

# فصل

## ۱

### قسمت اول

## اتحادهای جبری

#### مشهور اتحاد

سال قبل فهمیدیم که هر عبارتی که شامل اعداد و متغیرها باشد، عبارت جبری نام دارد و اگر مقدار دو عبارت جبری A و B به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان با هم برابر باشد، تساوی  $A = B$  را یک اتحاد می‌گویند. (به زبان دیگر، یعنی آنگاه رابطه  $A = B$  به ازای هر مقدار که به متغیرهاش بدهیم، برقرار باشد، به این رابطه به افتخار می‌گویم.) مثلاً رابطه  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$  یک اتحاد است، چون به هر عددی بدهیم دوطرف، مساوی می‌شوند. مثلاً اگر  $x$  را صفر فرض کنیم به رابطه درست  $1 = 1$  می‌رسیم. (شما به  $x$  هر چه دوست دارید بدهید، دو طرف مساوی می‌شوند.)

**نکته** ضریب جملات متشابه در دو طرف تساوی یک اتحاد، با هم برابر است. مثلاً اگر  $5x^2 - 7x = kx^2 + mx$  اتحاد باشد خیلی سریع می‌گوییم که  $k = 5$  و  $m = -7$  است.

**مثال:** اگر تساوی  $(x - a)(3x + a) = 3x^2 - 4x - a^2$  یک اتحاد باشد، مقدار  $a$  را بیابید.

**پاسخ:** باید ضرایب جملات متشابه در دو طرف تساوی، با هم برابر باشد:

$$(x - a)(3x + a) = 3x^2 - 4x - a^2 \Rightarrow 3x^2 + \underbrace{ax - 3ax}_{-2ax} - a^2 = 3x^2 - 4x - a^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 \quad \checkmark \\ -2a = -4 \\ -a^2 = -a^2 \quad \checkmark \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-4}{-2} = 2$$

#### انواع اتحادهای جبری مشهور

۱) اتحادهای مربع دو جمله‌ای: در این اتحادها دو جمله‌ای های  $a + b$  و  $a - b$  به توان ۲ می‌رسند:

دو برابر اولی در دومی

اولی به توان ۲

دومی به توان ۲

مثال

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (\Delta x + 3y)^2 = (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(3y) + (3y)^2 = \Delta^2 x^2 + 6\Delta xy + 9y^2$$

مثال

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow \left(\frac{m}{3} - \frac{z}{9}\right)^2 = \left(\frac{m}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{z}{9}\right) + \left(\frac{z}{9}\right)^2 = \frac{m^2}{9} - \frac{2mz}{9} + \frac{z^2}{81}$$

**مثال:** با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

(ب)  $(2x - 1)^2 = \square - 4x + \square$

(ت)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{4}\right)^2 = \square x^2 + \square x + \square$

(آ)  $(a + 3)^2 = a^2 + \square + \square$

(پ)  $\left(\sqrt{2} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \square + \square$

**پاسخ:** (آ)

(ب)  $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

(پ)  $\left(\sqrt{2} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - 2k + \frac{k^2}{2}$

(ت)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{16} = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{9}$

**تست:** حاصل  $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$  کدام است؟

۴-۲ (۱)  $4\sqrt{2}$       ۶-۳ (۳)      ۲-۲ (۲)

پاسخ: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = [1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2] + [1^2 - 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2]$$

گزینه (۳) صحیح است.  $\Rightarrow 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$

**نکته تستی:** به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای می‌توان ثابت کرد که:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

از این نکته وقتی استفاده می‌شود که مجموع و تفاضل دو عدد را داشته باشیم و حاصل ضرب یا مجموع مربعات آن‌ها خواسته شوند. (حفظ این دو فرمول الزامی نیست).

**تست:** حاصل  $(ax + by)^2 - (ax - by)^2$  کدام است؟

۴-۲ (۱)  $2abxy$       ۲-۲ (۲)  $2a^2x^2 + 2b^2y^2$       ۳-۳ (۳)  $2a^2x^2 - 2b^2y^2$       ۴-۴ (۴)  $4abxy$

پاسخ: بنا به نکته تستی گفته شده داریم:

$$(ax + by)^2 - (ax - by)^2 = 4AB = 4(ax)(by) = 4abxy$$

البته بدون استفاده از نکته بالا هم می‌توانید تک تک اتحادها را باز کرده و جواب را به دست آورید.

گزینه (۴) صحیح است.  $\Rightarrow (ax + by)^2 - (ax - by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - a^2x^2 + 2abxy - b^2y^2 = 4abxy$

**تست:** اگر مجموع دو عدد برابر ۵ و تفاضل آن‌ها برابر ۹ باشد، مجموع مربعات آن‌ها کدام است؟

۵۱ (۱)      ۵۲ (۲)      ۵۳ (۳)      ۵۴ (۴)

پاسخ: روش اول: اگر آن دو عدد را  $a$  و  $b$  در نظر بگیریم، به کمک نکته تستی گفته شده خواهیم داشت:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow 5^2 + 9^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25 + 81}{2} = \frac{106}{2} = 53$$

روش دوم: بدون استفاده از نکته تستی هم می‌توانیم مسئله را به شکل مقابل حل کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 9 \end{cases}$$

طبق فرض سؤال

$$2a = 14 \Rightarrow a = 7 \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از معادلات}} 7 + b = 5 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 7^2 + (-2)^2 = 49 + 4 = 53$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

**(۲) اتحاد مزدوج:** در این اتحاد، دو پرانتز به شکل  $(a + b)$  و  $(a - b)$  در هم ضرب می‌شوند، در این حالت خیلی سریع می‌گوییم جواب برابر می‌شود با  $a^2 - b^2$ .

