



۱

۲۷

## فصل اول: منطق و استدلال ریاضی

پاسخ نامه فصل اول

۴۰

۶۴

## فصل دوم: تابع



پاسخ نامه فصل دوم



۷۹

۸۹

## فصل سوم: تحلیل داده ها

پاسخ نامه فصل سوم

۹۵

۱۰۲

۱۰۶

۱۱۱

۱۱۹

## خلاصه فصل ها

امتحان های نیم سال اول

پاسخ نامه امتحان های نیم سال اول

امتحان های نیم سال دوم

پاسخ نامه امتحان های نیم سال دوم

# منطق و استدلال ریاضی

فصل اول

## ۱ منطق ریاضی و گزاره‌ها



### تعريف منطق

منطق در لغت به معنی کلمه و گفتار است (از نُطق می‌آید). ولی از نظر فلاسفه و منطق‌دانان، به معنی قانون درست فکر کردن است. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

**۱** منطق، استدلال‌ها را بررسی می‌کند و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کند؛ زیرا اگر برای اثبات یک موضوع، استدلال‌های ما نادرست باشند نتیجه به دست آمده هم، قابل قبول نخواهد بود.

**۲** منطق، ابزاری است از نوع قاعده و قانون که به کار بُردن آن، ذهن را از خطای در تفکر مصون نگه می‌دارد.  
**نکته** اولین نفری که قواعد ذهن انسان را به دست آورد و با ترتیبی خاص، دسته‌بندی کرد، ارسطو بود.

### تعريف منطق ریاضی

به نظر شما کاربرد دستور زبان فارسی چیست؟ حتماً پاسخ می‌دهید که دستور زبان فارسی، علمی است که روش درست گفتن و درست نوشتند را به ما می‌آموزد. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، **منطق ریاضی**، دستور این زبان است. به عبارت دیگر، منطق ریاضی روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

### ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی، گزاره، جمله‌ای است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن، اطلاعی نداشته باشیم. مثلاً:

«۲ عددی اول است.» ← یک گزاره با ارزش درست است.

« $5 > 3^2$ » ← یک گزاره با ارزش نادرست است چون  $25 < 9$  است.

«بیشتر درس بخوان.» ← گزاره نیست. (جمله امری است.)

«چه ماشین زیبایی!» ← گزاره نیست. (جمله عاطفی است.)

«شما امسال کنکور می‌دهید؟» ← گزاره نیست. (جمله پرسشی است.)

سؤال (شگرد)، بیفشدید مله  $3^3 > 5^2$  چهله فبری مفسوب می‌شه؟ من که کلمه فارسی تو شن نمی‌بنم!

دیگر: قُب شما ( $3^3 > 5^2$ ) رو پهوری می‌فونی؟ مگه نمی‌گی:  $5^2$  بزرگ تراز  $3^3$  است. پس دیدی که ( $3^3 > 5^2$ ) یه چهله فبریه و هتماً لازم نیست چمله، فارسی باشه. فیلی وقتاً از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم.

**اندک مهم**: در بعضی از جملات خبری، نمی‌توانیم درباره درستی یا نادرستی آن‌ها اظهار نظر کنیم؛ لذا آن‌ها را گزاره محسوب نمی‌کنیم؛ مثلاً جمله خبری «متوازی‌الاضلاع، زیباترین شکل هندسی است.» گزاره محسوب نمی‌شود؛ چون زیبایی، موضوعی سلیقه‌ای است و اصولاً از نظر منطق ریاضی، جمله مذکور، قابل ارزش گذاری نیست.

## مثال و پاسخ

**مثال:** کدام یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

**الف** کباب، خوشمزه تر از بیتزا است.

**ب** عدد  $\sqrt{3}$  گویا است.

**ج** اصالت شما برای کدام شهر است؟

**د** عدد  $-3 \geq -10$

**ه** عدد  $n \in \mathbb{N}$  عددی منفی است.

**ج** کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی مربع کامل، عدد ۱۶ است.

**ج**  $\frac{1}{2} = 0.5$

**پاسخ:** **الف** گزاره نیست. (برای مقایسه مزه غذاها نمی‌توانیم ارزش گذاری کنیم.)

**ب** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون  $\sqrt{3}$  گنگ است.

**ج** گزاره نیست. (جمله پرسشی است.)

**د** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون  $n^2$  فرد باشد، حاصل  $n^2$  منفی می‌شود.

**ه** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون  $0 < -1$  کوچک‌تر از  $-3$  است.

**ج** گزاره است و ارزش آن، درست است زیرا:  $\frac{1}{10} = 0.1$

**ج** گزاره است و ارزش آن، درست است؛ چون اولاً ۱۶ مربع کامل است، یعنی جذر کامل دارد ( $4 = \sqrt{16}$ ) و ثانیاً ۱۶ کوچک‌ترین

عدد طبیعی دورقمی است که این خاصیت را دارد.

## جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

در مبنای ریاضی، هر گزاره را بیکی از حروف انگلیسی کوچک مانند  $p, q, r, s, \dots$  نمایش می‌دهیم. ضمناً بعضی گزاره‌ها خود، ترکیبی از دو یا چند گزاره دیگر هستند که به آن‌ها گزاره‌های ترکیبی (مرکب) می‌گوییم. کمی جلوتر با انواع گزاره‌های ترکیبی آشنا می‌شویم. جبر گزاره‌ها کارش این است که به وسیله یک سری قراردادها و نمادگذاری‌ها ارزش یک گزاره را تعیین می‌کند.

در جدول‌های زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده‌اند. ارزش درست یک گزاره

را با «د» یا «T» و ارزش نادرست آن را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. (True یعنی درست و

False یعنی نادرست).

تعداد حالت‌های ارزشی یک گزاره  $= 2^1 = 2$

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>r</b>
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

<b>p</b>	<b>q</b>
T	T
T	F
F	T
F	F

۴ حالت

تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره  $= 2^2 = 4$

تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره  $= 2^3 = 8$

**نتیجه:** اگر تعداد گزاره‌ها  $n$  باشد، در جدول ارزشی آن‌ها، تعداد حالت‌ها برابر با  $2^n$  خواهد بود؛ مثلاً اگر تعداد گزاره‌ها ۴ باشد، در جدول ارزشی مربوط به آن‌ها  $= 2^4 = 16$  حالت مختلف وجود دارد.

### نقیض یک گزاره

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش آن گزاره باشد. نقیض یک گزاره مثل  $p$  را با نماد  $\sim p$  نمایش می‌دهیم.  $\sim p$  را این طور می‌خوانیم: «چنین نیست که  $p$ »، یا «نقیض  $p$ ». جدول ارزش نقیض یک گزاره نسبت به خود آن گزاره به شکل رویه‌رو است:

اگر گزاره ساده  $p$  به شکل یک جمله فارسی باشد، برای ساختن نقیض آن، بهترین روش این است که فعل جمله را نقیض کنیم؛ البته این کار، تنها راه ساختن نقیض نیست؛ مثلاً نقیض گزاره «۶ عددی زوج است». را به ۳ صورت می‌توان بیان کرد:



**آنکه مهم**: گاهی اوقات، گزاره ساده موردنظر، شامل یک نماد ریاضی است که نقیض این نماد طبق جدول زیر، تعیین می‌شود:

نماد ریاضی	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$=$	$\neq$	$\in$	$\notin$	$\subseteq$	$\not\subseteq$
نقیض نماد	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$	$\neq$	$=$	$\notin$	$\in$	$\not\subseteq$	$\subseteq$

مثلاً نقیض گزاره  $\frac{1}{3} \neq 2 + 5x$  برابر است با:  $\frac{1}{3} = 2 + 5x$  و یا نقیض گزاره  $N \not\subseteq \mathbb{R}$  عبارت است از:  $N \subseteq \mathbb{R}$ ؛ همچنین نقیض گزاره  $3 \geq 8$  برابر است با  $3 < 8$ .

### مثال پاسخ

**مثال**: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید؛ سپس ارزش درستی هر گزاره و نقیضش را تعیین کنید:

$$2^3 + 2^4 = 2^5 \quad \text{ب}$$

**الف** ۵ عددی اول است.

$$(4 \times 9) > (5 \times 6) \quad \text{ت}$$

**ب** کسر  $\frac{5x}{x^2 - 3}$  گویا است.

**ج** عددی مثبت است.

**د**  $a \in \mathbb{N}$

**پاسخ**: **الف** ۵ عددی اول است. **نقیض**  $\rightarrow$  ۱۵ عددی اول نیست. (چنین نیست که ۵ عددی اول باشد). **درست** (T) **نادرست** (F)

**ب** می‌دانیم که:  $8 = 2^3$  و  $2^3 = 32$ ؛ لذا  $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$ ؛ بنابراین گزاره داده شده نادرست است و نقیض آن برابر است با:  $2^3 + 2^4 \neq 32$  و ارزش گزاره نقیض، درست است.

**ج** کسر  $\frac{5x}{x^2 - 3}$  گویا است. **نقیض**  $\rightarrow$  کسر  $\frac{5x}{x^2 - 3}$  گویا نیست. **درست** (T) **نادرست** (F)

**د**  $36 \leq 30 \quad \text{نقیض} \rightarrow \text{درست} (T) \quad \text{نادرست} (F)$

**ه**  $4 \notin \mathbb{N} \quad \text{نقیض} \rightarrow \text{درست} (T) \quad \text{نادرست} (F)$

**ج**  $a$  عددی مثبت است. **نقیض**  $\rightarrow$   $a$  عددی مثبت نیست. (چنین نیست که  $a$  عددی مثبت باشد). **نامعلوم**

a عددی مثبت است.	a عددی مثبت نیست.
T	F
F	T

ارزش گزاره  $a$  عددی مثبت است. معلوم نیست؛ چون مقدار  $a$  به ما داده نشده است؛ یعنی با توجه به مقدار  $a$ ، گزاره موردنظر، می‌تواند درست یا نادرست باشد.

سوال (شگرد)؛ استاد نمی‌شه بگایم نقیض گزاره  $a$  عددی مثبت است، «می‌شه»؛  $a$  عددی منفی است؟ دیگر؛ به نظرت آیا هر عددی که مثبت نباشد، منفی؟ فیر، صفر مثبت نیست ولی منفی هم نیست. به عبارت دیگر، وقتی  $a$  مثبت نباشد، یا منفی یا صفر ولی  $a$  عددی منفی است. صفر رو شامل نمی‌شه. پس نقیض گزاره  $a$  عددی مثبت است از: « $a$  عددی مثبت نیست» یا « $a$  عددی منفی یا صفر است.»

### گزاره‌های همارز

اگر ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$  یکسان باشد به آن‌ها گزاره‌های همارز می‌گوییم و این موضوع را به صورت  $q \equiv p$  نمایش می‌دهیم؛ یعنی  $p$  هر ارزشی داشته باشد (درست یا نادرست)  $q$  هم همان ارزش را دارد؛ مثلاً گزاره‌های «۲۵ عددی مریع کامل است.» و « $-3 \in \mathbb{Z}$ » همارز هستند؛ زیرا هر دوی آن‌ها ارزش درست (T) دارند.

همچنین گزاره‌های  $3 > \sqrt{3}$  و  $-25 = -(-5)$  همارز می‌باشند؛ چون هر دوی آن‌ها دارای ارزش نادرست (F) هستند. واضح است که اگر  $p \equiv q$  باشد، نقیض‌های آن‌ها نیز همارزند؛ یعنی:  $\sim p \equiv \sim q$ .

### مثال و پاسخ

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را به شکل همارزی بنویسید.

الف)  $(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$

ب)  $21^\circ > 21^\circ$

x = y

پاسخ:

الف)  $\sim [(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}] \equiv (\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$

ب)  $\sim (21^\circ > 21^\circ) \equiv (21^\circ \leq 21^\circ)$

ب)  $\sim (x = y) \equiv (x \neq y)$

نکره نقیض نقیض یک گزاره، همارز با همان گزاره است؛ یعنی:  $\sim (\sim p) \equiv p$

(این موضوع شما رو یاد چی میندازه؟ بله! منفی در منفی، هی شود مثبت).

