فهرست

فصل اول: جبر و معادله ۷

پاسخنامهٔ تشریحی ۴۲

فصل دوم: تابع ۷۱

پاسخنامهٔ تشریحی ۹۴

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتم ۱۱۴

پاسخنامهٔ تشریحی ۱۳۰

فصل چهارم: مثلثات ۱۴۴

پاسخنامهٔ تشریحی ۱۶۳

فصل پنجم: حد و پیوستگی ۱۷۶

پاسخنامهٔ تشریحی ۲۰۷

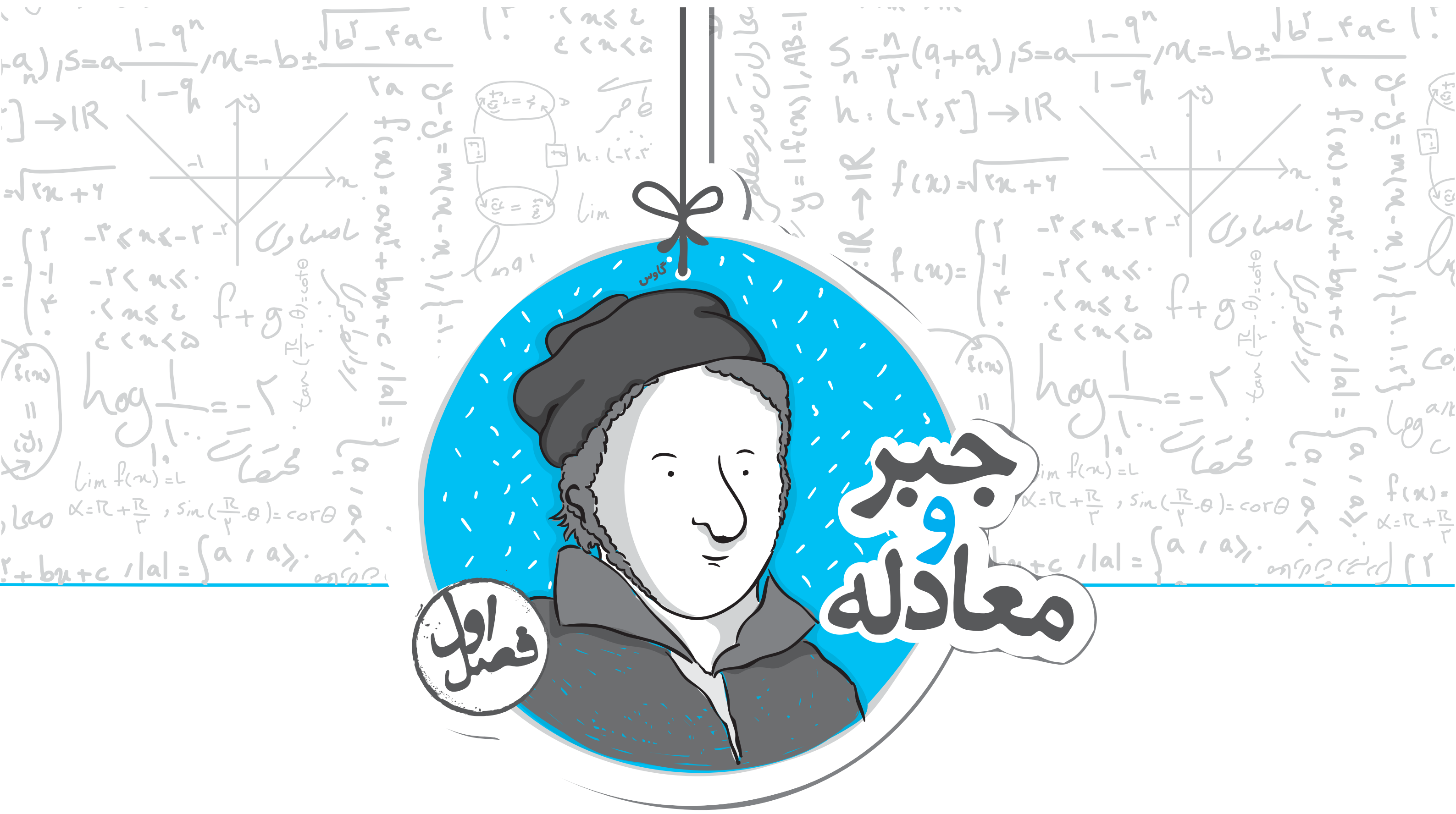
خلاصهٔ فصل‌ها ۲۳۱

نمونهٔ امتحان‌های نیم‌سال اول ۲۳۵

پاسخنامهٔ امتحان‌های نیم‌سال اول ۲۳۹

نمونهٔ امتحان‌های نیم‌سال دوم ۲۴۳

پاسخنامهٔ امتحان‌های نیم‌سال دوم ۲۵۱



۱ مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی و هندسی

سلام بچه‌ها. می‌بینم که همه شاد و پرانرژی هستین. اولین درس حسابان رو شروع می‌کنیم. در جریان دنباله‌های حسابی که هستید؟ تو درس امروز می‌خوایم جمع تعدادی جمله از دنبالهٔ حسابی و هندسی رو به دست بیاریم.

پلهٔ اول: یادآوری دنبالهٔ حسابی

دنبالهٔ اعداد که یادتان هست؟ هر تعداد عدد که پشت سر هم بنویسیم یک دنباله ایجاد می‌شود؛ مثل $۱,۴,۹,۱۶,...$. به قانون یا الگویی که جمله‌های دنباله توسط آن تولید می‌شوند، **جملهٔ عمومی** گفته می‌شود. حالا چرا جملهٔ عمومی؟ چون اگر آن را داشته باشید با جای‌گذاری شمارهٔ جمله به جای n، جمله‌ها (عموم جمله‌ها) به دست می‌آیند، مثلاً جملهٔ عمومی دنباله‌ای که گفتیم $a_n = n^۲$ است. جملهٔ چهارم می‌شود $a_۴ = ۴^۲ = ۱۶$، جملهٔ بیستم $a_{۲۰} = ۲۰^۲ = ۴۰۰$. حالا یک دنبالهٔ حسابی بگویید، مثلاً $۴,۷,۱۰,۱۳,...$. در این دنباله، هر جمله با عدد ثابت $+۳$ *(همون قدرنسبت خودمون)* جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید. در دنباله‌های حسابی هر جمله با عدد ثابتِ مثبت یا منفی d (قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید. به زبان دیگر اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، برابر عدد ثابت d است؛ یعنی $a_n - a_{n-۱} = d$.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: برای نوشتن جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی دو چیز می‌خواهید: یکی جملهٔ اول $(a_۱)$ و دیگری قدرنسبت (d). با جای‌گذاری این دوتا در قانون $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ جملهٔ عمومی به دست می‌آید.

مثال و پاسخ

مثال: **دنبالهٔ $-۳,۱,۵,۹,...$ را در نظر بگیرید:**

الف) **جملهٔ عمومی آن را بنویسید.**

ب) **جملهٔ سی و سوم دنباله، کدام است؟ جملهٔ چندم برابر ۳۳ است؟**

پاسخ:

الف) جملهٔ اول که تابلو $a_۱ = -۳$ است. قدرنسبت هم $d = ۴$ *(چهارتا چهارتا داره اضافه می‌شه)* است. با جای‌گذاری در فرمول جملهٔ عمومی داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = -۳ + (n-۱)(۴) = ۴n - ۷$$

ب) جملهٔ سی و سوم، پس $n = ۳۳$ می‌گذاریم:

$$a_{۳۳} = ۴(۳۳) - ۷ = ۱۲۵$$

گفته جملهٔ چندم، پس n یا همان شمارهٔ جمله، مجهول است:

$$۴n - ۷ = ۳۳ \Rightarrow n = ۱۰$$

یعنی دهمین عدد در دنباله برابر ۳۳ است.

پلهٔ دوم: چند نکتهٔ تکمیلی در مورد دنباله‌های حسابی

چند نکتهٔ مهم در هر دنبالهٔ حسابی وجود دارد. خیالتان راحت باشد، سؤالِ مستقیم از این‌ها نمی‌آید ولی خُب، در لابه‌لای حل مسئله‌های امسال، ممکن است به آن‌ها نیاز پیدا کنید.

۱) اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی باشند، جملهٔ وسط، میانگین دو جملهٔ کناری است؛ یعنی $b = \frac{a+c}{۲}$.

۲) جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی نسبت به n، خطی (درجهٔ حداکثر یک) است؛ مثلاً به صورت $a_n = ۲n + ۳$ یا $a_n = \frac{n}{۲} - ۱$. پس اگر دنباله‌ای مثل $a_n = (k-۲)n^۲ + kn + ۱$ حسابی باشد باید کاری کنید که $n^۲$ از بین برود؛ $k-۲$ را برابر صفر قرار دهید تا $k = ۲$ و در نتیجه $a_n = ۲n + ۱$ به دست آید.

۳) می‌خواهیم بین دو عدد a و b، تعداد n عدد (واسطه) طوری قرار دهیم که همهٔ اعداد، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند. مثلاً می‌خواهیم بین دو عدد ۴ و ۸۱ تعداد ۶ واسطهٔ حسابی قرار دهیم. به دو روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

روش اول: با استفاده از فرمول $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{\text{آخری} - \text{اولی}}{(\text{تعداد واسطه‌ها}) + ۱} = \frac{۸۱ - ۴}{۷} = ۱۱$ قدرنسبت به دست می‌آید. حالا داریم:

$$۴, \overset{+۱۱}{\boxed{۱۵}}, \overset{+۱۱}{\boxed{۲۶}}, \boxed{۳۷}, \boxed{۴۸}, \boxed{۵۹}, \boxed{۷۰}, ۸۱$$

روش دوم: جملهٔ اول که ۴ است. ۶تا واسطه هم داریم؛ پس عدد ۸۱، جملهٔ هشتم است. با فرمول جملهٔ عمومی داریم:

$$a_۸ = ۸۱ \Rightarrow a_۱ + ۷d = ۸۱ \Rightarrow ۴ + ۷d = ۸۱ \Rightarrow d = ۱۱$$

پلهٔ سوم: مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی

می‌خواهیم مجموع جمله‌های اول تا nام دنبالهٔ حسابی را به دست آوریم. قبل از این‌که به فرمول اصلی برسیم، جمع اعداد متوالی از ۱ تا n یعنی $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$ را به دست می‌آوریم:

مرحله اول: جمع اعداد را S می‌نامیم $\Rightarrow S = ۱ + ۲ + \cdots + n$

مرحله دوم: همین اعداد را از آخر به اول می‌نویسیم $\Rightarrow S = n + (n-۱) + \cdots + ۱$

مرحله سوم: دو سطر بالا را با هم جمع می‌کنیم $\Rightarrow ۲S = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + \cdots + (n+۱)}_{\text{n تا}} \Rightarrow \boxed{S = \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{(\text{آخری})(\text{یکی بیشتر از آخری})}{۲}}$

مثلاً: $۱ + ۲ + \cdots + ۱۰ = \frac{۱۰ \times ۱۱}{۲} = ۵۵$ یا $۱ + ۲ + \cdots + ۵۰ = \frac{۵۰ \times ۵۱}{۲} = ۱۲۷۵$

حالا مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی را به دست می‌آوریم:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n = a_۱ + (a_۱ + d) + (a_۱ + ۲d) + \cdots + (a_۱ + (n-۱)d)$$

$$= na_۱ + (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (n-۱))d = na_۱ + \frac{\overbrace{(n-۱)}^{\text{آخری}}\ \overbrace{(n)}^{\text{یکی بیشتر}}}{۲}d = \frac{۲na_۱ + (n-۱)(n)d}{۲} = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

فرمول جمع اعداد متوالی

بنابراین به خاطر می‌سپاریم که:

$$\text{مجموع n جملهٔ \textbf{اول} دنبالهٔ حسابی} = S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

حالا بگویید ببینم معنی $S_{۱۰}$ چیست؟ جمع جمله‌های اول تا دهم. معنی $S_{۲۰}$ *(آقا به خدا فهمیدیم)*... حواستان باشد برای یافتن مجموع تعدادی جمله، باید جملهٔ اول و قدرنسبت را داشته باشید *(اگه نداشتید چی؟ خُب اول باید اون‌ها رو با اطلاعات مسئله پیدا کنید، بعد بندازید تو فرمول)*. کتاب درسی یک رابطهٔ غیرضروریِ دیگر هم برای S_n گفته است:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + \underbrace{a_۱ + (n-۱)d}_{a_n}) = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \text{تعداد} \times \text{میانگین اولی و آخری}$$

مثال و پاسخ

مثال دنبالهٔ حسابی $...,۷,۲,۳-$ را در نظر بگیرید:

الف مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.
ب مجموع $a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۲۰}$ را به دست آورید.
پ مجموع n جملهٔ اول (همون S_n) را بیابید.
ت مجموع $a_۲+a_۴+\cdots+a_{۲۰}$ را بیابید.