به عبارت دیگر در این اتحاد جملاتی مانند  $a$  و  $b$  عیناً در دو پرانتز تکرار می‌شوند. فقط در یکی از پرانتزها علامت بین  $a$  و  $b$  مثبت و در پرانتز دیگر علامت بین  $a$  و  $b$  منفی است.

دومی به توان ۲      ← اولی به توان ۲

مثال  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$

مثال  $(\frac{x}{2} - \frac{y}{5})(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}) = (\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{5})^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**مثال:** به کمک اتحاد مزدوج، جاهای خالی را پر کنید.

$$102 \times 98 = (100 + \square)(100 - \square) = \square$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\square - \square) = 2 - 3 = -1 \quad (آ)$$

$$(2x - \frac{y}{4})(2x + \frac{y}{4}) = \square x^2 - \square y^2 \quad (پ)$$

پاسخ: بنا به اتحاد مزدوج داریم:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1 \quad (آ)$$

$$102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996 \quad (ب)$$

$$(2x - \frac{y}{4})(2x + \frac{y}{4}) = (2x)^2 - (\frac{y}{4})^2 = 4x^2 - \frac{1}{16}y^2 \quad (پ)$$

**تست:** حاصل  $(a+b-1)(a-b-1)$  کدام است؟

- (۱)  $a^2 - b^2 - 2a + 1$       (۲)  $a^2 + b^2 - 2ab + 1$       (۳)  $a^2 - b^2 - 1$       (۴)  $a^2 - b^2 + 1$

**پاسخ:**

گزینه (۱) صحیح است.  $(a-1+b)(a-1-b) = (a-1)^2 - b^2 = a^2 - 2a + 1 - b^2 = a^2 - b^2 - 2a + 1 \Rightarrow$

**تست:** اگر مجموع دو عدد برابر  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  و تفاضل مربعات آن‌ها  $\frac{3}{4}$  باشد، اختلاف این دو عدد کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$       (۳)  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$       (۴)  $\frac{3}{4}$

**پاسخ:** اگر آن دو عدد را  $a$  و  $b$  در نظر بگیریم، بنا به اتحاد مزدوج داریم:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \xrightarrow{a+b = \frac{\sqrt{2}}{2}} (a-b)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow a-b = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

**اتحاد یک جمله مشترک:** در این اتحاد با هم دو پرانتز در هم ضرب می‌شوند ولی این بار، یک جمله مشترک در دو پرانتز وجود دارد.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \xrightarrow{\text{مثال}} (6x-1)(6x+8) = (6x)^2 + (-1+8)(6x) + (-1)(+8) = 36x^2 + 42x - 8$$

مشترک:  $(x+a)$  و  $(x+b)$  →  $x^2$  و  $(a+b)x$  و  $ab$  →  $(6x-1)$  و  $(6x+8)$  →  $(6x)^2$  و  $(-1+8)(6x)$  و  $(-1)(+8)$

غیرمشترک‌ها:  $a$  و  $b$  →  $(-1)$  و  $(+8)$

جمع غیرمشترک‌ها:  $(a+b)x$  →  $(-1+8)(6x)$

ضرب غیرمشترک‌ها:  $ab$  →  $(-1)(+8)$

جمله مشترک:  $(6x)$

**مثال:** جاهای خالی را به کمک اتحادها پر کنید.

(آ)  $(x-2)(x+1) = x^2 + \square x + \square$       (ب)  $(2x+2-y)(y+2x) = \square x^2 + \square x + \square y^2 + \square y$

**پاسخ:**

(آ)  $(x-2)(x+1) = x^2 + (-2+1)x + (-2)(1) = x^2 + (-1)x + (-2)$

(ب)  $(2x+2-y)(y+2x) = (2x+(2-y))(2x+y) = (2x)^2 + (2-y+y)(2x) + (2-y)(y) = 4x^2 + 4x - 1y^2 + 2y$

**تست:** حاصل  $(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b)$  کدام است؟

- (۱)  $(a-b)x$       (۲)  $2(b-a)x$       (۳)  $2(a-b)x$       (۴)  $(b-a)x$

**پاسخ:**

$$(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b) = (x^2 + (a-b)x + a(-b)) - (x^2 + (-a+b)x + b(-a))$$

$$= x^2 + (a-b)x - ab - x^2 + (a-b)x + ab = 2(a-b)x \Rightarrow$$

گزینه (۳) صحیح است.