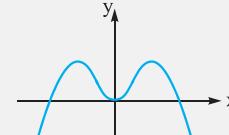
مثال: ۴ عددی مریع کامل است. نقیض  $\rightarrow$  ۴ عددی مریع کامل نیست. نقیض  $\rightarrow$  ۴ عددی مریع کامل است. گزاره  $\sim p$

گزاره  $\sim (-p)$

گزاره  $p$

گزاره  $\sim$

-۲ جدول زیر را کامل کنید:

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$10^3 + 10^4 = 10^7$			
مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.		$-8 \geq -10$	
			نمودار تابع است.
مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر با $2^4$ است.			
طول رأس سهمی $y = x^3 - 8x + 5$ برابر با $3$ است. (مفهوم علاقهمندان)			
		در تجزیه عبارت $4x^3 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود ندارد. (مفهوم علاقهمندان)	
در داده‌های $12000, 4200, 2800$ و $5$ شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین، برای نمایش محل تمرکز داده‌ها است.			
مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.			
قرینه هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است.			
معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از $1$ ، از خود آن عدد کوچک‌تر است.			
مجموع دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $1 - \sqrt{3}$ ، عددی گنگ است.			

## گزاره‌های عطفی و فصلی



### تکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، به شکل‌های مختلفی می‌توانیم گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. در کتاب ریاضی‌تان، ترکیب گزاره‌ها را با  $\wedge$  (و)،  $\vee$  (یا)، «اگر ... آن‌گاه ...»، «اگر ... آن‌گاه ... و بر عکس» انجام می‌دهیم. در این درسنامه می‌خواهیم ارزش گزاره‌های عطفی و فصلی را تعیین کنیم. ابتدا گزاره عطفی را بررسی می‌کنیم.

### تکیب عطفی دو گزاره

گردو گزاره ساده را با حرف «و» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکبی ساخته می‌شود که آن را ترکیب عطفی آن دو گزاره می‌نامیم. ترکیب عطفی  $p$  و  $q$  را نماد  $p \wedge q$  نمایش می‌دهیم و آن را « $p$  و  $q$ » می‌خوانیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$$\text{گزاره } p: 5 \text{ عددی فرد است.} \quad \text{گزاره } q: 5 \text{ عددی فرد است و } \frac{3}{2} \text{ عددی صحیح است.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{گزاره } p \wedge q: 5 \text{ عددی صحیح است.} \\ \text{گزاره } q: \frac{3}{2} \text{ عددی صحیح است.} \end{array} \right.$$

گزاره  $p: 2$  عددی زوج است.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{گزاره } p \wedge q: 2 \text{ عددی زوج است و } 2 \text{ عددی اول است. (به طور خلاصه می‌توان گفت ۲ عددی زوج و اول است.)} \\ \text{گزاره } q: 2 \text{ عددی اول است.} \end{array} \right.$

جدول ارزش درستی  $p \wedge q$  به شکل زیر است:

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

فقط وقتی درست است که هم  $p$  و هم  $q$  درست باشند.

اگر حداقل یکی از دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشند؛  $p \wedge q$  نادرست خواهد بود.

## مثال و پاسخ

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است جدول ارزش‌گذاری رسم کنید.

الف) تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است.

$$\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N} \text{ و } \sqrt{3} \notin \mathbb{N}$$

ب) عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.

ت) رابطه  $f$  تابع است و رابطه  $\{1, 2, 3, 4\}$  تابع است.

پاسخ: الف) تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است.  $\begin{cases} \text{کل گزاره، نادرست (F)} \\ \text{کل گزاره، درست (T)} \end{cases}$  است.

$$\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N} \text{ و } \sqrt{3} \notin \mathbb{N}$$

ب) عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.  $\begin{cases} \text{کل گزاره، نادرست (F)} \\ \text{کوچک‌ترین عدد طبیعی اول است (F).} \end{cases}$  است.

ت) رابطه  $f$  تابع است و رابطه  $\{1, 2, 3, 4\}$  تابع است.

(چون  $f$  به مداده نشده) نامعلوم (عضوهای اول زوج‌ها مختلفاند).

باید برای گزاره عطفی بالا جدول ارزش‌گذاری رسم کنیم، چون وضعیت ارزش  $f$  مشخص نیست:

تابع است.	تابع $g$	تابع $g$ تابع است.	تابع $f$ تابع است و $g$ تابع است.
T	T	T	T
F	T	F	F

پس اگر  $f$  تابع باشد، کل گزاره عطفی درست است و اگر  $f$  تابع نباشد، کل گزاره عطفی، نادرست است.

## ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره ساده را با حرف «یا» به هم مربوط کنیم، گزاره مركب حاصل، ترکیب فصلی آن دو گزاره  $p$  و  $q$  را به شکل  $p \vee q$  نمایش داده و آن را به صورت « $p$  یا  $q$ » می‌خوانیم؛ مثلاً:

گزاره  $p$ : عدد  $120$  بر  $5$  بخش‌پذیر است. گزاره  $q$ : عدد  $120$  بر  $5$  بخش‌پذیر است یا مربع عدد  $10$ ، برابر  $20$  است.

گزاره  $p$ : تهران در ایران است. گزاره  $q$ : تهران در ایران است یا تهران در آسیا است. (به طور خلاصه تهران در ایران یا آسیا است.)

جدول ارزش‌گذاری  $p \vee q$  به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشند.  $p \vee q$   
 فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.  $p \vee q$

## مثال پاسخ

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است از جدول ارزش‌گذاری استفاده کنید:

الف) عدد اول یا مربع کامل است.

ب) معادله  $x^3 - 16 = 0$  دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.

ج) ۱ عدد اول است یا  $x$  زوج است.

پاسخ: الف) عدد اول یا مربع کامل است.  $\Leftarrow$  کل گزاره، درست (T) است.  
 (۱۳) جذر کامل تدارد.

ب) ابتدا معادله داده شده را حل می‌کنیم:

ضمیماً ۴۹ بر ۷ بخش پذیر است لذا:

معادله  $x^3 - 16 = 0$  دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.  $\Leftarrow$  کل گزاره، درست (T) است.

پ) می‌دانیم هر عدد به توان صفر برسد، جواب برابر ۱ می‌شود؛ لذا:  $5^0 = 1$

$\Leftarrow$  کل گزاره، نادرست (F) است.

مثال: ۱ عددی اول نیست (یک فقط فرد است نه اول). ولی در مورد ارزش گزاره « $x$  زوج است». نمی‌توانیم اظهار نظر قطعی

کنیم؛ چون مقدار  $x$  را نمی‌دانیم؛ لذا باید جدول ارزش‌گذاری رسم کنیم:

۱ عدد اول است.	$x$ زوج است.	۱ عدد اول است یا $x$ زوج است.
F	T	T
F	F	F

## مثال پاسخ

مثال: جدول ارزش‌گذاری گزاره  $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$  را تشکیل دهید.

همیشه جدول را از چپ به راست تشکیل می‌دهیم.

پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

## خاصیت‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی دوگزاره‌ها

یک سری قانون برای ترکیب عطفی و فصلی دوگزاره وجود دارد که یادگیری آن‌ها سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. البته تمام این قوانین و فرمول‌ها را می‌توانیم به کمک رسم جدول ارزش‌گذاری، اثبات کنیم ولی ما فقط آن‌هایی را ثابت می‌کنیم که ممکن است در مدارس جنبه امتحانی داشته باشند. در تمام فرمول‌های زیر، منظور از  $T$  گزاره همیشه درست و منظور از  $F$  گزاره همیشه نادرست است.

	قوانین مربوط به ترکیب عطفی	قوانین مربوط به ترکیب فصلی	
فقط این‌ها را هفظ کنید	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$	فقط این‌ها را هفظ کنید.
	$p \wedge T \equiv p$ یا $T \wedge p \equiv p$	$p \vee T \equiv T$ یا $T \vee p \equiv T$	
	$p \wedge F \equiv F$ یا $F \wedge p \equiv F$	$p \vee F \equiv p$ یا $F \vee p \equiv p$	
	$p \wedge \sim p \equiv F$ یا $\sim p \wedge p \equiv F$	$p \vee \sim p \equiv T$ یا $\sim p \vee p \equiv T$	
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	جابه‌جایی	
مفہوم علاقه‌مندان	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	شرکت‌پذیری	مفہوم علاقه‌مندان
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	توزیع‌پذیری	
	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	دُمِرگان	
	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	جذب	
	$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	شبه‌جذب	

همان‌طور که گفتیم تمام این فرمول‌ها توسط جدول ارزش‌گذاری، قابل اثبات است؛ مثلاً قانون جذب  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$  را اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

مالحظه می‌کنید که ارزش گزاره  $p \wedge (p \vee q)$  همیشه با ارزش  $p$  برابر است. برخی دیگر از فرمول‌های بالا را در تمرین‌ها اثبات کردہ‌ایم.

### مثال و پاسخ

**مثال:** بدون رسم جدول، طرف دوم همارزی‌های زیر را به دست آورید:  $T$  و  $F$  به ترتیب گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست هستند.

$$\sim p \wedge F \equiv ? \quad \text{ب}$$

$$\sim p \vee F \equiv ? \quad \text{اف}$$

$$(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv ? \quad \text{ت}$$

$$\sim (\sim p) \wedge \sim p \equiv ? \quad \text{پ}$$

$$q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv ? \quad \text{ج}$$

$$(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv ? \quad \text{پ}$$

**پاسخ:** دقت کنید که نقیض  $F$  می‌شود  $T$  و نقیض  $T$  می‌شود  $F$ ؛ لذا خواهیم داشت:

$$\text{الف} \quad \sim p \vee \sim F \equiv \sim p \vee T \equiv T$$

$$\text{ب} \quad \sim p \wedge F \equiv F$$

$$\text{ج} \quad \sim(\sim p) \wedge \sim p \equiv \underbrace{p \wedge \sim p}_{\substack{\text{اجتماع} \\ \text{نقیضین}}} \equiv F$$

$$\text{د} \quad (\underbrace{\sim p \wedge F}_{\substack{\text{F} \\ \text{شبیه جذب}}} \vee (\underbrace{\sim p \vee T}_{\substack{\text{T} \\ \text{جذب}}}) \equiv F \vee T \equiv T$$

$$\text{هـ} \quad (F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \equiv p \wedge q$$

$$\text{زـ} \quad q \vee \sim(p \vee \sim q) \equiv q \vee (\underbrace{\sim p \wedge q}_{\substack{\text{دمگان}}}) \equiv q$$

شبیه جذب

جذب

دمگان

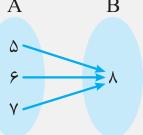
## سؤال‌های امتحانی

۳- در جدول زیر، رویه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آن‌ها را با علامت  $\checkmark$  مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک یا دو گزاره ساده، گزاره مركب را کامل کنید:

ردیف	گزاره مركب	درست	نادرست
۱	۷۵ عددی اول است و $4^3$ عددی منفی نیست.		
۲	و رنگ چشم افراد، متغیر کیفی اسمی است.	$\checkmark$	
۳	مقسم‌علیه‌های (شمارنده‌های) طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از: ..... ، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و ..... .	$\checkmark$	
۴	۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$		
۵	و .....	$\checkmark$	
۶	همه سوره‌های قرآن با بسم الله شروع می‌شوند و سوره بقره طولانی ترین سوره قرآن است.		
۷	مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی است و $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$		
۸	$\sqrt{9+100} = 3 + 10 = \frac{-2}{3}^{-3} \times 3^{-3} = \frac{1}{8}$		
۹	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ و $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$		
۱۰	(شیب هر خط موازی محور عرض ها صفر است) (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی های مُخرّب است). (مفهوم علاقه‌مندان)		
۱۱	$(-5 \neq -\sqrt{(-5)^2}) \wedge ((\frac{2}{3})^{\circ} = 1)$		
۱۲	عدد ۲ زوج و اول است.		
۱۳	نمودار خط $3 = x$ از ناحیه اول و چهارم می‌گذرد. (مفهوم علاقه‌مندان)		

