ویژه داوطلبان کنکور

ریاضی جامع تجربی

• درس- نکته- تست •

سعید بیاتی

• درس نامه کامل، روان و مفهومی
• نکات تستی و کنکوری
• بانک طلایی پرسش های چهارگزینه ای

[تألیفی و کنکورهای سراسری
داخل و خارج از کشور]

پنج کتاب در یک کتاب:
هندسه۱ / ریاضی۲ / ریاضی۳
آمار و مدل سازی
ریاضی عمومی۱ و۲ پیش دانشگاهی

فهرست مطالب

فصل اول:ترکیبات و احتمال

فصل دوم:توابع و معادلات

فصل سوم: مشتق

فصل چهارم: کاربردهای مشتق

فصل پنجم: هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم

فصل ششم: انتگرال

فصل هفتم: حد و پیوستگی

فصل هشتم: بازه ـ معادلات و نامعادلات گویا ـ تابع

فصل نهم: ماتریس و دستگاه معادلات خطی

فصل دهم: آمار و مدل‌سازی

فصل یازدهم: هندسه پایه

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه ی مؤلف

کتابی که تقدیم شما عزیزان شده است حاصل سالها تجربه و تلاش اینجانب در زمینه تـدریس کنکـور و تـألیف کتـاب‌هـای ریاضی پایه و کنکور در بهترین مدارس و مؤسسات آموزشی کشور است.

قطعاً شما عزیزان با مطالعه دقیق و تسلط پیدا کردن روی درسنامه‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای این کتاب به راحتی می‌توانید درصد عالی در کنکور سراسری کسب کنید.

برخی از ویژگی‌های این کتاب عبارتست از:

۱– پوشش کامل مباحث همه کتاب‌های درسی (ریاضی ۲ ـ هندسه ۱ـ ریاضی ۳ ـ آمار و مدل‌سازی و ریاضی پیش‌دانشگاهی).

۲– ارائه صدها نکته تستی به همراه مثال‌های متنوع برای درک بهتر نکته‌ها.

۳– طبقه‌بندی دقیق مطالب درسی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای.

۴ پرهیز از اضافه‌گویی و تست‌های اضافی و تست‌های غیراستاندارد.

۵– ارائه سؤالات تألیفی منحصر به فرد.

۶– ارائه سؤالات کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور در ۱۵سال اخیر به صورت کامل.

۷– ارائه پاسخ‌های تشریحی دقیق و روان و مفهومی با محاسبات کامل

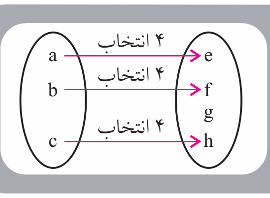
برخود واجب می‌دانم از جناب آقایان، یحیی دهقانی مدیرعامل محترم انتشارات مبتکران و هـادی عزیـززاده معاونـت محتـرم تألیف و خدایار مبین مدیر واحد طراحی و تایپ و اصغر حجازیان دوست و استاد بزرگوار سپاسگزاری کنم. همچنین از خـانم زهرا بیاتی که زحمت ویراستاری کتاب را کشیدند تشکر می‌کنم. از خانم‌ها، ملیحه محمدی آندرس و نـرگس سـربندی و مینـا هرمزی که تایپ و صفحه‌آرایی، رسم شکل‌ها و طرح روی جلد را با دقت و حوصله فراوان انجام دادند هم متشـکرم. در آخـر قدردانی ویژه از همسر و فرزند عزیزم می‌نمایم که همراهی و حمایت بی‌دریغ آن‌ها تألیف این کتاب را برایم میسر ساخت.

شاد و سربلند باشید

سعید بیاتی

فصل ۱

ترکیبیات و احتمال



اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد و در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل جمع

اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد و در روش اول $n_۱$ انتخاب، در روش دوم $n_۲$ انتخاب و ... و در روش kاُم، n_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $n_۱+n_۲+...+n_k$ روش وجود دارد.

مثال **علی می‌خواهد از تهران به بندرعباس سفر کند، برای این کار می‌تواند با اتوبوس و یا قطار برود. اگر با اتوبوس برود دو نوع اتوبوس و اگر با قطار برود سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟**

پاسخ **طبق اصلِ جمع، در کل علی $(۲+۳=۵)$ انتخاب دارد.**

اصل ضرب:

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد و برای انجام مرحله‌ی اول m انتخاب و برای هر کدام از این m انتخاب مرحله‌ی دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m\times n$ روش قابل انجام است.

تعمیم اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد و برای انجام مرحله‌ی اول $n_۱$ روش، برای انجام مرحله‌ی دوم $n_۲$ روش و ... و برای انجام مرحله‌ی kام، n_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد) کار مورد نظر با $n_۱\times n_۲\times...\times n_k$ روش قابل انجام است.

مثال **با ارقام ۷ ,۵ ,۴ ,۲ ,۱ چند عدد چهار رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟**

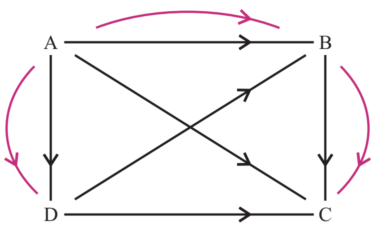
پاسخ **طبق اصل ضرب داریم:**

عدد چهار رقمی $=۷۲$ $\underbrace{\boxed{۳}}_{\text{۱ یا ۵ یا ۷}}^{\text{حالت}} \times \overset{\text{حالت}}{\boxed{۲}} \times \overset{\text{حالت}}{\boxed{۳}} \times \overset{\text{حالت}}{\boxed{۴}}$

در این سؤال برای اینکه عدد ۴ رقمی فرد باشد باید رقم یکانش فرد باشد؛ یعنی یکی از ارقام ۱ یا ۵ یا ۷. پس سه حالت داد. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقمی که در یکان قرار می‌گیرد، دیگر نمی‌تواند در خانه‌های بعدی بیاید، پس در خانه هزارگان (اولین خانه سمت چپ) چهار حالت داریم و در خانه‌ی بعدی یعنی خانه‌ی صدگان سه حالت و در خانه‌ی آخر باقی‌مانده که رقم دهگان است دو حالت داریم.