**اتحادهای مکعب دو جمله‌ای:** در این اتحاد، یک دو جمله‌ای مانند  $a+b$  یا  $a-b$  به توان ۳ می‌رسد و خواهیم داشت:

۳ برابر اولی در دومی به توان ۲

۳ برابر اولی به توان ۲ در دومی

دومی به توان ۳

اولی به توان ۳

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \xrightarrow{\text{مثال}} (x+2y)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$



$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \xrightarrow{\text{مثال}} (\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2(1) + 3(\sqrt{2})(1)^2 - (1)^3 = \sqrt{8} - 3(2)(1) + 3\sqrt{2}(1) - 1$$

$$= \sqrt{4 \times 2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

**مثال:** جاهای خالی را پر کنید.

$$(x - \sqrt{2})^3 = \square x^3 - \square x^2 + \square x - \square \quad (\text{ب}) \quad (2x + \frac{1}{4})^3 = \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square \quad (\text{آ})$$

$$(\frac{1}{3} - \frac{a}{4})^3 = \frac{1}{27} - \square + \square - \frac{a^3}{64} \quad (\text{پ})$$

**پاسخ:** به کمک اتحادهای مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(2x + \frac{1}{4})^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(\frac{1}{4}) + 3(2x)(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 = 2^3 x^3 + 3(4x^2)(\frac{1}{4}) + 3(2x)(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4^3} = 8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8} \quad (\text{آ})$$

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3(x)^2(\sqrt{2}) + 3(x)(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - \sqrt{8} \quad (\text{ب})$$

$$(\frac{1}{3} - \frac{a}{4})^3 = (\frac{1}{3})^3 - 3(\frac{1}{3})^2(\frac{a}{4}) + 3(\frac{1}{3})(\frac{a}{4})^2 - (\frac{a}{4})^3 = \frac{1}{27} - \frac{1}{12}a + \frac{1}{16}a^2 - \frac{a^3}{64} \quad (\text{پ})$$

**تست:** در ساده‌شده عبارت  $(3x - 2y)^3$ ، ضریب عددی جمله شامل  $x^2y$  کدام است؟

- ۵۴ (۱)      ۱۸ (۲)      -۱۸ (۳)      -۵۴ (۴)

**پاسخ:** به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(3x - 2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3 = 27x^3 - 3(9x^2)(2y) + 3(3x)(4y^2) - 8y^3$$

$$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \Rightarrow x^2y \text{ شامل جمله } -54 \Rightarrow \text{گزینه (۴) صحیح است.}$$

**تست:** حاصل  $(x-1)^3 - (\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1+\sqrt{3})$  برابر با کدام گزینه است؟

- $x^3 + \sqrt{3}$  (۱)       $x^3 - \sqrt{3}$  (۳)       $x^3 - 6x^2 + \sqrt{3}$  (۲)       $x^3 + 6x^2 + \sqrt{3}$  (۴)

**پاسخ:** به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای و اتحاد یک جمله مشترک داریم:

$$(x-1)^3 - (\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1+\sqrt{3}) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - ((\sqrt{3}x)^2 + (-1+1+\sqrt{3})(\sqrt{3}x) + (-1)(1+\sqrt{3}))$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3x^2 + 3x - \sqrt{3} - 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x^2 - 3x + \sqrt{3} + 1 = x^3 - 6x^2 + \sqrt{3} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

**تذکر:** البته حاصل  $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1+\sqrt{3})$  را بدون استفاده از اتحاد یک جمله مشترک هم به راحتی می‌توانید به دست آورید. یعنی دو برانتز را به صورت معمولی در هم ضرب کنید:

$$(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}x)^2 + \sqrt{3}\sqrt{3}x + 3x - \sqrt{3}\sqrt{3}x - 1 - \sqrt{3} = 3x^2 + 3x - 1 - \sqrt{3}$$

**نکته تستی:** در اتحادهای مکعب دو جمله‌ای اگر  $a^3$  و  $b^3$  را کنار هم بنویسیم و در جملات  $3a^2b$  و  $3ab^2$  از  $3ab$  فاکتور بگیریم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

ضمناً به  $a^3 + b^3$  مجموع مکعبات  $a$  و  $b$  و به  $a^3 - b^3$  تفاضل مکعبات  $a$  و  $b$  می‌گوییم.

**تست:** اگر مجموع دو عدد برابر ۲ و حاصل ضرب آن‌ها (-۱) باشد، مجموع مکعبات آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

**پاسخ:** با توجه به نکته گفته شده داریم:

گزینه (۳) صحیح است.  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 2^3 - 3(-1)(2) = 8 + 6 = 14 \Rightarrow$

**تست:** اگر تفاضل دو عدد برابر (-۱) و حاصل ضرب آن‌ها ۶ باشد، تفاضل مکعبات آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۹ (۳) -۱۹ (۴) -۱۷

**پاسخ:**

گزینه (۳) صحیح است.  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (-1)^3 + 3(6)(-1) = -1 - 18 = -19 \Rightarrow$

۵) اتحادهای چاق و لاغر: از ضرب یک دوجمله‌ای (لاغر) در یک سه‌جمله‌ای (چاق) به شکل زیر به دست می‌آیند:

مثال  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$  مجموع مکعبات ۲ جمله:  $(a \oplus b)(a^2 \ominus ab + b^2) = a^3 \oplus b^3$

چاق منفی  
لاغر مثبت

مثال  $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$  تفاضل مکعبات ۲ جمله:  $(a \ominus b)(a^2 \oplus ab + b^2) = a^3 \ominus b^3$

چاق مثبت  
لاغر منفی

**مثال:** جاهای خالی را پر کنید.

(آ)  $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = \square$

**پاسخ:**

(ب)  $(x + 2y)(x^2 - \square + \square) = x^3 + 8y^3$

(آ)  $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = (2x)^3 - 3^3 = 8x^3 - 27$

$\begin{matrix} (2x)^3 & 3(2x) & 3^2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) \end{matrix}$

