هندسه ۲

(رشته ریاضی)

پایه یازدهم (دوره دوم متوسطه)

از مجموعه مرشد

پایا

مرتضی خمامی‌ابدی • کیان کریمی‌خراسانی

- درس‌نامه
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تألیفی و کنکور)
- پاسخ‌نامه تشریحی با نکته‌های کلیدی
- برای داوطلبان رشته‌های برتر دانشگاه‌های مشهور

پیشگفتار

دانش‌آموزان گرامی

بسیار خرسندیم که کتاب‌های ریاضی «**پایا**» را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب‌ها که از مجموعه کتاب‌های «**مرشد**» به حساب می‌آیند، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کنند. این مجموعه، برای دانش‌آموزانی به رشتهٔ تحریر درآمده است که مایلند در بهترین رشته‌های مهندسی یا علوم پایهٔ دانشگاه‌های به‌نام کشور یا خارج از ایران تحصیل کنند. کتاب «**هندسه یازدهم پایا**» شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها در درس هندسه آماده می‌کند.

مؤلفان هندسه پایا پس از ارائهٔ درسنامهٔ مختصر، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور گروه‌های آزمایشی ریاضی و تجربی، مسائل مسابقات معتبر ریاضی (با توجه به استفادهٔ طراحان کنکور از آن‌ها در سال‌های اخیر) و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند.

مطالعهٔ پاسخ‌نامهٔ تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را تسهیل خواهد کرد.

در پایان، وظیفهٔ خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان: مرتضی خمامی ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه، آقای مهندس هادی عزیززاده، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، تشکر کنیم.

همچنین از آقایان حمیدرضا بیات و سعید بیاتی که در تألیف این کتاب همکاری داشته‌اند و از خانم ملیحه محمدی آندرس که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی، خانم نرگس سربندی که زحمت ترسیم شکل‌ها، و خانم بهاره خدامی که زحمت طراحی کتاب را برعهده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همهٔ این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل اول: دایره

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

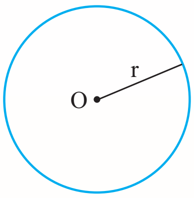
فصل سوم: روابط طولی در مثلث

آزمون ها

فصل اول: دایره

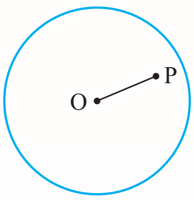
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره



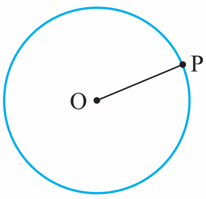
تعریف نقاطی از صفحه که از یک نقطه به یک فاصله‌اند، تشکیل یک دایره می‌دهند.
این نقطه مرکز دایره و این فاصله شعاع دایره نام دارند.
معمولاً دایره‌ای به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

وضعیت نقطه و دایره



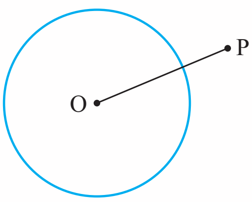
حالت اول: نقطه داخل دایره است. در این صورت فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره است.

$$OP < r$$



حالت دوم: نقطه روی دایره است. در این صورت فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است.

$$OP = r$$

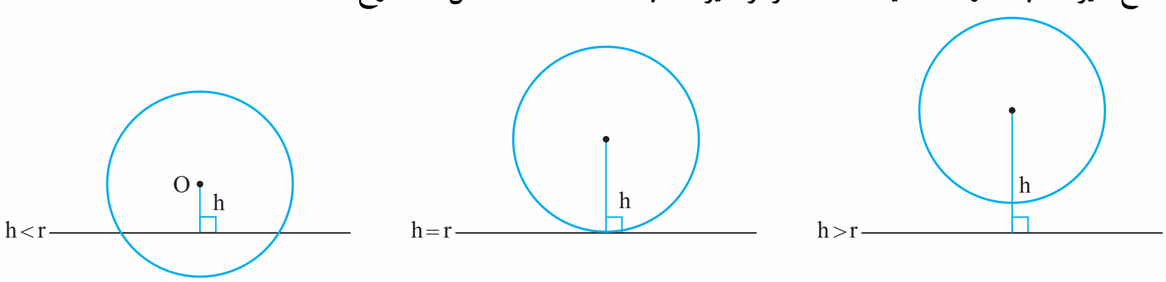


حالت سوم: نقطه بیرون دایره است. در این صورت فاصله نقطه تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره است.

$$OP > r$$

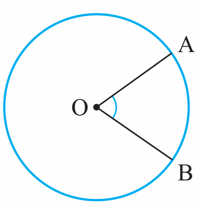
وضعیت خط و دایره

اگر شعاع دایره r باشد و فاصلهٔ یک خط تا مرکز دایره h باشد، سه حالت ممکن است رخ دهد:



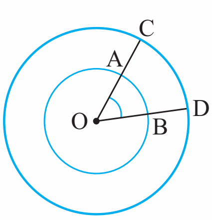
اگر فاصلهٔ خط تا دایره کم‌تر از شعاع باشد، خط و دایره در دو نقطه برخورد دارند. اگر فاصلهٔ خط و دایره برابر با شعاع باشد، خط و دایره مماس هستند و اگر فاصلهٔ خط و دایره بیش‌تر از شعاع باشد، خط با دایره هیچ نقطهٔ برخوردی ندارد.

- وقتی از مرکز دایره به نقطهٔ تماس دایره و خط وصل کنیم، بر خط عمود می‌شود.



زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد. اندازهٔ زاویه مرکزی با اندازهٔ کمان روبه‌روی آن برابر است.

$$\widehat{O} = \widehat{AB}$$



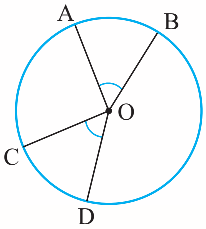
- ممکن است کمان‌های با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوت داشته باشند.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

طول کمان CD > طول کمان AB

طول کمان: برای به دست آوردن طول کمان، از نسبت زیر استفاده می‌کنیم:

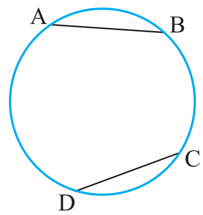
$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ کمان}}{۳۶۰^\circ}$$



- زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمان‌های برابر، با هم برابرند و برعکس.

$$A\hat{O}B = C\hat{O}D \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

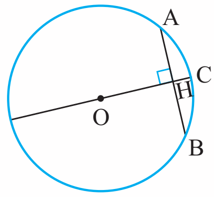
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D$$



- اگر در یک دایره دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیرشان برابرند و برعکس.

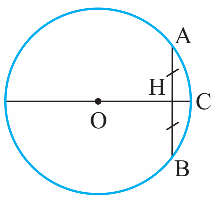
$$AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB = CD$$



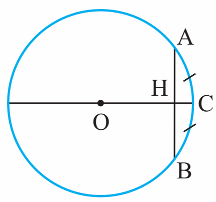
- قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیر به آن را نصف می‌کند.

$$OH \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$



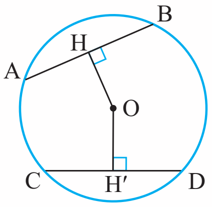
- در هر دایره، خطی که از مرکز به وسط وتر وصل می‌شود بر آن وتر عمود است و کمان نظیر به آن را نصف می‌کند.

$$AH = HB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$



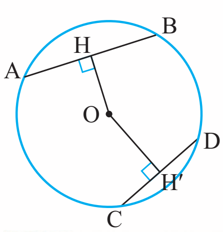
- در هر دایره خطی که از مرکز دایره به وسط کمان وصل می‌شود بر آن وتر عمود است و آن وتر را نصف می‌کند.

$$AC = CB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$



- در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.

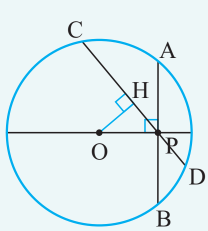
$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$



- در هر دایره، وتر نزدیک‌تر به مرکز بزرگ‌تر است و بالعکس.

$$OH < OH' \Leftrightarrow AB > CD$$

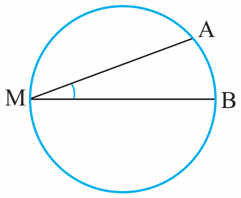
مثال نقطهٔ P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



پاسخ بدیهی است که بزرگ‌ترین وتر گذرنده از P، قطر دایره است.
کوچک‌ترین وتر گذرنده از P، وتری عمود بر قطر دایره، در نقطهٔ P است.

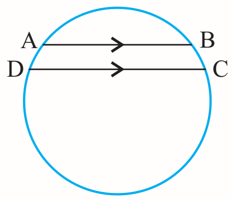
$$OH < OP \Rightarrow CD > AB$$

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و ضلع‌های آن، وترهای دایره باشند.
اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.



$$\widehat{M}=\frac{\widehat{AB}}{۲}$$

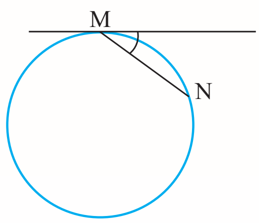
اگر دو وتر موازی رسم کنیم، کمان‌های بین آن‌ها برابر خواهند بود و بالعکس.



$$AB\,||\,DC\Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC}$$

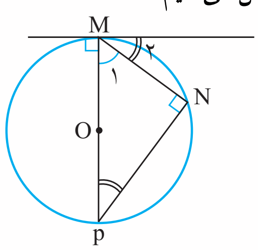
$$\widehat{AD}=\widehat{BC}\Rightarrow AB\,||\,DC$$

زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگر، مماس بر دایره باشد.



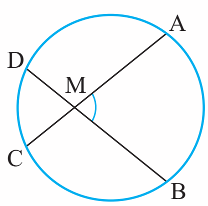
$$\widehat{M}=\frac{\widehat{MN}}{۲}$$

اثبات از M به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ P قطع کند، از P به N وصل می‌کنیم.
زاویهٔ N روبه‌رو به قطر است، پس ۹۰° است و OM در نقطه M بر خط مماس عمود است.

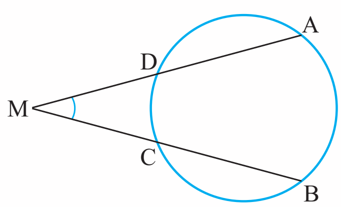


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\widehat{M}_۲+\widehat{M}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{P}+\widehat{M}_۱=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{P}=\widehat{M}_۲\\ \hat{P}=\dfrac{\widehat{MN}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{M}_۲=\frac{\widehat{MN}}{۲}$$

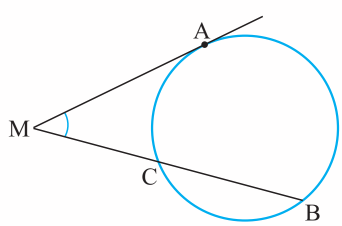
زاویه‌های بین دو وتر دایره



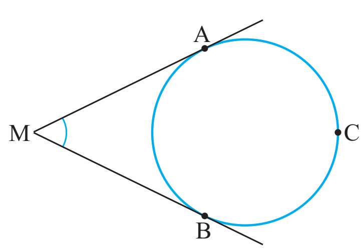
$$\widehat{M}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲}$$



$$\widehat{M}=\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{۲}$$

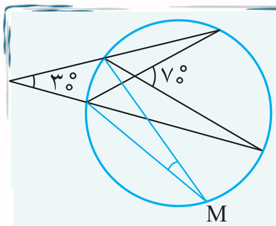


$$\widehat{M}=\frac{\widehat{AB}-\widehat{AC}}{۲}$$

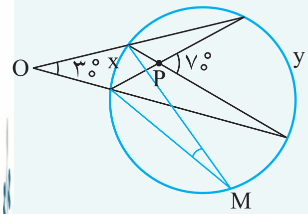


$$\widehat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{AB}}{۲}$$

مثال زاویهٔ $\widehat{M}$ را به دست آورید.