مثال **در شکل مقابل اگر فقط مجاز باشیم در جهت فلش‌ها حرکت کنیم، به چند طریق می‌توان از موقعیت A به موقعیت C رفت؟**

پاسخ برای رفتن از A به C چند حالت به صورت زیر داریم:



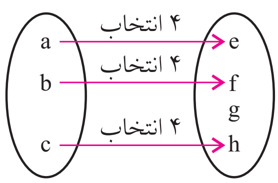
$$(A\to B\to C),(A\to D\to C),(A\to D\to B\to C),(A\to C)$$

مطابق تعمیم اصل ضرب و تعمیم اصل جمع، تعداد هر حالت را می‌شماریم و با هم جمع می‌کنیم:

جواب: $(۲\times۲)+(۲\times۱)+(۲\times۱\times۲)+(۱)=۱۱$ طریق

مثال **از مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه‌ی $B=\{e,f,g,h\}$ چند تابع می‌توان نوشت؟**

پاسخ **با توجه به نمودار زیر، برای تشکیل تابع باید از تمام اعضای مجموعه‌ی A پیکان خارج شود و به یکی از اعضای مجموعه‌ی B برود؛ پس برای هر عضو A چهار انتخاب داریم. لذا کل توابع از A به B برابر $۴\times۴\times۴=۴^۳$ می‌باشد.**



نکته **از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد n^m تابع می‌توان تعریف کرد.**

نماد فاکتوریل

فاکتوریل عدد طبیعی n که بصورت $n!$ می‌نویسیم عبارت است از: $n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times...\times۲\times۱$

به‌عنوان مثال داریم: $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

توجه داشته باشیم که $۵!$ را می‌توانیم بصورت $۵\times۴!$ و یا $۵\times۴\times۳!$ نیز بنویسیم، بدین ترتیب حاصل‌ضرب $۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹$ را می‌توانیم بصورت $\frac{۱۲!}{۸!}$ بنویسیم چون: $\frac{۱۲!}{۸!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹$

قرارداد می‌کنیم $۰!=۱$ و $۱!=۱$

مثال **حاصل عبارات زیر را بدست آورید.**

(الف) $\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{n\cancel{(n-۱)}!}{\cancel{(n-۱)}!}=n$

(ب) $\frac{۸!}{۶!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۶!}=۵۶$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- چند عدد شش‌رقمی با ارقام ۱ و ۰ وجود دارد؟ *(سراسری تجربی ۷۹)*

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲- چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ *(سراسری تجربی ۹۰)*

۱) ۱۰۸ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۷۲

۳- چند عدد سه رقمی با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰ و ۵ می‌توان بدون تکرار ارقام نوشت؟ *(آزاد پزشکی ۸۱)*

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۴- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۵- چند عدد دو رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (آزاد خارج ۸۸)

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۶- در یک امتحان چهارگزینه‌ای با ده سؤال متفاوت اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه‌ی سؤال‌ها پاسخ دهند چند پاسخنامه متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش‌آموزان از تعداد حالات بیشتر است) (آزاد پزشکی ۷۹)

۱) $۱۰^۴$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۴^{۱۰}$ ۴) $(۴۰)^{۴۰}$

۷- با ارقام ۰,۰,۰,۰,۲,۲ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (آزاد پزشکی ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۸- با ارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت که حاصلضرب ارقام آن زوج باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۹- یک قفل رمزی، دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۹ , ... , ۲ , ۱ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟ (کنکور سراسری)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۳/۵

۱۰- چند عدد سه رقمی متشکل از رقم‌های ۹ , ۵ , ۴ , ۰ و بخش‌پذیر بر ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۱- تعداد اعداد سه رقمی که ارقام مجاورشان متمایز باشند کدام است؟

۱) ۵۰۴ ۲) ۵۷۶ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۹

۱۲- چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموع ارقام آن‌ها ۶ باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۳- اگر از شهر A به B سه مسیر و از شهر B به C، چهار مسیر و از شهر C به D، پنج مسیر وجود داشته باشد به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت و برگشت به طوری که هر مسیر بین دو شهر متوالی حداکثر یک بار طی شود؟

۱) ۲۸۰۰ ۲) ۱۸۸۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۴- یک ساختمان ۸ طبقه را به چند طریق می‌توان با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو طبقه‌ی مجاوری هم‌رنگ نباشند؟

۱) ۴×۳^۷ ۲) $۳^۷$ ۳) ۳×۴^۷ ۴) $۴^۷$

۱۵- چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۴ , ۲ حداقل یک‌بار ظاهر شوند؟ (کنکور سراسری)

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶

۱۶- بین اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ چند عدد وجود دارد که در آن حداقل دو رقم متوالی یکسان باشند؟ (مثلاً ۱۰۰۲ یا ۹۹۳)

۱) ۲۶۲۰ ۲) ۲۶۲۹ ۳) ۳۴۳۹ ۴) ۳۴۳۰

۱۷- چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۴ , ۳ , ۲ , ۱ وجود دارد که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۴ , ۲ حداقل یک‌بار ظاهر شوند؟ (کنکور سراسری)

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۰۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

۱۸- اتوبوسی ۱۵ مسافر دارد و در ۵ ایستگاه توقف می‌کند. به چند طریق این ۱۵ نفر می‌توانند در این ۵ ایستگاه پیاده شوند؟

۱) $۱۵^۵$ ۲) $۱۵^{۱۵}$ ۳) $۵^{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵!}{۵!}$

جایگشت

تعریف مدل (ترتیب) قرار گرفتن n شیء متمایز کنار هم را یک جایگشت از آن اشیا می‌گوییم.

به‌عنوان مثال $abcd$ و $bcda$ و $dabc$ سه جایگشت از مجموعه $\{a,b,c,d\}$ می‌باشند.