پاسخ

الف $a_۱=-۳$ و $d=۵$ است، پس:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲(-۳)+۱۹(۵))=۸۹۰$$

ب جمع جمله‌های اول تا بیستم، برابر ۸۹۰ شد اما برای محاسبهٔ $a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۲۰}$ باید جمع جمله‌های اول تا دهم (یعنی $S_{۱۰}$) را از آن کم کنیم:

$$a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۲۰}=S_{۲۰}-S_{۱۰}=۸۹۰-\underbrace{\frac{۱۰}{۲}(۲(-۳)+۹(۵))}_{۱۹۵}=۶۹۵$$

به جمع $a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۲۰}$ مجموع **ده جملهٔ دوم** هم می‌گوییم *(اگه جایی دیدید وحشت نکنید!)*. جمع‌بندی (الف) و (ب) این شد که برای جمع، از یک تا n فرمول داریم. اگر آن وسط‌ها، جمعی را خواستید باید S_n را از قبلی‌ها کم کنید.

پ

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲(-۳)+(n-۱)(۵))=\frac{n}{۲}(۵n-۱۱)=\frac{۵n^۲}{۲}-\frac{۱۱}{۲}n$$

بد نیست بدانید دنبالهٔ مجموع (S_n) همواره از درجهٔ حداکثر ۲ *(نه بیشتر!)* درمی‌آید.

ت جمع تعدادی جملهٔ شماره زوج را می‌خواهیم. به $a_۲$، $a_۴$ و ... دقت کنید:

$$-۳,\overset{+۱۰}{\boxed{۲}},۷,\boxed{۱۲},۱۷,\boxed{۲۲},...$$

خودشان یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $۲\times۵=۱۰$ هستند. مجموع ده‌تا از این جمله‌ها را می‌خواهیم.

$$a_۲+a_۴+\cdots+a_{۲۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲(۲)+۹(۱۰))=۴۷۰$$

مثال **مجموع دوازده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر ۱۳۸ و جملهٔ ششم آن برابر ۱۰ است. مجموع صد جملهٔ اول دنباله را بیابید.**

پاسخ گفتم تا $a_۱$ و d را نداشته باشیم کاری نمی‌توانیم بکنیم. پس اول آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع ۱۲ جملهٔ اول}=S_{۱۲}=۱۳۸ \Rightarrow \frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d)=۱۳۸$$

$$\text{جملهٔ ششم}=a_۶=۱۰ \Rightarrow a_۱+۵d=۱۰$$

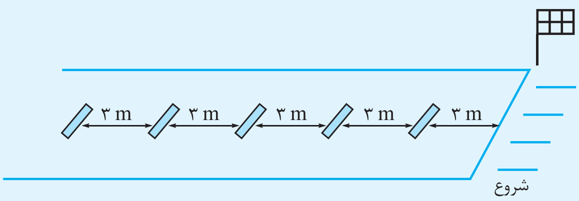
$$\begin{cases}۱۲a_۱+۶۶d=۱۳۸\\ \times(-۱۲)\ a_۱+۵d=۱۰\end{cases}$$

$$۶d=۱۸ \Rightarrow d=۳ \Rightarrow a_۱=-۵$$

حالا $S_{۱۰۰}$:

$$S_{۱۰۰}=۵۰(-۱۰+۹۹(۳))=۱۴۳۵۰$$

مثال **یادش بخیر! یکی از امتحان‌های ورزش ما به این صورت بود. ۵ چوب به فاصلهٔ ۳متری در یک خط مستقیم قرار داده می‌شد. هر فرد باید از نقطهٔ شروع حرکت کرده، چوب اول را برداشته و دوباره برگشته و در مکان شروع قرار می‌داد. برای چوب‌های بعدی هم همین‌طور** *(کم‌تر از زمان مشخصی این کار رو انجام می‌دادیم نمرهٔ کامل می‌گرفتیم. بعله برای ۲۰ ورزش هم پدرمان را درمی‌آوردن)*. **شما محاسبه کنید برای برداشتن همهٔ چوب‌ها چه مسافتی طی می‌شود؟**



پاسخ برای برداشتن چوب اول ۳ متر جلو و ۳ متر هم برمی‌گردیم؛ پس در کل ۶ متر را طی می‌کنیم. برای برداشتن چوب دوم ۶ متر می‌رویم و ۶ متر برمی‌گردیم؛ پس ۱۲ متر. به همین ترتیب برای چوب بعدی ۱۸ متر. کافی است مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۶$ و $d=۶$ را به دست آوریم:

$$S_۵=\frac{۵}{۲}(۱۲+۴(۶))=۹۰\ \text{m}$$

پلهٔ چهارم: به دست آوردن دنباله از روی S_n

فرض کنید مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n=۳n^۲-۴n$ به دست آید. می‌خواهیم از روی این دنباله، جملهٔ عمومی دنباله را بنویسیم. اگر $n=۱$ قرار دهیم مجموع یک جمله $(S_۱)$ یا همان $a_۱$ به دست می‌آید:

$$S_۱=a_۱=-۱$$

اگر $n = ۲$ قرار دهیم مجموع دو جملهٔ اول به دست می‌آید، یعنی: $S_۲ = a_۱ + a_۲ = ۳(۲)^۲ - ۴(۲) = ۴$

اگر $a_۱ = -۱$ قرار دهیم $a_۲ = ۵$ به دست می‌آید، حالا $d = a_۲ - a_۱ = ۶$. با داشتن قدرنسبت و جملهٔ اول، جملهٔ عمومی نوشته می‌شود:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = -۱ + (n-۱)(۶) = ۶n - ۷$$

بنابراین از روی S_n هم می‌توانید خود دنباله و همهٔ اطلاعات آن را بیابید. این را هم بگوییم که اگر در برنامه‌های پربار! تلویزیون دیدید، زیاد شگفت‌زده نشوید؛ d همواره دو برابر ضریب $n^۲$ است. ضریب $n^۲$ برابر ۳ بود، پس $d = ۶$ می‌شود.

راه‌حل دومی هم برای به دست آوردن a_n از روی S_n وجود دارد. اگر جمع اعداد از شمارهٔ ۱ تا n را از جمع اعداد از شمارهٔ ۱ تا $n-۱$ کم کنیم، جملهٔ nاُم یا a_n به دست می‌آید؛ یعنی $S_n - S_{n-۱} = a_n$. پس:

$$S_n - S_{n-۱} = ۳n^۲ - ۴n - \underbrace{(۳(n-۱)^۲ - ۴(n-۱))}_{\text{(به جای n باید n−۱ بذاریم)}} = ۳n^۲ - ۴n - (۳n^۲ - ۱۰n + ۷) = ۶n - ۷$$

پلهٔ پنجم: یادآوری دنبالهٔ هندسی

دنبالهٔ $۳, ۶, ۱۲, ۲۴, \ldots$ را در نظر بگیرید. هر جمله در عدد ثابت ۲ *(همون قدرنسبت)* ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید. دنباله‌هایی که در آن‌ها، هر جمله در عدد ثابت   ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید، دنباله‌های هندسی می‌نامیم. در هر دنبالهٔ هندسی، تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی همان قدرنسبت است؛ یعنی $\frac{a_n}{a_{n-۱}} = q$.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی برای نوشتن جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی هم نیاز به دو چیز داریم: یکی جملهٔ اول $(a_۱)$ و دیگری قدرنسبت ( ).
در این صورت جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌شود: $a_n = a_۱ q^{n-۱} \quad , \quad (q, a_۱ \neq ۰)$

مثال و پاسخ

مثال **در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت، جملهٔ هشتم و جملهٔ چهارم به ترتیب برابر ۸۱ و ۹ هستند. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.**

پاسخ اول باید $a_۱$ و   را به دست آوریم. دو معادله را نوشته و با حل دستگاه، $a_۱$ و   را به دست می‌آوریم. یادتان باشد دستگاه‌هایی که در این‌جا به وجود می‌آیند، معمولاً با تقسیم دو طرف حل می‌شوند.

$$\begin{cases} a_۸ = ۸۱ \Rightarrow a_۱q^۷ = ۸۱ \\ a_۴ = ۹ \Rightarrow a_۱q^۳ = ۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_۱q^۷}{a_۱q^۳} = ۹ \Rightarrow q^۴ = ۹ \xrightarrow{q>۰} q = \sqrt[۴]{۳^۲} = ۳^{\frac{۲}{۴}} = ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم داریم: $a_۱(\sqrt{۳})^۳ = ۹ \Rightarrow a_۱ = \frac{۹}{۳\sqrt{۳}} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$

پس جملهٔ عمومی می‌شود: $a_n = a_۱q^{n-۱} = \sqrt{۳} \times (\sqrt{۳})^{n-۱} = \sqrt{۳}^n$

پلهٔ ششم: مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

می‌خواهیم جمع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت   را به دست آوریم. فعلاً فرض کنید $\neq ۱$ باشد.

مرحله اول جمع n جمله را برابر S قرار می‌دهیم $\Rightarrow S = a_۱ + a_۱q + a_۱q^۲ + \cdots + a_۱q^{n-۱}$

مرحله دوم دو طرف را در   ضرب می‌کنیم $\Rightarrow qS = a_۱q + a_۱q^۲ + a_۱q^۳ + \cdots + a_۱q^n$

مرحله سوم دو طرف رابطهٔ بالا را کم می‌کنیم $\Rightarrow S - qS = a_۱ - a_۱q^n$ *(از بالایی فقط اولی و از پایین آخری می‌مونه)*

$$\Rightarrow (۱-q)S = a_۱(۱-q^n) \Rightarrow S = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

به خاطر بسپارید:

$$\boxed{\text{مجموع } n \text{ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی} = S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}}$$

یک‌وقت به سرتان نزند بنویسید $\frac{a_۱(۱-q)^n}{۱-q}$ *(دیدم که می‌گم!)*؛ توان n فقط برای   است.

ممکن است بپرسید اگر $= ۱$ باشد چه می‌شود؟ ببینید اگر $= ۱$ باشد، نتیجه می‌شود همهٔ جمله‌ها، برابر هستند. مثلاً دنباله به صورت $a, a, a, \ldots$ بوده است. خُب! چه کاری است جمع n جملهٔ اول می‌شود na دیگر.