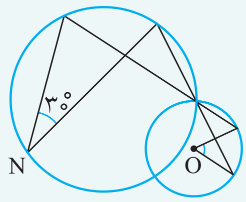
پاسخ



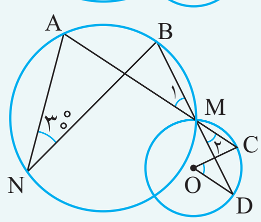
$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}=\dfrac{x+y}{۲}=۷۰^\circ \Rightarrow y+x=۱۴۰^\circ \\ \hat{O}=\dfrac{y-x}{۲}=۳۰^\circ \Rightarrow y-x=۶۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow x=۴۰^\circ$$

$$\widehat{M}=\frac{x}{۲}=۲۰^\circ$$

مثال زاویهٔ O را به دست آورید.



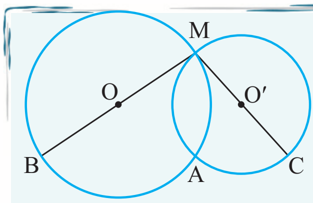
پاسخ



$$\widehat{N}=۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB}=۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{M}_۱=۳۰^\circ$$

$$\widehat{M}_۲=\widehat{M}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{CD}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}=۶۰^\circ$$

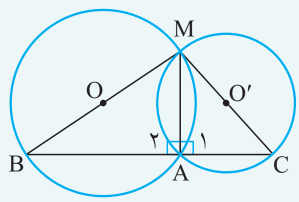
مثال نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



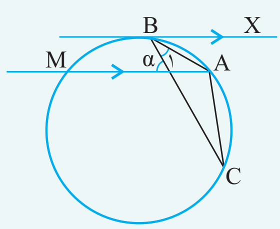
پاسخ زاویه‌های $\widehat{A}_۱$ و $\widehat{A}_۲$ روبه‌رو به قطر هستند. درنتیجه:

$$\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=۱۸۰^\circ$$

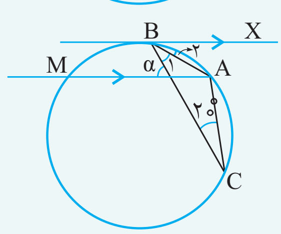
A، B و C روی خط راست هستند.



مثال $\widehat{B}_۱=۳۰^\circ$، $\widehat{C}=۲۰^\circ$ و $BX \parallel MA$. زاویهٔ α را به دست آورید.



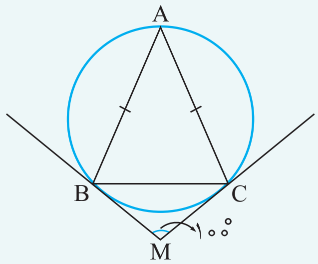
پاسخ



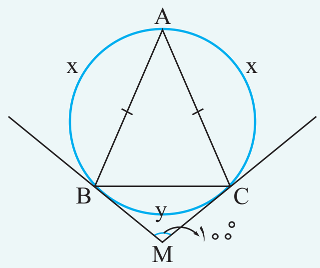
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_۲=\dfrac{\widehat{AB}}{۲} \\ \hat{C}=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_۲=\hat{C}=۲۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}MA \parallel BX \Rightarrow \alpha=\hat{B}_۱+\hat{B}_۲ \\ B_۱=۳۰^\circ, B_۲=۲۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=۵۰^\circ$$

مثال MB و MC مماس بر دایره هستند و $AB = AC$. زاویه $\widehat{A}$ را به دست آورید.



پاسخ



$$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$$

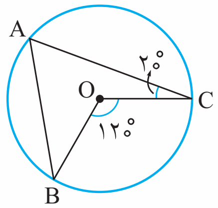
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = x\ ,\ \overset{\frown}{BC} = y$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{M} = \frac{۲x - y}{۲} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow ۲x - y = ۲۰۰^\circ \\ ۲x + y = ۳۶۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = ۸۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{y}{۲} = ۴۰^\circ$$

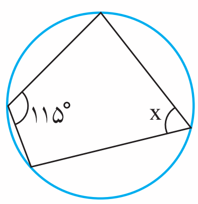
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. در شکل روبه‌رو اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟



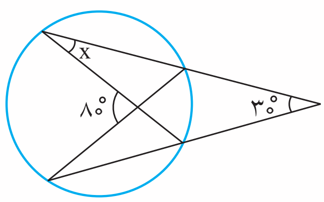
۱) ۲۰°
۲) ۳۰°
۳) ۴۰°
۴) ۵۰°

۲. در شکل روبه‌رو x چند درجه است؟



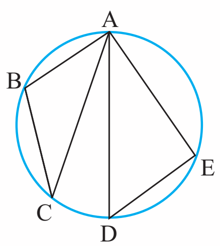
۱) ۴۵°
۲) ۵۵°
۳) ۶۵°
۴) ۷۵°

۳. مهم در شکل روبه‌رو، اندازهٔ x چند درجه است؟



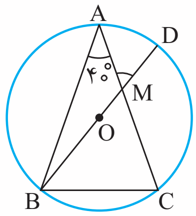
۱) ۲۰°
۲) ۲۵°
۳) ۳۰°
۴) ۳۵°

۴. در شکل روبه‌رو، اگر $\widehat{B} = ۱۱۰^\circ$ و $\widehat{E} = ۹۵^\circ$، آن‌گاه زاویهٔ $C\widehat{A}D$ چند درجه است؟