نکته **تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با : $n!$**

مثال **به چند طریق می‌توان سه کتاب فیزیک مختلف و چهار کتاب ریاضی مختلف را در یک ردیف کنار هم قرار داد بطوری‌که:**

(الف) محدودیتی نباشد:

پاسخ در این حالت درواقع تعداد جایگشت‌های ۷ کتاب را می‌خواهیم که برابر $7!$ است.

(ب) کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؟

مثال چون می‌خواهیم کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند آن‌ها را در یک دسته قرار داده و در جایگشت با کتاب‌های ریاضی یک کتاب درنظر می‌گیریم البته جایگشت‌های خود کتاب‌های فیزیک در کنار هم را نیز باید درنظر بگیریم یعنی کل جایگشت‌ها در این حالت برابر است با:

ر۴ ر۳ ر۲ ر۱ ف۳ ف۲ ف۱

$$\text{جواب} = \underbrace{5!}_{\text{جایگشت کتاب‌های ریاضی با فیزیک}} \times \underbrace{3!}_{\text{جایگشت کتاب‌های فیزیک کنار هم}} = 720$$

(د) کتاب‌های فیزیک و ریاضی یک در میان قرار گیرند؟

پاسخ در این حالت چون سه کتاب فیزیک و چهار کتاب ریاضی داریم و می‌خواهیم یک در میان باشند تنها حالتی که می‌تواند باشد اینست که کتاب‌های فیزیک بین کتاب‌های ریاضی باشند یعنی بصورت:

ر۴ ف۳ ر۳ ف۲ ر۲ ف۱ ر۱

یعنی جایگشت‌های جابه‌جایی کتاب‌های فیزیک با کتاب‌های ریاضی نداریم بلکه فقط جایگشت‌های کتاب‌های فیزیک با هم و کتاب‌های ریاضی با هم می‌باشد یعنی کل جایگشت‌ها در این حالت برابر است با:

$$\text{جواب} = \underbrace{3!}_{\text{تعداد جایگشت‌های کتاب‌های فیزیک}} \times \underbrace{4!}_{\text{تعداد جایگشت‌های کتاب‌های ریاضی}} = 144$$

مثال **می‌خواهیم از ۵ نفر تست گویندگی بگیریم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است هرگاه:**

(الف) محدودیتی نباشد؟

پاسخ

$\text{جواب} = 5! = 120$

(ب) دو دوست مانند علی و رضا همواره کنار هم تست بدهند؟

پاسخ علی و رضا را در یک دسته قرار می‌دهیم.

جواب = $\underbrace{4!}_{\text{جایگشت‌های دسته علی و رضا کنار هم با بقیه افراد}} \times \underbrace{2!}_{\text{جایگشت علی و رضا با هم}} = 48$

(ج) علی همواره بلافاصله بعد از رضا تست دهد؟

جواب = $4! = 24$

پاسخ در این حالت دیگر جابه‌جایی علی و رضا را نداریم چون می‌خواهیم همواره علی بلافاصله بعد از رضا تست بدهد.

(ج) علی همواره بعد از رضا تست دهد؟

پاسخ در این حالت علی می‌تواند بلافاصله و یا با فاصله بعد از رضا تست دهد. چون در نیمی از کل حالات علی بعد از رضا و در نیم دیگر حـالات رضا بعد از علی تست می‌دهد پس تعداد جایگشت‌ها در این حالت برابر است با:

جواب = $\frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$ حالت

جایگشت n شی که همگی متمایز نیستند

هرگاه n شی داشته باشیم کـه همگـی متمـایز نباشـند مـثلاً k_1 شـی از نـوع اول و k_2 شـی از نـوع دوم و ... k_p شـی از نـوع p ام بطـوری‌کـه $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$ آن‌گاه تعداد کل جایگشت‌های این n شی برابر است با:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال **با ارقام ۴، ۴، ۴، ۳ و ۳ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟**

پاسخ طبق رابطه بالا داریم:

جواب = $\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = 10$

مثال **با حروف کلمه کنکور چند کلمه ۵ حرفی با معنی و بدون معنی می‌توان نوشت؟**

پاسخ چون در کلمه کنکور ۲ تا حرف «ک» داریم لذا تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

کنکور ← ک ن ک و ر

جواب = $\frac{5!}{2!1!1!1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۹– سه کتاب ریاضی متمایز و دو کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری‌که کتاب‌های ریاضی همواره کنـار هم باشند؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۲۰– می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک و ۲ کتاب شیمی مختلف را در یک قفسه قرار دهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است، هرگاه کتاب‌های فیزیک کنار هم و در ابتدای قفسه از سمت چپ باشند؟

۱) $5!$ ۲) $6!$ ۳) $5! \times 4!$ ۴) $6! \times 4!$

۲۱- سه کتاب ریاضی مختلف و چهار کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان یک در میان کنار هم قرار داد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۸ ۴) ۷۲۰

۲۲- دو سرباز و دو افسر به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند به طوری که دو افسر کنار هم نباشند؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۲۳- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ *(سراسری تجربی ۸۴)*

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۲۴- ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند تعداد پنج‌رقمی‌های حاصل کدام است؟ *(سراسری تجربی ۸۲)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۲۵- با ارقام ۲,۲,۰,۱,۱ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۹۶

۲۶- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۲,۰,۰,۰,۳ می‌توان نوشت؟ *(آزاد تجربی ۸۶)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۷- با ارقام ۱,۲,۲,۳,۳,۳ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ *(آزاد تجربی ۸۲)*

۱) ۳۴ ۲) ۲۶ ۳) ۳۸ ۴) ۳۲

۲۸- با ارقام ۰,۰,۰,۲,۱ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ *(آزاد پزشکی ۸۵)*

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۲۹- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۳,۳,۳,۲,۲,۲,۲ می‌توان نوشت؟ *(آزاد تجربی ۸۵)*

۱) ۲۴ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۴

۳۰- با حروف کلمه‌ی جمهوری چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۳۱- در چند جایگشت سه حرفی با حروف کلمه **milan** حرف **m** وجود دارد؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۳۰