مثال و پاسخ

مثال مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را بیابید. $1, -2, 4, -8, \dots$

پاسخ $a_1 = 1$ و $q = -2$، پس:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = \frac{1-1024}{3} = -341$$

یک وقت به سرتان نزند بنویسید $1\overset{+}{-(-}2)^{10}$ (دیدم که می‌گم!)؛ در ترتیب عملیات، توان جلوتر از جمع و تفریق است.

مثال در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

پاسخ دو معادله را نوشته و با استفاده از فرمول S_n آن‌ها را باز می‌کنیم:

$$S_3 = 136 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 136$$

$$S_6 = 153 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 153$$

$$\xrightarrow{\text{(گفتم با تقسیم حل می‌شه!)}} \frac{\dfrac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}}}{\dfrac{\cancel{a_1}(1-q^3)}{\cancel{1-q}}} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136}$$

$$\xrightarrow{\text{(صورت آشنا می‌زنه با مزدوج)}} \frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}} = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{153}{136} - 1 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

مثال برای محافظت از تابش مواد زیان‌آور (ننوشتم مُضِر؛ باورکن طرف نمی‌دونسته. دیدم که می‌گم!) رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه استفاده کنیم تا شدت تابش مواد زیان‌آور ۹۹٪ کاهش یابد؟

پاسخ بگذارید سؤال را این‌جوری بگوییم. چه‌قدر از مواد زیان‌آور را دور بریزیم تا بیشتر از ۹۹٪ آن دور ریخته شود؟

اول $\frac{1}{2}$ را دور می‌ریزیم. بعد از $\frac{1}{2}$ باقی‌مانده، $\frac{1}{2}$ آن را دور می‌ریزیم، پس $\frac{1}{4}$ از کل حذف می‌شود. به همین ترتیب در مرحلهٔ nام $(\frac{1}{2})^n$ حذف می‌گردد. مجموع مواد زیان‌آوری که دور ریختیم باید از ۹۹٪ بیشتر شود، پس:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + (\frac{1}{2})^n}_{\substack{\text{مجموع n جملهٔ اول} \\ \text{دنبالهٔ هندسی با } q = \frac{1}{2}}} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(1-(\frac{1}{2})^n)}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{99}{100} > (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{100} > (\frac{1}{2})^n$$

$$\xrightarrow[\text{معکوس می‌کنیم}]{\text{دو طرف را}} 100 < 2^n \xrightarrow{\text{(با جستجو)}} 7 \le n$$

یعنی حداقل باید از ۷ لایه، عبور بدهیم.

پلهٔ هفتم: تعمیم (گسترش) اتحاد مزدوج و چاق و لاغر

اتحاد مزدوج و چاق و لاغر را که یادتان هست؟ داشتیم $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ و $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$. می‌خواهیم ببینیم اگر $a^n - 1$ باشد، طرف راست به چه شکلی درمی‌آید. ببینید:

$$\underbrace{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}}_{\substack{\text{مجموع n جملهٔ اول} \\ \text{دنبالهٔ هندسی با } q=a}} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a-1} \Rightarrow \boxed{a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)}$$

مثلاً: $a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ یا $a^7 - 1 = (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + \dots + 1)$

نتیجه ۱ اگر n فرد باشد با تبدیل a به $-a$ اتحاد به صورت مقابل درمی‌آید: $\boxed{a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1)}$

مثلاً: $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ یا $a^5 + 1 = (a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$

نتیجهٔ۲ در حالت کلی نتیجه می‌شود:
$$x^n - y^n = (x-y)\underbrace{(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + x^{n-۳}y^۲ + \cdots + y^{n-۱})}_{\text{(از توان x یکی کم و به توان y یکی اضافه می‌شه)}}$$

مثلاً:
$$x^۵ - y^۵ = (x-y)(x^۴ + x^۳y + x^۲y^۲ + xy^۳ + y^۴)$$

شبیه نتیجهٔ ۱ اگر n فرد باشد، با تبدیل y به $-y$ داریم:
$$\boxed{x^n + y^n = (x+y)(x^{n-۱} - x^{n-۲}y + x^{n-۳}y^۲ - \cdots + y^{n-۱})}$$

A سؤال‌های امتحانی

۱- گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

الف) قدرنسبت جمله‌های ردیف زوج دنبالهٔ $-۱, ۳, ۷, \ldots$ برابر است با: ☐ ۴ ☐ ۸

ب) اگر $S_n = n^۲ + n$ مجموع n جملهٔ اولِ یک دنبالهٔ حسابی باشد، جملهٔ دوم دنباله برابر است با: ☐ ۴ ☐ ۶

۲- جاهای خالی را با عبارت‌ها یا کلمه‌های مناسب پر کنید.

الف) در روز اول یک سکه، در روز دوم دو سکه، ... و در روز دهم، ده سکه کنار می‌گذاریم. در مجموع .... سکه تا روز دهم کنار گذاشته‌ایم.

ب) ۱۰ نقطهٔ متمایز روی محیط دایره‌ای قرار دارد. از هر نقطه به نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم. تعداد .... وتر به دست می‌آید.

۳- مجموع ۲۰ جملهٔ اول هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

الف) $-۵, -۳, -۱, \ldots$ (نهایی ۹۱)

ب) $-۵, ۰, ۵, \ldots$ (نهایی ۹۲)

پ) $a_n = ۳n - ۱$

ت) $a_n = \frac{n}{۲} + ۱$

۴- چند جمله از دنبالهٔ $۱, ۴, ۷, ۱۰, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل برابر ۱۷۶ شود؟

۵- در دنبالهٔ حسابی $-۱, ۲, ۵, \ldots$ حداقل چند جملهٔ آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟ (نهایی ۹۵)

۶- حداقل چند جمله از دنبالهٔ $۳, ۹, ۱۵, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟ (نهایی ۹۳)

۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع ۲۰ جملهٔ اول، سه برابر مجموع ۱۲ جملهٔ اول است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۸- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع پنج جملهٔ بعدی برابر ۳۵ است. مجموع پنجاه جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۹- در یک دنبالهٔ حسابی $S_n = n(۴n - ۱)$ است.

الف) مجموع ده جملهٔ اول را بیابید.

ب) مجموع $a_۶ + a_۷ + \cdots + a_{۱۵}$ را بیابید.

پ) جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

۱۰- از بین ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $-۷, -۴, -۱, \ldots$ مجموع جمله‌های ردیف زوج و مجموع جمله‌های ردیف فرد را به دست آورید.

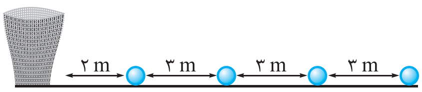
۱۱- در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جمله‌های ردیف فرد برابر ۵۳۰ و مجموع جمله‌های ردیف زوج برابر ۵۹۰ است. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید. (مشابه کتاب درسی)

۱۲- حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید. (مشابه کتاب درسی)

الف) مجموع اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶

ب) مجموع اعداد دورقمی که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

۱۳- تعدادی توپ و یک سبد مطابق شکل روی یک خط مستقیم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد ۲ و فاصلهٔ بقیهٔ توپ‌ها از یکدیگر ۳ است. دونده‌ای از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته و تا سبد برگشته و توپ را درون سبد می‌اندازد. او این عمل را برای بقیهٔ توپ‌ها هم انجام می‌دهد. اگر این دونده در مجموع ۳۷۴ متر دویده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟ (مشابه کتاب درسی)



۱۴- گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

الف) قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $۲\sqrt{۲}, ۱, \ldots$ برابر است با .... ☐ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ☐ $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

ب) مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \ldots$ برابر است با .... ☐ $\frac{۱۰۲۳}{۴}$ ☐ $\frac{۱۰۲۳}{۲}$

پ) مجموع $۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^۹$ برابر است با .... ☐ ۵۱۱ ☐ ۱۰۲۳

۱۵- مجموع ۱۰ جملهٔ اول هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots$ ب) $۲,\sqrt{۲},۱,\dots$ پ) $۲,-۶,۱۸,\dots$ ت) $a_n=\frac{۲^{n-۱}}{۳}$

۱۶- مجموع چند جمله از دنبالهٔ هندسی $۶,-۱۲,۲۴,\dots$ برابر -۱۲۶ است؟ *(نهایی ۹۰)*

۱۷- حداقل چند جمله از دنبالهٔ $۱,۳,۹,\dots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۱۸- مجموع جمله‌های اول و سوم در یک دنبالهٔ هندسی برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول را بیابید.

۱۹- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۳۶ و مجموع سه جملهٔ بعدی ۱۷ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

۲۰- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۲,x,۶,\dots$ را بیابید. $(q>۰)$

۲۱- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود؟ *(نهایی ۹۴)*

۲۲- حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ $۲,۲\sqrt{۲},۴,\dots$ را به دست آورید.

۲۳- به کمک اتحادها عبارت روبه‌رو را ساده کنید. $A=\frac{(x^۵+۱)(x-۱)}{x^۲-۱}$ *(نهایی ۹۱)*

B سؤال‌های تکمیلی

۲۴- با استفاده از فرمول S_n و بار دیگر با استفاده از یک مربع $n\times n$ نشان دهید: $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

۲۵- جملهٔ ششم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۱۰ است. مجموع یازده جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۲۶- در یک دنبالهٔ حسابی از جملهٔ اول ۲ واحد کم و به قدرنسبت ۳ واحد اضافه می‌کنیم. مجموع ده جملهٔ اول چه تغییری می‌کند؟

۲۷- بین دو عدد ۳ و ۴۷، تعداد ۱۰ واسطهٔ حسابی قرار می‌دهیم. مجموع واسطه‌ها را به دست آورید.

۲۸- زوایای داخلی یک ۵ ضلعی محدب برحسب درجه، تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت ۶° باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ ۵ ضلعی را به دست آورید.

۲۹- حاصل $A=(۱+x+x^۲+\cdots+x^۸)(۱-x+x^۲-\cdots+x^۸)$ را به ازای $\quad=\sqrt{۲}$ به دست آورید.

۳۰- بین دو عدد ۱۵۳۶ و ۳، هشت عدد طوری قرار می‌دهیم که اعداد تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. مجموع این واسطه‌ها را به دست آورید.

۳۱- توپی را از ارتفاع ۵۰ متری رها می‌کنیم تا در یک مسیر مستقیم با زمین برخورد کند. بعد از هر بار برخورد توپ با زمین، $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. وقتی توپ برای بار هفتم با زمین برخورد می‌کند، چه مسافتی را پیموده است؟

۳۲- اگر $\quad=۲$ باشد، حاصل $(x^{۳۱}-۱)(۱+x^{-۱}+x^{-۲}+\cdots+x^{-۳۰})^{-۱}$ را به دست آورید.

۳۳- ثابت کنید: $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+x^{n-۳}y^۲+\cdots+y^{n-۱})$

C سؤال‌های فضایی

۳۴- یک دنبالهٔ حسابی ۱۰۰ جمله دارد. اگر جمع سه جملهٔ اول با سه جملهٔ آخر برابر ۱۵۰ باشد، مجموع همهٔ جمله‌ها چه‌قدر است؟

۳۵- در مسئلهٔ ۱۳ اگر دونده تا پایان زمان،   ۹۰۰ را طی کرده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟

۳۶- مقدار   را از معادلهٔ $۱+۵+۹+\cdots+\quad=۲۳۱$ به دست آورید.

۳۷- اعداد طبیعی را به صورت $\{۱\},\{۲,۳,۴\},\{۵,۶,۷,۸,۹\},\dots$ دسته‌بندی می‌کنیم (یعنی آخرین جملهٔ هر دسته، مربع کامل است). مجموع جمله‌های دستهٔ یازدهم را به دست آورید.