۱) ۲۰°
۲) ۲۵°
۳) ۴۰°
۴) ۵۰°

۵. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. اگر $\widehat{A} = ۴۰^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟



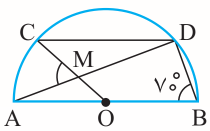
۱) ۴۰°

۲) ۵۰°

۳) ۶۰°

۴) ۷۰°

۶. مهم در شکل روبه‌رو، اگر $\widehat{B} = ۷۰^\circ$ و $CD \parallel AB$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟



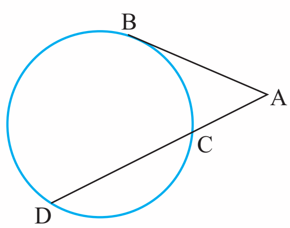
۱) ۴۰°

۲) ۵۰°

۳) ۶۰°

۴) ۷۰°

۷. در شکل روبه‌رو، AB بر دایره مماس است. اگر $\overset{\frown}{BC} = ۳\alpha$، $\overset{\frown}{BD} = ۵\alpha$ و $\overset{\frown}{CD} = ۴\alpha$، اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



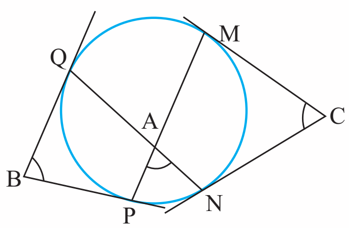
۱) ۳۰°

۲) ۴۵°

۳) ۶۰°

۴) ۷۵°

۸. مهم در شکل روبه‌رو، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. کدام رابطه بین زوایای A، B و C برقرار است؟ (کتاب درسی)



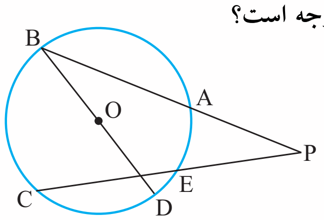
۱) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$

۲) $\widehat{A} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{۲}$

۳) $۲\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۳۶۰^\circ$

۴) $\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A} = ۹۰^\circ$

۹. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره است، $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$، $\overset{\frown}{ED} = ۲۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = ۸۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ P چند درجه است؟



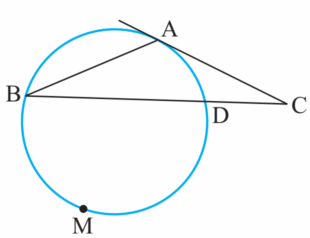
۱) ۲۰°

۲) ۳۰°

۳) ۶۰°

۴) ۹۰°

۱۰. در شکل مقابل، مماس AC بر دایرهٔ با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان $\overset{\frown}{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد. زاویهٔ C چند درجه است؟



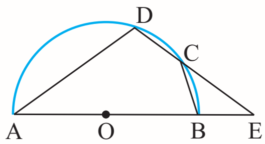
۱) ۲۱°

۲) ۲۲°

۳) ۲۳°

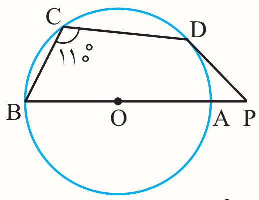
۴) ۲۴°

۱۱. دشوار در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC=CD$ و $AD=DE$. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



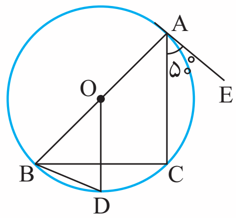
۱) ۲۴°
۲) ۳۰°
۳) ۳۶°
۴) ۴۲°

۱۲. دشوار در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\widehat{C}=۱۱۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ P چند درجه است؟



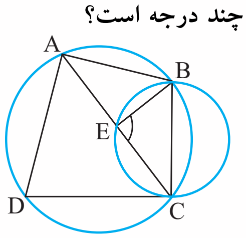
۱) ۵۰°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۵۵°

۱۳. در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازهٔ زاویهٔ $C\widehat{B}D$ چند درجه است؟



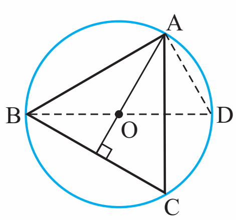
۱) ۱۵°
۲) ۲۰°
۳) ۲۵°
۴) ۳۰°

۱۴. دشوار در شکل روبه‌رو، CD بر دایرهٔ کوچک مماس است. اگر $B\widehat{A}D=۱۰۰^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $B\widehat{E}C$ چند درجه است؟



۱) ۸۰°
۲) ۱۰۰°
۳) ۴۰°
۴) ۵۰°

۱۵. دشوار در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویهٔ $A\widehat{O}D$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۲)



۱) $O\widehat{B}C$
۲) $C\widehat{A}D$
۳) $O\widehat{A}C$
۴) $A\widehat{D}O$

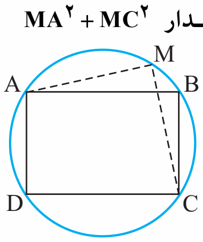
۱۶. مهم در مثلث ABC، داریم $\widehat{B}=۵۰^\circ$ و $\widehat{C}=۶۰^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمودمنصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند. زاویه $M\widehat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۵° ۴) ۴۰°