۴- در جدول زیر، رویه‌روی گزاره‌های داده شده، ارزش آن‌ها را با علامت  $\checkmark$  مشخص کرده و همچنین با توجه به ارزش داده شده، با یک گزاره ساده، گزاره مركب را کامل کنید:

ردیف	گزاره مركب	درست	نادرست
۱	کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ عبارتی گویا است یا ۹۱ عددی مركب است.		
۲	قرآن ۱۱۸ سوره دارد یا .....	$\checkmark$	

✓		ارسطو نویسنده کتاب ارغونون نیست یا ..... ۳
	✓	یا معادله $x^3 + x + 3 = 0$ دو ریشه دارد. ۴
		افلاطون، شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد. ۵
		اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱۲۱) هستند یا سه‌می $x^3 + 1 = f(x)$ ماقزیم دارد. (مفهوم علاقه‌مندان) ۶
		در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل برابر $t$ است یا وزن افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است. ۷
		 رابطه ۸
		$\left(\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\right) \vee (\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q})$ ۹
		$\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{6^7}{8^5} = 2 \vee (\sqrt{x^4} =  x )$ ۱۰
		عدد ۱۹ زوج یا مرربع کامل است. ۱۱
		عدد ۲۴ بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر است. ۱۲

- با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از همارزی‌های زیر را بررسی کنید:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{(ب)}$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{(الف)}$$

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \quad \text{(ج)}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv q \quad \text{(ت)}$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \quad \text{(خ)}$$

$$(p \wedge \sim p) \equiv F \quad \text{(ح)}$$

$$p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F \quad \text{(ذ)}$$

$$p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \equiv T \quad \text{(د)}$$

$$p \wedge q \wedge \sim p \wedge \sim q \equiv F \quad \text{(ب)}$$

$$p \wedge q \equiv F \quad \text{(الف)}$$

$$\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \wedge r) \equiv T \quad \text{(ج)}$$

$$\sim (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv p \wedge \sim q \quad \text{(ذ)}$$

$$\sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv q \wedge \sim p \quad \text{(ب)}$$

$$\sim (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv p \wedge \sim r \quad \text{(الف)}$$

## ۳ گزاره شرطی و دو شرطی

### ۱ ترتیب شرطی و دو گزاره

اگر بخواهیم از گزاره  $p$ ، گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده کرده و می‌نویسیم:  $q \Rightarrow p$  و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  را نتیجه می‌دهد  $q \Rightarrow p$  از  $p$  نتیجه می‌شود.

بچه‌های عزیز، این دو مورد در کتاب درسی تان مطرح نشده است ولی بدانید بهتر است.  $q \Rightarrow p$  شرط کافی است برای  $q$  و  $p$  شرط لازم است برای  $q$ .

ضمناً در گزاره « $p \Rightarrow q$ » به  $p$  مقدم و به  $q$  تالی می‌گوییم.

مثالاً گزاره شرطی «اگر  $\underbrace{\text{یک چهارضلعی}}_{q}$ ،  $\underbrace{\text{مستطیل}}_{p}$  باشد، آن‌گاه  $\underbrace{\text{قطراهایش با هم برابرند}}_{q}$ .» را به شکل‌های زیر هم می‌توان بیان کرد:

مستطیل بودن  $\underbrace{\text{یک چهارضلعی}}_{q}$ ،  $\underbrace{\text{نتیجه می‌دهد}}_{p}$   $\underbrace{\text{مساوی بودن قطراهای آن}}_{q}$  را.

مستطیل بودن یک چهارضلعی، شرط کافی است برای مساوی بودن قطرهای آن.

(دو قطرش با هم برابرند)  $\Rightarrow$  (چهارضلعی، مستطیل است).

مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی، شرط لازم است برای مستطیل بودن آن.

در گزاره شرطی بالا  $p$  و  $q$  به هم وابسته هستند؛ یعنی با فرض درست بودن گزاره «چهارضلعی، مستطیل است» درستی یا نادرستی گزاره «قطرهای چهارضلعی با هم برابرند» را بررسی می‌کنیم؛ ولی در علم منطق، گاهی  $p$  و  $q$  ربطی به هم ندارند که در این صورت باید ارزش تک‌تک آن‌ها را تعیین کنیم؛ مثلاً اگر  $5 > 3$  باشد، آن‌گاه تهران پایتخت ایران است. ملاحظه می‌کنید که گزاره‌های  $p$  و  $q$  ارتباطی به هم ندارند؛ پس نمی‌توانیم گزاره  $p$  (نادرست) گزاره  $q$  (درست) بدهیم.

بدون بررسی بگوییم  $p$  درست است. (دیدید که  $5 > 3$  نادرست بود؛ یعنی هتماً باید بررسی کنیم و پشم بسته نمی‌گیم  $p$  درست؛ ولی آنکه  $p$  و  $q$  به هم وابسته بودن، پشم بسته هی‌گیم  $p$  درسته و فقط  $q$  رو بررسی هی‌کنیم).

جدول ارزش‌گذاری ( $p \Rightarrow q$ ) به صورت مقابل است:

مقدم $p$	تالی $q$	$(p \Rightarrow q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\rightarrow (p \Rightarrow q)$  فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

به دو ردیف آخر جدول بالا دقت کنید. ملاحظه می‌کنید که در هر دو حالت، مقدم ارزش نادرست دارد و لی ارزش ( $p \Rightarrow q$ ) درست است. در این دو حالت، می‌گوییم گزاره شرطی به إنتفای مقدم، درست است. یعنی به خاطر نادرست بودن مقدم، می‌گوییم تالی چه درست باشد چه نادرست، کل گزاره درست است.

## مثال پاسخ

مثال ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر ۱۳ اول است، آن‌گاه ۲۵ مربع کامل است.

$$\text{ا) } 13 = 4^2 ; \text{ آن‌گاه } 3 > 7 .$$

ب) اگر چهارمین فصل سال، پاییز است؛ آن‌گاه اسفند ۳۱ روز دارد.

ت) اگر  $x$  عددی زوج باشد؛ آن‌گاه بر ۲ بخش‌پذیر است.

پاسخ: پس ( $p \Rightarrow q$ ) درست است.

الف) مربع کامل است.  $\Rightarrow (13 \text{ اول است})$

پس ( $q \Rightarrow p$ ) به إنتفای مقدم، درست است.

ب) (چهارمین فصل سال، پاییز است).  $\Rightarrow (31 \text{ روز دارد})$

پس ( $q \Rightarrow p$ ) به إنتفای مقدم، درست است.

ت)  $x$  عددی زوج است.  $\Rightarrow (x \text{ بر ۲ بخش‌پذیر است})$

پس ( $q \Rightarrow p$ ) درست است. دقت کنید که در این گزاره شرطی، مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا  $p$  را چشم بسته درست فرض کردندیم؛ ولی تالی را پس از بررسی، گفتیم که درست است. (می‌دونید که هر عدد زوجی بر ۲ بخش‌پذیره؛ پس تالی درسته)

پس ( $q \Rightarrow p$ ) نادرست است.

## مثال و پاسخ

**مثال:** اگر  $p$  گزاره‌ای نادرست،  $q$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (مشابه تمرین کتاب صفحه ۱۱)

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow r \quad \text{اف}$$

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \quad \text{پاسخ}$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge r \quad \text{اف}$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \quad \text{پاسخ}$$

چون  $p$  همیشه نادرست است، می‌توانیم به جایش از  $F$  استفاده کنیم.  $q$  هم همواره درست است؛ پس به جای آن از  $T$  استفاده می‌کنیم:

: پاسخ

$$\text{اف} \quad (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv (F \Rightarrow T) \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$

$$\text{پاسخ} \quad (\sim p \vee q) \Rightarrow r \equiv (T \vee T) \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow r \equiv r$$

**تذکر:** در گزاره  $r \Rightarrow (T \Rightarrow T)$  اگر  $r$  درست باشد، به گزاره  $T \Rightarrow T$  (می‌رسیم که درست است؛ ولی اگر  $r$  نادرست باشد به گزاره  $r \Rightarrow F$  (می‌رسیم که نادرست است؛ پس همه چیز، بستگی به ارزش  $r$  دارد؛ به همین دلیل گفتیم ارزش  $r$  با ارزش  $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv F \Rightarrow (T \wedge r) \equiv F \Rightarrow r \equiv T$  برابر است.

گزاره  $(F \Rightarrow r)$  به انتفای مقدم، همیشه درست است؛ یعنی  $r$  چه درست باشد چه نادرست، ارزش کل گزاره  $(F \Rightarrow r)$  درست است.

$$\text{پاسخ} \quad (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv (F \Rightarrow r) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T \quad \text{به انتفای مقدم}$$

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

**نکته مهم:** اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره دلخواه باشند، آن‌گاه رابطه همارزی  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

همواره برقرار است. برای اثبات این فرمول از جدول ارزش گذاری استفاده می‌کنیم:

(در مدرسه نیاز به فقط فرمول نیست، فقط اثبات به کمک جدول از شما فوایده می‌شود).



**عكس یک گزاره شرطی** در گزاره  $(q \Rightarrow p)$  اگر جای مقدم و تالی را با هم عوض کنیم، به گزاره  $(p \Rightarrow q)$  می‌رسیم که به آن، عکس گزاره  $(p \Rightarrow q)$  می‌گوییم.

**عكس نقیض گزاره شرطی** به گزاره  $(\sim q \Rightarrow \sim p)$  عکس نقیض گزاره  $q \Rightarrow p$  می‌گوییم.

## مثال و پاسخ

**مثال:** به کمک جدول ارزش گذاری، ثابت کنید هر گزاره‌ای به شکل  $(p \Rightarrow q)$  با عکس نقیض خود یعنی  $\sim q \Rightarrow \sim p$  همارز است.

**پاسخ:** می‌خواهیم درستی همارزی  $\sim q \Rightarrow \sim p \Rightarrow q \equiv \sim q$  را اثبات کنیم:

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

**ترکیب دو شرطی گزاره‌های  $p$  و  $q$**  در ترکیب شرطی  $(p \Rightarrow q)$  دیدید که از گزاره  $p$  گزاره  $q$  را نتیجه گرفتیم. حال می‌خواهیم هم از  $p$ ، گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم و هم از  $q$  گزاره  $p$  را. به چنین گزاره مرکبی ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  می‌گوییم و آن را با نماد  $(p \leftrightarrow q)$  نمایش می‌دهیم. به عبارت ساده‌تر، گزاره  $(p \leftrightarrow q)$  همان گزاره  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  می‌باشد. یعنی ترکیب عطفی دو گزاره شرطی است.

ضمناً گزاره  $(q \Leftrightarrow p)$  را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را و  $q$  نتیجه می‌دهد  $p$  را.
- اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و بر عکس.
- اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و آن‌گاه  $p$ .
- شرط لازم و کافی است برای  $q$ .

مثالاً گزاره «اگر متلبی متساوی الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه‌اش با هم مساوی‌اند و بر عکس.» را می‌توان به شکل‌های زیر هم بیان کرد:

• مثلث، متساوی الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه‌اش با هم مساوی باشند.

• متساوی الساقین بودن یک مثلث نتیجه می‌دهد متساوی بودن دو زاویه را و متساوی بودن دو زاویه یک مثلث، نتیجه می‌دهد متساوی الساقین بودن آن مثلث را.

• متساوی الساقین بودن یک مثلث، شرط لازم و کافی است برای متساوی بودن دو زاویه آن.

• (دو زاویه‌اش با هم برابرند.)  $\Leftrightarrow$  (مثلث، متساوی الساقین است).