(ب)  $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + 8y^3$

$\begin{matrix} x^3 & 2xy & 4y^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) \end{matrix}$

**تست:** اگر  $(x + 2)(x^2 + Ax + 4) = x^3 + Bx^2$  باشد، حاصل  $A + B$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۴

**پاسخ:** بنا به اتحاد چاق و لاغر داریم:

گزینه (۱) صحیح است.  $\Rightarrow A + B = -2 + 2 = 0 \Rightarrow$

$\begin{matrix} -2x & 4 & x^2 & 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (x + 2)(x^2 + Ax + 4) \end{matrix} = x^3 + Bx^2 \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B^3 = 4^3 \Rightarrow B = 4 \end{cases}$

**تست:** مقدار عبارت  $(4x^2 + 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) - 8x^3$  به ازای  $x = 3\sqrt{2}$  و  $y = -\frac{1}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $-\frac{1}{8}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴) صفر

**پاسخ:** ابتدا عبارت داده شده را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

گزینه (۲) صحیح است.  $\Rightarrow -\frac{1}{8}$

اتحاد چاق و لاغر  $8x^3 - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 8x^3 - ((2x)^3 - y^3) = 8x^3 - 8x^3 + y^3 = y^3 \xrightarrow{y = -\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64} \Rightarrow$

# فصل ۱

## عبارتهای جبری



### قسمت اول: اتحادهای جبری

#### مفهوم اتحاد

۱. ☆ تساوی  $ax^2 + 2x(x-3) = 3x^2 + bx + c$  به ازای هر  $x$  ای برقرار است. حاصل  $abc$  کدام است؟
- (۱) صفر      (۲) -۶      (۳) ۶      (۴) ۱
۲. اگر تساوی  $ax^2 - 3x + 4 = (x-4)(\frac{x}{p} + b)$  یک اتحاد باشد، حاصل  $(2ax + b)^2$  برابر با کدام گزینه است؟ (آزمونهای گاج)
- (۱)  $(2x-1)^2$       (۲)  $(x+1)^2$       (۳)  $(1-x)^2$       (۴)  $(2x+1)^2$
- اتحاد مربع دوجمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک**
۳. حاصل  $|1-\sqrt{2}| - 2|1-\sqrt{2}|^2 - 2(1+\sqrt{2})$  کدام است؟
- (۱)  $1-4\sqrt{2}$       (۲) ۵      (۳)  $1+4\sqrt{2}$       (۴) ۴
۴. ☆ عبارت  $A$  در تساوی  $(\frac{x}{3}-4)^2 = \frac{x^2}{9} + A + 16$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{3}x$       (۲)  $\frac{4}{3}x$       (۳)  $-\frac{4}{3}x$       (۴)  $-\frac{1}{3}x$
۵. حاصل  $(\frac{1}{x}-y)^2 + \frac{4y}{x}$  کدام است؟
- (۱)  $(\frac{1}{x}+y)^2$       (۲)  $(\frac{2}{x}+y)^2$       (۳)  $(x-\frac{1}{y})^2$       (۴)  $(x+\frac{1}{y})^2$
۶. ☆ حاصل  $(2+\sqrt{2})^4$  کدام است؟
- (۱)  $68+24\sqrt{2}$       (۲)  $52+24\sqrt{2}$       (۳)  $52+48\sqrt{2}$       (۴)  $68+48\sqrt{2}$
۷. حاصل عبارت  $(\sqrt{50}-3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{45}+\sqrt{45})^2$  کدام است؟
- (۱) ۱۰      (۲)  $60\sqrt{10}$       (۳) ۱۹۰      (۴)  $30\sqrt{10}$
۸. ☆ اگر  $x - \frac{1}{x} = 3$  باشد، مقدار  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  کدام است؟
- (۱) ۱۱      (۲) ۱۲      (۳) ۱۳      (۴) ۱۴
۹. اگر تفاضل دو عدد برابر  $\frac{1}{p}$  و مجموع آنها برابر  $\frac{3}{p}$  باشد، حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۱      (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{3}{4}$
۱۰. ☆ اگر  $(a-b)^2 = 9$  و  $a^2 + b^2 = 5$  باشد، بزرگترین مقدار  $a+b$  کدام است؟
- (۱) -۱      (۲) ۱      (۳) ۳      (۴) -۳
۱۱. ☆ اگر  $a+b = -1$  و  $a^2 + b^2 = 13$  باشد، با شرط  $a > b$  حاصل  $a-b$  کدام است؟
- (۱) ۱      (۲) ۵      (۳) ۷      (۴) ۳
۱۲. ☆ اگر مجموع دو عدد  $a$  و  $b$  برابر ۶ و حاصل ضرب آنها ۵ باشد، تفاضل مربع آنها کدام است؟ ( $a > b$ )
- (۱) ۶۴      (۲) ۹۶      (۳) ۲۴      (۴) ۳۶

۱۳★ اگر قطر یک مستطیل برابر ۶ و مساحت آن ۱۴ باشد، محیط آن چقدر است؟

- (۱)  $5\sqrt{2}$  (۲)  $10\sqrt{2}$  (۳) ۵۰ (۴) ۱۶

۱۴★ اگر  $4 = (\Delta x - \frac{3}{2x})$  باشد، حاصل  $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$  کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴) ۳۲

۱۵ در تساوی  $\frac{1-x^{16}}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$  عبارت A کدام است؟

- (۱)  $1-x$  (۲)  $1-x^2$  (۳)  $1-x^4$  (۴)  $1-x^8$

۱۶ حاصل  $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$  برابر است با:

- (۱)  $x^4 + y^4$  (۲)  $x^4 - x^2y^2 + y^4$  (۳)  $(x^2 - y^2)^2$  (۴)  $x^4 + x^2y^2 + y^4$

۱۷★ اگر  $5 = (3x + \frac{1}{2x})$  باشد، حاصل  $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$  کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۱۸ حاصل  $(x+a)(x+b) - (x-a)(x-b)$  کدام است؟

- (۱)  $(a+b)x$  (۲) صفر (۳)  $a+b$  (۴)  $2(a+b)x$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای و اتحاد چاق و لاغر

۱۹★ در چندجمله‌ای حاصل از  $(\frac{x^2}{y} - \frac{y}{x})^3$  ضریب جمله شامل  $x^2y^2$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۲۰ حاصل  $(\sqrt{x} + 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} - 1)$  به ازای  $x = \frac{1}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{7}{8}$  (۲)  $\frac{9}{8}$  (۳)  $\frac{7}{8}$  (۴)  $-\frac{9}{8}$

۲۱★ حاصل  $8y^3 - (x^2 - 2xy + 4y^2)(x + 2y) - 8y^3$  به ازای  $x = \frac{3}{4}$  و  $y = \sqrt{2}$  کدام است؟

- (۱)  $2/625$  (۲)  $2/875$  (۳)  $3/125$  (۴)  $3/375$

قسمت دوم: تجزیه عبارت‌های جبری

فکتورگیری

۲۲★ در تجزیه  $x^4 + x^3 + x^2 + x$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $x-1$  (۲)  $x+1$  (۳)  $x$  (۴)  $x^2+1$

۲۳ در تجزیه عبارت  $8x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $2x+1$  (۲)  $x+1$  (۳)  $4x$  (۴)  $x^2+1$

۲۴★ اگر  $2x^2 + 3xy = 10$  و  $14x + 21y = 5$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱)  $3/5$  (۲) ۷ (۳)  $7/5$  (۴) ۱۴

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج

۲۵★ عبارت  $16x^2y + 40x^2y^2 + 25xy^3$  بر کدام عامل بخش پذیر است؟

- (۱)  $4x - 5y$  (۲)  $(4x + 5y)^2$  (۳)  $x^2y^2$  (۴)  $(\Delta x + 4y)^2$

۲۶★ اگر عبارت  $x^8 - \square + 16x^2y^2 + \square$  مربع کامل باشد، مقدار  $\square$  کدام است؟

- (۱)  $4xy$  (۲)  $8x^5y$  (۳)  $8xy$  (۴)  $4x^5y$

۲۷ عبارت  $4x^2 - 10x + 9$  کدام جمله افزوده شود تا حاصل عبارت به صورت مربع دوجمله‌ای گردد؟

- (۱)  $2x$  (۲)  $-2x$  (۳)  $4x$  (۴)  $-4x$



# عبارتهای جبری

# پاسخ فصل ۱

۵ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} - y\right)^2 + \frac{4y}{x} &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)(y) + y^2 + \frac{4y}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x} + y^2 + \frac{4y}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x} + y^2 = \left(\frac{1}{x} + y\right)^2 \end{aligned}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

۶ ۴ ۳ ۲ ۱

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} ((2 + \sqrt{2})^2)^2 &= (2^2 + \sqrt{2}^2 + 2 \times 2\sqrt{2})^2 = (4 + 2 + 4\sqrt{2})^2 \\ &= (6 + 4\sqrt{2})^2 = 6^2 + (4\sqrt{2})^2 + 2 \times 6 \times 4\sqrt{2} \\ &= 36 + 32 + 48\sqrt{2} = 68 + 48\sqrt{2} \end{aligned}$$

۷ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\begin{aligned} (\sqrt{50} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{50} + 3\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{5})^2 \\ &= (\sqrt{25} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{25} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

بنا به نکته گفته شده در درسنامه این مقدار برابر است با:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 &= 2(\sqrt{50})^2 + 2(3\sqrt{5})^2 = 2 \times 25 \times 2 + 2 \times 9 \times 5 \\ &= 100 + 90 = 190 \end{aligned}$$

۸ ۴ ۳ ۲ ۱

طرفین به توان ۲ اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} = 3 &\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 9 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 &= 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11 \end{aligned}$$

۹ ۴ ۳ ۲ ۱

روش اول: دو عدد را  $a$  و  $b$  در نظر می‌گیریم، با فرض  $a > b$  داریم:

$$a - b = \frac{1}{2}, a + b = \frac{3}{2}$$

طبق نکته گفته شده در درسنامه داریم:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 4ab \Rightarrow 4ab = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow ab = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

روش دوم (حل دستگاه):

$$\begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

جایگذاری در یکی از معادلات

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \rightarrow 1 + b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱ ۴ ۳ ۲ ۱

ابتدا طرفین تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2x(x - 3) &= 3x^2 + bx + c \\ \Rightarrow ax^2 + 2x^2 - 6x &= 3x^2 + bx + c \\ \Rightarrow (a + 2)x^2 - 6x + 0 &= 3x^2 + bx + c \end{aligned}$$