۱۷. مهم در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ نقطهٔ O در امتداد AC ، مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۴)

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

۱۸. در شکل روبه‌رو، $ABCD$ یک مستطیل به اضلاع ۲ و ۳ است و نقطهٔ دلخواه M روی محیط دایره قرار دارد. مقدار $MA^۲+MC^۲$ کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۱۱
۳) ۱۳ ۴) ۱۵

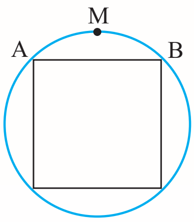
۱۹. مهم در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۰. دشوار مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۵)

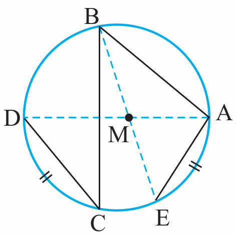
۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۲۱. دشوار در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



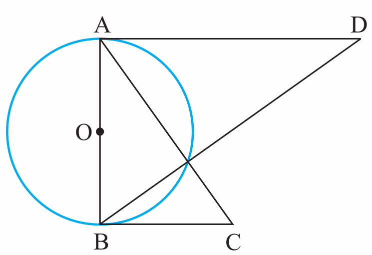
۱) $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$

۲۲. در شکل مقابل، اگر $AB=۶$ ، $BC=۸$ ، $CD=۳$ و $\widehat{AE}=\widehat{CD}$ ، آن‌گاه اندازهٔ AM کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۳)



۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

۲۳. در شکل روبه‌رو، AD و BC بر دایره‌ای به قطر AB مماس هستند. اگر $AD=x$ و $BC=y$ ، طول قطر دایره با کدام برابر است؟

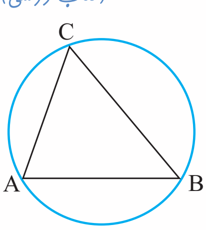


۱) $\frac{x+y}{۲}$
۲) $\sqrt{xy}$
۳) $\frac{xy}{x+y}$
۴) $\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}}$

۲۴. دشوار در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ B بر مماس دلخواه دایره، عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $A\hat{D}B=۳۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OAD چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۴)

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

۲۵. مهم در شکل روبه‌رو، $\hat{A}=۷۰^\circ$ و $\hat{B}=۵۰^\circ$. از نقطهٔ O مرکز دایره، بر اضلاع AB ، AC و BC به ترتیب عمودهای OP، OQ و OR رسم می‌شود. کدام درست است؟ (کتاب درسی)



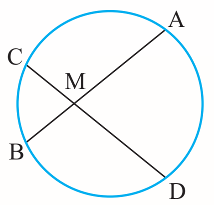
۱) $OP>OR>OQ$
۲) $OP>OQ>OR$
۳) $OQ>OR>OP$
۴) $OQ>OP>OR$

۲۶. مهم در دایرهٔ $C(O,۲)$ وتر $AB=۲\sqrt{۳}$ رسم شده است. کمان $\widehat{AB}$ چند درجه است؟ (کتاب درسی)

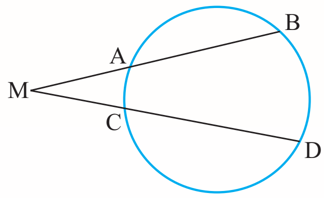
۱) ۶۰° ۲) ۹۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

رابطه های طولی در دایره

اگر دو وتر AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یک‌دیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

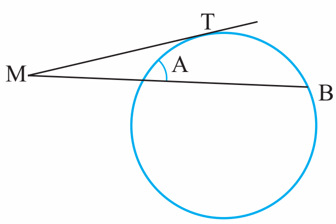


$$MA.MB = MC.MD$$



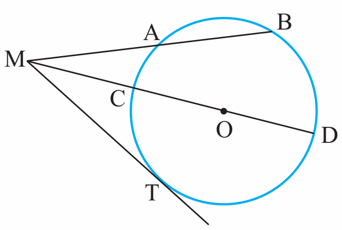
$$MA.MB = MC.MD$$

از نقطهٔ M خارج دایره، مماس MT بر دایره رسم شده است.



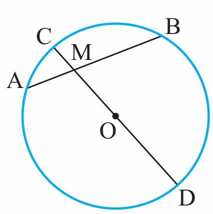
$$MT^{۲} = MA.MB$$

فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره را d و شعاع دایره را r در نظر می‌گیریم.



$$\left.\begin{array}{l} MC = d - R \\ MD = d + R \end{array}\right\} \Rightarrow MC.MD = d^{۲} - r^{۲}$$

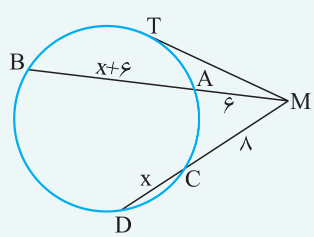
$$MT^{۲} = MA.MB = MC.MD = d^{۲} - r^{۲}$$



$$\left.\begin{array}{l} MC = R - d \\ MD = R + d \end{array}\right\} \Rightarrow MC.MD = r^{۲} - d^{۲}$$

$$MA.MB = MC.MD = r^{۲} - d^{۲}$$

مثال در شکل مقابل، طول مماس MT چند است؟

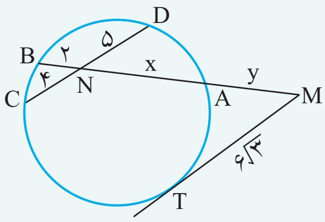


پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} MT^{۲} = MA.MB = MC.MD \\ \quad MA.MB = ۶ \times (۱۲ + x) \\ \quad MC.MD = ۸ \times (۸ + x) \end{array}\right\} \Rightarrow ۶ \times (۱۲ + x) = ۸ \times (۸ + x) \Rightarrow ۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴$$

$$MT^{۲} = MA.MB \Rightarrow MT^{۲} = ۶ \times (۱۲ + ۴) \Rightarrow MT^{۲} = ۱۶ \times ۶ \Rightarrow MT = ۴\sqrt{۶}$$

مثال در شکل مقابل، مقدار y را به دست آورید.