جدول ارزش‌گذاری گزاره  $q \Leftrightarrow p$  به صورت مقابل است:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

نتیجه جدول: گزاره  $(q \Leftrightarrow p)$  فقط وقتی درست (T) است که دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارزش باشند؛ یعنی هر دو نادرست باشند.

## مثال و پاسخ

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف) اگر  $\sqrt{3}$  گنگ است؛ آن‌گاه ۳ عددی طبیعی است و بر عکس.

ب) رابطه  $\{(1,a),(2,3),(1,b)\} = f$  تابع است اگر و تنها اگر  $a = b$ .

پ) اگر دو عدد مساوی باشند؛ آن‌گاه مربع‌هایشان نیز مساوی‌اند و بر عکس.

ت)  $(15 < 7) \Leftrightarrow (27 = 3^3)$ .

ث) طبیعی بودن عدد  $(-3)$  شرط لازم و کافی است برای گنگ بودن عدد  $\frac{3}{8}$ .

ج) منفی بودن دلتا نتیجه می‌دهد ریشه‌نشاشتن معادله درجه دوم را و ریشه‌نشاشتن معادله درجه دوم، نتیجه می‌دهد منفی بودن دلتا را.

پاسخ: الف)

دو گزاره، هم‌ارزش‌اند؛ پس کل گزاره بالا، درست (T) است.

ب) دقت کنید که در این سؤال،  $p$  و  $q$  به هم وابسته هستند؛ ضمناً چون گزاره موردنظر، دو شرطی است، یک بار  $(q \Rightarrow p)$  و بار  $(p \Rightarrow q)$  را در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت هم، مقدم را درست فرض می‌کنیم و فقط ارزش تالی را مشخص می‌کنیم. اگر در هر دو حالت، تالی‌ها نیز درست بودند،  $q \Leftrightarrow p$  درست خواهد بود. می‌دانید اگر  $f$  تابع باشد، چون زوج‌های  $(1,a)$  و  $(1,b)$  عضو اولشان مساوی است، عضوهای دومشان هم باید مساوی باشند؛ یعنی  $a = b$ . مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.

تالی درست است.

تابع است: حالت ۱  $\{ (1,a), (2,3), (1,b) \} \Rightarrow a = b$   
تابع است: حالت ۲  $a = b \Rightarrow \{ (1,a), (2,3), (1,b) \}$   
مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.

پس الان فهمیدیم که  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  هم درست است؛ لذا  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  هم درست است. به طور ساده‌تر، چون در دو حالت بالا تالی‌ها درست بودند، نتیجه گرفتیم که  $q \Leftrightarrow p$  نیز درست است.

شگردد؛ من نفهمیدم په و وقت باید دو حالت بالا رو در نظر گیریم استاد؟ پهرا در قسمت (الف) این کار رو تکردن؟

دیگر، در قسمت (الف) دو گزاره  $\sqrt{3}$  کنگ است. و  $\sqrt{3}$  عددی طبیعی است. ارتباطی با هم نداشتند؛ به همین دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی  $p \Leftrightarrow q$  نیازی به ایجاد ۲ حالت بدراز هم نبود؛ ولی در قسمت (ب)،  $p$  و  $q$  با هم ارتباط داشتند. به همین دلیل، دو حالت  $p$  و  $q$   $\Rightarrow p \Leftrightarrow q$  با فرض درستی مقدمهای پدیدگانه بررسی کردیم. در هر دو حالت، کافی بود که تابی‌ها درست باشند.

باز هم  $p$  و  $q$  به هم وابسته‌اند؛ پس مانند قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} \text{مقدم را درست فرض می‌کنیم} \\ \text{تالی، درست است} \\ \text{مربع‌هایشان مساوی‌اند} \Rightarrow \text{دو عدد مساوی باشند: حالت ۱} \\ \text{آن دو عدد مساوی‌اند} \Rightarrow \text{مربع‌های دو عدد مساوی باشند: حالت ۲} \\ \text{مقدم را درست فرض می‌کنیم} \\ \text{تالی، نادرست است} \end{array}$$

در حالت (۲) تالی نادرست شد؛ پس کل گزاره  $q \Leftrightarrow p$  نادرست است.

دققت دارید که ممکن است مربع‌های دو عدد مساوی باشند، ولی خود آن دو عدد، مساوی نباشند؛ مثلاً  $(-3)$  و  $(+3)$  مربع‌هایشان برابرند (۹)؛ ولی خودشان برابر نیستند.

$$\begin{array}{c} (3^3 = 27) \Leftrightarrow (15 < 7) \\ T \quad F \end{array}$$

دو گزاره ارتباطی با هم ندارند؛ پس نیازی نیست دو حالت جدیدگانه برای بررسی درستی یا نادرستی  $q \Leftrightarrow p$  در نظر بگیریم. خیلی سریع می‌گوییم  $q \Leftrightarrow p$  نادرست است؛ چون  $p$  و  $q$  همارزش نیستند.

$$\begin{array}{c} \text{مقدم را درست فرض می‌کنیم} \\ \text{تالی، درست است} \\ \text{معادله درجه دوم، ریشه ندارد.} \Rightarrow \text{دو عددی گنگ است.} \\ F \quad F \end{array}$$

باز هم دو گزاره، ارتباطی با هم ندارند؛ پس می‌گوییم چون دو گزاره  $p$  و  $q$  همارزش‌اند، لذا  $q \Leftrightarrow p$  درست است. (معادله درجه دوم ریشه ندارد)  $\Leftrightarrow$  (دلتا منفی باشد)

$$\left. \begin{array}{c} \text{مقدم را خودمان } T \text{ فرض می‌کنیم} \\ \text{معادله درجه دوم، ریشه ندارد.} \Rightarrow \text{(دلتا منفی باشد).} \\ \text{معادله درجه دوم، ریشه ندارد.} \Rightarrow \text{(دلتا منفی است.)} \\ \text{مقدم را خودمان } T \text{ فرض می‌کنیم.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تالی‌ها درست‌اند پس کل گزاره هم درست است.} \\ \rightarrow \end{array}$$

**پاداگوژی**: از سال قبل می‌دانید اگر در معادله درجه دوم، دلتا یعنی  $\Delta = b^2 - 4ac$  منفی باشد، معادله جواب ندارد. همچنین اگر معادله درجه دومی، جواب نداشته باشد، حتماً دلتای آن منفی بوده است.

## سؤال‌های امتحانی

۹- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	اگر $(1+5)$ زوج است؛ آن‌گاه $100$ مربع کامل است.		
۲	اگر .....؛ آن‌گاه $96$ اول است.	<input checked="" type="checkbox"/>	
۳	اگر $50$ مضرب $10$ است؛ آن‌گاه ..... .	<input checked="" type="checkbox"/>	
۴	اگر $x$ عددی اول باشد؛ آن‌گاه $x$ هم عددی اول است.		<input checked="" type="checkbox"/>
۵	اگر $\sqrt{16}$ مربع کامل است؛ آن‌گاه $3^3 > 3^2$ .	<input checked="" type="checkbox"/>	
۶	اگر $25$ مربع کامل ..... آن‌گاه $\sqrt{3}$ عددی گنگ ..... .		<input checked="" type="checkbox"/>
۷	اگر عدد صحیح زوج یا فرد باشد؛ آن‌گاه عدد $1$ اول است.		<input checked="" type="checkbox"/>
۸	اگر عددی فرد باشد؛ آن‌گاه $2$ نیز فرد است.		<input checked="" type="checkbox"/>

## ماجراهای من و درسام - ریاضی و آمار ۲

		زوج بودن عدد $10$ نتیجه می‌دهد زوج بودن مربع هر عدد فرد را.	۹
		$(\sqrt{2-\sqrt{5}})^2 = 2-\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-2} = 3$ (مفهوم علاقه‌مندان)	۱۰
		$\frac{4}{3}\pi R^3 = \text{حجم کره} \Rightarrow (3^{-1}) < 3^{-1}$ (مفهوم علاقه‌مندان)	۱۱
		اگر مُدداده‌های $4, 3, 2, 1$ باشد آن‌گاه حاصل $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + x)(x^2 - 4)}$ برابر با $\frac{1}{x+2}$ است. (مفهوم علاقه‌مندان)	۱۲
		اگر عدد $5$ اول و عدد $10$ طبیعی باشد؛ آن‌گاه عدد $1$ گنگ است.	۱۳
		$[(-20 \geq -12) \wedge ((-5)^3 = -125)] \Rightarrow \text{جمعه‌ها بانک‌ها تعطیل هستند.}$	۱۴
		دمای هوای شهرها متغیر کمی نسبتی است. $\Rightarrow [(\text{میانه، نقطه وسط داده‌های مرتب شده است}) \vee (2^{-5} = -32)]$	۱۵
		$y = 3 \text{ خط افقی است} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{در نقاط سریه سر، سود} \\ \text{کارخانه صفر است} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{مقدار پارامتر همیشه با} \\ \text{مقدار آماره برابر است} \end{array} \right]$ (مفهوم علاقه‌مندان)	۱۶
		$\sim (2^3 = 18) \Rightarrow \sim (4 \notin \mathbb{N})$	۱۷
		$\sim [(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (IQR = Q_3 - Q_1)] \Rightarrow \text{فرد است}$ (مفهوم علاقه‌مندان)	۱۸
		در یک سری از داده‌ها، اگر داده دورافتاده داشته باشیم؛ آن‌گاه شاخص مرکزی میانه بهتر از میانگین است.	۱۹
		اگر در معادله $x^7 + 3kx - 2k = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $4$ باشد، آن‌گاه مقدار $k$ برابر $2$ است. (مفهوم علاقه‌مندان)	۲۰

- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	اگر عبارت $\frac{2x}{x-1}$ گویا باشد؛ آن‌گاه $\sqrt{3}$ گنگ است و برعکس.		
۲	اگر $x$ عددی فرد باشد، $(x+1)$ عددی زوج است و برعکس.		
۳	اول بودن عدد $37$ شرط لازم و کافی است برای مرکب بودن عدد $17$ .		
۴	گویابودن عدد $6$ شرط لازم و کافی است برای ..... .	✓	
۵	اگر ..... آن‌گاه تقریباً $25$ درصد داده‌های آماری، کوچک‌تر از چارک اول هستند و برعکس.	✓	
۶	اگر $121$ مضرب $3$ ..... آن‌گاه فردوسی، ریاضی دان ..... و برعکس.	✓	
۷	اگر واریانس داده‌ها صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.		
۸	اگر دو عدد فرد باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها زوج است و برعکس.		
۹	$f = \{(5, x-y), (1, 2), (5, 4), (1, x+y)\} \Leftrightarrow [(x=3) \wedge (y=-1)]$ تابع است.		
۱۰	(در منحنی نرمال $96\%$ داده‌ها در بازه $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ قرار دارند.) $\Leftrightarrow$ (مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ برابر $1$ است). (مفهوم علاقه‌مندان)		
۱۱	(نمودار خط $-2x - y = 1$ از ناحیه سوم نمی‌گذرد) $\Leftrightarrow$ (در نمودار جعبه‌ای، میانه همیشه وسط جعبه قرار دارد) (مفهوم علاقه‌مندان)		
۱۲	(حاصل $\frac{\frac{2+2}{2} + \frac{4-4}{2}}{\frac{2-2}{2}}$ برابر $2$ است) $\Leftrightarrow$ (در تجزیه شده $(x^5 - 81x)$ عامل $(x-3)$ وجود ندارد) (مفهوم علاقه‌مندان)		
۱۳	$(a \times b = 0) \Leftrightarrow [(a = 0) \wedge (b = 0)]$		
۲۱			

۱۱- با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از همارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف	$(p \Rightarrow p) \equiv T$	ب)	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$	پ)	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \neg p) \equiv F$
ت	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q \equiv F$	ث)	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$	ج)	$p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow q$
ج)	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)] \Leftrightarrow \neg p \equiv T$				

۱۲- اگر  $q, p, r$  سه گزاره دلخواه باشند، جدول ارزش‌گذاری گزاره‌های زیر رارسم کنید:

الف	$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$	ب)	$[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow r)]$
-----	---------------------------------------	----	---

۱۳- اگر  $p$  گزاره‌ای درست،  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را بدون رسم جدول، تعیین کنید. (جواب همارزی‌ها را بنویسید).

