

مؤلفان این فصل: ایمان حسینی فروشان - شیم حزه لولبی

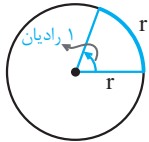
صفحه‌های ۷۲ تا ۷۶ کتاب درسی

رادیان و رابطه‌ی آن با درجه

طول یک کمان

۱. واحدهای اندازه‌گیری زاویه

رادیان و رابطه‌ی آن با درجه



۱ رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع دایره مساوی است. اگر D اندازه‌ی زاویه‌ی α برحسب درجه و R اندازه‌ی زاویه‌ی α برحسب رادیان باشد، آنگاه:

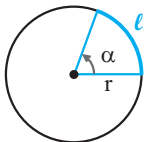
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

■ مثال: زاویه‌های زیر را از درجه به رادیان و از رادیان به درجه تبدیل کنید.

الف) $D = 120^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi \text{ رادیان}}{180^\circ}} R = \frac{2\pi}{3}$ رادیان

ب) $R = \frac{4\pi}{5} \xrightarrow{\times \frac{180^\circ}{\pi \text{ رادیان}}} D = 144^\circ$

طول یک کمان



اگر l طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α ، شعاع دایره و α اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان باشد، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

■ مثال: در دایره‌ای به شعاع ۵ واحد، طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی 60° چقدر است؟

$60^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi \text{ رادیان}}{180^\circ}} \frac{\pi}{3}$

◀ حل: ابتدا زاویه را برحسب رادیان می‌نویسیم:

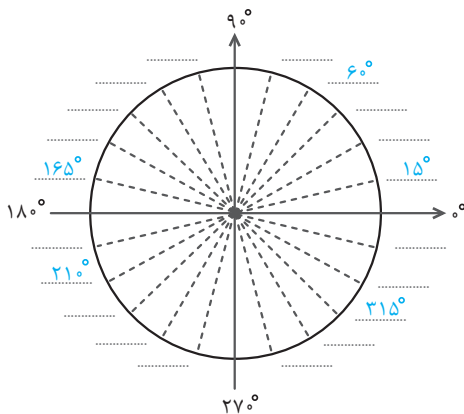
با استفاده از رابطه‌ی $\alpha = \frac{l}{r}$ ، که در آن α برحسب رادیان است، داریم:

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \xrightarrow{r=5, \alpha=\frac{\pi}{3}} l = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

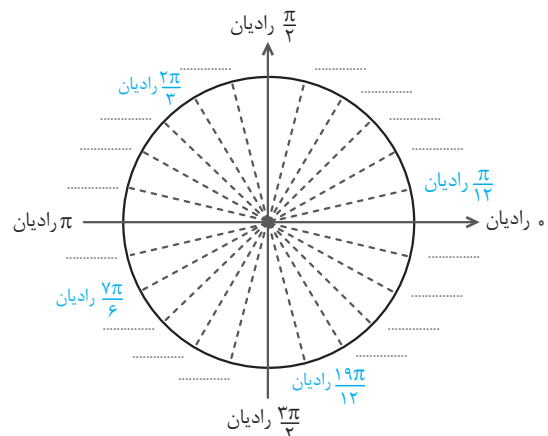
رادیان و رابطه‌ی آن با درجه

۲۹۱- در شکل‌های زیر، هر دایره به قسمت‌های مساوی تقسیم شده است. در شکل (الف) زاویه‌ها را برحسب درجه و در شکل (ب) زاویه‌ها را برحسب رادیان پُر کنید. (صفحه‌ی ۷۵- کار در کلاس - مشابیه ۳)

(الف)



(ب)

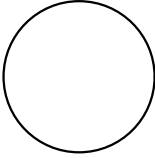
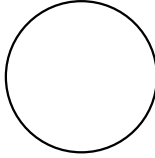
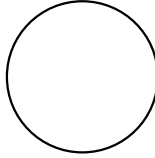
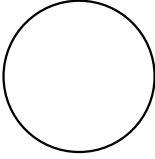
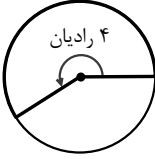
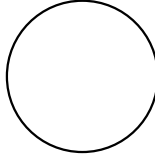
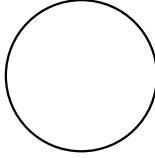
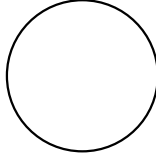


.....

.....

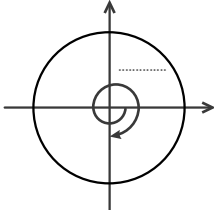
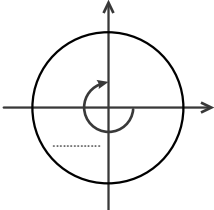
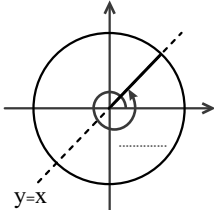
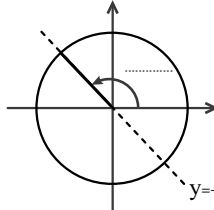
(صفحه ۲۳ - فعالیت - مشابه ۴)

۲۹۲- هر یک از زوایای زیر را بر روی دایره‌ی مثلثاتی مانند نمونه‌ی حل شده، نشان دهید.

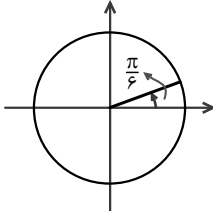
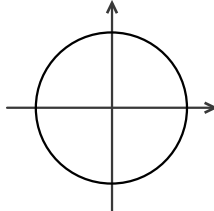
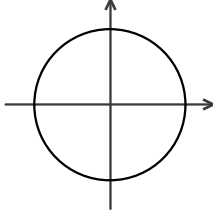
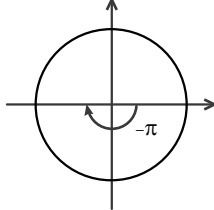
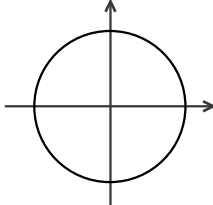
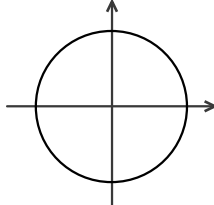
(پ) ۲ رادیان	(ب) ۱ رادیان	(الف) $\frac{1}{3}$ رادیان
		
(ج) -۵ رادیان	(ث) ۴ رادیان	(ت) $\frac{3}{5}$ رادیان
		
	(ح) -۱ رادیان	(چ) ۶ رادیان
		

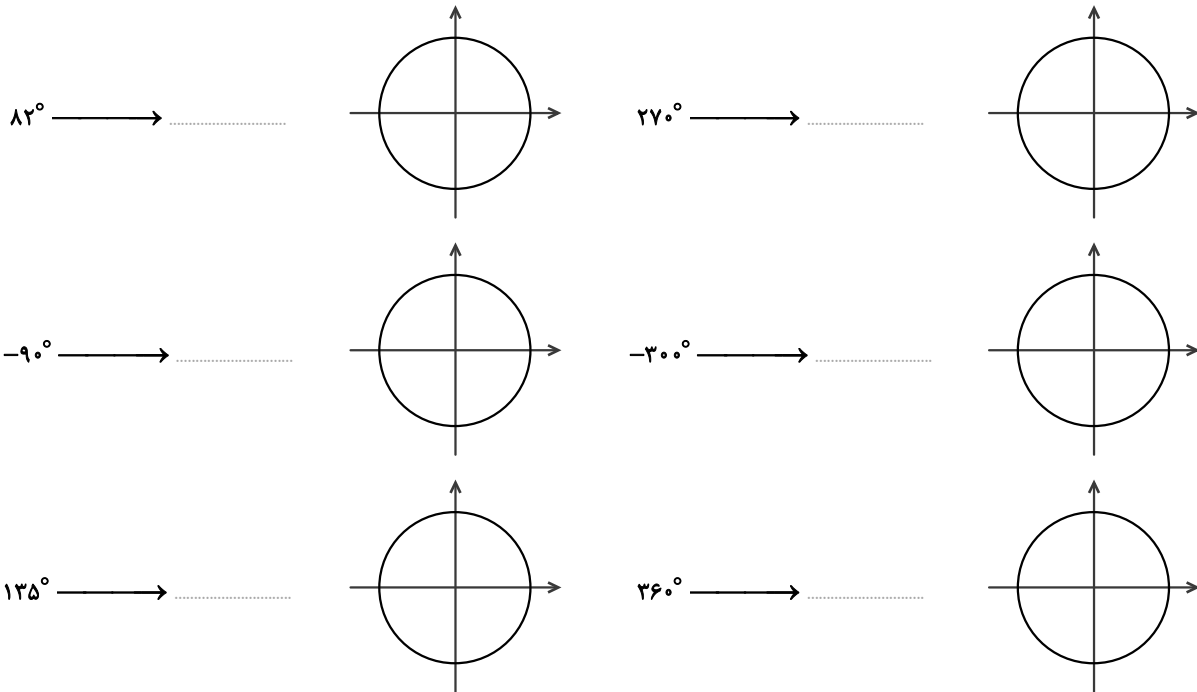
(صفحه ۲۵ - کار در کلاس - مکمل ۳)

۲۹۳- در شکل‌های زیر اندازه‌ی زاویه‌ها را بر حسب رادیان بنویسید.