۳۸- a_n یک دنبالهٔ حسابی است. حاصل $S=\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_n}$ را بیابید.

۳۹- جمله‌های سوم، هفتم و نهم از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر صفر است؟

۲ معادلات درجه دوم

سلام بچه‌ها. خوبین؟ سال پیش با n روش، معادلهٔ درجه‌دوم رو حل کردین. باید یاد بگیرین معادلهٔ درجهٔ ۲ رو سریع حل کنین، پس پلهٔ اول رو خوب بخونین. بین ریشه‌های معادله و ضرایب اون، روابط جالبی وجود داره که امروز می‌خوایم با هم بخونیم. بعدش یکم سهمی و ...

پلهٔ اول: یادآوری روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

یک بار برای همیشه تکلیف خودتان را با معادلهٔ درجه‌دوم روشن کنید (*دیدم که می‌گم. دانش‌آموز کنکوری بلد نبوده درجهٔ ۲ حل کنه!*). در صورت برخورد با معادلهٔ درجه‌دوم **به ترتیب** (*گفتم به ترتیب نه این‌که سریع بری ۵*) روش‌های زیر را امتحان کنید.

۱ اگر جمع ضرایب برابر صفر باشد یعنی $a+b+c=۰$، یکی از ریشه‌ها $x_۱=۱$ و دیگری $x_۲=\frac{c}{a}$ است. مثلاً جمع ضرایب معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۳=۰$ برابر صفر است $(۲-۵+۳=۰)$؛ پس $x_۱=۱$ و $x_۲=\frac{۳}{۲}$.

۲ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x_۱=-۱$ و دیگری $x_۲=-\frac{c}{a}$ است. مثلاً جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x+۱=۰$ به صورت $x_۱=-۱$ و $x_۲=-\frac{۱}{۲}$ است.

۳ از روش تجزیه استفاده کنید. این‌جا دو حالت ممکن است به وجود آید. اگر $a=۱$ (*ضریب* $x^۲$) باشد که خوش به حالتان است. با اتحاد یک جملهٔ مشترک به راحتی تجزیه می‌کنید. مثلاً:

$$x^۲-۵x+۶=۰ \xrightarrow{\text{دو عدد پیدا کنید که } -۵=\text{جمع و } ۶=\text{ضرب}} -۲,-۳ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۳ \end{cases}$$

اما اگر $a\neq ۱$ باشد کمی داستان می‌شود! یک روش خوب و سریع به اسم ac در این‌جا وجود دارد. روی دو مثال ببینید:

$$\text{مثلاً}: ۲x^۲+۵x-۳=۰ \xrightarrow{\text{a را در c ضرب کرده و a را حذف کنید}} x^۲+۵x-۶=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه‌کنید}} (x+۶)(x-۱)=۰$$

$$\xrightarrow{\text{یکی از اعداد را بر a (یعنی ۲) تقسیم و x پرانتز دیگر را در a ضرب کنید}} (x+\frac{۶}{۲})(۲x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳ \\ ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\text{مثلاً}: ۶x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow (x+\underset{\text{تقسیم بر ۶}}{\boxed{\frac{۳}{۶}}})(\underset{\text{ضرب در ۶}}{\boxed{۶x}}-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۱}{۲} \\ x=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

۴ اگر معادلهٔ گردن‌کلفت شما! با هیچ‌کدام از روش‌های بالا حل نشد، نگران نباشید! چون روش Δ همهٔ معادله‌ها را حل می‌کند. $\Delta=b^۲-۴ac$ (*بُدو دنبال ۴ اسب سفید*) را به دست می‌آورید.

اگر $\Delta>۰$ باشد، دو ریشه از رابطهٔ $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ به دست می‌آید.

اگر $\Delta=۰$ باشد، دو ریشهٔ بالا تبدیل به یک ریشهٔ مضاعف $-\frac{b}{۲a}$ می‌شود.

اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

پلهٔ دوم: جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

فرض کنید معادلهٔ درجه‌دوم، دارای دو ریشهٔ α و β باشد (یعنی $\Delta>۰$ باشد). می‌خواهیم بدون محاسبهٔ ریشه‌ها (*یوهوی!*) جمع و ضرب ریشه‌ها یعنی $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به دست آوریم (*حالا خود ریشه‌ها چی هستن به ما ربطی نداره!*):

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲b}{۲a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{(-b)^۲-\sqrt{\Delta}^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

جمع ریشه‌ها را S (از Sum به معنی جمع) و ضرب آن‌ها را P (از Product به معنی ضرب) می‌نامیم. پس:

$$\boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}} \qquad \boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$$

مثلاً در معادلهٔ $2x^2-7x-1=0$ جمع و ضرب ریشه‌ها می‌شوند:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2}\ ,\ P=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

مثال و پاسخ

مثال اگر α و β، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+1=0$ باشند، بدون محاسبهٔ ریشه‌ها، حاصل $\alpha^2+\beta^2$، $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$، $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$، $\alpha^3+\beta^3$، $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ و $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ را به دست آورید.

پاسخ قبل از همه S و P را به دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

حالا هر عبارت را به S و P ربط می‌دهیم:

الف) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=(\frac{5}{2})^2-2(\frac{1}{2})=\frac{21}{4}$

ب) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=S^2-2P\\ \alpha^3+\beta^3&=S^3-3SP\end{aligned}}$$
(حفظ باشین خوبه!)

پ) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$

ت) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=(S)(S^2-2P-P)=S^3-3SP=(\frac{5}{2})^3-3(\frac{5}{2})(\frac{1}{2})=\frac{95}{8}$

ث) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=PS=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$

ج) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}=\frac{5}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{2}}$

مثال در معادلهٔ $4x^2-16x+m=0$ یکی از ریشه‌ها دو واحد بیشتر از ریشهٔ دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه را بیابید. *(نهایی ۸۷)*

پاسخ در این مسئله‌ها S و P و رابطهٔ مسئله را بنویسید. مجهول‌ها خودشان به دست می‌آیند!

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{-16}{4}=4\\ P=\alpha\beta=\frac{m}{4}\\ \alpha=\beta+2 \xrightarrow{\text{(جای‌گذاری تو اولی)}} \beta+2+\beta=4 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow \alpha=3 \xrightarrow{\text{(تو دومی)}} 3=\frac{m}{4} \Rightarrow m=12\end{cases}$$

پلهٔ سوم: تشکیل معادلهٔ درجه دوم

می‌خواهیم معادلهٔ درجه‌دومی بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشد. خُب! خیلی ساده، معادلهٔ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ را می‌نویسیم. با ضرب و ساده‌کردن داریم:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow \boxed{x^2-Sx+P=0}$$

یعنی کافی است اول جمع و ضرب دو ریشه را به دست بیاوریم و بعد در فرمول بالا به جای S و P جای‌گذاری کنیم. مثلاً می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ باشد. اول S و P را به دست می‌آوریم:

$$S=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2\ ,\ P=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-2x+(-1)=0$$ *(معادله‌ای که ریشه‌هاش $1\pm\sqrt{2}$ هستش)*

مثال و پاسخ

مثال α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ هستند. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد.

پاسخ برای نوشتن معادله‌ای که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta} = {}_۱$ و $\frac{\beta}{\alpha} = {}_۲$ باشد، باید ${}_۲$ ${}_۱ +$ و ${}_۲$ ${}_۱$ را به دست آوریم. توجه دارید که α و β ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده هستند؛ پس $\alpha + \beta = -\frac{-۱}{۱} = ۱$ و $\alpha\beta = -۱$. حالا:

$$S' = x_۱ + x_۲ = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha\beta} = \frac{S^۲ - ۲P}{P} = \frac{۱ - ۲(-۱)}{-۱} = -۳$$

$$P' = x_۱ x_۲ = (\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\beta}{\alpha}) = ۱ \Rightarrow x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$$

پلهٔ چهارم: تغییر متغیر برای حل معادله‌ها

برخی از معادله‌ها درجه‌دوم نیستند، ولی با یک تغییر متغیر تبدیل به درجهٔ ۲ شده و قابل حل می‌شوند.

مثال و پاسخ

مثال معادلهٔ $(\frac{x^۲}{۲} - ۱)^۲ + (\frac{x^۲}{۲} - ۱) - ۲ = ۰$ را حل کنید. (نهایی ۹۵)

پاسخ $\frac{x^۲}{۲} - ۱ = t$ می‌گیریم، پس:

$$t^۲ + t - ۲ = ۰ \Rightarrow (t-۱)(t+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} - ۱ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ t + ۲ = ۰ \Rightarrow t = -۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} - ۱ = -۲ \Rightarrow x^۲ = -۲ \end{cases}$$

جواب ندارد.

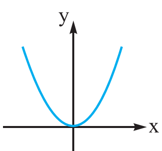
پلهٔ پنجم: یادآوری نمودارهای برخی از توابع

در سال گذشته رسم برخی از تابع‌ها را یاد گرفتید. خوب است قبل از این‌که به درس جدید بپردازیم، مروری روی آن‌ها داشته باشیم:

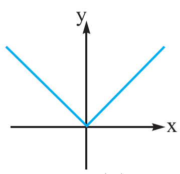
۱ نمودار تابع‌های ثابت با ضابطهٔ $y = k$ یا $f(x) = k$ به صورت یک خط افقی است. (یک عدد حقیقی است.)

۲ نمودار تابع‌های خطی با ضابطهٔ $f(x) = ax + b$ به صورت یک خط است. برای رسم، دو مقدار دلخواه به جای   قرار داده، مقدار   ها را به دست می‌آوریم و آن‌ها را وصل و ادامه می‌دهیم. البته توجه دارید اگر دامنهٔ تابع محدودیت خاصی داشته باشد، نمودار فقط به ازای همان   ها قابل‌قبول می‌شود.

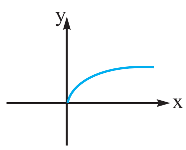
۳ نمودار تابع‌های $f(x) = x^۲$ و $f(x) = |x|$ و $f(x) = \sqrt{x}$ به صورت زیر است. آن‌ها را به خاطر بسپارید.



$f(x) = x^۲$
(یوشکل)



$f(x) = |x|$
(هفتی‌شکل)



$f(x) = \sqrt{x}$

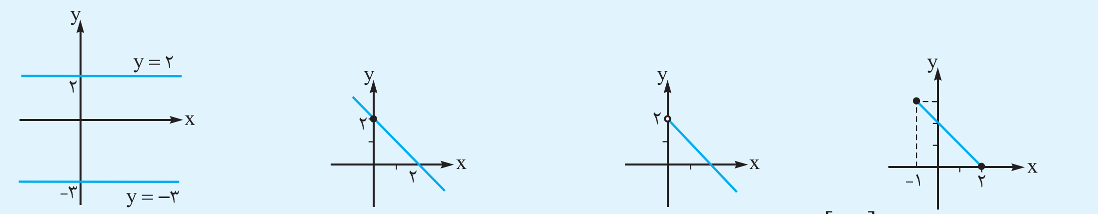
۴ برای رسم تابع $y = f(x-k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را   واحد به راست و برای رسم تابع $y = f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را   واحد به چپ ببریم ($k > ۰$). *(آره درسته یه جورایی برعکس عمل می‌کنه!)*

۵ برای رسم تابع $y = f(x) \pm k$ کافی است نمودار $f(x)$ را   واحد بالا یا پایین ببریم. ($k > ۰$ هستش $+k$ باشه بالا میره، $-k$ باشه پایین)

۶ برای رسم تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور افقی، قرینه کنیم.