الف	$(q \Leftrightarrow p) \vee r \equiv ?$	ب)	$(\neg p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv ?$	پ)	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv ?$
ت	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv ?$	ث)	$(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \equiv ?$	ج)	$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv ?$
ج)	$(q \vee \neg r) \Rightarrow p \equiv ?$	ح)	$\neg(\neg q \vee \neg r) \Rightarrow r \equiv ?$	(خ)	$(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \equiv ?$
د)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv ?$	ذ)	$\neg(\neg q \wedge \neg r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv ?$	(ر)	$(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg r \equiv ?$

۱۴- اگر گزاره  $(p \wedge q) \Rightarrow p$  نادرست باشد ارزش  $q \wedge p$  را به دست آورید.

۱۵- اگر گزاره  $(q \vee r) \Rightarrow (p \wedge s) \Rightarrow r$  نادرست باشد ارزش گزاره  $(p \wedge s)$  را تعیین کنید. ( $p, q, r, s$  چهار گزاره دلخواه هستند).

۱۶- بدون استفاده از جدول ارزش‌گذاری، ثابت کنید که: (مفهوم علاقمندان)

۱۷- اگر  $q \Rightarrow p \Rightarrow s \Rightarrow \neg r$  نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید: ( $r$  و  $s$  دو گزاره دلخواه هستند).

۱۸- اگر  $p \wedge q \equiv T$  باشد، ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)$  را تعیین کنید.

## استدلال ریاضی

در سه درسنامه قبلی با انواع گزاره‌ها و ارزش‌گذاری آن‌ها آشنا شدیم. در این درسنامه می‌خواهیم چند روش مهم برای استدلال کردن را آموزش دهیم. البته این روش‌ها را در درس منطق خود نیز مشاهده کردید؛ پس بحث جدیدی نیست. قبل از این‌که وارد بحث استدلال‌ها شویم، باید نحوه تبدیل گزاره‌های فارسی به نمادهای ریاضی را یاد بگیرید. سال گذشته در مبحث معادلات درجه‌اول، درجه‌دوم و معادلات گویا، متغیر را  $x$  می‌گرفتیم و با توجه به توضیحات مسئله، یک معادله می‌ساختیم.

در معادلاتی که پارسال خواندید، معمولاً فقط یک متغیر مثل  $x$  وجود داشت؛ ولی در گزاره‌های ریاضی، ممکن است دو یا چند متغیر هم وجود داشته باشد.

## مثال و پاسخ

مثال: گزاره‌های فارسی زیر را به نمادهای ریاضی تبدیل کنید:

الف) ثلث عددی برابر است با ۴ برابر مربع آن عدد.

ب) ۳ درصد قیمت فروش خودرو، برابر سود آن است.

پ) قدر مطلق تفاضل دو عدد حقیقی، بزرگ‌تر از حاصل ضرب آن دو عدد است.

ت) مجموع دو عدد گویا، کوچک‌تر از مجموع مربعات آن‌ها است.

پاسخ: الف) عدد موردنظر را  $x$  فرض کرده؛ لذا ثلث آن می‌شود  $\frac{x}{3}$  و مربع آن می‌شود  $\frac{x^2}{9}$ ؛ پس چنین می‌نویسیم:

ب) اگر قیمت فروش و قیمت خرید خودرو را به ترتیب  $x$  و  $y$  فرض کنیم، می‌دانیم سود برابر است با  $(y - x)$ ؛ از طرفی گفته شده، سود برابر با  $\frac{3}{100}x$  قیمت فروش است؛ یعنی برابر با  $\frac{3}{100}x$ ؛ پس می‌توان این‌طور نوشت:

پ) این دو عدد حقیقی را  $x$  و  $y$  می‌نامیم ( $\mathbb{R}$  مجموعه اعداد حقیقی است).

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - y| > x \cdot y \text{ یا } |y - x| > x \cdot y$$

دقیق کنید که در ریاضی، عبارت‌های  $|y - x|$  و  $|x - y|$  فرقی با هم ندارند.

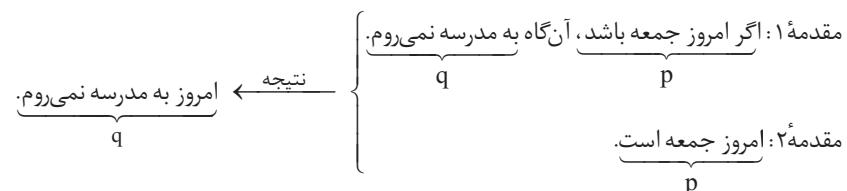
ت) اگر این دو عدد گویا را  $x$  و  $y$  بنامیم خواهیم داشت: ( $\mathbb{Q}$  مجموعه اعداد گویا است).

## استدلال استثنایی (قیاس استثنایی)

این استدلال را به شکل‌های زیر می‌توان بیان کرد ( ∵ نماد نتیجه‌گیری است):

$\frac{\begin{array}{l} 1: \text{ مقدمه } p \Rightarrow q \\ 2: \text{ مقدمه } p \end{array}}{\therefore q}$	$\frac{[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q}{\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 1: \text{ مقدمه } \\ 2: \text{ نتیجه } \end{array}}$	$\frac{\begin{array}{l} 1: \text{ اگر الف آنگاه ب} \\ 2: \text{ الف} \end{array}}{\therefore b}$
--	---	--

به مثال زیر دقت کنید:



**نکته** نتیجه استدلال استثنایی در صورتی قرص و محکم است که مقدمه ۱ از نظر علمی و منطقی درست باشد. در غیر این صورت، به نتیجه آن اعتمادی نیست. البته صرفنظر از نتیجه، این روش استدلال کردن، همیشه درست است. به مثال زیر توجه کنید:

مقدمه ۱ اگر روزی ۰ صفحه‌درس بخوانید، آنگاه در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شوید. نتیجه ← علی در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شود.  
 مقدمه ۲ علی روزی ۱۰ صفحه درس می‌خواند.

گفتم این نوع استدلال، از لحاظ ساختاری درست است؛ ولی نمی‌توانیم بگوییم نتیجه به دست آمده حتماً درست است؛ چون مقدمه ۱ ممکن است درست نباشد؛ یعنی نمی‌توان به طور قطعی گفت هر کس روزی ۰ صفحه درس بخواند، در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شود. شاید یک نفر با روزی ۵ صفحه و فردی دیگر با روزی ۱۰۰ صفحه مطالعه، بتواند در این رشته قبول شود.

## مثال پاسخ

مثال از مقدمه ۱ و ۲ که در زیر آمده، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتیجه حتماً درست است؟

مقدمه ۱: اگر قیمت کاغذ بالا بود، آنگاه قیمت کتاب زیاد می‌شود.

مقدمه ۲: کاغذ گران شد.

پاسخ نتیجه این است که قیمت کتاب هم گران می‌شود. بله این نتیجه درست است؛ چون مقدمه ۱ از نظر منطقی درست است.

مغالطه: گاهی اوقات از استدلال استثنایی به شکلی نادرست استفاده می‌شود که به آن مغالطه یا سُقْسِطَه یا مُغَالَطَه می‌گوییم. در مغالطه، نحوه نتیجه‌گیری به این صورت است:

۱: مقدمه:  $p \Rightarrow q$

۲: مقدمه:  $q$

∴  $p$

به عنوان مثال:

مقدمه ۱: اگر کسی از من متنفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می‌زنند.

مقدمه ۲: رضا پشت سر من حرف می‌زنند.

نتیجه به دست آمده، ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی این نوع استدلال در علم منطق، نادرست است.

البته نتیجه مغالطه گاهی اوقات درست است؛ به مثال زیر توجه کنید:

مقدمه ۱: اگر کسی در امتحان به تمام سوالات، جواب درست بدهد، آنگاه نمره‌اش ۲۰ می‌شود.

مقدمه ۲: نمره‌اش ۲۰ شده است.

نتیجه‌گیری طبق مغالطه: علی به تمام سوالات درس ریاضی، درست جواب داده است.

مالحظه می‌کنید که نتیجه حاصل در این مثال، قطعاً درست است؛ ولی باز هم تأکید می‌کنم که طبق قرارداد کتاب درسی تان، این نوع استدلال کردن، نادرست است. (در این زمینه، میان دانشمندان علم منطق هم اختلاف نظر وجود دارد.)

مشال و پاسخ

**مثال:** طبق مغالطه، از مقدمه ۱ و ۲ زیر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتیجه درست است؟ آیا این روش نتیجه‌گیری (استدلال) درست است؟

**مقدمه ۱:** اگر کسی در رشته ریاضی درس بخواند، آن گاه ذهنش خوب کار می‌کند.  
**مقدمه ۲:** زهرا ذهنش خوب کار می‌کند.

**پاسخ:** از مغالطه نتیجه می‌گیریم که زهرا در رشته ریاضی درس می‌خواند. این نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی این روش استدلال کردن، طبق مفاهیم کتاب درسی تان، نادرست است.

**استفاده از عکس تقطیعی برای اثبات آن گزاره**

حتماً یادتان هست که در موقعي که در گزاره  $q$   $\Rightarrow p$  مقدم و تالي به هم وابسته بودند، مقدم را خودمان درست (T) فرض می کردیم و درستی یا نادرستی تالي را بررسی می کردیم. گاهی اوقات اثبات به این روش کمی دشوار است. ما همواره می توانیم به جای اثبات  $q \Rightarrow p$  ، گزاره  $\sim p \Rightarrow \sim q$  را اثبات کنیم؛ زیرا ارزش گزاره های  $q \Rightarrow p$  و  $\sim p \Rightarrow \sim q$  یکسان است؛ یعنی این گزاره ها هم ارز هستند.

لایه اثبات  $a \Rightarrow p$  و  $p \Rightarrow q$  دشمن است، پس  $\neg p \Rightarrow \neg q$  باشد. اثبات هم کنند، باز  $\neg p \Rightarrow \neg q$  است، اگر  $n$  زوج باشد، آن‌گاه  $n$  هم زوج است.

۲ هم زوج نیست (فرد است).  $\Rightarrow$  اگر زوج نباشد (فرد باشد)

باز هم مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم؛ یعنی الان می‌دانیم  $f(k) \in \mathbb{Z}$ ؛ لذا:

پس ثابت کردیم که  $n^2$  هم عددی فرد است. (در این گونه سؤالات همیشه از عدد  $2$  فاکتور از  $m$  می‌نامیم. اگر به  $2$  رسیدیم، می‌گوییم عدد زوج است. اگر به  $+1$  رسیدیم، می‌گوییم عدد فرد است.)

یافتن محل خطادر محاسبات

خیلی وقت‌ها بدون توجه به اصول اولیه علم ریاضی، مسئله‌ای را حل می‌کنیم و به نتیجهٔ غلط می‌رسیم. الان می‌خواهیم چند نمونه از این اشتباهات متداول را بررسی کنیم. مهم این است که خودتان بتوانید مکان وقوع خط را پیدا کرده و بتوانید علت را توضیح دهید؛ مثلاً دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادله  $= -2$  فقط یک ریشه دارد و آن  $= 1$  است. استدلال او (محاسبات او) به شکل زیر بوده است. می‌خواهیم مکان وقوع خط را به وی نشان دهیم تا دیگر مرتكب آن نشود:

این مسأله را میتوان با استفاده از روش تجزیه و ترکیب حل کرد. ابتدا عبارت  $x^2 - x = 0$  را تقسیم بر  $x$  کنید (فاکتورگیری):

$$x(x-1) = 0$$

حالات ممکن:

- $x = 0$
- $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

لذا، دو جواب ممکن هستند:  $x = 0$  یا  $x = 1$ .