(ت)	(پ)	(ب)	(الف)
			

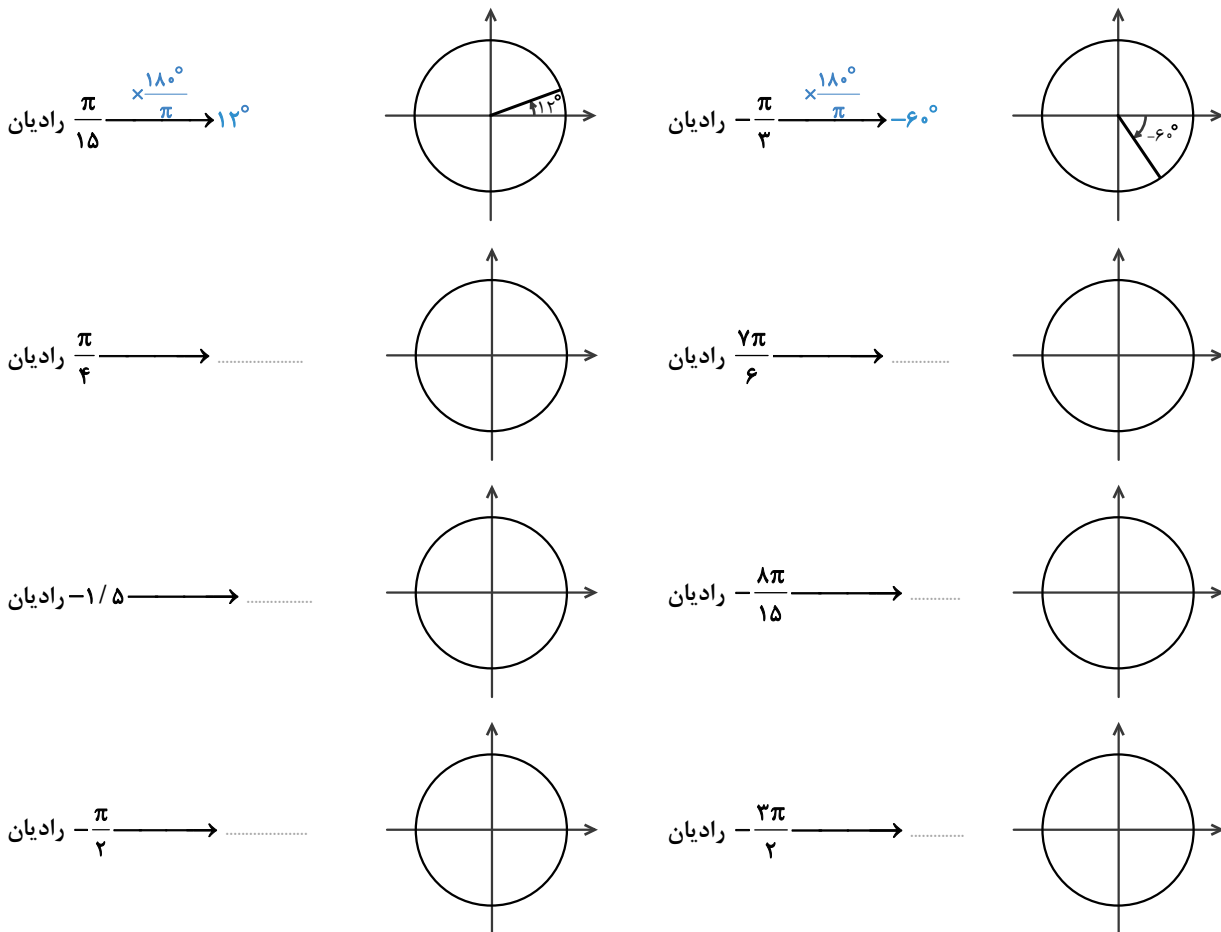
۲۹۴- مطابق نمونه‌ی حل شده، هر یک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید و آن را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید. (صفحه ۷۶ - مکمل و مشابه تمرین ۱)

$30^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } \frac{\pi}{6}$		$15^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$	
$-3^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$		$-18^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان } -\pi$	
$45^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$		$22^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$	

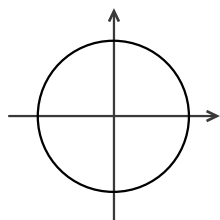


۲۹۵- مطابق نمونه‌ی حل شده، هر یک از زاویه‌ها را از رادیان به درجه تبدیل کنید و آن را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

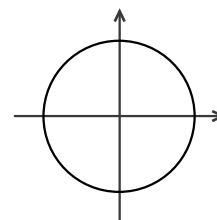
(صفحه‌ی ۷۶- مکمل و مشابه تمرین ۲)



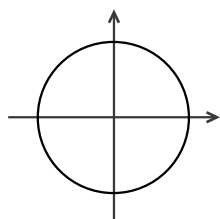
۱ رادیان →



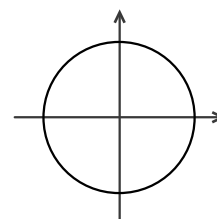
۳ رادیان →



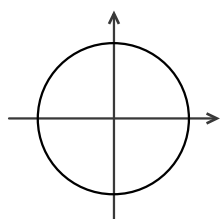
$\frac{7\pi}{12}$ رادیان →



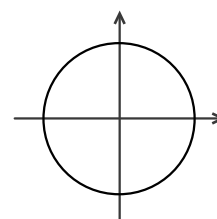
$\frac{5\pi}{3}$ رادیان →



$-\frac{5\pi}{6}$ رادیان →



$\frac{17\pi}{12}$ رادیان →



۲۹۶- در هر مورد زیر، آیا زاویه‌های داده شده می‌توانند تمام زوایای داخلی چند ضلعی محدب باشند؟ چرا؟ (صفحه‌ی ۷۶- مکمل و مرتبط با تمرین ۵- ت)

الف) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}$

حل: سه زاویه داریم. پس این زاویه‌ها می‌توانند مربوط به یک مثلث باشند. مجموع سه عدد داده شده باید برابر با π باشد تا زاویه‌های یک مثلث

باشند. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi + 3\pi + \pi}{12} = \frac{\pi}{2}$. چون مجموع زاویه‌ها برابر با π نیست، پس این زاویه‌ها نمی‌توانند زوایای داخلی یک مثلث باشند.

ب) $\frac{11\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{9}$

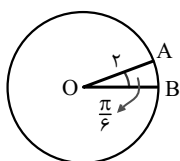
پ) $\frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{12\pi}{25}, \frac{12\pi}{25}$

ت) $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

طول یک کمان

۲۹۷- دایره‌ای به شعاع ۲ به شکل زیر مفروض است:

الف) محیط دایره را محاسبه کنید.



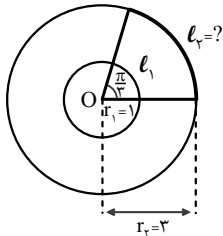
ب) نسبت زاویه‌ی $\alpha = \frac{\pi}{6}$ به زاویه‌ی یک دایره‌ی کامل برحسب رادیان چقدر است؟

پ) با توجه به اینکه نسبت کمان AB به کل محیط دایره با نسبت به دست آمده از حالت «ب» یکسان است، طول کمان AB را بیابید.

ت) با توجه به حالت‌های قبل، در دایره‌ای به شعاع r، طول کمان روبه‌روی زاویه‌ی α که با l نمایش داده می‌شود را بیابید.

$$\frac{\alpha}{\dots} = \frac{l}{\dots} \Rightarrow l = \dots$$

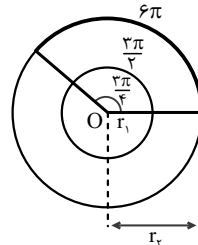
(صفحه‌ی ۷۳- فعالیت - مکمل ۴)



$l_1 = \dots$

$l_2 = \dots$

۲۹۸- با توجه به شکل‌های زیر، مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.



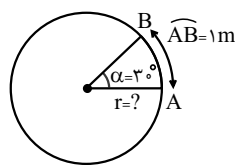
$r_1 = \dots$

$r_2 = \dots$

۲۹۹- در دایره‌های زیر، زاویه‌ی مرکزی α، کمان AB را از دایره‌ای به شعاع r جدا کرده است. در هر مورد، مانند نمونه‌ی حل شده، مقدار

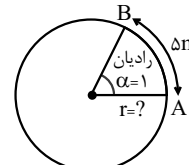
(صفحه‌ی ۷۴- مکمل و مشابه کار در کلاس)

خواسته شده را حساب کنید.

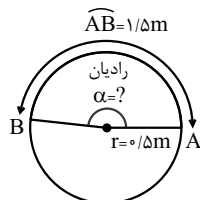


.....
.....

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow 1 = \frac{\Delta}{r} \Rightarrow r = \Delta m$$

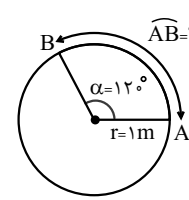


(الف)

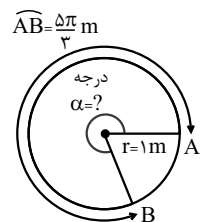


.....
.....

(ت)

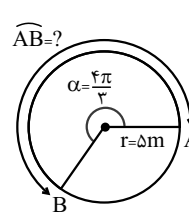


(پ)

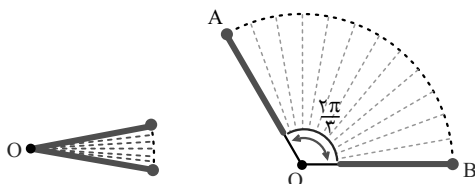


.....
.....

(ج)



(ث)



۳۰۰- مطابق شکل مقابل، یک بادبزن زنانه را باز می‌کنیم. اگر مسافتی که

نقطه‌ی A در نوک بادبزن در هنگام باز شدن طی می‌کند ۱۰

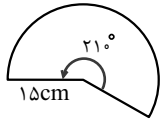
سانتی‌متر باشد، شعاع دایره‌ای که نوک بادبزن کمسانی از آن را طی

می‌کند چند سانتی‌متر است؟ (صفحه‌ی ۷۶- مکمل فعالیت)

.....
.....

۳۰۱- محیط شکل زیر را بیابید.

(صفحه ۷۶- مکمل فعالیت)



.....

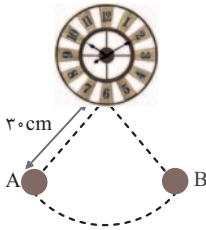
.....

.....

۳۰۲- مطابق شکل زیر، پاندول یک ساعت دیواری روی کمانی مقابل به زاویه مرکزی 40° دوران می‌کند. اگر طول پاندول 30 سانتی‌متر باشد،

(صفحه ۷۶- مکمل فعالیت)

مسافت طی شده توسط نوک پاندول در هر بار پیمودن کمان \widehat{AB} چند سانتی‌متر است؟



.....