۳۲- با حروف کلمه‌ی **problem** چند کلمه هفت حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف **b** همواره قرار گیرد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۳۳- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف و ۲ شیمی مختلف را کنار هم قرار دارد به طوری که کتاب‌های فیزیک همواره کنار هم بود و کتاب‌های شیمی در طرفین قرار داشته باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۳۴- یک عدد چهار رقمی را متقارن می‌گوئیم در صورتی که اگر از چپ یا راست نوشته شود در هر دو حالت یک عدد را مشخص کند (مثلاً ۴۷۷۴) چند عدد چهار رقمی متقارن داریم؟ *(کنکور آزمایشی)*

۱) ۹۰۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۱۰ ۴) ۸۱

۳۵- در چند جایگشت از اعداد ۱,۲,۳,۴,۵,۶ اگر ۴۵ دیده شود، ۲۶ نخواهد شد؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۶۹۶

۳۶- با حروف کلمه **action** چند کلمه سه حرفی شامل فقط یک حرف صدا دارد در وسط می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳۷- به چند طریق ۹ نفر می‌توانند در یک ردیف کنار هم باشند به‌طوری که ۳ نفر مشخص کنار هم نباشند؟

۱) $۹!-۳!$ ۲) $۷!\times ۷!$ ۳) $۶\times ۷!$ ۴) $۶۶\times ۷!$

۳۸- تعداد جایگشت‌های شش حرفی کلمه **Olympiad** که در آن حروف صدادار یک در میان قرار گیرند، کدام است؟

۱) $۳\times ۵!$ ۲) $۶!$ ۳) $۳\times ۶!$ ۴) $\frac{۶!}{۳!}$

۳۹- پنج نفر می‌خواهند غیر هم‌زمان سوار قطار شوند این عمل به چند طریق ممکن است، هرگاه شخص **A** قبل از شخص **B** سوار شود.

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

۴۰- چند عدد شش رقمی با ارقام ۲ ,۲ ,۲ ,۲ ,۱ ,۱ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰

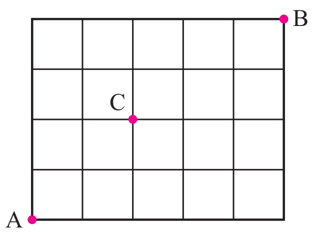
۴۱- با حروف AAAABBBCCC چند کلمه‌ی ۱۰ حرفی می‌توان ساخت که حرف سوم آن **A** و حرف هفتم آن **B** باشد؟

۱) ۵۶۰ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۲۱۰۰ ۴) ۴۲۰۰

۴۲- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی **saman**، بین حروف **s** و **m** دقیقاً یک حرف قرار دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۴۳- مجموعه‌ای از نقاط را به صورت شکل مقابل در نظر می‌گیریم اگر از نقطه‌ی **A** شروع کرده و در هر حرکت بتوانیم به طرف بالا یا به طرف راست یک قدم برداریم برای رسیدن به نقطه‌ی **B** چند مسیر وجود دارد هرگاه بخواهیم از نقطه‌ی **C** حتماً عبور کرده باشیم.



۱) ۹
۲) ۲۰
۳) ۶۰
۴) ۱۲۶

۴۴- به چند طریق می‌توان ۳ دانشجوی سال اول، ۳ دانشجوی سال دوم و ۳ دانشجوی سال سوم را به سه گروه ۳ نفره تقسیم کرد به طوری‌که در هر گروه یک نفر از هر سال تحصیلی وجود داشته باشد (ترتیب گروه‌ها مهم نیست و برای هر شخص تنها هم گروه‌هایش مهم است)؟

۱) $۳^۳$ ۲) $\frac{۳^۳}{۳!}$ ۳) $(۳!)^۲$ ۴) $(۳!)^۳$

۴۵- به چند طریق می‌توان ۵ دانشجوی سال اول، ۴ دانشجوی سال دوم و ۶ دانشجوی سال سوم سه گروه ۳ نفره انتخاب نمود طوری که در هر گروه یک نفر از هر سال تحصیلی وجود داشته باشد (ترتیب گروه‌ها مهم نیست)

۱) ۱۵۱۲۰۰ ۲) ۵۷۶۰۰ ۳) ۱۷۲۴۰۰ ۴) ۲۸۸۰۰

۴۶- به چند طریق ۳ پسر و ۳ دختر می‌توانند در یک میز گرد بنشینند؟

۱) $۶!$ ۲) $\frac{۶!}{۲!}$ ۳) $\frac{۶!}{۳!۳!}$ ۴) $۵!$

۴۷- به چدن طریق ۳ پسر و ۳ دختر می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که دخترها و پسرها یکی در میان باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷۲ ۴) ۲۰

۴۸- سه مربی و پنج ورزشکار به چند طریق می‌توانند در یک میزگرد بنشینند هرگاه مربی‌ها کنار هم باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۴۳۲۰

۴۹- چهار خانواده که هرکدام شامل پدر و مادر و یک فرزند است به چند طریق می‌توانند همگی دور یک میز بنشینند به طوری که تمامی اعضای هر خانواده کنار یکدیگر بوده و هر فرزند بین پدر و مادرش باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۸ ۳) ۸۰ ۴) ۹۶

ترتیب و ترکیب

جایگشت‌های kتایی از n شی متمایز (ترتیب)

تعداد جایگشت‌های k تایی از n شی متمایز را معمولاً با نماد $P(n,k)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$ که $k\le n$

منظور از تعداد جایگشت‌های k تایی از n شی متمایز یعنی تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء متمایز با درنظر گرفتن ترتیب انتخاب.