مشال و پاسخ

**مثال:** دانش آموزی گزاره « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » را که در آن ، و اعداد حقیقی اند به صورت زیر اثبات کرده است. ایراد این ستدلال کجا است؟

**پاسخ:** اشتباه این دانش آموز در مرحله ۲ است؛ چون می دانیم که اگر عددی مثل  $c$  مثبت باشد، با ضرب دو طرف نامعادله در جهت عوض نمی شود؛ ولی اگر منفی باشد با ضرب دو طرف نامعادله در جهت عوض می شود، ولی در فرض سؤال، گفته شده عددی حقیقی است؛ یعنی هم می تواند مثبت باشد، هم منفی و هم صفر؛ لذا چون تکلیف علامت معلوم نیست، نمی توانیم دو طرف نامعادله را در ضرب کنیم. (حقیقت اگر  $c$  صفر هم باشد، باز هم نمی توانیم دو طرف رو در  $c$  ضرب کنیم؛ پون به نامساوی  $a + c < b + c$  اشتباهه). اگر در صورت سؤال گفته می شد  $a < b$  است، اشتباه او اصلاح می شد.

## پاسخ سوال‌های امتحانی

۱- الف) جمله داده شده، امری است و خبری نمی‌باشد؛ پس گزاره نیست.

ب) جمله داده شده گزاره نیست؛ چون هر کسی در مورد بسیار بزرگ بودن  ${}^4\text{M}\text{ath}$  می‌تواند برداشت خاصی داشته باشد؛ یعنی ممکن است یک نفر بگوید  ${}^4\text{Math}$  خیلی بزرگ است و نفر دیگر بگوید  ${}^4\text{Math}$  اصلاً بزرگ نیست؛ پس ارزش‌گذاری این جمله، امکان‌پذیر نبوده و لذا گزاره نیست.

پ) گزاره است و درست می‌باشد؛ زیرا:  ${}^4\text{Math} = \frac{1+3+4+8+17}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$  میانه

ت) گزاره نادرست است. از نمودار خبای معمولاً برای نمایش همزمان ۳ متغیر استفاده می‌شود.

ث) گزاره است ولی ارزش آن نامعلوم است؛ یعنی درستی یا نادرستی آن، بستگی به مقدار دارد. (الان فقط می‌دونیم  ${}^4\text{Math}$  طبیعیه ولی نمی‌دونیم زوشه یا فرد).

ج) گزاره نادرست است؛ چون مثلاً  ${}^4\text{Math} = 1$  باشد؛ آن‌گاه  ${}^4\text{Math} = (-3)^{n+1} = 9$ .

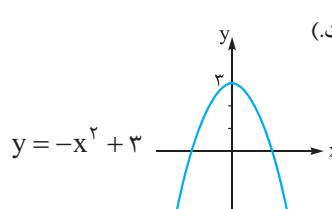
چ) گزاره درست است؛ چون بزرگ‌ترین عدد اول دورقمنی، ۹۷ است.

ح) گزاره درست است؛ چون به خاطر وجود  $\left| \frac{1}{3+5} \right|$  عبارت  $\frac{1}{3+5}$  گویا نیست.

خ) گزاره درست است؛ چون عضوهای اول زوج مرتب‌ها، همگی مختلف‌اند.

د) گزاره نادرست است؛ چون بُرد تابع  $y = -x^3 + 3$  برابر  $\{3\}$  است. (دامنه تابع  ${}^3$  برابر کل اعداد حقیقی است).

ذ) گزاره نادرست است؛ زیرا این سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.



ر) گزاره درست است. چون اولاً تعداد های کشورها قابل مقایسه‌اند؛ ثانياً اختلاف هر دوی آن‌ها با معنی است و ثالثاً نسبت هر دو مقدار آن‌ها نیز با معنی است.

ز) گزاره نادرست است؛ چون انحراف معیار جذر واریانس است.

گزاره p	ارزش p	گزاره p	ارزش p
${}^4\text{Math} = {}^4\text{Math} + {}^4\text{Math}$	F	${}^4\text{Math} + {}^4\text{Math} \neq {}^4\text{Math}$	T
توضیح: اگر به جای $+$ علامت $\times$ داشتیم، رابطه بالا درست می‌شد؛ یعنی: ${}^4\text{Math} \times {}^4\text{Math} = {}^4\text{Math}^7$		مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت نیست.	F
مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.	T	$-8 < -1$	T
$-8 < -1$	F	تابع است. نمودار	T
		توضیح: هر خط عمودی دلخواه (هر خط موازی محور عرض‌ها) نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس نمودار، تابع است.	
مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر ${}^4\text{Math}$ است.	T	مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر ${}^4\text{Math}$ نیست.	F
توضیح: مجموع اعداد سطر $n$ ممکن است ${}^{n-1}$ باشد؛ پس مجموع اعداد سطر پنجم برابر ${}^5-1 = 24$ است.			

<p>طول رأس سهمی <math>y = x^2 - 8x + 5</math> برابر با ۳ است.</p> <p><b>توضیح:</b> طول رأس سهمی <math>y = ax^2 + bx + c</math> برابر <math>\frac{-b}{2a}</math> است؛ لذا در گزارة داده شده خواهیم داشت:</p> $x = \frac{-( -8 )}{2(1)} = 4$	F	<p>طول رأس سهمی <math>y = x^2 - 8x + 5</math> برابر با ۳ نیست.</p>	T
<p>در تجزیه <math>-21 - 8x^2 - 4</math> عامل <math>(2x + 3)</math> وجود دارد.</p>	T	<p>در تجزیه <math>-21 - 8x^2 - 4</math> عامل <math>(2x + 3)</math> وجود ندارد.</p> <p><b>توضیح:</b> <math>(2x)^2 - 4(2x) - 21 = (2x - 7)(2x + 3)</math> اتحاد جمله مشترک</p>	F
<p>در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰۰، ۲۸۰۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها شاخص میانه بهتر از میانگین است.</p> <p><b>توضیح:</b> چون داده ۵ دورافتاده است (از بقیه داده‌ها خیلی کوچک‌تر است)، شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین است.</p>	T	<p>در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰۰، ۲۸۰۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها، میانه بهتر از میانگین نیست.</p>	F
<p>مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.</p>	T	<p>مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج نیست. (عددی فرد است).</p>	F
<p>قرینهٔ هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است.</p> <p><b>توضیح:</b> مثلاً قرینهٔ <math>-5</math> می‌شود که کوچک‌تر از <math>-5</math> نیست؛ پس گزارة داده شده نادرست است.</p>	F	<p>قرینهٔ هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد نیست.</p>	T
<p>معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از خود آن عدد، کوچک‌تر است.</p> <p><b>توضیح:</b> مثلاً معکوس <math>2</math> می‌شود <math>\frac{1}{2}</math> که از خود <math>\frac{1}{2}</math> کوچک‌تر است؛ یا معکوس <math>10</math> می‌شود <math>\frac{1}{10}</math> که از خود <math>\frac{1}{10}</math> کوچک‌تر است. برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از <math>1</math> این خاصیت وجود دارد؛ پس گزارة بالا درست است.</p>	T	<p>معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از خود آن عدد، کوچک‌تر نیست.</p>	F
<p>مجموع دو عدد <math>1 - \sqrt{3}</math> و <math>1 + \sqrt{3}</math> عددی گنگ است.</p> <p><b>توضیح:</b> جمع این دو عدد گویا است؛ زیرا:</p> $1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2$	F	<p>مجموع دو عدد <math>1 - \sqrt{3}</math> و <math>1 + \sqrt{3}</math> عددی گنگ نیست.</p>	T

۳- ردیف ۱:  $75$  عددی اول است و  $(-3)$  عددی منفی نیست.  $\leftarrow$  در کل نادرست است.

ردیف ۲: چون «گزاره رنگ چشم افراد، کیفی اسمی است.» گزاره‌ای درست است؛ پس باید در جای خالی، گزاره‌ای درست قرار دهیم تا ارزش کل گزاره عطفی درست شود. در جای خالی، هر گزاره درست دلخواهی می‌توان قرار داد؛ مانند:

ردیف ۳: گزاره «مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد  $12$  عبارت‌اند از:  $1, 2, 3, 4, 6, 12$ » درست است؛ پس برای آن که کل گزاره عطفی نادرست باشد باید در جای خالی، یک گزاره نادرست دلخواه قرار دهیم؛ مثلاً:

ردیف ۴:  $121$ :  $4$  مضرب  $11$  است و  $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$   $\leftarrow$  کل گزاره درست است.

ردیف ۵: باید دو گزاره دلخواه درست مثال بزنیم تا کل گزاره، درست شود.  $4$  عددی طبیعی است و  $\sqrt{3}$  عددی گنگ است.

ردیف ۶: همه سوره‌های قرآن با بسم الله شروع می‌شوند و سوره بقره طولانی‌ترین سوره قرآن است.  $\leftarrow$  پس در کل، گزاره نادرست است.

(سوره توبه با بسم الله شروع نمی‌شود.)

ردیف ۷: مجموعه  $\emptyset$  تهی است و  $\subseteq \{1, 2, 3\}$  پس کل گزاره نادرست است.  
 مجموعه  $\emptyset$  یک F (صفر، عدد طبیعی نیست).  
 عضو دارد و تهی نیست.)

ردیف ۸:  $\sqrt{9+100} = \sqrt{109} = \sqrt{3+(-3)^2} = \sqrt{3+1} = \frac{1}{\sqrt{8}}$  در کل نادرست است.  
 F (بین ۹ و ۱۰۰ جمع است و نمی‌توانیم آن‌ها را تک‌تک از رادیکال خارج کنیم، اگر ضرب یا تقسیم بود می‌شد).

ردیف ۹: هر دو اتحاد داده شده درست هستند؛ پس کل گزاره درست است.

ردیف ۱۰: گزاره «شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است.» نادرست است.

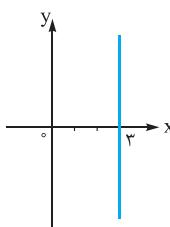
(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است) (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مخرب است)  
 T F (شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.)

پس در کل، این گزاره نادرست است.

ردیف ۱۱:  $(-5)^{\frac{2}{3}} \neq \sqrt{(-5)^2}$  پس این گزاره، در کل نادرست است. دقت کنید که هر عدد به توان صفر برسد جواب ۱ است.

ضمناً:

$$-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$$



مالحظه می‌کنید که این خط از نواحی اول و چهارم می‌گذرد؛ پس گزاره داده شده، درست است.

ردیف ۱: کسر  $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$  گویا است یا عددی مرکب است.  $\leftarrow$  کل گزاره، درست است.  
 F (با  $x+1=0$  بخشیده است.)

ردیف ۲: قرآن ۱۸ سوره دارد یا آخرین پیامبر الهی، حضرت محمد (ص) بود.  $\leftarrow$  کل گزاره، درست است.  
 T F (قرآن ۱۴ سوره دارد)

طبق فرض سؤال، کل گزاره باید درست باشد به همین علت، یک گزاره ساده درست، در جای خالی قرار دادیم؛ چون می‌دانیم  $T \vee F \equiv T$

ردیف ۳: ارسسطو نویسنده کتاب ارجونون نیست یا ۲ عددی فرد است.  $\leftarrow$  کل گزاره نادرست است.  
 F

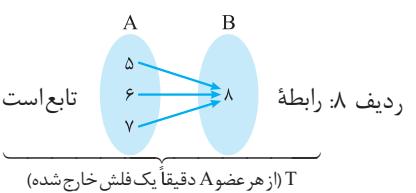
ردیف ۴: ۳ عددی اول است یا معادله  $x^2 + x + 3 = 0$  ریشه دارد.  $\leftarrow$  کل گزاره درست است.  
 F (دلتای معادله منفی است پس ریشه ندارد.)

در جای خالی، گزاره درست قرار دادیم؛ زیرا می‌دانیم که:  $T \vee F \equiv T$

ردیف ۵: افلاطون شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد.  $\leftarrow$  کل گزاره درست است.