.....

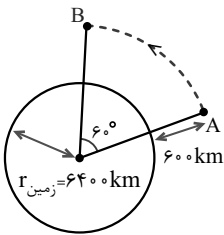
.....

.....

۳۰۳- یک سفینه‌ی فضایی در فاصله‌ی ثابت 600 کیلومتری از سطح زمین در حال حرکت است و کمان AB را طی می‌کند. مسافت طی شده

(صفحه ۷۶- مشابه فعالیت)

توسط سفینه در این جابجایی کدام است؟



.....

.....

.....

.....

علامت و مقدار نسبت‌های مثلثاتی

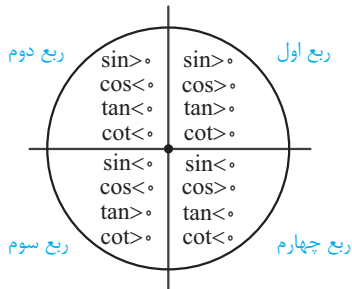
نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و ...

نسبت‌های مثلثاتی زوایای هم‌انتها

۲. روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷ کتاب درسی

علامت و مقدار نسبت‌های مثلثاتی



علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های چهارگانه از دایره‌ی مثلثاتی مطابق شکل مقابل است:

■ مثال: اگر $\sin \alpha < 0$ و $\tan \alpha > 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

◀ حل: با توجه به دایره مثلثاتی، α در ربع سوم قرار می‌گیرد.

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم در جدول زیر ارائه شده است:

نسبت \ زاویه (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot \alpha$	ت.ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت.ن	۰	ت.ن

■ مثال: حاصل $\tan \pi + \sin \frac{\pi}{3}$ را به دست آورید.

$$\sin \frac{\pi}{3} + \tan \pi = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

◀ حل:

نسبت‌های مثلثاتی زوایای هم‌انتها

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و ...

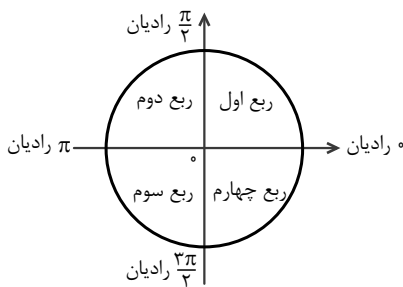
متمم $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$	با اختلاف π $(\pi + \alpha)$	مکمل $(\pi - \alpha)$	قرینه $(-\alpha)$	زاویه
				شکل
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$ $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	نسبت‌های مثلثاتی
$\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{6}$	$\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$	مثال

هم‌انتهای $2k\pi - \alpha$	هم‌انتهای $2k\pi + \alpha$	با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$	زاویه
			شکل
$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$	نسبت‌های مثلثاتی
$\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$	$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	مثال

علامت و مقدار نسبت‌های مثلثاتی

۳۰۴- جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

(صفحه ۲۷- مرتبط با جدول اول)



ربع نسبت مثلثاتی	اول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	سوم $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	مثبت
$\cos \alpha$	منفی
$\tan \alpha$
$\cot \alpha$

(صفحه ۲۷- مکمل جدول اول)

۳۰۵- نامساوی‌های توأم زیر، در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی معتبر است؟

الف) $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \sin x \cos x > 0 \\ \sin x \cot x < 0 \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

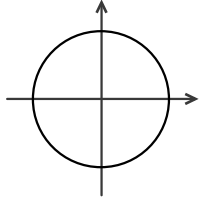
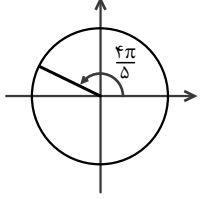
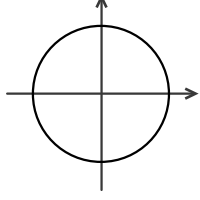
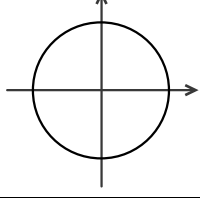
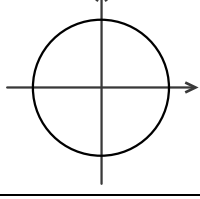
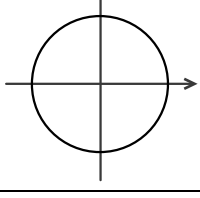
.....

۳۰۶- در هر مورد، مانند نمونه‌ی حل شده، مشخص کنید انتهای کمان روبرو به زاویه‌ی α در کدام ناحیه است، علامت نسبت مثلثاتی خواسته شده را مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۷۷- فعالیت - مکمل و مرتبط با ۱)

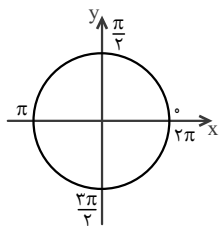
زاویه‌ی α	انتهای کمان روبروی α	علامت نسبت مثلثاتی	نمایش α روی دایره‌ی مثلثاتی
50°	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
-70°	ربع چهارم	$\cos \alpha$ <input type="checkbox"/> > • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> < •	
185°	$\cos \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\cot \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
-230°	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\cot \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
-290°	$\cos \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\cot \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
480°	$\cos \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
-750°	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> •	

۳۰۷- در هر مورد، مانند نمونه‌ی حل شده، مشخص کنید انتهای کمان روبرو به زاویه‌ی α در کدام ناحیه است، علامت نسبت مثلثاتی خواسته شده را مشخص کنید و زاویه را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید. (صفحه‌ی ۷۷- فعالیت - مکمل و مرتبط با ۱)

زاویه‌ی α	انتهای کمان روبروی α	علامت نسبت مثلثاتی	نمایش α روی دایره‌ی مثلثاتی
$-\frac{\pi}{6}$	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
$\frac{4\pi}{5}$	ربع دوم	$\cos \alpha$ <input type="checkbox"/> < • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> < •	
$\frac{9\pi}{8}$	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\cot \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
$-\frac{7\pi}{12}$	$\cos \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
$\frac{13\pi}{6}$	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\tan \alpha$ <input type="checkbox"/> •	
$-\frac{10\pi}{3}$	$\sin \alpha$ <input type="checkbox"/> • $\cot \alpha$ <input type="checkbox"/> •	

۳۰۸- (صفحه‌ی ۷۸- کار در کلاس - مکمل و مرتبط با ۲)

اگر روی دایره‌ی مثلثاتی نقطه‌ی $A(1,0)$ تحت زاویه‌ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان دوران کند:



الف) این زاویه را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

ب) نقطه‌ی انتهای این زاویه در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

پ) علامت سینوس و کسینوس این زاویه را معلوم کنید.

.....

.....

.....

.....

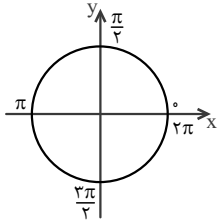
ت) مقدار سینوس و کسینوس این زاویه را با استفاده از کمان $\frac{\pi}{6}$ بیابید.

.....

.....

(صفحه ۷۸ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با ۲)

۳۰۹- اگر روی دایره‌ی مثلثاتی نقطه‌ی $A(1, 0)$ تحت زاویه‌ی $-\frac{4\pi}{3}$ رادیان دوران کند:



الف) این زاویه را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

ب) نقطه‌ی انتهای این زاویه در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

پ) علامت سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت این زاویه را معلوم کنید.

.....

.....

ت) مقدار سینوس و کسینوس این زاویه را با استفاده از کمان $\frac{\pi}{3}$ بیابید.

.....

.....

.....

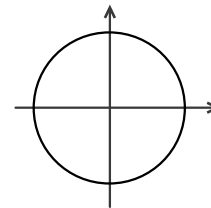
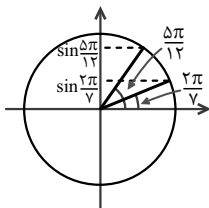
(صفحه ۷۷ - مرتبط با متن درس)

۳۱۰- درستی و نادرستی نامساوی‌های زیر را، مطابق نمونه‌ی حل شده، تعیین کنید.

۱) $\sin \frac{2\pi}{7} < \sin \frac{\Delta\pi}{12}$

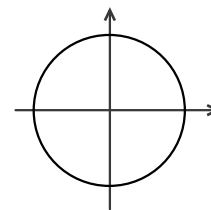
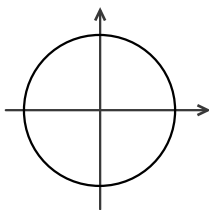
۲) $\sin 70^\circ > \sin 210^\circ$

حل: درست است. زیرا:



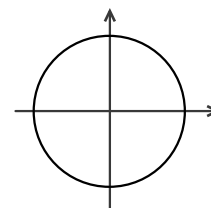
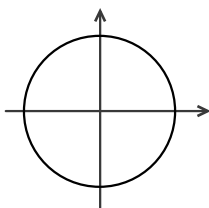
۳) $\cos 10^\circ > \cos 11^\circ$

۴) $\sin 125^\circ > \sin 147^\circ$



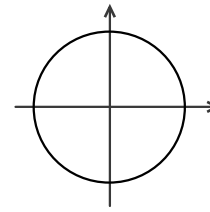
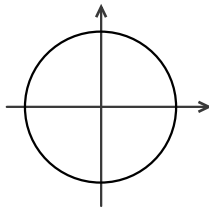
۵) $\cos 210^\circ < \cos 260^\circ$

۶) $\cos \frac{\Delta\pi}{4} > \cos \frac{\pi}{3}$



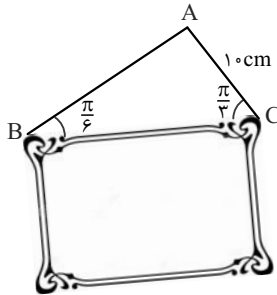
۷) $\sin 1 < \sin 2$

۸) $\cos 3 > \cos 6$



(صفحه ۷۸ - کار در کلاس - مرتبط با ۲)

۳۱۱- در شکل زیر، یک قاب توسط یک نخ در نقطه‌ی A روی دیوار نصب شده است، طول قاب را بیابید.