مثال ۱۰ نفر دانش‌آموز دبیرستانی در مسابقه‌ی ورزشی شرکت کرده‌اند نفرات اول و دوم و سوم مدال طلا و نقره و برنز دریافت خواهند کرد به چند طریق ممکن است که برندگان طلا ، نقره و برنز مشخص شوند؟

پاسخ در این مثال چون ترتیب انتخاب مهم است درواقع می‌خواهیم سه نفر از ۱۰ نفر را با درنظر گرفتن ترتیب، انتخاب کنیم که یک جایگشت ۳ تایی از ۱۰ نفر است و تعداد آن‌ها برابر است با:

$$P(۱۰\,,\,۳)=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times ۸\times ۹\times ۷!}{۷!}=۷۲۰$$

مثال با حروف کنکور چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ در این سؤال چون در کلمه کنکور ۲ تا حرف «ک» داریم بصورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

کلماتی که در آن‌ها ۱ یا هیچ حرف «ک» وجود دارد. $\xrightarrow{\text{ک ن و ر}}$ $P(۴\,,\,۳)=\frac{۴!}{۱!}=۴!=۲۴$

کلماتی که در آن‌ها ۲ تا حرف «ک» وجود دارد:

$\xrightarrow{\text{ک ک ر}}$ $\frac{۳!}{۲!\ ۱!}=۳$

$\xrightarrow{\text{ک ک و}}$ $\frac{۳!}{۲!\ ۱!}=۳$

$\xrightarrow{\text{ک ک ن}}$ $\frac{۳!}{۲!\ ۱!}=۳$

$\Longrightarrow$ تعداد کل کلمات $=۲۴+۳+۳+۳=۳۳$

ترکیب k تایی از n شی متمایز

بطور کلی ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز به انتخاب‌های k تایی از آن n شیء اطلاق می‌شود که در آن‌ها ترتیب انتخاب فاقد اهمیت است.

* تعداد ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز و به‌عبارت دیگر تعداد کل حالات انتخاب k شیء از n شیء بدون درنظر گرفتن ترتیب انتخاب برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$ که $(k\le n)$

توجه نماد $\binom{n}{k}$ (که می‌خوانیم انتخاب k از n) را بصورت $C\,(n,k)$ نیز نمایش می‌دهند.

مثال به چند طریق می‌توان از میان ۱۰ دانش‌آموز ۳ نفر را برای مسابقه ریاضی انتخاب کرد؟

پاسخ در این مثال چون ترتیب انتخاب مهم نیست تعداد کل حالات برابر است:

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\ ۷!}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{۳!\ \cancel{۷!}}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۳\times ۲\times ۱}=۱۲۰$$

نکته برای محاسبه‌ی ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز یعنی $\binom{n}{k}$ روابط زیر را بهتر است به خاطر بسپاریم:

(۱) $\binom{n}{۰}=۱\xrightarrow{\text{مثال}}\binom{۵}{۰}=۱$

(۲) $\binom{n}{۱}=n\xrightarrow{\text{مثال}}\binom{۵}{۱}=۵$

$$(۳)\ \binom{n}{n}=۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۵}=۱$$

$$(۴)\ \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۲}$$

$$(۵)\ \binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

$$(۶)\ \binom{n}{k}+\binom{n}{k-۱}=\binom{n+۱}{k} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۴}=\binom{۹}{۵}$$

$$(۷)\ \binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال **در کیسه‌ای چهار مهره‌ی قرمز و سه مهره سفید وجود دارد، به چند طریق می‌توان سه مهره از کیسه خارج کرد به طوری که:**

(الف) مهره‌ها همرنگ باشند؟

پاسخ برای این‌که مهره‌ها همرنگ باشند بایستی سه مهره قرمز و یا سه مهره سفید باشند یعنی:

$$\binom{۴}{۳}\overset{\text{یا}}{+}\binom{۳}{۳}=\binom{۴}{۱}+\binom{۳}{۳}=۴+۱=۵$$

(ب) مهره‌ها غیر همرنگ باشند؟

پاسخ در این حالت باید ۲ مهره سفید و ۱ مهره قرمز و یا ۲ مهره قرمز و یک مهره سفید باشد یعنی:

$$\binom{۳}{۲}\overset{\text{و}}{\times}\binom{۴}{۱}\overset{\text{یا}}{+}\binom{۴}{۲}\overset{\text{و}}{\times}\binom{۳}{۱}=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}=(۳\times۴)+(\frac{۴\times۳}{۲}\times۳)=۱۲+۱۸=۳۰$$

نکته
(الف) تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

(ب) تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n می‌باشد.

مثال **مجموعه $A=\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟**

پاسخ

$$\binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

مثال **مجموعه $A=\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد، بطوری‌که همه زیرمجموعه‌ها شامل حرف b باشند؟**

پاسخ چون در تمام زیرمجموعه‌ها می‌خواهیم حرف b باشد لذا دیگر نباید ۳ عضو از مجموعه‌ی ۵ عضوی انتخاب کنیم بلکه فقط ۲ عضو از ۴ عضو باقی‌مانده باید انتخاب کنیم که با حرف b زیرمجموعه سه عضوی تشکیل دهند. پس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی شامل حرف b برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

مثال **مجموعه $A=\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که فاقد حرف a باشند؟**

پاسخ در این مثال چون می‌خواهیم تمام زیرمجموعه‌ها فاقد حرف a باشند لذا ابتدا a را از مجموعه کنار می‌گذاریم و سه عضو را از ۴ عضو باقی‌مانده مجموعه انتخاب می‌کنیم که این تعداد برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}=\binom{۴}{۱}=۴$$

مثال **در آزمایشگاهی ۴ موش سالم و ۳ موش مریض وجود دارد به چند طریق می‌توان دو موش انتخاب کرد بطوری‌که حداقل یکی از موش‌ها سالم باشد؟**

پاسخ

$$\binom{4}{1}\overset{\text{و}}{\times}\binom{3}{1}\overset{\text{یا}}{+}\binom{4}{2}\overset{\text{و}}{\times}\binom{3}{0}=(4\times 3)+(6\times 1)=18$$

هیچ موش مریض و ۲ موش سالم یا ۱ موش مریض و ۱ موش سالم

در مثال فوق به چند طریق می‌توان ۲ موش انتخاب کرد به طوری‌که حداکثر ۲ موش سالم باشد؟

پاسخ

$$\binom{4}{0}\times\binom{3}{2}+\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}+\binom{4}{2}\times\binom{3}{0}=(1\times 3)+(4\times 3)+(6\times 1)=21$$

