵ را می‌تواند اختیار کند ولی در قسمت ۴ متغیر گسسته است، یعنی فقط بعضی از اعداد بین دو مقدار ۰ و ۲۰ را می‌تواند اختیار کند.

۷ با توجه به قسمت‌های ۳ و ۴ در شکل زیر، به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.



کار در کلاس ..... صفحه ۱۶۵ و ۱۶۶ کتاب درسی



۱ با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیر پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر پیوسته. و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر گسسته. است و این تعداد برابر با ۵ نفر است.





۲ انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

- الف) تعداد ماهی‌های یک دریا  
 ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.  
 پ) وزن افراد  
 ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه
- ۳ در هر مورد نوع متغیر مطرح شده در سؤال را مشخص کنید.

- ☐ پیوسته    ☒ گسسته  
☒ پیوسته    ☐ گسسته  
☒ پیوسته    ☐ گسسته  
☐ پیوسته    ☒ گسسته

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	گسسته
وزن دوستان شما چه عددی است؟	پیوسته
شاخص توده بدن خانواده شما چه عددی است؟	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	پیوسته

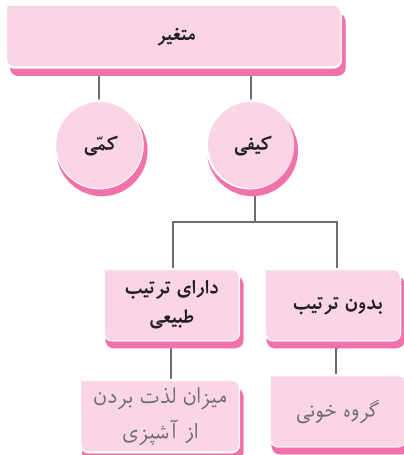
## ریاضی

فصل ۷

## فعالیت

صفحه ۱۶۶ کتاب درسی

در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



## کار در کلاس

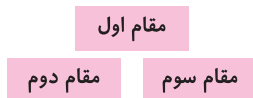
صفحه ۱۶۷ کتاب درسی

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید:

- بسیار زیاد،  
 زیاد،  
 متوسط،  
 کم،  
 بسیار کم



شکل پ



شکل ب



شکل الف



در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به دست می‌آورد، یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن اول، دوم و سوم است.

در شکل «پ»، میزان علاقه شما درباره خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم و بسیار کم است.

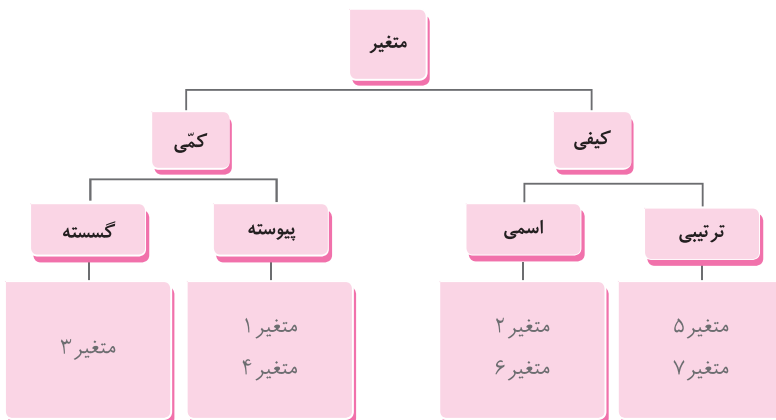
## تمرین

صفحه ۱۶۸ تا ۱۷۰ کتاب درسی

۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن سال) ☐ اسمی ☒ ترتیبی
- ب) نژاد افراد (سفیدپوست، زردپوست، سیاه‌پوست) ☒ اسمی ☐ ترتیبی
- پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی) ☒ اسمی ☐ ترتیبی
- ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳) ☐ اسمی ☒ ترتیبی
- ۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.

متغیر	نوع متغیر
۱- میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر	کمی (پیوسته)
۲- نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی (اسمی)
۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	کمی (گسسته)
۴- میزان دمای هوا	کمی (پیوسته)
۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	کیفی (ترتیبی)
۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی (اسمی)
۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	کیفی (ترتیبی)





۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم	×		×			
جنسیت (دختر و پسر)		×				×
قد	×			×		
وزن	×			×		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		×			×	
شاخص تودهٔ بدن	×			×		

## ریاضی

فصل ۷

توجه داشته باشید که با توجه به تعریف متغیرها، نمرهٔ ریاضی نهم باید متغیری کمی از نوع پیوسته باشد. اما از آنجایی که در مدارس برای این درس نمراتی با قسمت اعشاری ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ داده می‌شود، ما این متغیر را کمی از نوع گسسته در نظر گرفتیم.

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی‌متر باشد.

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید.

$$\text{شاخص تودهٔ بدن} = \frac{(\text{وزن بر حسب kg})}{(\text{قد بر حسب m})^2} = \frac{95}{(1/60)^2} = \frac{95}{1/3600} = 37/1$$

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ کمی از نوع پیوسته

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱

نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟  
شکل پرچم ایران است.

سبز	سبز	سبز	۳	۳	۳
سفید	سفید	سفید	۲	۲	۲
قرمز	قرمز	قرمز	۱	۱	۱

شکل

جدول عددی

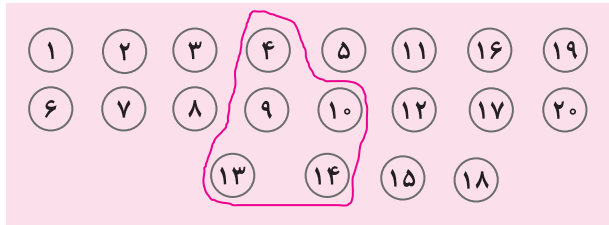
۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک، مثال بزنید.

تعریف جامعه: مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامند. مثلاً یک خانواده را می‌توان یک جامعه از تعدادی از افراد در نظر گرفت.

تعریف نمونه: بخشی (زیرمجموعه‌ای) از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده در نمونه را عضو نمونه گویند. مثلاً از یک خانواده چند نفر انتخاب شوند و یک ویژگی از آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد.



۷ شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازه جامعه چه عددی است؟ ۲۰

ب) اندازه نمونه انتخابی چه عددی است؟ ۵

پ) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید.

$\{4, 9, 10, 13, 14\}$

۸ جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمی (پیوسته)
کیفیت یک هلو	کیفی (ترتیبی)
اندازه طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی (پیوسته)
اقوام ایرانی	کیفی (اسمی)
وضعیت آب‌وهوا	کیفی (اسمی)
دمای هوا در قله	کمی (پیوسته)
فشار هوا در قله کوه	کمی (پیوسته)

ریاضی

فصل ۲