.....

.....

.....

.....

.....

(صفحه ۷۸ - کار در کلاس - مرتبط با ۲)

۳۱۲- جدول زیر را کامل کنید. $(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\alpha = \dots\dots\dots$	$\alpha = \dots\dots\dots$	$\alpha = \dots\dots\dots$
$\sin \alpha = \dots\dots\dots$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$
$\cos \alpha = \dots\dots\dots$	$\cos \alpha = \dots\dots\dots$	$\cos \alpha = \frac{1}{2}$	$\cos \alpha = \dots\dots\dots$
$\tan \alpha = \dots\dots\dots$	$\tan \alpha = \dots\dots\dots$	$\tan \alpha = \dots\dots\dots$	$\tan \alpha = 1$
$\cot \alpha = \dots\dots\dots$	$\cot \alpha = 0$	$\cot \alpha = \dots\dots\dots$	$\cot \alpha = \dots\dots\dots$

(صفحه‌های ۷۸ و ۷۹ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با ۲ و ۳)

۳۱۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cos(0) \times \tan \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{4} \times \sin \frac{\pi}{3}$

ب) $\sin \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} \times \cot \frac{\pi}{3}$

پ) $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}}{\cot \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6}}$

حل: طبق اتحاد مثلثاتی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، حاصل $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1$ است، پس:

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}}{\cot \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 4\sqrt{3} + 6$$

$$\text{ت) } \frac{1 + \tan^2 20^\circ - \frac{1}{\cos^2 20^\circ}}{\sin 70^\circ + \cos 25^\circ}$$

۳۱۴- در هر یک از موارد زیر محاسبات را، مطابق نمونه‌ی حل شده، کامل کنید.

(صفحه ۷۸ - فعالیت - مرتبط با ۲)

الف) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ و در ربع دوم است و

حل: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{24}{25} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dots \Rightarrow \tan \alpha = \dots$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \dots$$

ب) $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$ و در ربع چهارم است و

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = \dots \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dots \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \cos \alpha = \dots$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \dots = \frac{\sin \alpha}{\dots} \Rightarrow \sin \alpha = \dots$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \dots$$

۳۱۵- در هر یک از موارد زیر، با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α ، مطابق نمونه‌ی حل شده، را محاسبه کنید.

(صفحه ۷۸ - کار در کلاس - مرتبط با ۲)

الف) $\cot \alpha = -3$ و در ربع دوم است و

حل: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \xrightarrow{\cot \alpha = -3} \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10} \xrightarrow{\sin \alpha > 0} \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow -3 = \frac{\cos \alpha}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \xrightarrow{\cot \alpha = -3} \tan \alpha = -\frac{1}{3}$$

ب) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ و در ربع چهارم است و

پ) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ و $\sin \alpha < 0$

ت) $\sin \alpha = 0/6$ و $\cos \alpha < 0$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و ...

۳۱۶- متمم، مکمل و قرینه‌ی هر یک از زوایای زیر را، مطابق نمونه‌ی حل شده، به دست آورید و با رسم کمان روی دایره‌ی مثلثاتی تعیین کنید (صفحه‌های ۲۹ تا ۸۳- ترکیبی)

انتهای هر یک از این کمان‌ها در چه ناحیه‌ای است؟

الف) 20°

قرینه: -20°

متمم: 70°

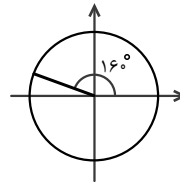
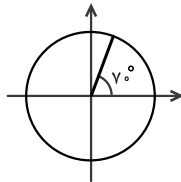
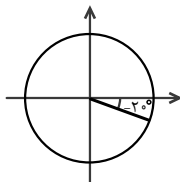
مکمل: 160°

حل:

ربع چهارم

ربع اول

ربع دوم

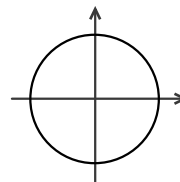
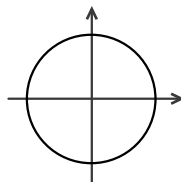
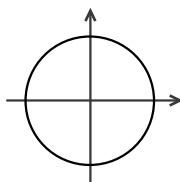


ب) 55°

قرینه:

متمم:

مکمل:

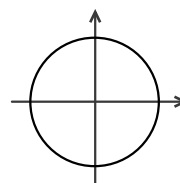
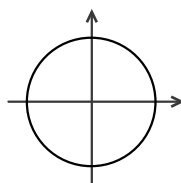
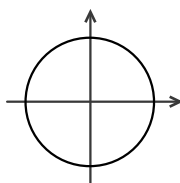


پ) $\frac{5\pi}{12}$

قرینه:

متمم:

مکمل:

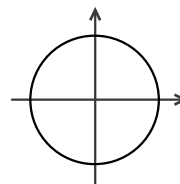
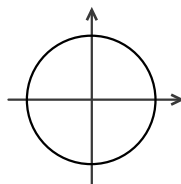
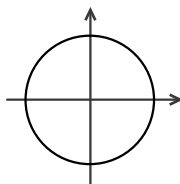


ت) $-\frac{\pi}{8}$

قرینه:

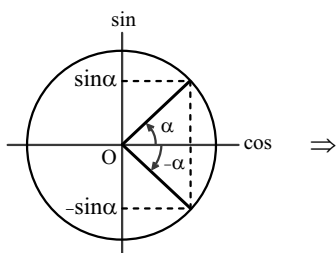
متمم:

مکمل:



(صفحه‌ی ۲۹ - مرتبط با فعالیت)

۳۱۷- با توجه به دایره‌ی مثلثاتی شکل مقابل، جدول زیر را کامل کنید.



$\sin(-\alpha) =$
$\cos(-\alpha) =$
$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} =$
$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} =$

۳۱۸- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را، مطابق نمونهی حل شده، به دست آورید.

(صفحه ۸۰ - کار در کلاس - مکمل و مرتبط با ۲)

الف) $2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3 \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 0 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

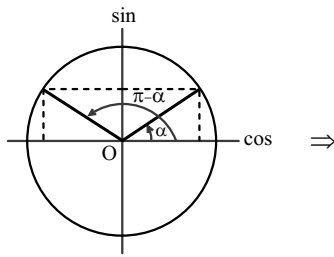
ب) $\sin(-30^\circ) \times \tan(-60^\circ) + \sin(-90^\circ) \times \cos(-180^\circ) = \dots$

پ) $2 \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots$

ت) $\frac{\sin(-180^\circ) + \cos(-90^\circ) + \tan(45^\circ)}{\sin(-270^\circ) + \cos(-360^\circ)} = \dots$

(صفحه ۸۰ - مرتبط با فعالیت)

۳۱۹- با توجه به دایرهی مثلثاتی شکل زیر، جدول زیر را کامل کنید.



$$\sin(\pi - \alpha) = \dots$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \dots$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \dots$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \dots$$

(صفحه ۸۱ - مرتبط با فعالیت اول)

۳۲۰- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را، مطابق نمونهی حل شده، به دست آورید.

الف) $\sin(-150^\circ) + \sin(120^\circ) = -\sin(150^\circ) + \sin(120^\circ) = -\sin(180^\circ - 30^\circ) + \sin(180^\circ - 60^\circ)$
 $= -\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

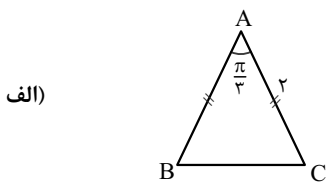
ب) $\cos(-135^\circ) = \dots$

پ) $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \dots$

ت) $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2 \cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = \dots$

۳۲۱- مساحت شکل‌های زیر را حساب کنید.

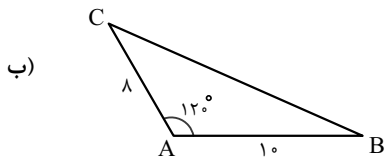
(صفحه ۸۱- مکمل و مرتبط با فعالیت اول)



.....

.....

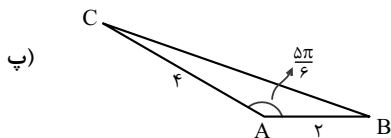
.....



.....

.....

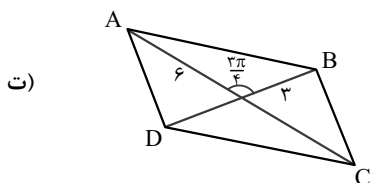
.....



.....

.....

.....



.....

.....

.....

۳۲۲- اگر A ، B و C زوایای مثلثی باشند، نشان دهید:

(صفحه ۸۰- مرتبط با فعالیت)

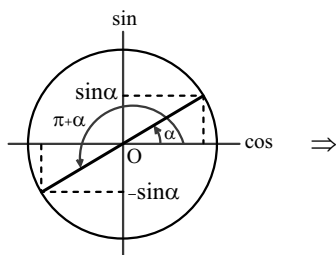
$\sin(A + B) = \sin C$

.....

.....

۳۲۳- با توجه به دایرهی مثلثاتی شکل زیر، جدول زیر را کامل کنید.

(صفحه ۸۲- مرتبط با پاراگراف اول)



$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$
$\tan(\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$
$\cot(\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$

۳۲۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را، مطابق نمونهی حل شده، بیابید.

(صفحه ۸۲- مکمل و مشابه فعالیت اول)

الف) $\cos 21^\circ + \cot(-225^\circ) = \cos(21^\circ) - \cot(225^\circ) = \cos(18^\circ + 3^\circ) - \cot(18^\circ + 45^\circ)$

$= -\cos 3^\circ - \cot 45^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

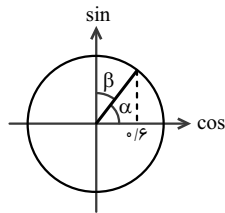
ب) $\sin(-240^\circ) = \dots\dots\dots$

.....

پ) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) + \cos(\frac{4\pi}{3}) = \dots\dots\dots$

ت) $\tan(\frac{7\pi}{6}) + \cot(-\frac{4\pi}{3}) = \dots\dots\dots$

(صفحه ۸۲- مکمل و مرتبط با فعالیت دوم)



۳۲۵- دایره‌ی مثلثاتی شکل روبرو را در نظر بگیرید.