چون این تساوی به ازای هر  $x$  برقرار است، لذا اتحاد بوده و جملات متشابه در دو طرف تساوی دارای ضرایب برابرند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ b = -6 \Rightarrow abc = (1)(-6)(0) = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

۲ ۴ ۳ ۲ ۱

ابتدا طرفین تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} ax^2 - 3x + 4 &= (x - 4)\left(\frac{x}{2} + b\right) \\ \Rightarrow ax^2 - 3x + 4 &= \frac{1}{2}x^2 + bx - 2x - 4b \\ \Rightarrow ax^2 - 3x + 4 &= \frac{1}{2}x^2 + (b - 2)x - 4b \end{aligned}$$

حال چون تساوی داده شده یک اتحاد است، باید جملات متشابه در طرفین تساوی دارای ضرایب برابر باشند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b - 2 = -3 \Rightarrow b = -1 \\ 4 = -4b \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

حال حاصل  $(2ax + b)^2$  را می‌یابیم.

$$(2ax + b)^2 = \frac{a}{b} (x - 1)^2 = (1 - x)^2$$

۳ ۴ ۳ ۲ ۱

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^2 - 2|1 - \sqrt{2}| &= (1^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) - 2(-1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2 - 2\sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

۴ ۴ ۳ ۲ ۱

بنا به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3} - 4\right)^2 &= \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{3}\right)(4) + 4^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3}x + 16 \\ \Rightarrow A &= -\frac{8}{3}x \end{aligned}$$



۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} 1-x^{16} &= (1-x^4)(1+x^4) = (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) \\ &\text{اتحاد مزدوج} \quad \text{اتحاد مزدوج} \quad \text{اتحاد مزدوج} \\ &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^4) \\ &\text{اتحاد مزدوج} \\ &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^2)(1+x^4) \\ &\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه داده شده}} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^2)(1+x^4)}{A} \\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^4) \Rightarrow \frac{1-x}{A} = 1 \Rightarrow A = 1-x \end{aligned}$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy) &\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \overbrace{(x^2+y^2)^2}^{\text{مربع دو جمله‌ای}} - (xy)^2 \\ &= x^4+y^4+2x^2y^2-x^2y^2-y^2x^2 = x^4+y^4+x^2y^2 \end{aligned}$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (3x + \frac{1}{2x})^2 &= 5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (3x + \frac{1}{2x})^2 = 5^2 \\ \Rightarrow (3x)^2 + 2(3x)(\frac{1}{2x}) + (\frac{1}{2x})^2 &= 25 \\ \Rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4x^2} = 25 \Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} &= 25 - 3 = 22 \end{aligned}$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b) - (x-a)(x-b) & \\ \underbrace{(x+a)(x+b)}_{\text{جمله مشترک}} - \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{جمله مشترک}} & \\ = (x^2 + (a+b)x + ab) - (x^2 - (a+b)x + ab) & \\ = x^2 + (a+b)x + ab - x^2 + (a+b)x - ab = 2(a+b)x & \end{aligned}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (\frac{x^2}{2} - \frac{y}{3})^2 &= (\frac{x^2}{2})^2 - 2(\frac{x^2}{2})(\frac{y}{3}) + 2(\frac{x^2}{2})(\frac{y}{3}) - (\frac{y}{3})^2 \\ &= \frac{x^4}{4} - (3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3})x^2y + (3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3})x^2y^2 - \frac{y^2}{9} \\ \Rightarrow x^2y^2 \text{ ضریب} &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1) &= (x-1)(x^2+x+1) = x^3-1 \\ \text{اتحاد مزدوج} \quad \text{اتحاد چاق و لاغر} & \\ \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^3 - 1 &= \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (x+2y)(x^2-2xy+4y^2) - 8y^3 & \\ \text{اتحاد چاق و لاغر} & \\ = x^3 + (2y)^3 - 8y^3 = x^3 + 8y^3 - 8y^3 = x^3 & \\ \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8} & \end{aligned}$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= 9 \xrightarrow{\text{مربع دو جمله‌ای}} a^2 + b^2 - 2ab = 9 \xrightarrow{a^2+b^2=5} 5 - 2ab = 9 \\ \Rightarrow -2ab &= 9 - 5 \Rightarrow -2ab = 4 \Rightarrow ab = \frac{4}{-2} = -2 \\ \Rightarrow (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \xrightarrow{\frac{a^2+b^2=5}{ab=-2}} 5 + 2(-2) = 5 - 4 = 1 \\ \Rightarrow (a+b)^2 &= 1 \xrightarrow{\text{جذر}} a+b = \pm 1 \end{aligned}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} a+b &= -1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (a+b)^2 = (-1)^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1 \\ \xrightarrow{a^2+b^2=13} 13 + 2ab &= 1 \Rightarrow 2ab = 1 - 13 \Rightarrow 2ab = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ab &= \frac{-12}{2} = -6 \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \xrightarrow{\frac{a^2+b^2=13}{ab=-6}} 13 - 2(-6) = 13 + 12 = 25 \\ \Rightarrow (a-b)^2 &= 25 \xrightarrow{\text{جذر}} a-b = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (a+b)^2 = 6^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 36 \\ \xrightarrow{ab=5} a^2 + b^2 + 2(5) &= 36 \Rightarrow a^2 + b^2 = 36 - 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 26 \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