هیچ موش مریض و ۲ موش سالم یا ۱ موش مریض و ۱ موش سالم یا دو موش مریض و هیچ موش سالم

مثال **با حروف کلمه‌ی جمهوری چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت که همگی به واو ختم شوند و در تمام کلمات حرف ج باشد؟**

پاسخ

یکی از این ۳ خانه باید (ج) باشد

$$\overbrace{\square\ \square\ \square}\ \boxed{\text{و}}$$

با توجه به این‌که کلمه جمهوری دارای شش حرف است (ج م هـ و ر ی) و می‌خواهیم کلمات چهار حرفی که به واو ختم می‌شوند و شامل حرف ج هستند را بسازیم ابتدا باید ۲ حرف از چهار حرف (م هـ ر ی) انتخاب کنیم سپس جایگشت ۲ حرف انتخاب شده و حرف (ج) که در سه حرف اول آمده را محاسبه کنیم یعنی کل حالات برابر است با:

$$\binom{4}{2}\times 3!=\frac{4\times 3}{2}\times 6=6\times 6=36$$

توجه کنیم که چون همه کلمات به واو ختم می‌شوند، جایگشت حرف واو با بقیه حروف حساب نمی‌شود.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۰- اگر $\dfrac{p(n,4)}{c(n-1,4)}=26$ مقدار n کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج ۸۴)*

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۵۱- حاصل عبارت $\binom{9}{4}+\binom{8}{3}+\binom{8}{2}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\binom{11}{4}$ ۲) $\binom{10}{6}$ ۳) $\binom{9}{5}$ ۴) $\binom{10}{5}$

۵۲- دانش‌آموزی برای قبولی در یک آزمون ۱۰ سوالی باید به ۸ سوال به دلخواه پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۸ سوال را انتخاب کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۵۳- از ۸ پرسش به چند طریق می‌توان ۶ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد به طوری که حداقل ۵ پرسش از ۶ پرسش اول انتخاب شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۵۴- مجموعه‌ی $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a می‌باشد؟ *(سراسری ریاضی ۸۲)*

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵۵- تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۵۶- از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می‌توان سه لنگه انتخاب کرد که هیچ جفت کفش در میان آن‌ها نباشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۵۷- اگر بخواهیم از بین حروف $\{a,b,c,d,e,f\}$ چهار حرف انتخاب کنیم به صورتی که حرف b حتما انتخاب شود و حرف f هیچ‌گاه انتخاب نشود این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۵۸- از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می‌توان ۳ لنگه انتخاب کرد که یک جفت در میان آن‌ها باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۶ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۸

۵۹- بر روی یک دایره ۸ نقطه متمایز وجود دارد، تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس یک چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۰)

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۶۰- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو فرد موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر دیگر سخنرانی کند؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۶۱- از هر یک از مدارس A,B,C,D,E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیرهم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۶۲- ۱۰ دانش‌آموز دبیرستانی در مسابقه‌ی ورزشی شرکت کرده‌اند نفرات اول و دوم و سوم مدال طلا و نقره و برنز دریافت خواهند کرد. به چند طریق ممکن است که برندگان طلا و نقره و برنز مشخص گردد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۸۴۰

۶۳- از ۵ نفر عضو یک شرکت به چند طریق می‌توان یک رئیس و یک معاون انتخاب کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰

۶۴- شش نامه را به چند طریق می‌توان در هشت پاکت متفاوت قرار داد؟

۱) $\frac{8!}{2!}$ ۲) $\frac{8!}{2!6!}$ ۳) $\frac{8!}{6!}$ ۴) $6!$

۶۵- به چند طریق می‌توان ۴ مهره‌ی متمایز را درون ۷ جعبه قرار داد به طوری‌که حداکثر در هر جعبه یک مهره قرار گیرد؟

۱) $4!$ ۲) $7!$ ۳) $\frac{7!}{4!3!}$ ۴) $\frac{7!}{3!}$

۶۶- با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه چهارحرفی بدون توجه به معنی آن می توان ساخت که اولین حرف آن‌ها نقطه‌دار نباشد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۶۰

۶۷- با حروف کلمه‌ی PIROOZI چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت به طوری که با حرف O شروع شوند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۱۲۰

۶۸- در یک کلاس دو ردیف صندلی و در هر ردیف ۵ صندلی وجود دارد. به چند طریق ۲ دانش‌آموز سال اول و ۳ دانش‌آموز سال دوم و ۳ دانش‌آموز سال سوم می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به طوری‌که سال اولی‌ها در ردیف اول و سال سومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

۱) ۶۰۰۰ ۲) ۱۲۰۰۰ ۳) ۲۴۰۰۰ ۴) ۳۶۰۰۰

۶۹- اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ باشد حاصل $\binom{n}{n-4}$ کدام است؟

۱) ۲۶۴ ۲) ۲۷۵ ۳) ۳۰۸ ۴) ۳۳۰

۷۰- حاصل عبارت $A=\binom{17}{17}+\binom{12}{0}+\binom{15}{14}-\binom{9}{1}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۱- حاصل عبارت $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{6}{5}$ کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۴

۷۲- اگر $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}=1022$ باشد حاصل $\binom{n+2}{n}$ کدام است؟

۱) ۶۶ ۲) ۷۸ ۳) ۹۱ ۴) ۱۰۵

۷۳- حاصل عبارت $\binom{9}{4}+\binom{8}{3}+\binom{8}{2}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\binom{11}{4}$ ۲) $\binom{10}{6}$ ۳) $\binom{9}{5}$ ۴) $\binom{10}{5}$

۷۴- حاصل عبارت $\binom{7}{4}+2\binom{7}{3}+\binom{7}{2}$ کدام است؟

۱) $\binom{9}{5}$ ۲) $\binom{8}{4}$ ۳) $\binom{9}{6}$ ۴) $\binom{8}{5}$

۷۵- عبارت $\binom{11}{5}+\binom{11}{4}+\binom{11}{3}+\binom{11}{2}+\binom{11}{1}+\binom{11}{0}$ با کدام یک از مقادیر زیر برابر است؟