الف) مقادیر $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.

ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویه β را به دست آورید.

پ) مجموع دو زاویه α و β برابر با درجه است، پس این دو زاویه هم هستند.

ت) با مقایسه‌ی (الف) و (ب) و با توجه به اینکه $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ، جدول زیر را کامل کنید.

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dots\dots\dots$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dots\dots\dots$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dots\dots\dots$
--	--	--	--

(صفحه ۸۳- مکمل و مرتبط با فعالیت)

۳۲۶- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) مقدار $\cos \frac{2\pi}{3}$ را محاسبه کنید.

الف) مقدار $\sin \frac{2\pi}{3}$ را محاسبه کنید.

ب) با توجه به اینکه $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ، چه رابطه‌ای بین $\cos \frac{2\pi}{3}$ و $\sin \frac{\pi}{6}$ وجود دارد؟

$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \dots\dots\dots$

ب) با توجه به اینکه کمان $\frac{2\pi}{3}$ را می‌توان به صورت $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ نوشت و با توجه به مقادیر $\sin \frac{2\pi}{3}$ و $\cos \frac{\pi}{6}$ ، چه رابطه‌ای بین این دو وجود دارد؟

$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \dots\dots\dots \\ \sin \frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \dots\dots\dots$

$\begin{cases} \sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \dots\dots\dots \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \dots\dots\dots$

پ) با توجه به حالت‌های قبلی، نتیجه می‌گیریم که:

پ) با توجه به حالت‌های قبلی، نتیجه می‌گیریم که:

$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots\dots\dots$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots\dots\dots$

(صفحه ۸۳- مکمل و مرتبط با متن درس)

۳۲۷- جدول زیر را کامل کنید.

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots\dots\dots$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots\dots\dots$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots\dots\dots$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dots\dots\dots$
--	--	--	--

۳۲۸- اگر $\cos \alpha = 0/6$ باشد، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

(صفحه ۸۲- مکمل فعالیت دوم)

الف) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = 0/6$

ب) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \dots\dots\dots$

پ) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \dots\dots\dots$

ت) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \dots\dots\dots$

۳۲۹- اگر $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

(صفحه ۸۲- مکمل فعالیت دوم)

الف) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots\dots\dots$

ب) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \dots\dots\dots$

پ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \dots\dots\dots$

ت) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \dots\dots\dots$

۳۳۰- حاصل هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دو روش، مانند نمونه‌ی حل شده، به دست آورید.

(صفحه ۸۳- مکمل و مشابه فعالیت)

الف) $\sin(12^\circ)$

حل اول : روش اول : $\sin(12^\circ) = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

روش دوم : $\sin(12^\circ) = \sin(9^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\cos(135^\circ)$

.....

پ) $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

.....

ت) $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

.....

۳۳۱- جدول زیر را کامل کنید.

(صفحه‌های ۸۷-مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

زاویه α نسبت مثلثاتی	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \alpha$	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$

۳۳۲- درست یا نادرست بودن هر یک از تساوی‌های زیر را با دلیل تعیین کنید.

(صفحه‌های ۸۰ تا ۸۴- ترکیبی)

الف) $\sin x - \sin(\pi - x) = 0$

 حل: $\frac{\sin(\pi-x)=\sin x}{\sin(\pi-x)=\sin x} \rightarrow \sin x - \sin x = 0 \rightarrow$ درست است

ب) $\sin x + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

پ) $\tan x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

ت) $\cos(x + \pi) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

(صفحه‌های ۸۰ تا ۸۴- ترکیبی)

 ۳۳۳- اگر $\tan 1^\circ = 0/18$ باشد، حاصل $\frac{\sin 19^\circ - \cos 17^\circ}{\cos 10^\circ + 2 \sin 8^\circ}$ را بیابید.

 ۳۳۴- اگر $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان x در ناحیه‌ی چهارم باشد، حاصل $\cos(\pi + x)$ و $\tan(\frac{\pi}{4} + x)$ را بیابید. (صفحه‌های ۸۱ و ۸۳- ترکیبی)

 ۳۳۵- اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان x در ناحیه‌ی دوم باشد، حاصل $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ و $\tan(\pi - x)$ را بیابید.

(صفحه‌های ۸۰ و ۸۳- ترکیبی)

۳۳۶- در تساوی‌های زیر، مانند نمونه‌ی حل شده، به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

(صفحه‌ی ۸۷- مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

الف) $\cos(x + 10^\circ) = \sin x$

حل: اگر x و $x + 10^\circ$ متمم یکدیگر باشند، تساوی برقرار می‌شود.

برقرار است $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ \xrightarrow{\text{جایگزینی}} x = 40^\circ \Rightarrow 2x = 80^\circ \Rightarrow x + 10^\circ + x = 90^\circ$

ب) $\tan(60^\circ + 2x) = \cot x$

پ) $\sin(x + \frac{3\pi}{5}) = \sin x$

ت) $\cot(2x + \frac{\pi}{12}) = -\tan(x + \frac{\pi}{6})$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای هم‌انتهای

۳۳۷- حاصل عبارت‌های زیر را برحسب نسبت مثلثاتی زاویه‌ی α ، مانند نمونه‌ی حل شده، بیابید.

(صفحه‌ی ۸۵- مکمل و مرتبط با فعالیت)

الف) $\sin(8\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

ب) $\tan(13\pi + \alpha) = \dots$

پ) $\cos(9\pi + \alpha) = \dots$

ت) $\sin(\frac{11\pi}{2} + \alpha) = \dots$

(صفحه‌ی ۸۶- مشابه و مرتبط با کار در کلاس)

۳۳۸- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(33^\circ) + \cos(405^\circ) = \sin(36^\circ - 3^\circ) + \cos(36^\circ + 45^\circ) = -\sin(3^\circ) + \cos 45^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

ب) $\sin(300^\circ) + \cos(72^\circ) = \dots$

پ) $\tan(390^\circ) + \cot(-42^\circ) = \dots$

ت) $\frac{\sin(\frac{7\pi}{3}) - \cos(-\frac{9\pi}{4})}{\tan(-\frac{11\pi}{6})} = \dots$

ث) $\frac{\sin 96^\circ + \cos 33^\circ}{\tan 60^\circ - \cos 15^\circ} = \dots$

ج)
$$\frac{\sin \frac{25\pi}{6} + \tan\left(-\frac{125\pi}{4}\right)}{2 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{81\pi}{6}\right)} = \dots\dots\dots$$

(صفحه ۸۷- مکمل و مرتبط با تمرین ۳)

۳۳۹- درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin(150^\circ) = -\sin 6^\circ$

کج حل: نادرست است زیرا:

$\sin(150^\circ) = \sin(4 \times 36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ$

ب) $\cos(75^\circ) = \sin 6^\circ$

پ) $\tan(585^\circ) = \cot(-495^\circ)$

(صفحه ۸۷- مکمل و مرتبط با تمرین ۱)

۳۴۰- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

ب) $\cos\left(-\frac{97\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{97\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots$

پ) $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = \dots\dots\dots$

(صفحه ۸۶- مکمل و مرتبط با کار در کلاس)

۳۴۱- مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\cos(114^\circ)$

ب) $\cot(-87^\circ)$

پ) $\tan\left(\frac{26\pi}{3}\right)$

(صفحه ۸۶- مکمل و مرتبط با کار در کلاس)

۳۴۲- اگر $\tan \theta = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\theta + 9\pi) + 2 \cos(12\pi - \theta)}{\sin(5\pi - \theta) - \cos(2\pi - \theta)}$ را به دست آورید.

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و خواص آنها

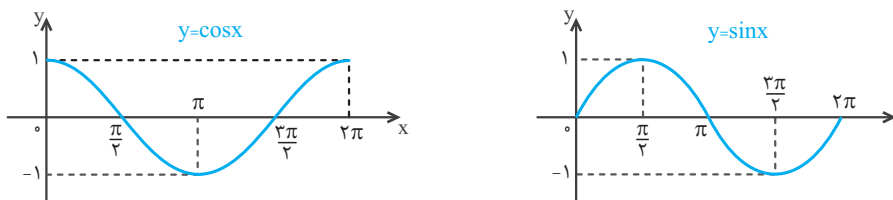
۳. توابع مثلثاتی

صفحه‌های ۸۸ تا ۹۴ کتاب درسی

رسم نمودار توابع شامل سینوس و کسینوس با انتقال، تقارن و ...

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و خواص آنها

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در زیر رسم شده است:

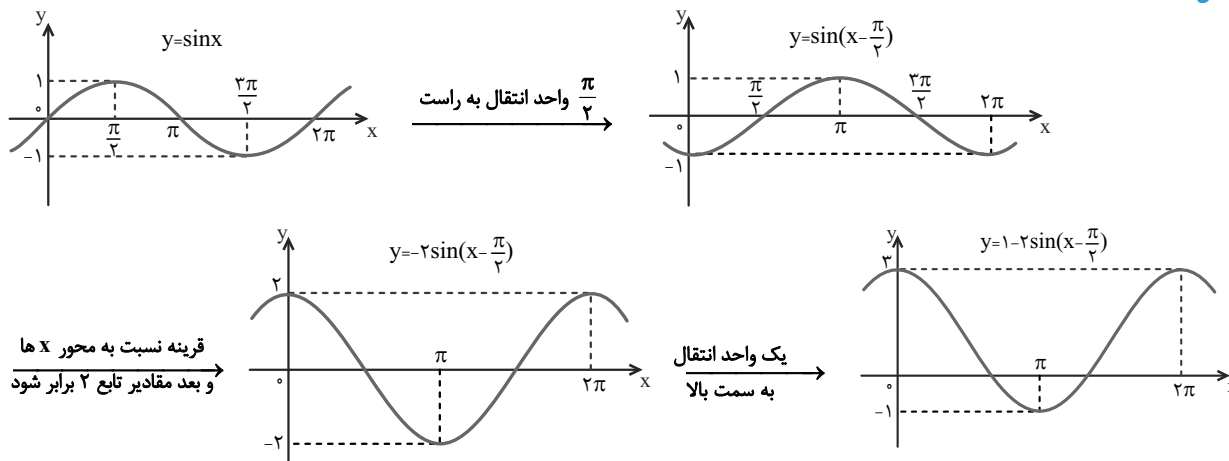


رسم نمودار توابع شامل سینوس و کسینوس با انتقال، تقارن و ...