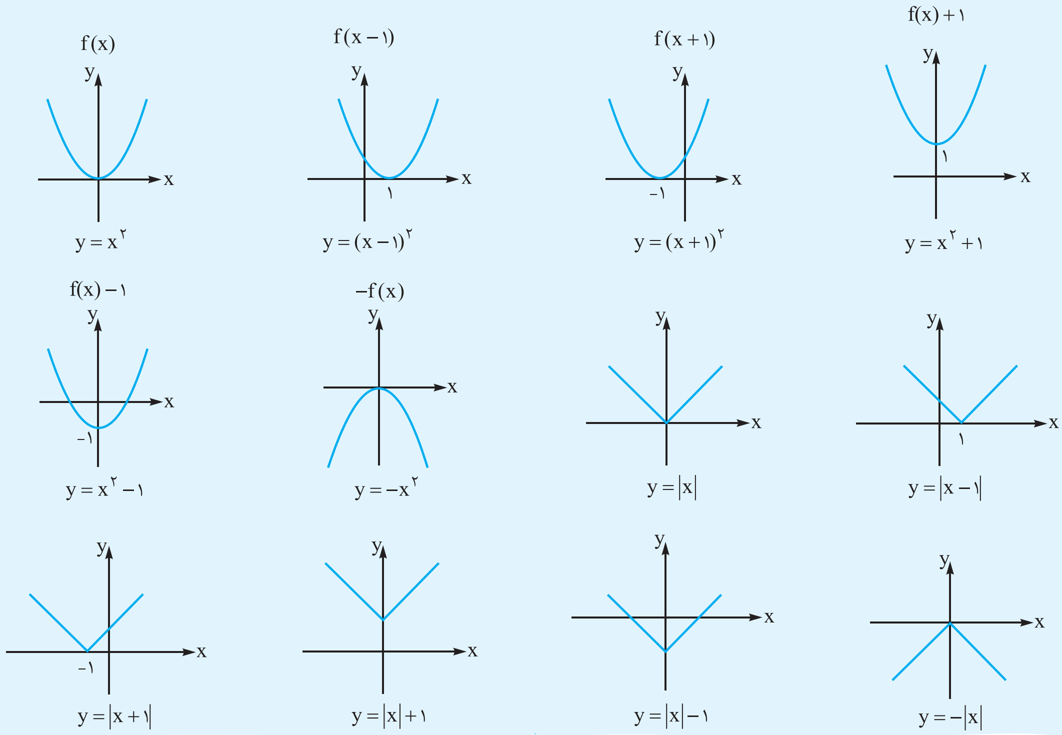
مثال و پاسخ

مثال



نمودار دو تابع افقی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ — نمودار تابع $y=-x+2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ — نمودار تابع $y=-x+2$ با دامنهٔ $(0,+\infty)$ — نمودار تابع $y=-x+2$ با دامنهٔ $[-1,2]$

مثال



پلهٔ ششم: رسم نمودار تابع‌های درجه دوم (سهمی)

ضابطهٔ یک تابع درجه‌دوم به دو صورت ممکن است داده شده باشد. در هر دو حالت نمودار آن به سادگی رسم می‌شود:

۱ فرم مربع کامل $y=a(x-x_0)^2+y_0$: ریشهٔ داخل پرانتز همان طول رأس سهمی است، یعنی $x=x_0$. عدد ثابت سمت راست (y_0) هم عرض رأس سهمی است، پس مختصات رأس سهمی $S(x_0,y_0)$ خواهد بود. مثلاً رأس سهمی $y=(x+2)^2-1$ نقطهٔ $(-2,-1)$ است. با قراردادن یکی دو نقطه بیشتر و کم‌تر از طول رأس در ضابطه و به دست آوردن نقطه‌ها، سهمی رسم می‌شود.

۲ فرم استاندارد $y=ax^2+bx+c$: در این حالت طولِ رأس سهمی می‌شود: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. با قراردادن این نقطه به جای x، عرض رأس سهمی هم به دست می‌آید. نمی‌دانم یادتان هست که عرض رأس سهمی را از رابطهٔ $y_0=-\dfrac{\Delta}{4a}$ هم می‌توانستید به دست آورید. مختصات رأس سهمی در این حالت می‌شود: $S(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a})$. در هر دو فرم بالا، نکته‌های زیر هم برقرار است:

نکتهٔ ۱ اگر $a>0$، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ دهانهٔ سهمی رو به پایین درمی‌آید. اگر دهانه رو به بالا باشد نمودار این شکلی  و رأس سهمی پایین‌ترین نقطه است. در این حالت می‌گوییم سهمی نقطهٔ مینیمم (Min) دارد. اگر $a<0$ دهانه رو به پایین بوده و نمودار این شکلی  است. در این‌جا رأس سهمی بالاترین نقطه است، پس می‌گوییم سهمی ماکسیمم (Max) دارد.

نکتهٔ۲: $x=-\frac{b}{۲a}$ همواره یک خط عمودی است که محور تقارن سهمی است.

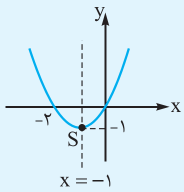
نکتهٔ۳: در صورتی که سهمی a داشته باشد، عرض رأس سهمی بیشترین مقدار تابع و در صورتی که n داشته باشد، عرض رأس، کم‌ترین مقدار تابع است.

مثال و پاسخ

مثال: با استفاده از مختصات نقطهٔ رأس، هر سهمی را رسم می‌کنیم:

الف) $y=(x+۱)^{۲}-۱$

x	−۲	−۱	۰
y	۰	−۱	۰



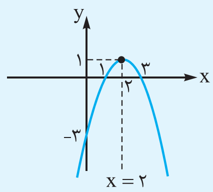
$$S\left|\begin{array}{l} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ -۱ \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x=-۱ & \text{معادلهٔ محور تقارن} \\ a>۰ \Rightarrow & \text{دهانه رو به بالا} \end{cases}$$

سهمی مینیمم دارد. $=-۱$ طول نقطهٔ مینیمم است. $=-۱$ هم عرض نقطهٔ مینیمم (کم‌ترین مقدار) تابع است.

ب) $y=-x^{۲}+۴x-۳$

x	۰	۱	۲	۳
y	−۳	۰	۱	۰



$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{-۲}=۲ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y=۱$$

$$\begin{cases} x=۲ & \text{معادلهٔ محور تقارن} \\ a<۰ \Rightarrow & \text{دهانه رو به پایین} \end{cases}$$

سهمی ماکسیمم داشته، $=۲$ طول نقطهٔ ماکسیمم و $=۱$ عرض نقطهٔ ماکسیمم (بیشترین مقدار) تابع است.

مثال: معادلهٔ سهمی را به دست آورید که نقطهٔ $S(۱,۲)$ رأس آن بوده و از نقطهٔ $(۲,۰)$ عبور کند.

پاسخ: می‌توانیم فرم مربع کامل یا فرم استاندارد سهمی را به دست آوریم. رأس $S(۱,۲)$ است؛ پس فرم مربع کامل $y=a(x-۱)^{۲}+۲$ است. سهمی از نقطهٔ $(۲,۰)$ عبور می‌کند؛ پس می‌توانیم این نقطه را جای‌گذاری کنیم:

$$۰=a(۲-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow y=-۲(x-۱)^{۲}+۲$$

اگر می‌خواستیم از روی فرم استاندارد برویم، کار طولانی‌تر می‌شد. معادله را به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} S(۱,۲)\ \text{روی تابع است} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} ۲=a+b+c \\ x=۱ \xrightarrow{\text{طول رأس}} -\frac{b}{۲a}=۱ \Rightarrow b=-۲a \\ (۲,۰)\ \text{روی تابع است} \Rightarrow ۰=۴a+۲b+c \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{به جای b قرار می‌دهیم } -۲a]{\text{در معادله‌های اول و سوم}} \begin{cases} ۲=-a+c \\ ۰=c \end{cases} \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow b=۴$$

پس معادلهٔ سهمی می‌شود $y=-۲x^{۲}+۴x$ *(یه موقع فکر نکنی $y=-۲x^{۲}+۴x$ با $y=-۲(x-۱)^{۲}+۲$ فرق داره؛ دیدم که می‌گم!)*

پلهٔ هفتم: به دست آوردن علامت ضرایب سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ از روی نمودار

فرض کنید نمودار یک سهمی داده شده است. از روی آن اطلاعات زیادی می‌توانیم به دست آوریم. یکی هم، علامت‌های a، و است:

۱) علامت a که از روی دهانه به دست می‌آید. اگر دهانه رو به بالا $a>۰$ است و اگر رو به پایین باشد $a<۰$ است.

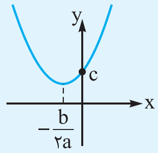
۲) طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است. از روی نمودار ببینید طول رأس، مثبت یا منفی است. حالا با توجه به علامت a، علامت را به دست آورید.

۳) به ازای $=۰$ ، $y=c$ می‌شود، یعنی محل برخورد نمودار با محور ها، همان است.

مثال و پاسخ

مثال با توجه به نمودار هر سهمی علامت ضرایب ، و را مشخص کنید.

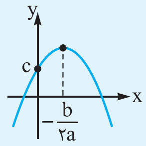
پاسخ



دهانه رو به بالا $\Rightarrow a > 0$

$x = -\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a>0} b > 0$

محل برخورد با محور ها $= \Rightarrow > 0$



دهانه رو به پایین $\Rightarrow a < 0$

طول رأس $= -\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a<0} b > 0$

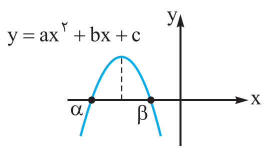
محل برخورد با محور ها $= \Rightarrow > 0$

پلهٔ هشتم: صفرهای تابع

بار دیگر به مثال پلهٔ ششم برگردید. در نمودار (الف)، به $-2 =$ و $= 0$ صفرهای تابع $y = (x+1)^2 - 1$ گفته می‌شود. حالا چرا صفر؟ چون یا عرض این نقطه‌ها برابر صفر هستند. به عبارت دیگر اگر در تابع $0 =$ قرار دهیم، این دو نقطه به دست می‌آیند. بنابراین می‌توان گفت این دو نقطه ریشه‌های معادلهٔ $(x+1)^2 - 1 = 0$ هستند. در نمودار (ب) نیز $x = 1, 3$ صفرهای تابع داده‌شده یا ریشه‌های معادلهٔ $- \quad ^2 + 4 \quad - 3 = 0$ هستند.

در حالت کلی:

صفرهای تابع $y=f(x)$ ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ را صفرهای تابع می‌گوییم. این نقاط همان، محل برخورد نمودار تابع با محور ها هستند. مثلاً از روی نمودار تابع‌های زیر می‌فهمیم:

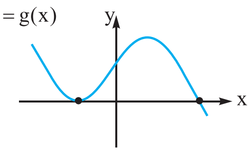


دو نقطهٔ برخورد

تابع دوتا صفر دارد. $\Rightarrow$

معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه دارد. $\Rightarrow$

هر دو ریشه منفی هستند. $\Rightarrow$

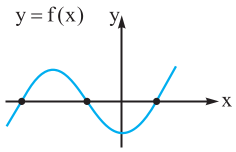


دو نقطهٔ برخورد

تابع دوتا صفر دارد. $\Rightarrow$

معادلهٔ $g(x) = 0$ دوتا ریشه دارد. $\Rightarrow$

یکی از ریشه‌ها مثبت و دیگری منفی است. $\Rightarrow$



سه نقطهٔ برخورد با محور ها

تابع ۳تا صفر دارد. $\Rightarrow$

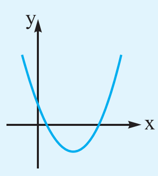
معادلهٔ $f(x) = 0$، ۳تا ریشه دارد. $\Rightarrow$

دوتا از ریشه‌ها منفی و یکی مثبت است. $\Rightarrow$

پس از روی نمودار سهمی، نه تنها تعداد ریشه‌ها، بلکه علامت‌های آن‌ها را هم می‌توانیم به دست آوریم. در نمودار سمت راست، بد نیست این را هم بررسی کنیم، α و β ریشه‌های معادله هستند. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ است. طول رأس هم $-\frac{b}{2a}$ است، یعنی طولِ رأس، در وسط ریشه‌ها قرار دارد.