پاسخ

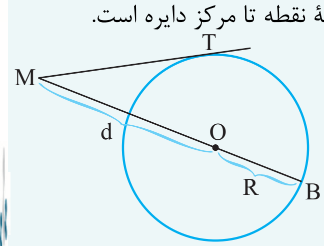
$$NA.NB = NC.ND \Rightarrow ۲x = ۲۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

$$MT^۲ = MA.MB \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = y \times (y+۱۲) \Rightarrow y^۲ + ۱۲y = ۱۰۸ \Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۱۰۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (y+۱۸)(y-۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = -۱۸ & \text{غیرقابل قبول} \\ y = ۶ \end{cases}$$

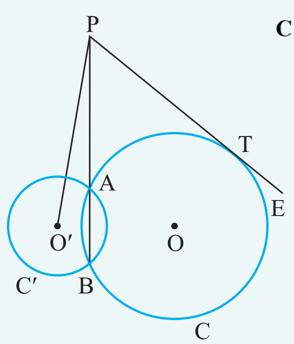
مثال کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطهٔ M از محیط دایرهٔ (C) برابر ۵ و ۹ است. طول مماس که از نقطه M بر دایره رسم شده، چند است؟

پاسخ بیش‌ترین فاصله یک نقطه تا محیط دایره برابر با $d+R$ است که در آن R شعاع دایره و d فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره است. کم‌ترین فاصله یک نقطه (خارج دایره) تا محیط دایره برابر با $d-R$ است.



$$MT^۲ = d^۲ - R^۲ \Rightarrow MT^۲ = (d-R)(d+R) \Rightarrow MT^۲ = ۵ \times ۹ \Rightarrow MT^۲ = ۴۵ \Rightarrow MT = \sqrt{۴۵}$$

مثال در شکل روبه‌رو، دایره‌های $C(O,R)$ و $C'(O',۳)$ در A و B متقاطع‌اند و PT بر دایرهٔ C مماس است. اگر $PT = ۴$، اندازهٔ $O'P$ چقدر است؟

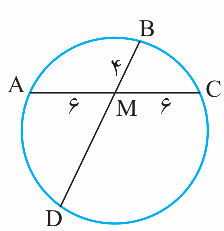


پاسخ شعاع دایرهٔ C' برابر با ۳ است و طول PO' را d در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l} C'(O',۳): PA.PB = d^۲ - ۳^۲ \\ C(O,R): PA.PB = PT^۲ = ۱۶ \end{array}\right\} \Rightarrow d^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \Rightarrow d^۲ = ۲۵ \Rightarrow d = ۵$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۷. در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خط MD کدام است؟

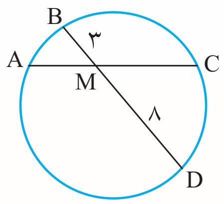


۱) ۸

۲) ۹

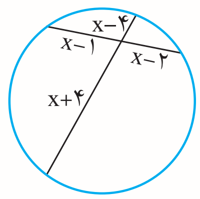
۳) ۱۲

۴) ۱۶



۲۸. مهم در شکل روبه‌رو، AC = ۱۰، طول پاره‌خط MC کدام است؟ (MA < MC)

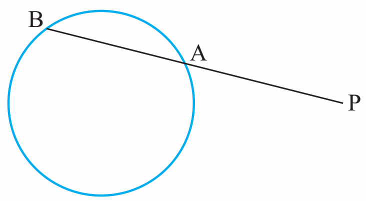
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹



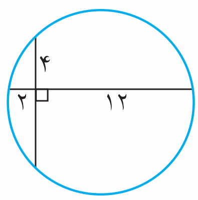
۲۹. در شکل روبه‌رو، مقدار x کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۳۰. مهم نزدیک‌ترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطهٔ مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که PA − AB = ۲، اندازهٔ AB چه‌قدر است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۹۰)*

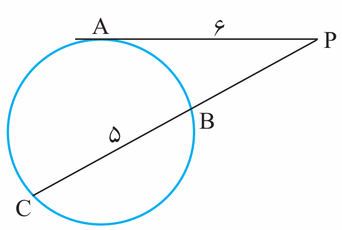


۱) ۹
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۵



۳۱. دشوار در شکل روبه‌رو، شعاع دایره کدام است؟

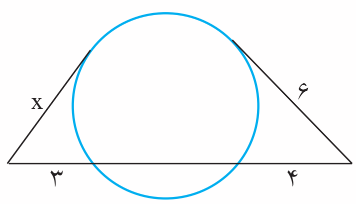
۱) $۳\sqrt{۶}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۷}$
۴) $۲\sqrt{۵}$



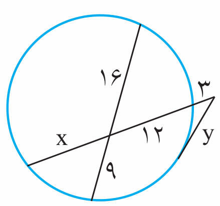
۳۲. در شکل روبه‌رو، PA = ۶ و BC = ۵. طول پاره‌خط PB کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۳۳. مهم در شکل مقابل، اندازه x چند واحد است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۹۱)*



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) ۵



۳۴. در شکل مقابل، مقدار (x − y) کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

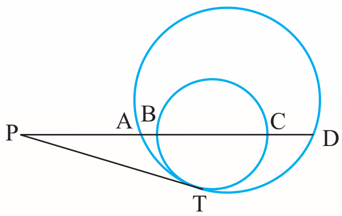
۳۵. در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است، نقطهٔ C در امتداد AB به فاصلهٔ $CB = ۲\sqrt{۲}$ انتخاب شده است. طول قطعهٔ مماسی که از C بر دایره رسم شود، کدام است؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۲)*

۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) ۷
۴) $۵\sqrt{۲}$

۳۶. مهم دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در نقاط P و Q متقاطع‌اند. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر امتداد PQ، مماس‌های MT و MT' را به ترتیب بر دایره‌های C و C' رسم می‌کنیم. اگر $R' = 2R$ باشد، حاصل $\frac{MT'}{MT}$ کدام است؟

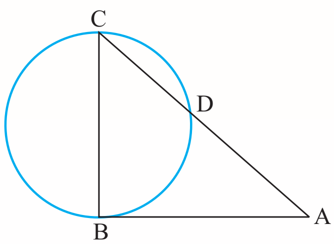
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) به محل نقطهٔ M بستگی دارد.

۳۷. مهم در شکل روبه‌رو، PT بر هر دو دایره مماس است. اگر $PA = 4$ ، $PC = 10$ و $BD = 6$، آن‌گاه اندازهٔ PB کدام است؟



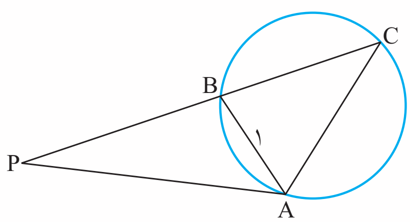
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۳۸. خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = 6$ مماس است. اگر $CD = 4$، طول پاره‌خط AD کدام است؟



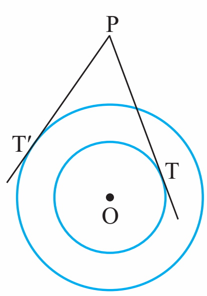
۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۳۹. دشوار در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟



۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
۴) ۲

۴۰. در شکل روبه‌رو، دو دایره هم‌مرکز هستند که شعاع‌هایشان $R = 3$ و $R' = 5$. مقدار $PT^2 - PT'^2$ کدام است؟



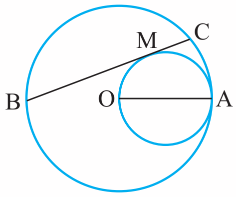
۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

۴۱. مهم نقطهٔ P درون دایره‌ای به شعاع ۱۰ قرار دارد و فاصله‌اش تا مرکز دایره ۶ است، وتر AB از نقطهٔ P می‌گذرد به طوری که $AB = 20$، طول PA کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

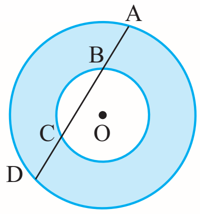
۴۲. مهم در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB.MC$ برابر کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۴)



۱) MO^2
۲) MA^2
۳) OA^2
۴) $MA.MO$

۴۳. دشوار در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایرهٔ بزرگ‌تر، دایرهٔ کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB = ۴$ و $BC = ۵$، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



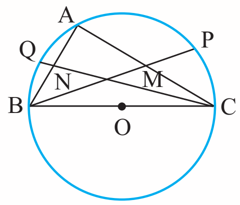
۱) ۲۰π ۲) ۳۶π

۳) ۱۶π ۴) ۲۵π

۴۴. نکته‌دار نقطهٔ P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطهٔ P کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۴۵. دشوار در شکل روبه‌رو، $BC = ۶$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM.MP + CN.NQ$ برابر با کدام است؟



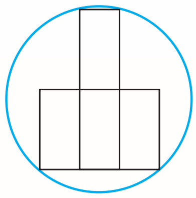
۱) ۴

۲) ۹

۳) ۱۶

۴) ۳۶

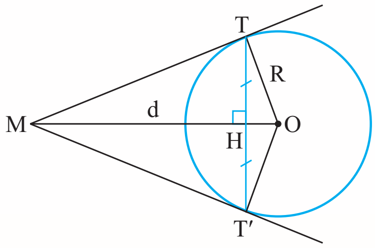
۴۶. دشوار چهار تا مستطیل ۴×۲ مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟



۱) $\sqrt{۸۴}$ ۲) $\sqrt{۸۵}$

۳) $\sqrt{۸۶}$ ۴) $\sqrt{۸۷}$

مماس بر دایره و حالت‌های دو دایره نسبت به هم

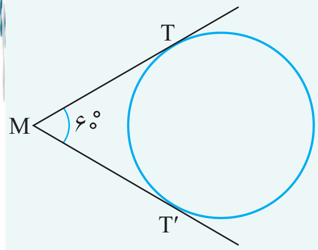


- از نقطهٔ **M** خارج دایره، می‌توان دو مماس بر دایره رسم کرد. طول این دو مماس با هم برابر هستند.

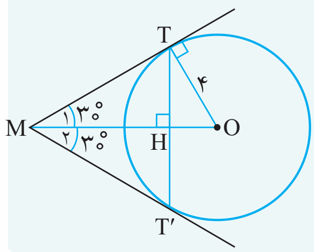
$$MT = MT' = \sqrt{d^۲ - R^۲}$$

- **MO** نیمساز زاویه‌های **M** و **O** است.
- **MO** عمودمنصف **TT′** است.

مثال شعاع دایره برابر با ۴ و $\widehat{M} = ۶۰^\circ$ است. **MT** ، **TT′** و **OM** را محاسبه کنید.