- ۱ با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار تابع $y = \sin x + a$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار تابع $y = \sin x - a$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را a واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.
- ۲ با فرض $b > 0$ ، برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x + b)$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را b واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x - b)$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را b واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.
- ۳ برای رسم نمودار تابع $y = -\sin x$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
- ۴ برای رسم نمودار تابع $y = k \sin x$ ، مقادیر تابع $y = \sin x$ را k برابر می‌کنیم.

■ مثال: نمودار تابع $y = 1 - 2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ را رسم کنید.

◀ حل:



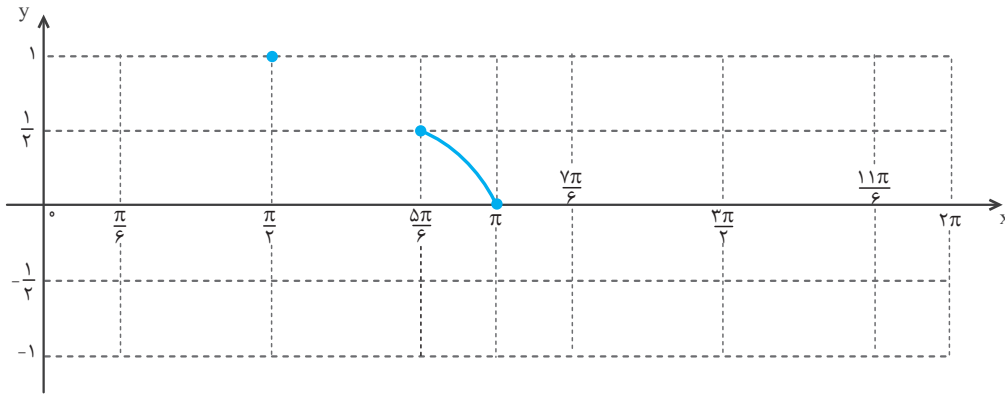
نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و خواص آنها

(صفحه‌های ۸۸ و ۸۹ - فعالیت - مکمل و مرتبط با ۱ تا ۵)

۳۴۳- الف) جدول زیر را کامل کنید.

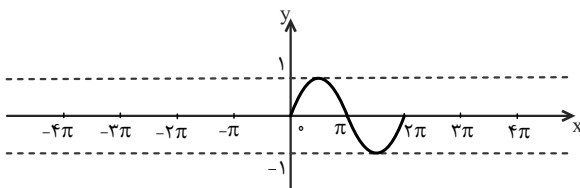
x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	۰			$\frac{1}{2}$					
مختصات نقطه	(۰, ۰)			$(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$					

ب) نقاط جدول را روی نمودار زیر نشان دهید، سپس نمودار تابع $y = \sin x$ را کامل کنید.



(صفحه‌های ۸۹ و ۹۰ - فعالیت - مکمل و مرتبط با ۶ تا ۸)

۳۴۴- الف) نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[-4\pi, 4\pi]$ رسم کنید.



ب) نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ ، $[0, 2\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ تکرار می‌شود، در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi, 4k\pi]$ ، $[0, 2k\pi]$ ، $[-2k\pi, 0]$ و $[-4k\pi, -2k\pi]$ تکرار می‌شود.

پ) بیشترین مقدار تابع سینوس برابر با و کمترین مقدار آن است.

ت) دامنه‌ی تابع سینوس و برد آن است.

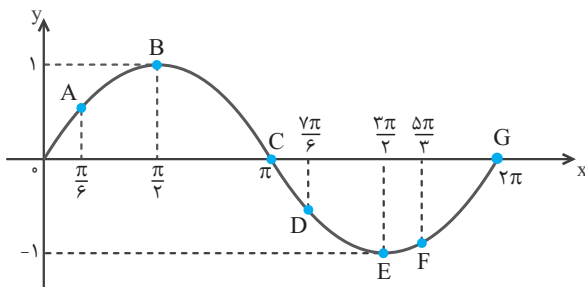
ث) بیشترین مقدار تابع سینوس به ازای $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و کمترین مقدار آن به ازای $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (که $k \in \mathbb{Z}$) به دست می‌آید.

ج) رفتار تابع با افزایش مقدار x در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ افزایشی، در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ و در بازه‌ی $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ است.

چ) محل برخورد نمودار تابع با محور x در نقاطی به طول‌های $x = -\pi$ ، $x = \pi$ ، $x = 3\pi$ ، $x = 5\pi$ ، $x = -3\pi$ ، $x = -5\pi$ ، $x = -7\pi$ ، $x = -9\pi$ است و به طور کلی مقدار تابع به ازای $x = k\pi$ ، برابر با است. (که $k \in \mathbb{Z}$)

۳۴۵- نمودار تابع $y = \sin x$ در شکل زیر رسم شده است. مختصات نقاط A ، B ، C ، D ، E ، F و G را مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۸۹ - فعالیت - مکمل و مرتبط با ۶)



$A(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ ، $B(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ ، $C(\frac{\pi}{2}, 0)$ ، $D(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2})$ ، $E(\frac{3\pi}{2}, -1)$ ، $F(\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{2})$ ، $G(2\pi, 0)$

ب) جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

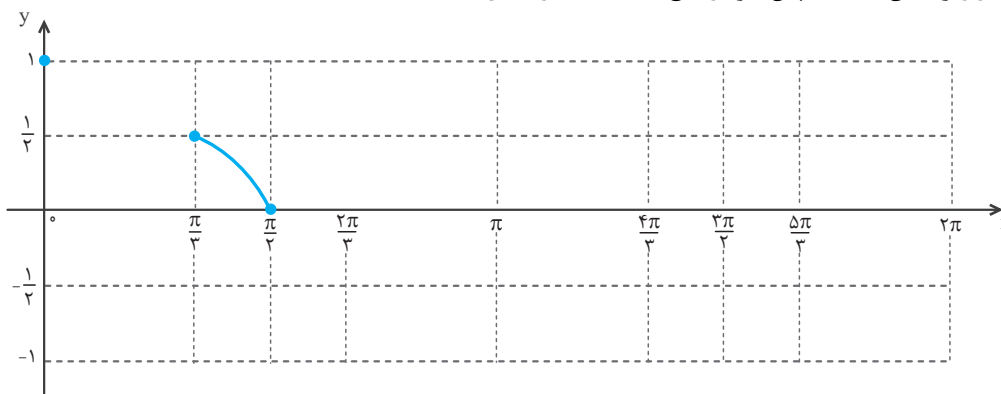
$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}]$	$[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$
مقدار تابع سینوس از $\frac{1}{2}$ به ۱ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از به کاهش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از به -۱ می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از می‌یابد.
مقدار تابع سینوس در این محدوده مثبت است.	مقدار تابع سینوس در این محدوده است.	مقدار تابع سینوس در این محدوده است.	مقدار تابع سینوس در این محدوده است.

(صفحه‌های ۹۱ و ۹۲ - فعالیت - مکمل و مرتبط با ۱ تا ۵)

۳۴۶- الف) جدول زیر را کامل کنید.

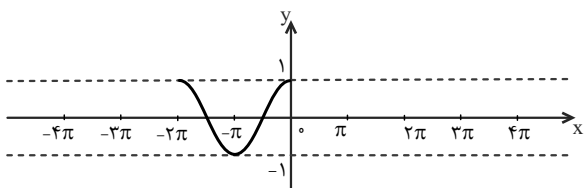
x	۰	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y = cos x		$\frac{1}{2}$	۰		-۱				
مختصات نقطه		$(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$		$(\pi, -1)$				

ب) نقاط جدول را روی نمودار زیر نشان دهید، سپس نمودار تابع y = cos x را کامل کنید.



(صفحه‌های ۹۲ و ۹۳ - فعالیت - مکمل و مرتبط با ۶ تا ۸)

۳۴۷- نمودار تابع y = cos x را در بازه $[-4\pi, 4\pi]$ رسم کنید.



ب) نمودار تابع کسینوس در بازه‌های $[2k\pi, \dots]$ تکرار می‌شود. ($k \in \mathbb{Z}$)

پ) بیشترین مقدار تابع کسینوس برابر با و کمترین مقدار آن است.

ت) دامنه‌ی تابع کسینوس و برد آن است.

ث) بیشترین مقدار تابع کسینوس به ازای $x = 2k\pi$ و کمترین مقدار آن به ازای $x = \dots$ به دست می‌آید. ($k \in \mathbb{Z}$)

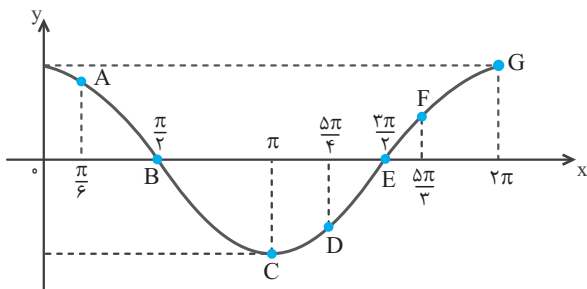
ج) رفتار تابع با افزایش مقدار x در بازه‌ی $(\pi, 2\pi)$ کاهشی و در بازه‌ی $(0, \pi)$ است.