مثال و پاسخ

مثال نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. با استفاده از صفرهای تابع، علامت ضرایب ، و را بیابید.

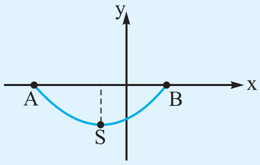


پاسخ با پلهٔ هفتم هم می‌توانیم علامت‌ها را به دست بیاوریم ولی گفته با صفرهای تابع. ببینید دهانه که رو به بالا است پس $a > 0$ است. تابع دوتا صفر (دو ریشه) مثبت دارد، پس جمع آن‌ها هم مثبت است. از طرفی جمع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ است، پس $-\frac{b}{a} > 0$. حالا چون $a > 0$ است، باید منفی باشد. ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ هم مثبت است، حالا چون $a > 0$ است، پس > 0. *(با اون یکی روش هم به دست بیار ببین همین می‌شه.)*

مثال و پاسخ

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مثال: دره‌ای مطابق شکل روبه‌رو با معادلهٔ $y=x^۲+۶x-۴۰$ مدل‌سازی می‌شود.



الف) مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی دره یعنی A و B را به دست آورید.

ب) اگر   برحسب کیلومتر باشد، طول   را به دست آورید.

پ) اگر دره را متقارن فرض کنیم، بیشترین عمق دره چه‌قدر است؟

پاسخ: الف) نقاط A و B همان صفرهای تابع هستند؛ پس:

$$x^۲+۶x-۴۰=۰ \Rightarrow (x+۱۰)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱۰ \\ x=۴ \end{cases}$$

پس $A(-۱۰,۰)$ و $B(۴,۰)$ خواهد بود.

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر ۱۴ km است.

پ) بیشترین عمق در رأس سهمی اتفاق می‌افتد. طول رأس در وسط صفرهای تابع است؛ پس:

$$x_S=\frac{-۱۰+۴}{۲}=-۳$$

با قراردادن x_S در تابع y_S به دست می‌آید:

$$y_S=۹-۱۸-۴۰=-۴۹$$

پس بیشترین عمق برابر ۴۹ کیلومتر است.

پلهٔ نهم: به‌دست‌آوردن تابع از روی صفرها

خُب این همه راجع به صفرهای تابع صحبت کردیم که چی بشود *(سؤال معروف شما، آقا این همه درس به چه درد ما می‌خوره؟)*

از روی صفرهای تابع، می‌توانیم فرم ضابطهٔ تابع را مشخص کنیم. ببینید مثلاً وقتی $x=۲$، صفر یک تابع چندجمله‌ای است، با قراردادن $x=۲$ حاصل، صفر می‌شود. پس حتماً عاملی در درون ضابطه وجود داشته است که باعث به وجود آمدن صفر شده است. این عامل $x-۲$ است. به عبارت دیگر در تجزیهٔ آن عامل $x-۲$ وجود داشته است. حالا فرض کنید α و β ریشه‌های تابع درجه‌دوم هستند. در تجزیهٔ این تابع درجه‌دوم حتماً $(x-\alpha)(x-\beta)$ وجود دارد. بنابراین ضابطهٔ تابع درجه‌دوم به صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ بوده است. این فرمِ سهمی را **تجزیه‌شده** می‌گوییم.

مثال و پاسخ

مثال: یکی از صفرهای تابع $y=x^۳+kx^۲+x-۲$ برابر $\;\;=-۲$ است. صفرهای دیگر تابع را بیابید.

پاسخ: اول باید k را به دست آوریم. $x=-۲$ صفر تابع است؛ یعنی با جای‌گذاری آن در تابع، حاصل صفر می‌شود:

$$-۸+۴k-۲-۲=۰ \Rightarrow k=۳ \Rightarrow y=x^۳+۳x^۲+x-۲$$

حالا $x=-۲$ صفر تابع است، پس تابع بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. با تقسیم داریم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳}+۳x^۲+x-۲ & x+۲ \\ \hline -\cancel{x^۳}-۲x^۲ & x^۲+x-۱ \\ \hline \cancel{x^۲}+x-۲ & \\ -\cancel{x^۲}-۲x & \\ \hline -x-۲ & \\ +x+۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

(حتماً باید صفر بشه اگه نشه یه جای‌کار می‌لنگه!)

$$x^۳+۳x^۲+x-۲=(x+۲)(x^۲+x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow \underbrace{x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}}_{\text{صفرهای دیگر}} \end{cases}$$

بچه‌ها این روش یکی از روش‌های حل معادلهٔ درجه‌سوم است. اگر بتوانید یکی از ریشه‌ها (صفرهای تابع) را با جستجو (معمولاً بین مقسوم‌علیه‌های عدد ثابت تابع) بیابید، مثل بالا بقیهٔ ریشه‌ها به دست می‌آید.

مثال و پاسخ

مثال **یک سهمی از نقاط $(-۱,۰)$، $(۲,۰)$ و $(۳,۳)$ عبور می‌کند. معادلهٔ سهمی را بیابید.**

پاسخ می‌توانیم فرم سهمی را به صورت مربع کامل یا استاندارد بگیریم و با جای‌گذاری نقطه‌ها معادلهٔ سهمی را به دست بیاوریم. اما دقت کنید $x = ۲,-۱$ صفرهای تابع هستند ($y = ۰$ *می‌شه*). پس بهتر است از فرم تجزیه‌شده استفاده کنیم. معادلهٔ سهمی به صورت $y = a(x+۱)(x-۲)$ است. حالا با جای‌گذاری نقطهٔ $(۳,۳)$ داریم:

$$۳ = a(۴)(۱) \Rightarrow a = \frac{۳}{۴} \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}(x+۱)(x-۲)$$

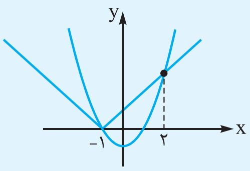
پلهٔ دهم: حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به روش هندسی (نموداری)

برای حل معادلهٔ $f(x) = g(x)$ باید هایی را به دست آوریم که با قراردادن آن‌ها در هر دو تابعِ و ، مقدارهای یکسانی به دست می‌آید. خیلی ساده نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. های برخورد، همان جواب‌های معادله هستند. توجه کنید این روش علاوه بر این‌که تعداد جواب‌ها را به ما می‌دهد، خود جواب‌ها را هم در صورتی که **رُند** باشند، به دست می‌دهد. البته اگر مقدار جواب‌ها رُند نباشد، با این روش فقط می‌توان محدودهٔ جواب‌ها را پیدا کرد.

مثال و پاسخ

مثال **معادلهٔ $|x+۱| = x^۲ - ۱$ را با روش هندسی حل کنید.**

پاسخ با توجه به پلهٔ پنجم برای رسم $y = |x+۱|$ کافی است؛ نمودار قدرمطلق (*هفتی‌شکل*) را یک واحد به چپ (*آره درست دیدی چپ*) ببریم. برای رسم $y = x^۲ - ۱$ هم نمودار $y = x^۲$ (*یوشکل*) را یک واحد پایین می‌بریم. معادله دو جواب $= ۲$ و $= -۱$ دارد. می‌دانم الان دستتان بالا می‌رود و می‌پرسید از کجا فهمیدیم در $= ۲$ برخورد می‌کنند؟ ببینید اولاً نمودارها را تمیز و دقیق رسم کنید. با این کار حدس می‌زنیم نقطهٔ برخورد $= ۲$ است. حالا $= ۲$ را در هر دو تابع قرار دهید. می‌بینیم مقدارها مساوی است و این یعنی نقطهٔ برخورد.



پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱- الف) جمله‌های ردیف زوج به صورت $-۱,\boxed{۳},۷,\boxed{۱۱},\ldots$ هستند؛ پس خودشان یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۸+ خواهند بود.

ب) $S_۱ = ۲ = a_۱$ و $S_۲ = ۶ = a_۱ + a_۲$ است، پس $a_۲ = ۴$ خواهد بود.

۲- الف) $۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{n=۱۰} ۱+۲+\cdots+۱۰ = \frac{۱۰\times۱۱}{۲} = ۵۵$ (در مجموع ۵۵ سکه)

ب) از نقطهٔ اول به هر کدام از ۹ نقطهٔ دیگر، از نقطهٔ دوم به ۸ نقطهٔ باقی‌مانده و ... پس در کل داریم:

$۹+۸+۷+\cdots+۱ = \frac{۹\times۱۰}{۲} = ۴۵$ (در مجموع ۴۵ وتر)

۳- در هر قسمت $a_۱$ و d را به دست آورده و در رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

الف) $-۵,-۳,-۱,\ldots \xrightarrow[d=۲]{a_۱=-۵} S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۲)) = ۲۸۰$

ب) $-۵,۰,۵,\ldots \xrightarrow[d=۵]{a_۱=-۵} S_{۲۰} = ۱۰(-۱۰+۱۹(۵)) = ۸۵۰$

پ) $a_n = ۳n-۱ \Rightarrow ۲,۵,۸,\ldots \xrightarrow[d=۳]{a_۱=۲} S_{۲۰} = ۱۰(۴+۱۹(۳)) = ۶۱۰$

ت) $a_n = \frac{n}{۲}+۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲},۲,\ldots \xrightarrow[d=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}]{a_۱=\frac{۳}{۲}} S_{۲۰} = ۱۰(۳+۱۹(\frac{۱}{۲})) = ۱۲۵$

۴- باید ببینیم با جمع‌کردن چند جمله (*یعنی n مجهوله*) $S_n = ۱۷۶$ می‌شود.

$\frac{n}{۲}(۲+(n-۱)(۳)) = ۱۷۶ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n-۱) = ۱۷۶ \xrightarrow{\times ۲} n(۳n-۱) = ۳۵۲$

(طرف اومده معادلهٔ بالا رو حل کنه وقت نهایی تموم شده! دیدم که می‌گم.)

می‌توانیم با روش Δ معادلهٔ درجه‌دوم را حل کنیم اما طولانی خواهد بود. چون n عددی طبیعی است بهتر است با جستجو آن را به دست آوریم:

$n=۱۰ \Rightarrow ۱۰\times(۲۹) = ۲۹۰ \xrightarrow{(\text{کمه})} n=۱۱ \Rightarrow ۱۱(۳۲) = ۳۵۲ \checkmark \Rightarrow$ جمع یازده جمله

۵- باید ببینیم به ازای کدام n، $S_n > ۱۲۵$ می‌شود. با استفاده از فرمول S_n داریم:

$\frac{n}{۲}(-۲+۳(n-۱)) > ۱۲۵ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n-۵) > ۱۲۵ \xrightarrow{\times ۲} n(۳n-۵) > ۲۵۰ \xrightarrow{(\text{با جستجو برای } n)} n = ۱۰$

$\Rightarrow ۱۰(۲۵) > ۲۵۰$ برقرار نیست $\Rightarrow n \geq ۱۱$

با جمع حداقل یازده جمله، از ۱۲۵ بیشتر می‌شود.