۱) 2^5 ۲) 2^{11} ۳) 2^{10} ۴) $\frac{2^{11}-\binom{11}{6}}{2}$

۷۶- از هر یک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموزی که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

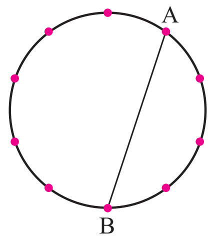
۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۷۷- از هر یک از ۶ منطقه کشوری ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دوبه‌دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟

۱) ۶۷۵۰۰ ۲) ۵۷۶۰۰ ۳) ۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

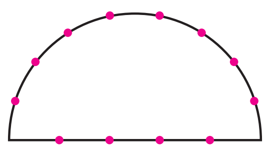
۷۸- از بین ۶ زوج جوان به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری‌که از هر زوج فقط زن یا شوهر بتواند عضو گروه باشد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۴۰ ۳) ۲۰ ۴) ۸۰



۷۹- از به هم وصل کردن نقاط شکل مقابل چهارضلعی می‌توان ساخت که AB ضلع آن چهارضلعی باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳
۳) ۱۴ ۴) ۱۵



۸۰- در شکل مقابل برای وصل دو به دوی نقاط به چند خط راست نیازمندیم؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۱
۳) ۶۰ ۴) ۵۹

۸۱- به چند طریق ۱۲ نفر می‌توانند در روزهای سال به دنیا بیایند به طوری‌که ۶ نفر در شش ماه اول سال و شش نفر در شش ماه دوم سال به دنیا بیایند (فرض کنید هیچ‌کس در سال کبیسه به دنیا نیامده باشد)؟

۱) $۱۸۶^۶ \times ۱۷۹^۶$ ۲) $\frac{۱۷۹^۶ \times ۱۸۶^۶}{۶!۶!}$ ۳) $\binom{۱۲}{۶} \times ۱۸۶^۶ \times ۱۷۹^۶$ ۴) $\frac{\binom{۱۲}{۶} \times ۱۸۶^۶ \times ۱۷۹^۶}{۶!۶!}$

۸۲- در چند جایگشت ۵ حرفی از حروف کلمه lambert عبارت lam وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۸۳- یک پرتقال، یک سیب و یک هلو را به چند طریق می‌توان بین ۸ نفر توزیع کرد؟

۱) $۳^۸$ ۲) $۸^۳$ ۳) $C(۸,۳)$ ۴) $P(۸,۳)$

احتمال

پدیده‌های تصادفی و احتمال

پدیده تصادفی

پدیده‌هایی هستند که نتیجه‌ی آن‌ها معلوم نیست بلکه فقط حالات ممکن برای نتیجه مشخص است مانند آزمایش (پدیده) پرتاب یک سکه که نمی‌دانیم کدام روی سکه می‌آید ولی می‌دانیم که ممکن است رو یا پشت سکه بیاید.

فضای نمونه‌ای

مجموعه کل حالات ممکن در بوقوع پیوستن یک پدیده یا آزمایش تصادفی بدون هیچ قید و شرطی را فضای نمونه‌ای آن پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای را معمولاً با حرف S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می‌دهند. اگر اعضای S قابل شمارش باشد آن را یک فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامیم.

> **نکته:** **فضای نمونه‌ای ممکن است دارای تعداد نامتناهی عضو باشد، ما در این کتاب فقط آزمایش‌هایی را درنظر می‌گیریم که فضای نمونه‌ای آن‌ها متناهی است یعنی تعداد اعضای S عددی طبیعی مانند n است.**

در جدول زیر تعدادی از پدیده‌های تصادفی به همراه فضای نمونه‌ای آن‌ها آورده شده است:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای: $n(s)$	فضای نمونه‌ای: S	پدیده تصادفی
$n(s)=۲$	S = {رو , پشت}	انداختن یک سکه
$n(s)=۲\times۲=۴$	S = {(پ، پ) , (ر، ر) , (ر، پ) , (پ، ر)}	انداختن ۲ سکه
$n(S)=۲\times۲\times۲=۸$	S = {(ر، ر، پ) , (ر، پ، ر) , (ر، ر، ر) , (پ، پ، پ) , (پ، ر، پ) , (پ، پ، ر) , (ر، پ، پ) , (پ، ر، ر) ,}	انداختن ۳ سکه
$n(s)=۶$	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$	انداختن یک تاس
$n(S)=۶\times۶=۳۶$	$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱),...,(۶,۶)\}$	انداختن ۲ تاس (یک تاس ۲ بار)
$n(S)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$	$S=\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$	انتخاب ۲ حرف از مجموعه $\{a,b,c,d\}$
$n(S)=p(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!}=۱۲$	$S=\{۱۲,۲۱,۱۳,۳۱,۱۴,۴۱,۲۴,۴۲,۳۴,۴۳,۳۲,۲۳\}$	انتخاب ۲ رقم از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ساختن یک عدد۲ رقمی
$n(S)=۲\times۲\times۲=۸$	S = { (پ، د، پ) , (د، پ، پ) و (پ، پ، د) ,(پ، پ، پ) ,(د، د، پ) ,(د، پ، د) ,(د، پ، د) (پ، د، د) (د، د، د) }	ترکیب جنسیت فرزندان یک خانواده سه فرزندی

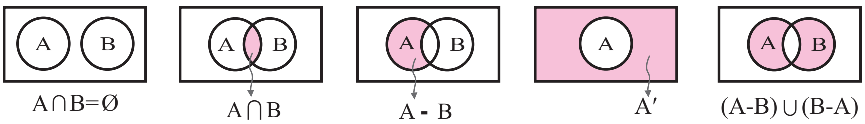
پیشامد تصادفی

زیرمجموعه‌ای است از فضای نمونه‌ای پدیده تصادفی. پیشامدها را معمولاً با نماد A، B، C و ... نشان می‌دهند. مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامد زوج آمدن عدد روی تاس بصورت $A=\{۲ , ۴ , ۶\}$ است.