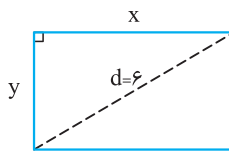
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \xrightarrow{\frac{a^2+b^2=26}{ab=5}} 26 - 2(5) = 16$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} a-b = \sqrt{16} = 4$$

با فرض  $a > b$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a-b)(a+b) = 4 \times 6 = 24$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\begin{cases} \text{فیتاغورث: } d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36 \\ \text{مساحت: } S = xy = 14 \end{cases}$$

بنا به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow{\frac{x^2+y^2=36}{xy=14}} (x+y)^2 = 36 + 2(14) \\ \Rightarrow (x+y)^2 &= 36 + 28 = 64 \xrightarrow{\text{جذر}} (x+y) = \sqrt{64} = 8 \\ \Rightarrow \text{محیط} &= 2(x+y) = 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (\Delta x - \frac{3}{2x})^2 &= 4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (\Delta x - \frac{3}{2x})^2 = 4^2 \\ \Rightarrow (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)(\frac{3}{2x}) + (\frac{3}{2x})^2 &= 16 \\ \Rightarrow 25\Delta x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} &= 16 \\ \xrightarrow{(-15) \text{ را به سمت راست می‌بریم.}} 25\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} &= 15 + 16 \Rightarrow 25\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = 31 \end{aligned}$$



# عبارتهای جبری

## فصل ۱

### قسمت اول: اتحادهای جبری

۱. به کمک اتحادها، جاهای زیر را کامل کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۶ و کار در کلاس صفحه ۱۰ و ۱۳ کتاب درسی)

$$(\sqrt{x} - \square)(\sqrt{x} + \square) = \square - y \quad \text{ب)} \quad \left(\frac{a}{y} - 1\right)^2 = \square - \square + 1 \quad \text{آ)}$$

$$(a - 2b)^3 = a^3 + \square - \square - 8b^3 \quad \text{ت)} \quad (\Delta x + 1)(\Delta x + 6) = \square + 3\Delta x + \square \quad \text{پ)}$$

$$(\square + \square)^3 = 8x^3 + \square + \square + 27y^3 \quad \text{ج)} \quad \left(\square + \frac{1}{y}\right)(4x^2 + \square + \frac{1}{y}y^2) = \square + \frac{1}{y}y^3 \quad \text{ث)}$$

$$(4a + 1)^3 = 64a^3 + \square + 12a + \square \quad \text{ح)} \quad (\square - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2) = 27x^3 - \square \quad \text{چ)}$$

$$(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)(2x^2 - \square + \square) = \sqrt{8}x^3 + \sqrt{27}y^3 \quad \text{خ)}$$

۲. حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها بیابید.

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \quad \text{ب)} \quad (\Delta x + y)^2 - 2\Delta xy \quad \text{آ)}$$

$$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9x^2 + 81) \quad \text{ت)} \quad (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad \text{پ)}$$

۳. مقادیر زیر را به کمک اتحادها به دست آورید. (در قسمت‌های پ)، ت)، و ث) می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱ و تمرین ۷ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

$$(\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta)^2 - (499/99)^2 \quad \text{پ)} \quad 95 \times 105 \quad \text{ب)}$$

$$10/2^2 \quad \text{آ)}$$

$$(\Delta/99)^3 \quad \text{ث)}$$

$$(10/1)^3 \quad \text{ت)}$$

۴. حاصل  $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$  به ازای  $x = \sqrt[3]{-5}$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۵. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بیابید. (به کمک اتحادها)

$$(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2) \quad \text{ب)} \quad \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{9}\right) \quad \text{آ)}$$

$$(x + \sqrt{2})^3 + (x - \sqrt{2})^3 \quad \text{ت)} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 \quad \text{پ)}$$

۶. حاصل  $(1 - 2\sqrt{x})(1 + 4x)(1 + 2\sqrt{x})$  را به ازای  $x = \sqrt{2}$  بیابید.

۷. ضریب  $x^4y^5$  را در حاصل  $(xy^2 - 2x^2y)^3$  بیابید. ضریب جمله شامل  $x^5y^4$  چقدر است؟

### قسمت دوم: تجزیه عبارتهای جبری

(مشابه تمرینات صفحه ۱۱ و ۱۶ کتاب درسی)

۸. عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

$$9x^2 - 6x + 1 \quad \text{پ)} \quad x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} \quad \text{ب)} \quad 25x^2 - 36 \quad \text{آ)}$$

$$20x^5 (x^2 + 3)^3 - 10x^3 (x^2 + 3)^4 \quad \text{ج)} \quad x^6 - 64x^4 \quad \text{ث)}$$

$$27 - t^3 \quad \text{خ)} \quad 1 + 8z^3 \quad \text{ح)}$$

$$25x^4 + 30x^2 + 9x^2 \quad \text{ز)}$$

$$4x^2 - 4x - 24 \quad \text{ذ)}$$

$$(x - 4)(x + 6) + xy + 6y \quad \text{ژ)}$$



خ) باز هم از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم در این جا:  $b = \sqrt{3}y, a = \sqrt{2}x$   
بنابراین:  
 $(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)((\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{2}x)(\sqrt{3}y) + (\sqrt{3}y)^2)$   
 $= (\sqrt{2}x)^3 + (\sqrt{3}y)^3 \Rightarrow (\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)(2x^2 - \sqrt{6}xy + 3y^2)$   
 $= \sqrt{2}x^3 + \sqrt{27}y^3$