۶- شبیه مسئلهٔ قبلی باید $S_n > ۳۰۰$ باشد:

$\frac{n}{۲}(\overbrace{۶+(n-۱)(۶)}^{۶n}) > ۳۰۰ \Rightarrow ۳n^۲ > ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ > ۱۰۰ \Rightarrow n > ۱۰ \Rightarrow n \geq ۱۱$

توجه دارید چون n عددی طبیعی است؛ پس $n < -۱۰$ دیگر قابل‌قبول نیست *(و إلا تو حالت کلی از $x^۲ > ۱۰۰$ با رادیکال‌گیری نتیجه می‌گیریم $|x| > ۱۰$. از این هم می‌شه $x > ۱۰$ یا $x < -۱۰$.)*

۷- اول جمله‌های فارسی را به زبان ریاضی بنویسیم. بعد هم با فرمول S_n و a_n باز می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{۲۰} = ۳S_{۱۲} \Rightarrow \frac{۲۰}{\cancel{۲}}(۲a_۱+۱۹d) = ۳\times\frac{۱۲}{\cancel{۲}}(۲a_۱+۱۱d) \xrightarrow[\text{و ساده‌سازی}]{\div ۴} \\ a_۳ = ۶ \Rightarrow a_۱+۲d = ۶ \end{cases} \begin{cases} ۸a_۱+۴d = ۰ \\ \times(-۸)\quad a_۱+۲d = ۶ \end{cases}$$

$$d = ۴ \Rightarrow a_۱ = -۲$$

۸- مجموع ۵ جملهٔ اول همان $S_۵$ است، پس $S_۵ = ۱۰$. مجموع ۵ جملهٔ بعدی یعنی $a_۶+a_۷+\cdots+a_{۱۰}$. برای این جمع کافی است جمع جمله‌های اول تا دهم را از جمع جمله‌های اول تا پنجم کم کنیم. پس $S_{۱۰}-S_۵ = ۳۵$.

$$\begin{cases} S_۵ = ۱۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d) = ۱۰ \Rightarrow ۵a_۱+۱۰d = ۱۰ \xrightarrow{\div ۵} \\ S_{۱۰}-۱۰ = ۳۵ \Rightarrow S_{۱۰} = ۴۵ \Rightarrow ۵(۲a_۱+۹d) = ۴۵ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a_۱+۲d = ۲ \\ ۲a_۱+۹d = ۹ \end{cases}$$

$$d = ۱ \Rightarrow a_۱ = ۰$$

پس: $S_{۵۰} = ۲۵(۰+۴۹(۱)) = ۱۲۲۵$

۹- S_n همان جمع جمله‌های اول تا n را به ما می‌دهد. پس:

الف) $n=۱۰ \Rightarrow S_{۱۰}=۱۰\times ۳۹=۳۹۰$

ب) $a_۶+a_۷+\cdots+a_{۱۵}=S_{۱۵}-S_۵=۱۵(۵۹)-۵(۱۹)=۷۹۰$

پ) طبق توضیحات پلهٔ چهارم:

$$S_۱=۳ \Rightarrow a_۱=۳\ ,\ S_۲=۱۴ \Rightarrow \overbrace{a_۱}^{۳}+a_۲=۱۴ \Rightarrow a_۲=۱۱ \Rightarrow d=a_۲-a_۱=۸$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d=۳+(n-۱)(۸)=۸n-۵$$

۱۰- جمله‌های ردیف زوج همان $\overbrace{a_۲}^{-۴},\overbrace{a_۴}^{۲},\ldots,a_{۲۰}$ هستند (*تعدادشون ۱۰ تاس*). این‌ها خود یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶ هستند، پس مجموع آن‌ها می‌شود: $\frac{۱۰}{۲}(-۸+۹(۶))=۲۳۰$.

جمله‌های ردیف فرد هم همان $\overbrace{a_۱}^{-۷},\overbrace{a_۳}^{-۱},\ldots,a_{۱۹}$ (*تعدادشون بازم ۱۰ تاس*) هستند. این‌ها هم دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶+ هستند پس جمع آن‌ها می‌شود: $\frac{۱۰}{۲}(-۱۴+۹(۶))=۲۰۰$.

۱۱- دو معادله را به صورت ریاضی می‌نویسیم. می‌توانیم آن‌ها را باز و از حل دستگاه دو معادله دو مجهول، $a_۱$ و d را بیابیم. اما صبر کنید اگر این دو معادله را کم کنیم، به نتیجهٔ خوبی می‌رسیم:

$$-\begin{cases} a_۲+a_۴+\cdots+a_{۲۰}=۵۹۰ \\ a_۱+a_۳+\cdots+a_{۱۹}=۵۳۰ \end{cases}$$

$$(a_۲-a_۱)+(a_۴-a_۳)+\cdots+(a_{۲۰}-a_{۱۹})=۶۰ \xrightarrow{\text{اختلاف هر دو جملهٔ متوالی قدرنسبت می‌شه}} \underbrace{d+d+\cdots+d}_{۱۰d}=۶۰ \Rightarrow d=۶$$

جمع ۲۰ جملهٔ اول برابر $۵۳۰+۵۹۰=۱۱۲۰$ است. با فرمول S_n داریم: $S_{۲۰}=۱۰(۲a_۱+۱۹(۶))=۱۱۲۰ \Rightarrow a_۱=-۱$

۱۲- الف) اولین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶، عدد ۱۰۲ (*به ۲ و ۳ می‌خوره*) است. مجموع اعداد $\overset{+۶}{\frown}$ ... $۱۰۲\ ,\ ۱۰۸\ ,\ ۱۱۴,\ldots$ را می‌خواهیم. آخرین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶ نیز عدد ۹۹۶ (*بازم به ۲ و ۳ می‌خوره حالا هی امتحان کن!*) است. حالا ببینیم چندتا عدد داریم:

جملهٔ عمومی با $a_۱=۱۰۲$ و $d=۶$ را نوشته و جملهٔ nام را برابر ۹۹۶ قرار می‌دهیم:

$$۹۹۶=۱۰۲+(n-۱)(۶) \Rightarrow n=۱۵۰ \quad \text{۱۵۰تا عدد داریم} \Rightarrow S_{۱۵۰}=\frac{۱۵۰}{۲}(۲(۱۰۲)+۱۴۹(۶))=۸۲۳۵۰$$

ب) این اعداد $۱۲,۱۷,۲۲,\ldots$ (*دو رقمی‌های به شکل* $۵k+۲$) هستند. آخرین عدد ۹۷ است. شبیه قبلی اول تعداد این اعداد را به دست می‌آوریم:

$$۹۷=۱۲+(n-۱)(۵) \Rightarrow n=۱۸ \Rightarrow S_{۱۸}=۹(۲(۱۲)+۱۷(۵))=۹۸۱$$

۱۳- دونده برای انداختن توپ اول $۲\times ۲=۴$ متر، برای توپ دوم $۲(۲+۳)=۱۰$ متر، برای توپ سوم $۲(۲+۳+۳)=۱۶$ و ... می‌دود. مقدار طی‌شده برای انداختن توپ nام، یک دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۴$ و $d=۶$ می‌شود. حالا:

$$S_n=۳۷۴ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۸+(n-۱)(۶))=\frac{n}{۲}(۶n+۲)=۳n^۲+n=۳۷۴$$

پس ۱۱ توپ را درون سبد انداخته است. $\xrightarrow{\text{به ازای n=۱۰ می‌شه ۳۱۰ پس کمه}} n=۱۱ \Rightarrow ۳(۱۲۱)+۱۱=۳۷۴ \checkmark$

۱۴- الف) در هر دنبالهٔ هندسی حاصل تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی برابر با قدرنسبت است، پس: $q=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

ب) $q=۲$ و $a_۱=\frac{۱}{۴}$ است، پس: $S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-q^{۱۰})}{۱-q}=\frac{\frac{۱}{۴}(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲}=\frac{۱}{۴}(۱۰۲۳)=\frac{۱۰۲۳}{۴}$

پ) توجه دارید که جمع ده جمله (*نَه نُه جمله!*) را می‌خواهیم: $S_{۱۰}=\frac{(۱)(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲}=۱۰۲۳$

۱۵- الف) $a_۱=\frac{۱}{۲},\ q=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{۱۰}=\frac{(\frac{۱}{۲})(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}=\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$

ب) $a_۱=۲\ ,\ q=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow S_{۱۰}=\frac{(۲)(۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۱۰})}{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴(۱-\frac{۲^۵}{۲^{۱۰}})}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{۴\times\frac{۳۱}{۳۲}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{۳۱}{۸(۲-\sqrt{۲})}$

پ) $a_1=2\ ,\ q=-3 \Rightarrow S_{10}=\frac{(2)(1-(-3)^{10})}{1-(-3)}=\frac{1-3^{10}}{2}$

ت) $a_n=\frac{2^{n-1}}{3} \Rightarrow \frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\dots \xrightarrow[q=2]{a_1=\frac{1}{3}} S_{10}=\frac{\frac{1}{3}(1-2^{10})}{1-2}=\frac{1023}{3}=341$

۱۶- $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-126 \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{3}=-126 \Rightarrow 1-(-2)^n=-63 \Rightarrow 64=(-2)^n \Rightarrow n=6$

۱۷- $S_n>500 \Rightarrow \frac{1-3^n}{-2}>500 \Rightarrow \frac{3^n-1}{2}>500 \Rightarrow 3^n-1>1000 \Rightarrow 3^n>1001$

$\xrightarrow{\text{با جستجو}} n\ge 7$ (حداقل ۷ جمله)

۱۸-

$$\begin{cases} a_1+a_3=1 \xrightarrow{a_n=a_1q^{n-1}} a_1+a_1q^2=1 \Rightarrow a_1(1+q^2)=1 \\ S_4=3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} \frac{a_1\cancel{(1-q)}(1+q)(1+q^2)}{\cancel{1-q}}=3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه را تقسیم می‌کنیم}} \frac{\cancel{a_1}(1+q)\cancel{(1+q^2)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1+q^2)}}=3 \Rightarrow q=2 \Rightarrow a_1=\frac{1}{5} \Rightarrow S_6=\frac{63}{5}$$

۱۹- مجموع ۳ جملهٔ اول که همان S_3 است. سه جملهٔ دوم a_4,a_5,a_6 است که جمع آن‌ها برابر S_6-S_3 است.

$$\left.\begin{aligned} & S_3=136 \Rightarrow \frac{(a_1)(1-q^3)}{1-q}=136 \\ & S_6-S_3=17 \Rightarrow S_6=136+17=153 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=153 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(با تقسیم دو طرف و ساده کردن)}} \frac{1-q^6}{1-q^3}=\frac{153}{136}=\frac{9}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}}=\frac{9}{8} \Rightarrow q^3=\frac{1}{8} \Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

۲۰- در فرمول S_n نیاز به a_1 و q داریم.

$$a_3=6 \Rightarrow \overbrace{a_1}^{2}q^2=6 \Rightarrow q^2=3 \xrightarrow{q>0} q=\sqrt{3}$$

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-\sqrt{3}^{10})}{1-\sqrt{3}}=\frac{2(1-3^5)}{1-\sqrt{3}}=\frac{484}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=242(\sqrt{3}+1)$$

۲۱- مساحت مربع برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{1}{2}$، در مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4}$ و ... در مرحلهٔ nام، $(\frac{1}{2})^n$ از مساحت مربع رنگ می‌شود:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+(\frac{1}{2})^n\ge\frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(1-(\frac{1}{2})^n)}{\cancel{1-\frac{1}{2}}}\ge\frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{100}\ge(\frac{1}{2})^n \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شه}]{\text{(هر دو طرف مثبتن با معکوس کردن)}} 100\le 2^n \xrightarrow{\text{جستجو}} 7\le n$$

پس از حداقل ۷ مرحله، ٪۹۹ سطح مربع رنگ می‌شود.

۲۲- توجه کردید که سؤال S_{20} را نمی‌خواهد. گفته حاصل‌ضرب.