پاسخ OM نیمساز $\widehat{M}$ است. پس:



$$\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ = ۳۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{OTM} : \sin \widehat{M}_۱ = \frac{OT}{OM} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \frac{۴}{OM} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{OM} \Rightarrow OM = ۸$$

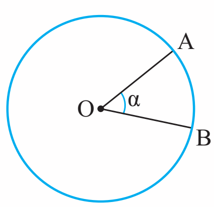
$$\left.\begin{array}{l} OM = ۸ \\ OT = ۴ \\ OT^۲ + TM^۲ = OM^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow TM^۲ = ۴۸ \Rightarrow TM = ۴\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{MTH} : \sin \widehat{M}_۱ = \dfrac{TH}{MT} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \dfrac{TH}{MT} \\ MT = ۴\sqrt{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow TH = ۲\sqrt{۳}$$

OM عمودمنصف TT′ است، پس $TT' = ۲TH$.

$$TT' = ۲TH \xrightarrow{TH = ۲\sqrt{۳}} TT' = ۴\sqrt{۳}$$

قطاع دایره



اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایره برابر α درجه باشد:

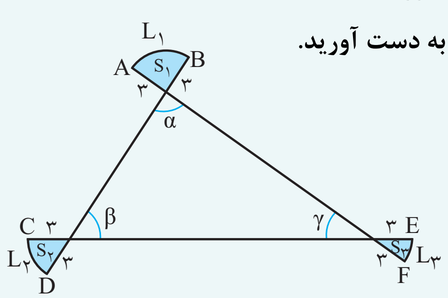
$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(\pi R^۲)$$

$$\text{طول کمان } AB = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$

مثال

الف) $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ مساحت قطاع‌هایی از دایره هستند. $S_۱ + S_۲ + S_۳$ را به دست آورید.

ب) $L_۱$ ، $L_۲$ و $L_۳$ طول کمان‌های **AB** ، **CD** و **EF** هستند. $L_۱ + L_۲ + L_۳$ را به دست آورید.



پاسخ

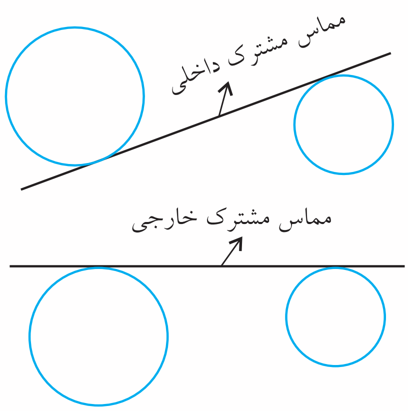
الف

$$\left.\begin{array}{l} S_1=\dfrac{\alpha}{360^\circ}(\pi R^2)=\dfrac{9\pi\alpha}{360^\circ}\\ S_2=\dfrac{\beta}{360^\circ}(\pi R^2)=\dfrac{9\pi\beta}{360^\circ}\\ S_3=\dfrac{\gamma}{360^\circ}(\pi R^2)=\dfrac{9\pi\gamma}{360^\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_1+S_2+S_3=\dfrac{9\pi(\alpha+\beta+\gamma)}{360^\circ}\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow S_1+S_2+S_3=\dfrac{9\pi\times180^\circ}{360^\circ}=4/5\pi$$

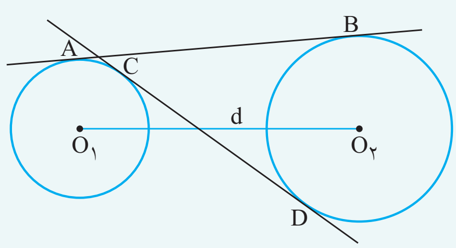
ب

$$\left.\begin{array}{l} L_1=\dfrac{\alpha}{360^\circ}(2\pi R)=\dfrac{6\pi\alpha}{360^\circ}\\ L_2=\dfrac{\beta}{360^\circ}(2\pi R)=\dfrac{6\pi\beta}{360^\circ}\\ L_3=\dfrac{\gamma}{360^\circ}(2\pi R)=\dfrac{6\pi\gamma}{360^\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1+L_2+L_3=\dfrac{6\pi(\alpha+\beta+\gamma)}{360^\circ}\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow L_1+L_2+L_3=3\pi$$

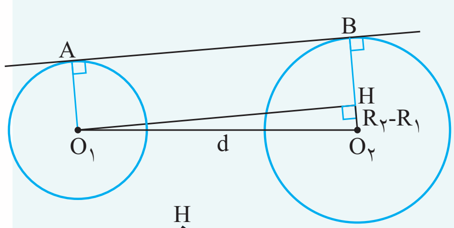
مماس مشترک: خطی است که بر دو دایره مماس باشد. اگر هر دو دایره در یک طرف خط باشند، خط را مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در طرفین خط باشند، آن را مماس مشترک داخلی می‌نامند.



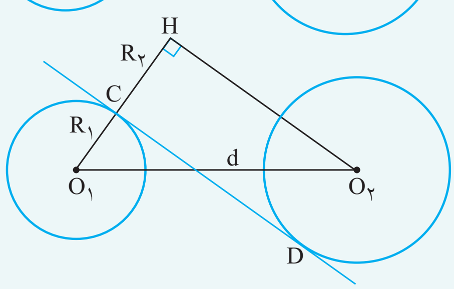
مثال برای دو دایرهٔ $C_1(O_1,R_1)$ و $C_2(O_2,R_2)$، طول مماس مشترک خارجی و داخلی را برحسب d (فاصله بین مرکزهای دو دایره)، R_1 و R_2 به دست آورید.



پاسخ



$$\left.\begin{array}{l} O_1H=AB\\ O_1H=\sqrt{d^2-(R_2-R_1)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow AB=\sqrt{d^2-(R_2-R_1)^2}$$



$$\left.\begin{array}{l} O_2H=CD\\ O_2H=\sqrt{d^2-(R_2+R_1)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow CD=\sqrt{d^2-(R_2+R_1)^2}$$