چ) محل برخورد نمودار با محور x ها در نقاطی به طول‌های $x = -\frac{3\pi}{2}$ ، $x = \dots$ ، $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \dots$ است و به طور کلی مقدار

تابع به ازای $x = \dots$ برابر با صفر است. ($k \in \mathbb{Z}$)

۳۴۸- نمودار تابع $y = \cos x$ در شکل زیر رسم شده است. مختصات نقاط A, B, C, D, E, F, G را مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۹۲- فعالیت - مکمل و مرتبط با ۶)



$A(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{\pi}{2}, \dots)$, $C(\pi, -1)$, $D(\frac{5\pi}{4}, \dots)$, $E(\frac{3\pi}{2}, \dots)$, $F(\frac{7\pi}{4}, \dots)$, $G(2\pi, \dots)$

(ب) جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

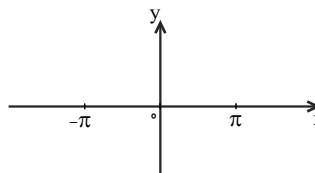
$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$
مقدار تابع سینوس از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به صفر کاهش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از به کاهش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از به صفر می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از به ۱ می‌یابد.
مقدار تابع سینوس در این محدوده نامنفی است.	مقدار تابع کسینوس در این محدوده است.	مقدار تابع کسینوس در این محدوده است.	مقدار تابع سینوس در این محدوده است.

(صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱- ترکیبی)

۳۴۹- برای هر یک از توابع زیر، مشخص کنید که تابع در چه محدوده‌هایی از دامنه‌اش، یک به یک است.

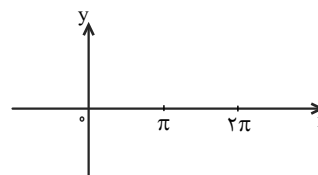
الف) $f(x) = \sin x$ $D_f = [-\pi, \pi]$

.....



ب) $g(x) = \cos x$ $D_g = [0, 2\pi]$

.....



۳۵۰- اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \sin x$ به صورت $[-2\pi, a]$ باشد، حداقل مقدار a را طوری به دست آورید که تابع در دامنه‌اش ۳ بار به حداکثر مقدارش برسد.
 (صفحه‌های ۸۹ و ۹۰- فعالیت - مکمل و مرتبط با ۷ و ۸)

.....

(صفحه‌ی ۹۳- مکمل و مرتبط با تمرین ۱)

۳۵۱- مطابق نمونه‌ی حل شده، تعیین کنید نمودارهای کدام جفت از توابع زیر بر هم منطبق هستند.

الف) $y = \sin x$, $y = \sin(3\pi + x)$

حل: $y = \sin(3\pi + x) = \sin(2\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x \neq \sin x$ دو نمودار منطبق نیستند.

.....

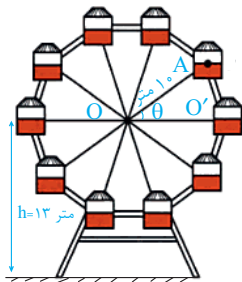
ب) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$

.....

پ) $y = \sin x$ ، $y = \cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

ت) $y = \cos(4\pi - x)$ ، $y = \cos(5\pi + x)$

۳۵۲- مطابق شکل زیر، شخص A سوار چرخ و فلکی به شعاع ۱۰ متر شده است. اگر نقطه‌ی O مرکز چرخ و فلک و پاره خط OO' کاملاً افقی باشد: (صفحه‌های ۸۸ و ۹۱ - مرتبط با متن درس)

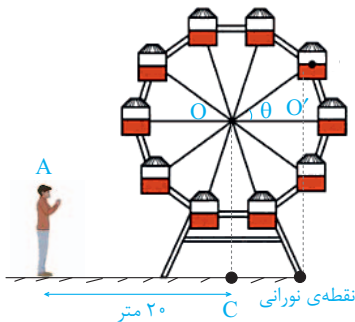


الف) در هر لحظه فاصله‌ی شخص A از پاره خط OO' را به صورت تابعی بر حسب theta بنویسید.

ب) ارتفاع شخص از سطح زمین را به صورت تابعی بر حسب theta بنویسید.

۳۵۳- در شکل زیر، کودکی که سوار چرخ و فلک شده است، لیزری را به صورت قائم به سمت پایین نگه داشته است که تصویر لیزر بر روی زمین یک نقطه‌ی نورانی است. اگر شعاع چرخ و فلک ۱۰ متر و تصویر قائم مرکز چرخ و فلک بر روی زمین نقطه‌ی C باشد:

(صفحه‌های ۸۸ و ۹۱ - مرتبط با متن درس)



الف) فاصله‌ی نقطه‌ی نورانی از نقطه‌ی C را به صورت تابعی بر حسب theta به دست آورید.

ب) فاصله‌ی افقی نقطه‌ی نورانی از شخص A بر حسب theta را به صورت یک تابع بنویسید.

رسم نمودار توابع شامل سینوس و کسینوس با انتقال، تقارن و ...

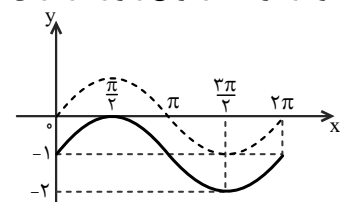
(صفحه‌ی ۹۰ - مکمل و مرتبط با کار در کلاس)

الف) $y = \sin x - 1$

کل حل: نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه‌ی یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

ب) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



ت) $y = 1 - 2 \sin x$

.....

.....

(صفحه‌ی ۹۳- مکمل و مرتبط با کار در کلاس)

الف) $y = \cos x + 2$

.....

.....

ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1$

.....

.....

پ) $y = -2 \cos x$

.....

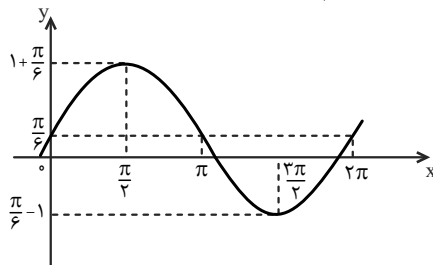
.....

ت) $y = 1 - \cos(x + \pi)$

.....

.....

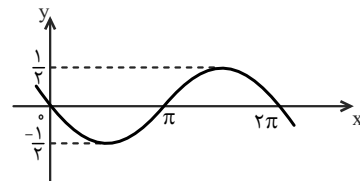
(صفحه‌ی ۹۴- مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

□ (ب) نمودار تابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ به صورت زیر است:□ (پ) برای رسم نمودار تابع $y = \cos x - \frac{3}{4}$ ، نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه‌ی $\frac{3}{4}$ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.□ (ت) برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ به سمت راست منتقل می‌کنیم.

۳۵۵- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

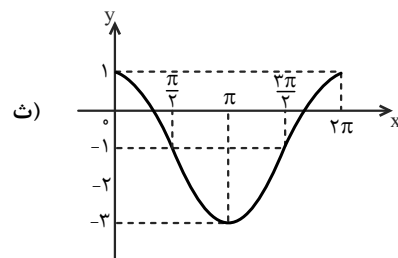
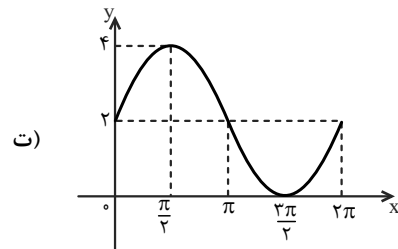
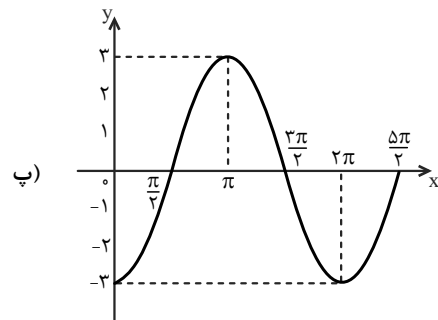
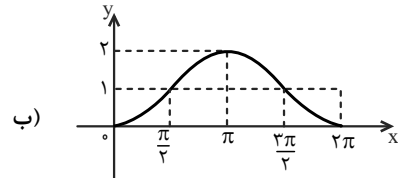
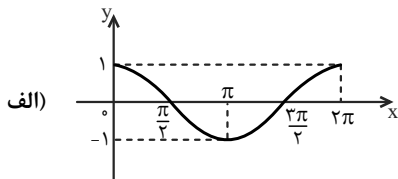


۳۵۶- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

□ الف) نمودار تابع $y = -\frac{1}{4} \sin x$ به صورت زیر است:□ (ب) برای رسم نمودار تابع $y = \cos x - \frac{3}{4}$ ، نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه‌ی $\frac{3}{4}$ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.□ (ت) برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ به سمت راست منتقل می‌کنیم.

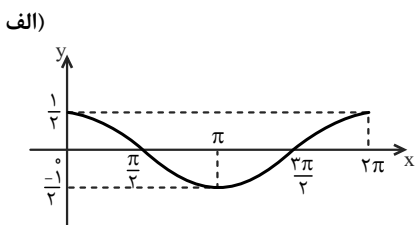
(صفحه ۹۴ - مکمل و مرتبط با تمرین ۳)

۳۵۷- هر نمودار را به ضابطه‌ی آن، مانند نمونه‌ی حل شده، وصل کنید.



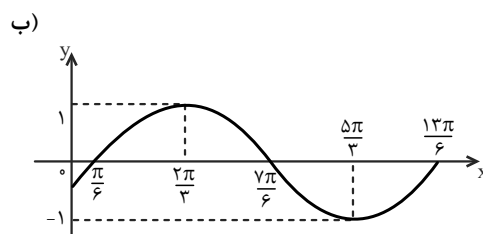
- ۱) $y = 2 \cos x - 1$
- ۲) $y = 2 \sin x + 2$
- ۳) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- ۴) $y = 1 - \cos x$
- ۵) $y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{2})$

۳۵۸- با توجه به نمودار توابع $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ، برای هر یک از نمودارهای زیر یک ضابطه بنویسید. (صفحه ۹۴ - مکمل و مرتبط با تمرین ۳)



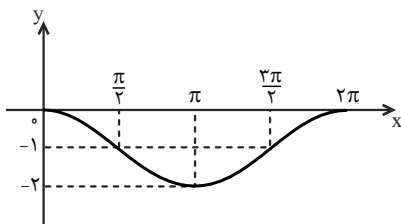
حل: مقادیر تابع $y = \cos x$ در ضریب $\frac{1}{2}$ ضرب شده‌اند، پس:

$$y = \frac{1}{2} \cos x$$



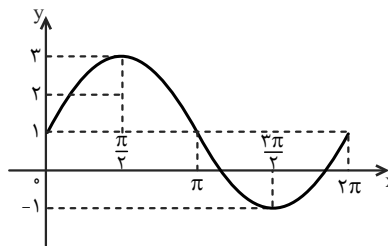
y =

پ)



y =

ت)

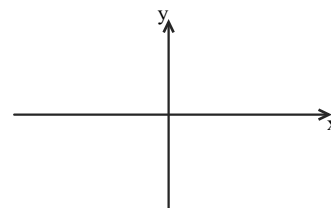


y =

۳۵۹- برای هر یک از توابع زیر، مشخص کنید در چه محدوده‌ای از دامنه‌شان، مقدار تابع منفی است. (صفحه ۹۳- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

الف) $f(x) = -2 \sin x$ $D_f = [-2\pi, 2\pi]$

.....