حاصل ضرب n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

$$(a_1a_2\dots a_n)=(a_1)(a_1q)(a_1q^2)\dots(a_1q^{n-1})=(a_1)^nq^{1+2+\dots+n-1}=(a_1)^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

در دنبالهٔ هندسی داده‌شده $a_1=2$ و $q=\sqrt{2}$ است. پس:

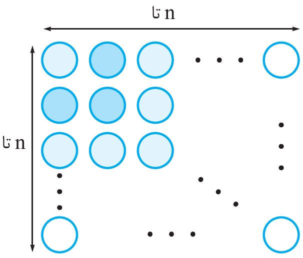
ضرب ۲۰ جملهٔ اول $=2^{20}\times(\sqrt{2})^{\frac{19\times20}{2}}=2^{20}\times(\sqrt{2})^{190}=2^{20}\times2^{95}=2^{115}$

۲۳- $A=\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$

۲۴- روش اول

$$S_n = \underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{\text{مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با } a_1=1 \text{ و } d=2} = \frac{n}{2}(2+2(n-1)) = n^2$$

روش دوم به شکل روبه‌رو توجه کنید. $n\times n = n^2$ دایره در شکل وجود دارد. حالا دایره‌ها را طور دیگری شمارش می‌کنیم. دایره‌ها را با الگوی مقابل آبی و سیاه می‌کنیم. تعداد آن‌ها می‌شود $1+3+5+\cdots+(2n-1)$. چون یک تعداد دایره را شمارش کرده‌ایم دو عبارت به دست آمده، برابرند. پس:



$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

رابطه می‌گوید مجموع n عدد فرد متوالی که از یک شروع می‌شود برابر تعداد آن‌ها به توان ۲ است.

۲۵- رابطهٔ اندیسی در دنبالهٔ حسابی

رابطهٔ جالبی بین جمله‌های دنبالهٔ حسابی به نام رابطهٔ اندیسی وجود دارد. ببینید:

$$(m,n,p,k \text{ اعداد طبیعی}),\ m+n=p+k \Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_k$$

مثلاً $a_2+a_6=a_1+a_7$ **(چون جمع اندیس‌های دو طرف برابر ۸ است) یا** $a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_5+a_5$

البته توجه کنید رابطه‌ای به صورت $a_2+a_8=a_{10}$ **درست نیست (دوتا این‌ور و دوتا اون‌ور و اندیس‌ها رو نمی‌شه جمع کرد).**

طبق رابطهٔ اندیسی داریم:

$$\overbrace{a_6}^{10}+\overbrace{a_6}^{10}=a_1+a_{11}=a_2+a_{10}=\cdots=a_7+a_5$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\overbrace{a_6}^{10}+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=110$$

۲۰

۲۰

۲۶- دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جملهٔ اول می‌شود $S_{10}=5(2a_1+9d)$. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ جدید با جملهٔ اول a_1-2 و $d+3$ نیز می‌شود:

$$S'_{10}=5(2a_1-4+9(d+3))$$

حالا

$$S'_{10}-S_{10}=5[2a_1-4+9(d+3)-2a_1-9d]=115$$

۲۷- طبق نکته‌های پلهٔ دوم $d=\frac{47-3}{10+1}=4$ خواهد بود.

$$3\ \overset{+4}{,}\ \underbrace{\boxed{7},\boxed{\ },\ldots,\boxed{\ }}_{\text{۱۰ واسطه}},47$$

پس واسطه‌ها $7,11,\ldots$ می‌شود. جمع ۱۰ جملهٔ این دنباله برابر است با: $S_{10}=5(14+9(4))=250$. توجه دارید که جمع واسطه‌ها را می‌خواهیم پس جملهٔ اول ۷ است نه ۳.

۲۸- مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب

مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب از رابطهٔ $180(n-2)$ به دست می‌آید.

مجموع زوایای داخلی ۵ ضلعی می‌شود $540=3\times180$. حالا $S_5=540$ است. پس:

$$\frac{5}{2}(2a_1+4(6))=540 \Rightarrow a_1=96^\circ$$

۲۹- اول بگویید ببینیم پرانتز اول جمع ۸ جمله است یا ۹ جمله؟ درست است جمع نه جملهٔ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت x. دومی هم همین‌طور با قدرنسبت $-x$. پس:

$$A=\frac{1-x^9}{1-x}\times\frac{1-(-x)^9}{1+x}=\frac{(1-x^9)(1+x^9)}{1-x^2}=\frac{1-x^{18}}{1-x^2}\xrightarrow{x=\sqrt{2}}A=\frac{1-2^9}{1-2}=511$$

۳۰-

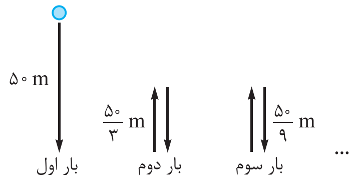
$$\underset{\text{جملهٔ اول}}{3}\ \overset{\times2}{,}\ \underbrace{\boxed{6},\boxed{\ },\ldots,\boxed{\ }}_{\text{۸ واسطه}},\ \underset{\text{جملهٔ دهم}}{1536}$$

$$a_{10}=a_1q^9 \Rightarrow 1536=3\times q^9 \Rightarrow q^9=512 \Rightarrow q=2$$

پس کافی است مجموع ۸ جملهٔ دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۶ و قدرنسبت ۲ را به دست آوریم:

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{6(1-2^8)}{1-2}=\frac{6(-255)}{-1}=1530$$

-۳۱



$$\text{مجموع} = ۵۰ + ۲(\frac{۵۰}{۳}) + ۲(\frac{۵۰}{۳^۲}) + \cdots + ۲(\frac{۵۰}{۳^۶})$$ (دقت‌کردید!)

بار اول فقط از بالا به پایین آمده است $(۵۰\ m)$. اگر این جمله را جدا کنیم، ۶ جملهٔ بعدی تشکیل دنبالهٔ هندسی با $a_۱ = \frac{۱۰۰}{۳}$ و $q = \frac{۱}{۳}$ می‌دهند. پس:

$$\text{مجموع} = ۵۰ + \frac{\frac{۱۰۰}{۳}(۱ - (\frac{۱}{۳})^۶)}{۱ - \frac{۱}{۳}} = ۵۰ + ۵۰(۱ - \frac{۱}{۷۲۹}) = ۵۰(۲ - \frac{۱}{۷۲۹}) = ۵۰ \times \frac{۱۴۵۷}{۷۲۹} \simeq ۱۰۰\ m$$

-۳۲ هر چی هست زیر سر پرانتز دوم هست! یک وقت به سَرتان نزند، توان ۱- را برای همه بیاورید و بنویسید: $۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۳۱}$ *(دیدم که می‌گم!)*

$$A = (x^{۳۱} - ۱)(۱ + \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} + \cdots + \frac{۱}{x^{۳۰}})^{-۱} = (x^{۳۱} - ۱)(\frac{x^{۳۰} + x^{۲۹} + \cdots + ۱}{x^{۳۰}})^{-۱} = \overbrace{(x^{۳۱} - ۱)}^{\text{(اتحاد)}} \times \frac{x^{۳۰}}{(x^{۳۰} + x^{۲۹} + \cdots + ۱)}$$

$$= (x - ۱)\cancel{(x^{۳۰} + x^{۲۹} + \cdots + ۱)} \times \frac{x^{۳۰}}{\cancel{(x^{۳۰} + \cdots + ۱)}} \xrightarrow{x=۲} A = ۲^{۳۰}$$

-۳۳

$$x^n - y^n = y^n((\frac{x}{y})^n - ۱) = y^n(\frac{x}{y} - ۱)((\frac{x}{y})^{n-۱} + (\frac{x}{y})^{n-۲} + \cdots + ۱)$$

$$= \overbrace{y(\frac{x}{y} - ۱)(y^{n-۱})}^{\text{(همون } y^n\text{)}}((\frac{x}{y})^{n-۱} + (\frac{x}{y})^{n-۲} + \cdots + ۱) = (x - y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + \cdots + y^{n-۱})$$

-۳۴ در پلهٔ سوم گفتیم مجموع n جملهٔ اول از $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$ هم به دست می‌آید، پس $S_{۱۰۰} = ۵۰(a_۱ + a_{۱۰۰})$. از طرفی:

$$(a_۱ + a_{۱۰۰}) + (a_۲ + a_{۹۹}) + (a_۳ + a_{۹۸}) = ۱۵۰$$

اما طبق رابطهٔ اندیسی (زیرپلهٔ سؤال ۲۵) $a_۱ + a_{۱۰۰} = a_۲ + a_{۹۹} = a_۳ + a_{۹۸}$. بنابراین $a_۱ + a_{۱۰۰} = ۵۰$ و $S_{۱۰۰} = ۵۰ \times ۵۰ = ۲۵۰۰$ است.

-۳۵ اگر شبیه مسئلهٔ ۱۳، بخواهید معادلهٔ $S_n = ۹۰۰$ را حل کنید، می‌بینید که معادله جواب طبیعی ندارد. احتمالاً قبل از این‌که دونده توپ آخر را درون سبد بیاندازد وقت تمام شده است! باید بزرگ‌ترین مقدار n را طوری به دست آوریم که $S_n < ۹۰۰$.

$n(۳n + ۱) < ۹۰۰ \Rightarrow$ بیشترین مقدار $n = ۱۷$

۱۷ توپ را درون سبد انداخته است.

-۳۶

$$S_n = ۲۳۱ \Rightarrow \frac{n}{۲}(\overbrace{۲ + (n - ۱)(۴)}^{۴n-۲}) = ۲۳۱ \Rightarrow ۲n^۲ - n = ۲۳۱ \Rightarrow n = ۱۱$$

یعنی جمع یازده جمله برابر ۲۳۱ شده است. پس x جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی است.

$$x = a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d = ۱ + ۴۰ = ۴۱$$

-۳۷ الگوی دسته‌بندی را ببینید:

$$\{۱\}\ \underbrace{\{۲,۳,۴\}}_{\text{دستهٔ دوم}}\ \underbrace{\{۵,\ldots,۹\}}_{\text{دستهٔ سوم}}, \underbrace{\{۱۰,۱۱,\ldots,۱۶\}}_{\text{دستهٔ چهارم}} \ldots \underbrace{\{۱۰^۲ + ۱,\ldots,۱۱^۲\}}_{\text{دستهٔ یازدهم}}$$

$$۴ \downarrow ۲^۲ \quad ۹ \downarrow ۳^۲ \quad ۱۶ \downarrow ۴^۲$$

بنابراین دستهٔ یازدهم $\{۱۰۱, ۱۰۲, \ldots, ۱۲۱\}$ است. جمع این بیست و یک جمله را خودتان به دست آورید. *(چیه همه رو من نباید بگم که!)*

-۳۸ اختلاف هر دو جملهٔ متوالی برابر d است. پس ربط‌دادن این جمع به تفاضل ایدهٔ خوبی برای شروع است. ببینید:

$$\frac{۱}{a_۱a_۲} = \frac{۱}{d}(\frac{a_۲ - a_۱}{a_۱a_۲}) = \frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱} - \frac{۱}{a_۲})$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{d}[\frac{۱}{a_۱} - \cancel{\frac{۱}{a_۲}} + \cancel{\frac{۱}{a_۲}} - \cancel{\frac{۱}{a_۳}} + \cdots + \cancel{\frac{۱}{a_{n-۱}}} - \frac{۱}{a_n}] = \frac{۱}{d}[\frac{a_n - a_۱}{a_۱a_n}] = \frac{۱}{d}(\frac{(n - ۱)d}{a_۱a_n}) = \frac{n - ۱}{a_۱a_n}$$