ردیف ۶: اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱ ۲) هستند یا سه‌می  $y=x^3+1$  ماکزیمم دارد.  $\leftarrow$  کل گزاره درست است.  
 F (ضریب  $x^3$  مثبت است؛ پس سه‌می مینیمم دارد.)

ردیف ۷: در تابع  $f(t) = \sqrt{t+1}$  متغیر مستقل  $t$  است یا وزن افراد، کمی فاصله‌ای است.  $\leftarrow$  پس کل گزاره نادرست است.  
 F (وزن، متغیر کمی نسبتی است.)



ردیف ۸: رابطه  $\frac{(\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q})}{F} \Leftarrow$  کل گزاره، درست است.

ردیف ۹: می‌دانیم  $|x| = \sqrt{x}$  یعنی هرگاه عبارتی از رادیکال با فرجه زوج خارج شود، باید از قدرمطلق استفاده کنیم؛ پس چون یک گزاره از دو گزاره ساده داده شده درست است، می‌توانیم گزاره دیگر را بررسی نکنیم و بلافصله بگوییم ارزش کل گزاره فصلی درست است ولی برای تمرین بیشتر، گزاره دیگر را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{(2 \times 3)^7}{(2^3)^5} = \frac{2^3 \times 3^5}{3^2 \times 3^4} \times \frac{2^7 \times 3^7}{2^{15}} = \frac{2^{15} \times 3^{12}}{3^6 \times 2^{15}} = 3$$

کل گزاره درست است.  $\Rightarrow \frac{(\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{6^7}{8^5} = 2) \vee (\sqrt{x^2} = |x|)}{F} \Leftarrow$

ردیف ۱۱: عدد ۱۹ زوج یا ۱۹ مربع کامل است.  $\Leftarrow$  در کل، نادرست است.

ردیف ۱۲: عدد ۲۴ بر ۳ بخشیده است یا ۲۴ بر ۵ بخشیده است.  $\Leftarrow$  در کل، درست است.

(الف)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

پس همارزی داده شده، درست است. (قانون دمرونگان است.)

(ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

لذا همارزی موردنظر، درست است. (قانون دمرونگان است.)

(پ)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

همارزی داده شده، درست است.

## ماجراهای من و درسام - ریاضی و آمار ۲

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(ت)

همارزی داده شده، درست است.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

(ث)

پس همارزی  $p \vee (p \wedge q) \equiv q$  نادرست است.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

(ج)

همارزی داده شده، درست است.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

(ج)

پس همارزی  $(p \vee \sim p) \equiv T$  درست است.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

(ح)

پس همارزی  $(p \wedge \sim p) \equiv F$  درست است.

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

(خ)

پس همارزی داده شده، درست است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F

(د)

پس همارزی داده شده نادرست است.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

پس هم ارزی داده شده، درست است.

- ۶  $p \wedge q$  درست است؛ پس هم  $p$  درست است هم  $q$ ؛ لذا:

**خاصیت تهییع بذبی:**  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- 4

$$\frac{(\neg p \wedge q) \wedge p}{\text{جا به جا می کنیم}} = \frac{\underline{p} \wedge (\neg p \vee q)}{\text{خاصیت توزیع یزدیری}} = \frac{\underline{p} \wedge \underline{p}}{F} \vee \frac{\underline{p} \wedge q}{F} = F$$

است؛ لذا برای آن که  $(q \wedge p)$  نادرست باشد، باید  $q$  نادرست باشد؛ پس خود  $p$  درست است، پس در کل می‌توان گفت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sim p \equiv F \\ q \equiv T \\ \sim q \equiv F \end{array} \right. \quad \text{ارزش r نامعلوم است.} \\ \quad \text{همه هم نیست.)}$$

$$\text{الف} (q \vee r) \vee p \equiv (\underbrace{T \vee r}_T) \vee T \equiv T \vee T \equiv T$$

$$\neg(p \wedge q) \wedge \neg r \equiv \neg(\underbrace{T \wedge T}_T) \wedge \neg r \equiv \neg T \wedge \neg r \equiv F \wedge \neg r \equiv F$$

<sup>۹</sup>- در تمام ردیف‌ها، دقت کنید که در گزاره شرطی، فقط اگر به  $F \Rightarrow T$  رسیدیم، گزاره شرطی، نادرست خواهد بود.

$$\underbrace{(5^2 + 1)}_T \Rightarrow \underbrace{1 \times 4^2}_T \text{ کلاؤ درست است.} \quad \text{زوج است}$$

٢٦٣

۹۶ اول است  $\Rightarrow$  ۲ فرد است

(۹۶) مرکب است؛ چون مثلاً بر ۲ بخش یذیر است.

بیز، در جای خالی،  $\hat{z}$ -گزارهای نادرست قرار دادیم (۲ فرد است); جون، مهندسی ادبی،  $\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F}$  پرایر  $\mathbf{T}$  است.

ردیف ۳:  $\Rightarrow ۵۰$  مضرب  $۱۰$  است ۳ عددی گنگ است

در جای خالی، گزاره نادرست  $\exists$  عددی گنگ است) را قرار دادیم تا به  $F \Rightarrow T$  برسیم؛ چون می‌دانیم که  $T \Rightarrow F \equiv F$  است

آن گاه  $^2$  دیگر اول نیست؛ چون  $^2$  برابر  $^9$  می‌شود که مرکب است. در مورد تمام اعداد اول دیگر هم، همین اتفاق می‌افتد؛ پس:  
 کلّاً نادرست است.  $\rightarrow \underbrace{x}_{\text{اول است}} \Rightarrow \underbrace{x}_{\text{اول است}}$

T F  $\sqrt{u_1 u_2}$   $\frac{u_1}{u_2}$   $\frac{u_2}{u_1}$

$$\text{رديف ۵:} \quad \text{کلاد درست است.} \rightarrow \frac{3}{4} > \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{16} \text{ مربيع کامل است}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{c^2} \delta^{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j}$$

ردیف ۷: فقهه سده، بارهه ۴ → ۴ باید مادرست باشد، پس ترازه ۴ باید درست و ۴ باید مادرست باشد. پس در جای حکای اول، نممه «است» و

در جای حالی بعدي، للمه «نيست» فرار مي دهيم.

ر دیف ۷: کلا نادرست است.  $\rightarrow$  (عدد اول است)  $\Rightarrow$  (عدد صحيح زوج یا فرد است)

(عدد ۱ نهاد است نه مرکب). (حوالي، يك عدد صحيح بالآخر با؛ وچ است بافرد).

دیف: ۸: مقدمه و تالی به همراه استه هستند، بس خودمان: مقدمه ای داشت فرض کنیه فقط درست شایان است. تالی بازی است. م-کنیه:

ریزهای این مجموعه را می‌توان با توجه به مفهومیت آنها در مجموعه معرفی کرد.

نحو درست است.  فرز K فرز است فرز K نحو درست است.

توجه دارید که هر عدد فردی را که به توان ۲ پرسانید، جواب باز هم فرد می‌شود؛ مثلاً:

ردیف ۹: کلاً نادرست است.  $\Rightarrow$  عدد ۱۰ زوج است  $\Rightarrow$  مربع هر عدد فرد، زوج است

ردیف ۹:

$$\text{ردیف } 10: \text{ می‌دانید که } \sqrt{2} = |(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-2}| = (\sqrt{3})^{4-2} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

ردیف ۱۱: می‌دانیم که:  $\frac{1}{3} = 3^{-1}$  و  $\frac{1}{3^1} = 3^{-1}$  پس مخرج کسر  $\frac{1}{3}$  بزرگ‌تر از مخرج کسر  $\frac{1}{3^1}$  بوده و لذا:  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 2-\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-2} = (\sqrt{3})^{4-2} = (\sqrt{3})^2 = 3$

ردیف ۱۲: می‌دانیم که:  $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$   $\Rightarrow$  حجم کره  $\frac{4}{3} \pi R^3$  کلاً درست است.

ردیف ۱۲:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + x)(x^2 - 4)} = \frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}$$

فاکتور از  $x$  اتحاد مزدوج فاکتور از  $(x+1)$

از طرفی مُددادهای ۴ ۱ ۱ ۲ ۳ ۴ برابر ۱ است؛ لذا:

ردیف ۱۳: کلاً نادرست است.  $\Rightarrow$  (حاصل  $\frac{1}{x+2}$  برابر با  $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + x)(x^2 - 4)}$  برابر است)  $\Rightarrow$  (مددادهای ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ برابر است)

ردیف ۱۴: کلاً درست است.  $\Rightarrow$  (عدد اول است)  $\wedge$  (۵ گنگ است)  $\wedge$  (۱۰ طبیعی است)  $\wedge$  (۸ عدد اول است)

ردیف ۱۳:

ردیف ۱۴: کلاً درست است.  $\Rightarrow$  (جمعهای بانکها تعطیل‌اند)  $\Rightarrow$  (دمای هوای شهرها، متغیر کمی نسبتی است)

ردیف ۱۴:

ردیف ۱۵: تذکر: دمای هوای شهرها، متغیر کمی فاصله‌ای است.  
کلاً نادرست است.  $\Rightarrow$  (دمای هوای شهرها، متغیر کمی نسبتی است)  $\Rightarrow$  (میانه، نقطه وسط داده‌های مرتب شده است)  $\wedge$  (۷

ردیف ۱۵:

ردیف ۱۶: سال گذشته خواندید که پارامتر و آماره، لزوماً مساوی نیستند. ضمناً در نقاط سریه‌سر، سود کارخانه صفر است و هر خط به شکل  $y = k$  افقی است.  $\Rightarrow$  (خط  $y = 3$  افقی است)  $\wedge$  (در نقاط سریه‌سر، سود کارخانه صفر است)  $\Rightarrow$  (مقدار پارامتر، همیشه با مقدار آماره برابر است)

پس گزاره بالا در کل، درست است.

ردیف ۱۷:  $\sim(2^3 = 18) \Rightarrow \sim(4 \notin \mathbb{N})$

ردیف ۱۷:

کلاً درست است.  $\Rightarrow 4 \in \mathbb{N}$

اگر گزاره‌های داخل پرانتزها را نقیض کنیم خواهیم داشت:

ردیف ۱۸: مقدم را باید نقیض کنیم. برای این کار از قانون دمگان استفاده می‌کنیم؛ یعنی  $\sim$  را به تک تک گزاره‌ها اثر می‌دهیم و « $\wedge$ » تبدیل به « $\vee$ » می‌شود:

ردیف ۱۹: مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا مقدم را  $T$  فرض کرده و فقط تالی را بررسی می‌کنیم:  
 $\sim(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}) \vee \sim(IQR = Q_3 - Q_1) \Rightarrow (\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z} \vee IQR \neq Q_3 - Q_1) \Rightarrow$  (۲ فرد است.)

ردیف ۱۹: مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا مقدم را  $T$  فرض کرده و فقط تالی را بررسی می‌کنیم:  
کلاً درست است.  $\Rightarrow$  (میانه بهتر از میانگین است)  $\Rightarrow$  (اگر داده دورافتاده داشته باشیم)  $\wedge$  (خودمان  $T$  فرض می‌کنیم)

ردیف ۲۰: ابتدا با توجه به این که حاصل ضرب ریشه‌ها ۴ است، خودمان مقدار را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + 3kx - 2k = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-2k}{1} = 4 \Rightarrow k = -2$$

$$\left( \begin{array}{l} x^2 + 3kx - 2k = 0 \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۴ است} \end{array} \right) \Rightarrow (k = -2) \quad \text{کلاآ درست است.}$$

F

خودمان T فرض می‌کنیم

ردیف ۱: اگر  $\sqrt{3}$  گنج است و بر عکس  $\frac{2X}{X-1}$  کاملاً درست است. (دو گزاره همارزش هستند.)