ب) $g(x) = 3 \cos(x + \frac{\pi}{6})$ $D_g = [0, 2\pi]$

.....



۳۶۰- با رسم نمودار، طول نقاط برخورد نمودار توابع زیر با محور x ها را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید. (صفحه ۹۳- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

الف) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

.....



ب) $y = 2 \sin x - 1$

.....



(صفحه ۹۳- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

۳۶۱- بیشترین و کمترین مقدار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 3 - 2 \cos x$

.....

ب) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$

.....

.....

۳۶۲- با رسم نمودار تابع $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ ، مشخص کنید این تابع در چه محدوده‌هایی از این بازه، روند افزایشی دارد.

(صفحه‌ی ۹۳- مکمل و مرتبط با کار در کلاس)

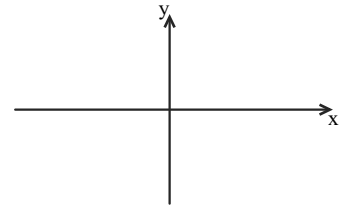
.....

.....

.....

.....

.....



۳۶۳- با رسم نمودار تابع $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ در بازه‌ی $[0, 4\pi]$ ، مشخص کنید این تابع در چه محدوده‌هایی از این بازه روند کاهشی دارد.

(صفحه‌ی ۹۳- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

.....

.....

.....

.....

.....



$$r = \frac{15}{\pi} \text{ cm} \quad \text{الف - ۳۰۰}$$

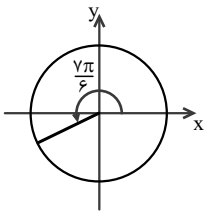
$$\text{محیط} = 17 / 5\pi \text{ cm} \quad \text{ب - ۳۰۱}$$

$$AB \text{ کمان} = \frac{20\pi}{3} \quad \text{ب - ۳۰۲}$$

$$\ell = \frac{7000\pi}{3} \text{ km} \quad \text{ب - ۳۰۳}$$

الف ناحیه سوم (ب ناحیه سوم)

الف - ۳۰۸

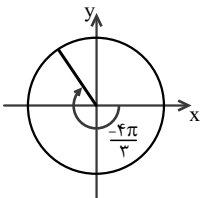


ب ناحیه سوم

$$\text{پ) } \cos \frac{7\pi}{6} < 0 \text{ و } \sin \frac{7\pi}{6} < 0$$

$$\text{ت) } \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

الف - ۳۰۹



ب ناحیه دوم

$$\text{پ) } \cos \frac{-4\pi}{3} < 0 \text{ و } \sin \frac{-4\pi}{3} > 0$$

$$\text{ت) } \cot \frac{-4\pi}{3} < 0 \text{ و } \tan \frac{-4\pi}{3} < 0$$

$$\text{ت) } \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC = 20 \text{ cm} \quad \text{ب - ۳۱۱}$$

$$S_{\Delta ABC} = 20\sqrt{3} \quad \text{ب) } S_{\Delta ABC} = \sqrt{3} \quad \text{الف - ۳۲۱}$$

$$S_{\Delta ABC} = 18\sqrt{2} \quad \text{ت) } S_{\Delta ABC} = 2 \quad \text{ب) } S_{\Delta ABC} = 2$$

-۲۸۱

$$\text{الف) } f = \{(0, -1), (2, 0), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{f} = \{(0, -1), (4, 1), (6, \frac{1}{2})\}$$

$$\text{پ) } f \times f = \{(0, 1), (2, 0), (4, 1), (6, 4)\}$$

-۲۸۲

$$\text{الف) (a) } (f+g)(1) = -1 \quad \text{ب) } D_{f+g} = [-3, 2]$$

$$\text{(b) } (f-g)(0) = -7$$

$$\text{(c) } (f \cdot g)(2) = -2$$

پ) **♦ راهنمایی:** به ازای طول‌های یکسان در نمودار دو تابع، عرض‌ها را با هم جمع کنید تا نمودار تابع $f+g$ حاصل شود یا مقدار تابع g را از مقدار تابع f کم کنید تا $f-g$ به دست آید.

$$\text{الف - ۲۸۳) } g(x) = \frac{-1}{3}x + 1 \text{ و } f(x) = x + 2$$

پ) **♦ راهنمایی:** طول از مبدأ (a) و عرض از مبدأ (b) هر دو تابع خطی مشخص شده است، با توجه به رابطه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ضابطه‌ی آنها را بنویسید.

$$\text{(a) } (f+g)(x) = \frac{2}{3}x + 3 \quad \text{ب)$$

$$\text{(b) } (f-g)(x) = \frac{4}{3}x + 1$$

$$\text{(a) } (2f-3g)(2) = 7 \quad \text{ب)$$

$$\text{(b) } (f \cdot g)(3) = 0$$

ب)

ت)

الف - ۲۸۴

پ)

الف - ۲۸۵) **♦ راهنمایی:** قرینه‌ی هر نمودار را نسبت به محور x ها رسم کنید.

الف - ۲۸۷) **♦ راهنمایی:** برای رسم نمودار $kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از تابع $f(x)$ را k برابر کنیم.

الف - ۲۸۹) **♦ راهنمایی:** برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{9x+18}$ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده کنید.

الف - ۲۹۰) **♦ راهنمایی:** ابتدا ضابطه‌ی تابع را به صورت مربع کامل در آورید.

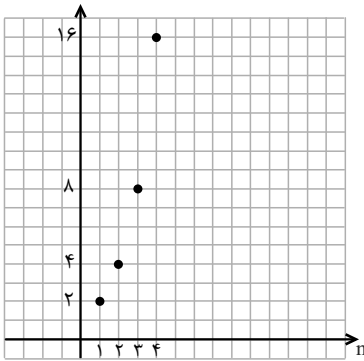
مثنات (فصل چهارم)

$$\text{ب) } \frac{9\pi}{4} \text{ رادیان}$$

$$\text{ت) } -\frac{5\pi}{2} \text{ رادیان}$$

$$\text{الف - ۲۹۳) } \frac{3\pi}{4} \text{ رادیان}$$

$$\text{پ) } -\frac{3\pi}{2} \text{ رادیان}$$



(ت)

۳۶۷- الف) $a \in \mathbb{R}$ ، $a > 0$ ، $a \neq 1$ (ب)
 ب) $a > \frac{1}{4}$ ، $a \neq 1$

- ۳۶۸- الف) (ب) (الف)
 پ) (ت) (پ)
 ث) (ج) (ث)

۳۶۹- راهنمایی: هر تابع با ضابطه‌ی $y = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، یک تابع نمایی است.

۳۷۰- راهنمایی: به جای x ، مؤلفه‌ی اول را در تابع قرار دهید، اگر مقدار y با مؤلفه‌ی دوم برابر باشد، نقطه‌ی مورد نظر روی نمودار تابع قرار دارد.

- ۳۷۱- الف) (ب) (الف)
 پ) (ت) (پ)
 ث) (ث) (ث)

۳۷۲- $k = 6$

۳۷۳- $f(3) = 81$

۳۷۴- الف) محل برخورد نمودار تابع با محور عرض‌ها: $x = 0$ ، $y = 1$

نمودار با محور طول‌ها برخوردی ندارد.
 ب) دامنه: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $(0, +\infty)$
 پ)

- ۱) $4^5 > 4^2$
 ۲) $4^{\sqrt{2}} < 4^{1/5}$
 ۳) $4^{-\sqrt{5}} > 4^{-2\sqrt{2}}$

- ۳۷۶- الف) (ب) (الف)
 پ) (ت) (پ)

۳۲۲- راهنمایی: از $A + B + C = 180^\circ$ ، نتیجه بگیرید،
 $A + B = 180^\circ - C$ ، و آن را در رابطه‌ی داده شده جایگزین کنید.

۳۳۳- $\frac{41}{91}$

۳۳۴- راهنمایی: ابتدا با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ مقدار $\cos x$ را به دست آورید. به علامت نسبت مثلثاتی \cos در ربع چهارم دقت کنید. سپس با استفاده از روابط مثلثاتی زوایا با اختلاف π و $\frac{\pi}{4}$ ، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

۳۴۴- ۴-

۳۴۹- راهنمایی: دامنه‌ی تابع را باید به بازه‌هایی تفکیک کنید که در هر یک از آنها، هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۳۵۰- $\frac{5\pi}{2}$

۳۵۲- الف) $y_1 = 10 \sin \theta$ (ب) $y_2 = 13 + 10 \sin \theta$

۳۵۹- الف) $(-\pi, -2\pi)$ ، $(0, \pi)$

ب) $(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

۳۶۰- الف) 0 و π و 2π (ب) $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$

۳۶۱- الف) $y_{\max} = 5$ ، $y_{\min} = 1$

ب) $y_{\max} = 2 - \frac{\pi}{4}$ ، $y_{\min} = -2 - \frac{\pi}{4}$

۳۶۲- $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ و $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

توابع نمایی و لگاریتمی (فصل پنجم)

۳۶۴- الف) $2^6 = 64$

ب) جد هشتم ($2^8 = 256$)

پ) $2^n =$ تعداد اعداد در مرحله‌ی n ام