۲

الف)  $(\Delta x + y)^3 - 2 \cdot xy = (\Delta x)^3 + 2(\Delta x)(y) + y^3 - 2 \cdot xy$   
 $= (\Delta x)^3 + 1 \cdot xy + y^3 - 2 \cdot xy = (\Delta x)^3 - 1 \cdot xy + y^3 = (\Delta x - y)^3$

ب

ب)  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$   
 $\Rightarrow (\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3})(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3}) = (\frac{\sqrt{7}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{3})^2$   
 $= \frac{7}{4} - \frac{5}{9} = \frac{63 - 20}{36} = \frac{43}{36}$

ب

ب)  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$   
 $\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$   
 ت)  $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9x^2 + 81) = (x^2 - 9)(x^2 + 9x^2 + 81)$   
مزدوج      چاق و لاغر  
 $= (x^2)^3 - 9^3 = x^6 - 729$

۳

الف)  $(1 \div 2)^3 = (10 \div 2)^3 = 10^3 \div 2^3 = 1000 \div 8 = 125$   
 اتحاد مزدوج  
**ب)**  $95 \times 105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10000 - 25 = 9975$

پ)  $(\frac{500}{101})^3 - (\frac{499}{101})^3 = (\frac{500}{101} - \frac{499}{101})(\frac{500}{101} + \frac{499}{101})(\frac{500}{101} + \frac{499}{101})$   
 اتحاد مزدوج  
 $= \frac{1}{101} \times 1000 = 20$

ت)  $(1 \div 1)^3 = (10 \div 1)^3 = 10^3 \div 1^3 = 1000$   
 $= 1000 + 30 \div 1 + 0 \div 1 = 1030$

ث)  $(\frac{1}{99})^3 = (1 - \frac{1}{100})^3 = 1^3 - 3(\frac{1}{100}) + 3(\frac{1}{100})^2 - (\frac{1}{100})^3$   
 $= 1 - \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} - \frac{1}{1000000} = \frac{1000000 - 300000 + 30000 - 1}{1000000} = \frac{700000 - 1}{1000000}$

۴

$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = (2x)^3 - 3^3 = 8x^3 - 27$   
 اتحاد چاق و لاغر  
 $\xrightarrow{x = \sqrt[3]{-5}} \text{جواب} = 8(\sqrt[3]{-5})^3 - 27 = 8(-5) - 27 = -67$

۵

الف)  $(\frac{x}{2} - \frac{1}{3})(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{9}) = (\frac{x}{2})^3 - (\frac{1}{3})^3$   
اتحاد چاق و لاغر  
 $= \frac{x^3}{8} - \frac{1}{27}$

الف) مربع دو جمله‌ای  $(\frac{a}{p} - 1)^2 = (\frac{a}{p})^2 - 2(\frac{a}{p})(1) + (1)^2 = \frac{a^2}{p} - a + 1$

ب) یک دو جمله‌ای در یک دو جمله‌ای دیگر ضرب شده و حاصل هم، دو جمله‌ای شده است پس حتماً اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

اتحاد مزدوج  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $(\sqrt{x})^2 \quad (\sqrt{y})^2$

پ

جملات غیرمشترک  
 جمله مشترک  
 $(5x + 1)(5x + 6) = (5x)^2 + (1 + 6)(5x) + 1 \times 6$   
 $= 25x^2 + 35x + 6$

ت) اتحاد مکعب دو جمله‌ای  $a^3 - 3a^2(rb) + 3a(rb)^2 - (rb)^3$   
 $= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = a^3 + 12ab^2 - 6a^2b - 8b^3$

ث) اتحاد چاق و لاغر  $(2x + \frac{1}{y})(4x^2 + xy + \frac{1}{y^2}) = 8x^3 + \frac{1}{y^3}$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $(2x)^2 \quad (\frac{1}{y})^2 \quad (2x)^3 \quad (\frac{1}{y})^3$

ج) از شکل کلی رابطه بالا می‌فهمیم که با اتحاد مکعب دو جمله‌ای مواجه‌ایم.  $8x^3$  و  $27y^3$  را می‌توانیم همان  $a^3$  و  $b^3$  فرض کنیم لذا:

$\begin{cases} a^3 = 8x^3 \Rightarrow a^3 = (2x)^3 \Rightarrow a = 2x \\ b^3 = 27y^3 \Rightarrow b^3 = (3y)^3 \Rightarrow b = 3y \end{cases}$

حال با دانستن مقادیر  $a$  و  $b$  اتحاد را کامل می‌کنیم:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$   
 $\Rightarrow (2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$   
 $= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

چ) یک دو جمله‌ای در یک سه جمله‌ای ضرب شده پس حتماً اتحاد چاق و لاغر خواهیم داشت:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$   
 $27x^3 = (3x)^3 \Rightarrow a = 3x$

ضمناً  $b$  هم برابر است با  $2y$  لذا:

$(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2) = 27x^3 - (2y)^3$   
 $= 27x^3 - 8y^3$

ج) از اتحاد  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  استفاده می‌کنیم:  
 $(4a + 1)^3 = (4a)^3 + 3(4a)^2(1) + 3(4a)(1)^2 + 1^3$   
 $= 64a^3 + 48a^2 + 12a + 1$