ردیف ۲: اگر عددی فرد باشد، آن گاه  $(x+1)$  عددی زوج است و بر عکس.

$$\left. \begin{array}{l} \text{باشد} \Rightarrow X \text{ زوج است} \\ \text{باشد} \Rightarrow X \text{ فرد است} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت ۱} \\ \text{حالت ۲} \end{array}$$

فرمی‌کنیم

خودمان T

فرمی‌کنیم

خودمان T

کلاآ درست است.

در هر دو حالت، تالی‌ها درست شدند؛ زیرا در حالت اول اگر فرد باشد، مثلًا ۳ باشد،  $(x+1)$  می‌شود ۴ که زوج است (به هر عدد فردی بدھید + ۱ زوج می‌شود) بر عکس این موضوع هم درست است؛ یعنی اگر ۱ + زوج باشد، فرد است؛ مثلاً اگر ۶ + ۱ باشد، آن گاه ۵ = .

ردیف ۳: اول بودن عدد ۳۷ شرط لازم و کافی است برای مركب بودن  $\frac{17}{F}$  کلاآ درست است. (دو گزاره همارزش نیستند.)

ردیف ۴: برای آن که کل گزاره دوشرطی درست شود، باید در جای خالی، گزاره‌ای دلخواه ولی درستی را قرار دهیم تا ارزش هر دو گزاره، یکسان شود.  $\frac{\text{گویابودن عدد } 1/6 \text{ شرط لازم و کافی است برای زوج بودن عدد } 8}{T}$  کلاآ درست است.

ردیف ۵: می‌خواهیم ارزش کل گزاره نادرست شود. از طرفی ارزش گزاره «۲۵ درصد داده‌های آماری کوچک‌تر از چارک اول هستند» درست است؛ پس در جای خالی باید گزاره‌ای نادرست قرار دهیم تا دو گزاره، همارزش نشوند. ما به دلخواه در جای خالی، گزاره «۵ عددی گویا است» را قرار می‌دهیم.

ردیف ۶: چون ارزش کل گزاره باید درست باشد، دو گزاره ساده‌ما، باید همارزش باشند (یا هر دو درست یا هر دو نادرست).

می‌دانیم ۱۲۱ بر ۳ بخش‌پذیر نیست و فردوسی هم شاعر بوده است نه ریاضی‌دان؛ پس این سؤال ۲ جواب دارد. (هر کدام را که بنویسید إشکالی ندارد.)

اگر  $\frac{121}{F}$  مضرب ۳ است، آن گاه  $\frac{\text{فردوسی، ریاضی‌دان بوده است}}{F}$  کلاآ درست

اگر  $\frac{121}{T}$  مضرب ۳ نیست، آن گاه  $\frac{\text{فردوسی، ریاضی‌دان نبوده است}}{T}$  کلاآ درست

ردیف ۷: اگر واریانس داده‌ها صفر باشد آن گاه داده‌ها با هم برابرند و بر عکس.

باید ۲ حالت در نظر بگیریم؛ چون گزاره‌های ساده موجود در گزاره دوشرطی بالا به هم وابستگی دارند:

$$\left. \begin{array}{l} \text{داده‌ها برابرند} \Rightarrow (0 = \text{واریانس}) \\ \text{خودمان T فرمی‌کنیم} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت ۱} \\ \text{حالت ۲} \end{array}$$

F

T

کلاآ درست است.

ردیف ۸: باز هم دو گزاره ساده وابسته به هم داریم؛ لذا:  $\frac{\text{مجموع آن‌ها زوج است}}{T} \Rightarrow \frac{\text{دوعدد فرد باشند}}{T}$  کلاآ نادرست است.

در حالت ۱ همیشه تالی درست است؛ ولی در حالت ۲ ممکن است مجموع دو عدد زوج باشد، ولی خود آن دو عدد فرد نباشند؛ مثلاً اگر مجموع دو عدد برابر ۱۰ باشد، آن گاه خود آن دو عدد می‌توانند ۴ و ۶ باشند.

## ماجراهای من و درسام - ریاضی و آمار ۲

ردیف ۹: می‌دانیم اگر تابع باشد، عضوهای اول زوج مرتب‌ها باید مساوی باشند یا اگر مساوی بودند، عضوهای دومشان هم مساوی باشند. اگر در به جای و به ترتیب ۳ و ۱ که داده شده را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f = \left\{ \overbrace{(5, 4), (1, 2)}^{\text{تکراری}}, \overbrace{(5, 4), (1, 2)}^{\text{تکراری}} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع است.}$$

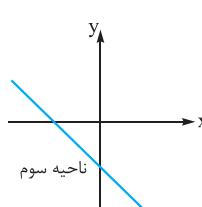
پس کل گزاره دوشرطی داده شده درست است. (آنکه مثل قسمت‌های ۷ و ۸ دو هالت برآش تشکیل بدین تالی‌ها درست می‌شون).

ردیف ۱۰: در منحنی نرمال  $\% ۹۶$  داده‌ها در بازه  $(\bar{x} - ۲\sigma, \bar{x} + ۲\sigma)$  قرار دارند.  $\Leftrightarrow$  (مجموع ریشه‌های معادله  $x - ۲ = ۰$  برابر ۱ است)  $\underbrace{T}_{T}$

پس کلاً درست است. توجه کنید که مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم از رابطه  $x' + x'' = \frac{-b}{a}$  به دست می‌آید؛ پس در معادله  $x' - x'' = \frac{-(-1)}{1} = ۱$  داریم:

ردیف ۱۱: (نمودار خط  $y = -2x - ۱$ )  $\Leftrightarrow$  (در نمودار جعبه‌ای، میانه همیشه وسط جعبه قرار دارد)  $\underbrace{F}_{F}$

پس کلاً درست است. حواستان باشد که در نمودار جعبه‌ای، میانه لزوماً در وسط جعبه نیست. ضمناً اگر نمودار خط  $y = -2x - ۱$  را به روش سربع رسم کنیم به شکل رو به رو خواهیم رسید:



ردیف ۱۲: ابتدا عبارت  $a^5 - 81$  را تجزیه می‌کنیم:

$$a^5 - 81 = a(x^4 - 8) = a(x^2 - 4)(x^2 + 4) = a(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

فاکتور از  $x$  مزدوج مزدوج

پس عامل  $(x - 2)$  در تجزیه شده این عبارت وجود دارد. حال جمع داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{a^5 + 2a}{(a-2)(a+2)} - \frac{4-a}{a-2} &= \frac{a^5 + 2a - (4-a)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^5 + 2a - 4a - 8 + a^5 + 2a}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a^5 - 8}{(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{2(a^5 - 4)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = 2 \end{aligned}$$

پس کل گزاره مركب، نادرست است؛ چون دو گزاره ساده آن، همارزش نیستند.

ردیف ۱۳: اگر گزاره داده شده را  $p \Rightarrow q$  فرض کنیم، گزاره‌های ساده  $p$  و  $q$  به هم وابسته هستند؛ لذا ۲ حالت جداگانه در نظر می‌گیریم. یک بار

$$\left. \begin{array}{l} 1: \underbrace{a \times b = 0}_{\substack{\text{خدمان } T \\ \text{فرض می‌کنیم}}} \Rightarrow \underbrace{(a=0) \wedge (b=0)}_{F} \\ 2: \underbrace{(a=0) \wedge (b=0)}_{\substack{\text{خدمان } T \\ \text{فرض می‌کنیم}}} \Rightarrow \underbrace{a \times b = 0}_{T} \end{array} \right\} \text{در کل نادرست است.}$$

$:q \Rightarrow p \Rightarrow q$

توجه کنید که ممکن است  $a \times b = 0$  باشد؛ ولی فقط صفر باشند؛ یعنی لزومی ندارد و هم‌زمان صفر باشند. به همین دلیل در حالت (۱)، تالی نادرست است.

(الف) ۱۱

همارزی داده شده، درست است.

$p$	$p$	$p \Rightarrow p$
T	T	T
F	F	T

$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

همارزی داده شده، درست است.

(پ)

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee \sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim p)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	T

همارزی داده شده، نادرست است.

(ت)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

همارزی داده شده، نادرست است.

(ث)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

پس همارزی داده شده، درست است.

(ج)

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	F

پس همارزی داده شده، نادرست است.

(ز)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

پس همارزی داده شده، درست است.

۱۲-الف)

p	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	T

p	q		$q \Rightarrow r$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$q \wedge (p \Rightarrow r)$	$[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow r)]$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T

ب)

الف)  $(q \Leftrightarrow p) \vee r \equiv (\underbrace{F \Leftrightarrow T}_{F}) \vee r \equiv F \vee r \equiv r$

-۱۳

ب)  $(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv (\underbrace{F \Leftrightarrow F}_{T}) \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$

پ)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\underbrace{T \Leftrightarrow F}_{F}) \Leftrightarrow (\underbrace{T \Rightarrow F}_{F}) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ت)  $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \sim(\underbrace{T \vee F}_{T}) \Leftrightarrow (\underbrace{T \Rightarrow F}_{F}) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ث)  $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv (\underbrace{r \Leftrightarrow T}_{r}) \Rightarrow (\underbrace{T \wedge T}_{T}) \equiv r \Rightarrow T \equiv T$

ج)  $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv (\underbrace{T \vee F}_{T}) \Leftrightarrow (\underbrace{T \wedge F}_{F}) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

چ)  $(q \vee \sim r) \Rightarrow p \equiv (\underbrace{F \vee \sim r}_{\sim r}) \Rightarrow T \equiv \sim r \Rightarrow T \equiv T$

ح)  $\sim(\sim q \vee \sim r) \Rightarrow r \equiv \sim(\underbrace{T \vee \sim r}_{T}) \Rightarrow r \equiv F \Rightarrow r \equiv T$

خ)  $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \equiv (\underbrace{T \Rightarrow T}_{T}) \Leftrightarrow (\underbrace{F \Leftrightarrow T}_{F}) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

د)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\underbrace{T \Rightarrow F}_{F}) \Leftrightarrow (\underbrace{T \Rightarrow F}_{F}) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ذ)  $\sim(\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv \sim(\underbrace{T \wedge \sim r}_{\sim r}) \Rightarrow (\underbrace{r \Rightarrow T}_{T}) \equiv r \Rightarrow T \equiv T$

در)  $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim r \equiv (\underbrace{T \Rightarrow F}_{F}) \wedge \sim r \equiv F \wedge \sim r \equiv F$

-۱۴ از نادرستی گزاره  $(p \wedge q) \Rightarrow p$  نتیجه می‌گیریم که مقدم آن یعنی  $p$  درست و تالی آن یعنی  $(p \wedge q)$  نادرست است، پس الان  $p$  ارزش درست دارد و برای آن که  $(p \wedge q)$  ارزش نادرست داشته باشد، باید  $q$  حتماً نادرست باشد. چون می‌دانیم حاصل  $T \wedge F$  برابر  $F$  می‌شود:

$$p \wedge q \equiv T \wedge T \equiv T$$

-۱۵ چون  $(q \vee r) \Rightarrow p$  نادرست است، پس  $p$  درست و  $(q \vee r)$  نادرست است. همچنان از به انتفای مقدم، درست است  $r \Rightarrow (p \wedge s) \equiv F \Rightarrow (\underbrace{T \wedge s}_{\downarrow}) \equiv T$  نادرست است. همچنان از نتیجه می‌گیریم که هم  $q$  نادرست است و هم . حال به سراغ گزاره مطلوب می‌رویم: نادرستی  $(q \vee r)$  می‌نویسیم

ارزش s نامعلوم است

-۱۶ در درسنامه گفتیم که:  $p \equiv \sim p \vee q \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  به فصلی تبدیل می‌کنیم:

مقدم، هر چه باشد نقیض می‌شود  
 $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

این دوراکنار هم می‌نویسیم  
 $\equiv [(\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)] \equiv [(\underbrace{\sim p \vee p}_{T}) \vee (\underbrace{\sim q \vee q}_{T})] \equiv T$   
 دمرگان  
 این دوراکنار هم می‌نویسیم