> **نکته:** **با توجه به این‌که هر مجموعه n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است لذا برای هر فضای نمونه‌ای n عضوی می‌توان ۲^n پیشامد تعریف کرد که یکی از این پیشامدها تهی است. (چون تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است) و به آن پیشامد نشدنی می‌گویند و همچنین یکی از پیشامدها خود فضای نمونه‌ای است چرا که هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش نیز است و به این پیشامد پیشامد حتمی یا مطمئن می‌گویند.**

اعمال روی پیشامدها

با توجه به این‌که پیشامدها زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای‌اند لذا اعمال روی مجموعه‌ها در مورد پیشامدها نیز صادق است یعنی:



و چند رابطه‌ی مهم:

(۱) $A - B = A \cap B'$

(۲) $A - B = A - (A \cap B)$

(۳) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(۴) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(۵) $(A')' = A$

(۶) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

تعریف احتمال

تعریف اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد در این‌صورت احتمال رخداد پیشامد A که با $P(A)$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$: تعداد عضوهای پیشامد A (حالات مطلوب)

$n(S)$: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای S (کل حالات)

مثال **در پرتاب ۲ سکه سالم احتمال این‌که هر دو سکه پشت بیاید کدام است؟**

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} S = \{(\text{پ ، پ}) , (\text{ر ، پ}) , (\text{پ ، ر}) , (\text{ر ، ر})\} \Rightarrow n(S) = ۴ \\ A = \{\text{پ ، پ}\} \Rightarrow n(A) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

مثال **در پرتاب دو تاس سالم مطلوبست احتمال این‌که:**

الف) اعداد رو شده در ۲ تاس مثل هم باشند؟

پاسخ اولاً فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب ۲ تاس یعنی: $S = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),\ldots(۶,۶)\}$ دارای $n(s) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ عضو است ثانیاً پیشامد مطلوب A که مثل هم بودن اعداد رو شده در ۲ تاس است بصورت:

$A = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۳ , ۳) , (۴ , ۴) , (۵ , ۵) , (۶ , ۶)\}$ است که دارای $n(A) = ۶$ عضو می‌باشد، پس احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

ب) اعداد رو شده در ۲ تاس مضرب ۳ باشند؟

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶ \\ A = \{(۳ , ۳) (۳ , ۶) (۶ , ۳)(۶ , ۶)\} \longrightarrow n(A) = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

راه دوم برای تعیین $n(A)$:

$\{۳ , ۶\} =$ اعداد مضرب ۳ در تاس اول

$\{۳ , ۶\} =$ اعداد مضرب ۳ در تاس دوم

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} n(A) = ۲ \times ۲ = ۴$

ج) مجموع اعداد رو شده در دو تاس زوج باشند؟

پاسخ برای این‌که مجموع دو عدد زوج باشد باید هر دو عدد زوج و یا هر دو عدد فرد باشد پس:

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=۶\times ۶=۳۶ \\ n(A) \overset{\text{طبق اصل ضرب}}{=} \underset{\text{تاس اول}}{\underset{\downarrow}{۳}} \times \underset{\text{تاس دوم}}{\underset{\downarrow}{۳}} + \underset{\text{تاس اول}}{\underset{\downarrow}{۳}} \times \underset{\text{تاس دوم}}{\underset{\downarrow}{۳}} = ۱۸ \end{array}\right\} \longrightarrow p(A)=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

(د) مجموع اعداد رو شده در دو تاس عددی اول باشد؟

پاسخ با توجه به این‌که مجموعه اعداد اول بصورت $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,\cdots\}$ است لذا پیشامد مطلوب در این آزمایش مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که جمع دو عدد رو شده، یکی از اعداد اول مجموعه فوق باشد یعنی:

$$A=\left\{\begin{array}{l}(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۱,۶),\\(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۶),(۶,۵)\end{array}\right\} \Rightarrow n(A)=۱۵$$

و با توجه به این‌که $n(S)=۶\times ۶=۳۶$ داریم:

$$P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

مثال **حروف کلمه ABADAN را بریده و به تصادف جابه‌جا می‌کنیم مطلوبست احتمال آن‌که سه حرف A کنار هم باشند؟**

پاسخ

$$\text{ABADAN} \longrightarrow \text{AAABDN}$$

اولاً، فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای $\boxed{n(S)=\frac{۶!}{۳!\,۱!\,۱!\,۱!}=۱۲۰}$ عضو است.

تعداد جایگشت‌های n شیء که همگی متمایز نیستند.

ثانیاً، پیشامد این‌که حروف A کنار هم باشند به‌صورت $\boxed{\text{AAA}}\text{BDN}$ بوده که دارای $n(A)=۴!$ عضو است پس احتمال برابر است با:

$$P(A)=\frac{۴!}{۱۲۰}=\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

مثال **در محفظه‌ای ۴ موش سالم و ۳ موش مریض نگهداری می‌شوند اگر به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها انتخاب کنیم احتمال این‌که اولی سالم و سومی مریض باشد کدام است؟**

پاسخ در این مثال چون از موش دوم صحبتی نشده است لذا در احتمال تأثیری ندارد و باید احتمال انتخاب ۲ موش را محاسبه کنیم به طوری‌که اولی سالم و دومی مریض باشد.

$$p(A)=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}}\times\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}}=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۲}{۷}$$

مثال **در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۳مهره آبی وجود دارد اگر به تصادف ۳ مهره از آن خارج کنیم مطلوبست احتمال این‌که:**

(الف) هر سه مهره همرنگ باشند؟

پاسخ

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۱+۱۰}{\frac{۸!}{۳!\,۵!}}=\frac{۱۱}{۵۶}$$

(ج) حداقل یک مهره آبی باشد؟

پاسخ

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{(۳\times۱۰)+(۳\times۵)+(۱\times۱)}{۵۶}=\frac{۴۶}{۵۶}$$

مثال **در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد به تصادف یک مهره از کیسه خارج کرده و با مشاهده رنگ آن کنار می‌گذاریم و سپس دو مهره خارج می‌کنیم احتمال این که ۳ مهره انتخابی در دو مرحله قرمز باشند کدام است؟ (مسأله انتخاب بدون جایگذاری)**