درس اول

هندسه تحلیلی

مقدمه

فارسی: می‌اندیشم پس هستم. لاتین: .Cogito ergo Sum

این قسمت از درس را مدیون زحمات ریاضی‌دان و فیلسوف بزرگ فرانسوی رنه دکارت (۱۶۵۰ ـ ۱۵۹۶/ Rene Descartes) هستیم. دکارت را بیشتر به عنوان یک فیلسوف با جملهٔ معروف «می‌اندیشم پس هستم» می‌شناسند. او به ریاضیات هم خدمت بزرگی کرد. در شب دهم نوامبر ۱۶۱۹ میلادی زمانی که ۲۵ سال داشت ۳ رؤیای امیدبخش دید و آن‌ها را چنین تعبیر کرد که «روح حقیقت، او را برگزیده و از او خواسته که همهٔ دانش‌ها را به صورت علمی واحد درآورد».

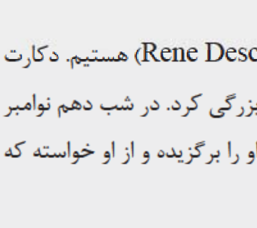
در ریاضیات این کار را انجام داد و آن این بود که بین هندسه و جبر پیوند ایجاد کرد. تا قبل از ظهور او نقطه، مثلث، دایره، خط، مربع و ... همه از مشتقات هندسه بودند ولی بعدها با جبر پیوند پیدا کردند به طوری که الان اگر شما در گوگل تایپ کنید: $\text{graph} : x^۲ + y^۲ = ۱$ برایتان یک دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ می‌کشد. اتفاق عجیبی بود. تا قبل از آن، دایره صرفاً یک شکل هندسی بود ولی بعد از آن توانستند آن را به کمک روابط جبری هم نشان دهند.

برعکس این قضیه هم برقرار بود. در معادلات جبری با رسم شکل می‌توانیم به روابط بین متغیرها دست پیدا کنیم یا حدود ریشه‌ها را حدس بزنیم. این قضیه تا جایی پیش رفته که در علم نوین معادلهٔ یک شیء را به کامپیوتر می‌دهند و پرینترهای سه‌بعدی آن را چاپ می‌کنند. مثلاً اگر قسمتی از استخوان دستتان را در یک سانحه از دست داده باشید، می‌توانند عیناً مشابه همان را با پیداکردن معادلهٔ استخوان و چاپ سه‌بعدی توسط کامپیوتر برایتان تولید کنند و در بدنتان جای‌گذاری کنند.

دستگاه مختصات دکارتی

همان‌طوری که یک نقطه را می‌توانیم روی یک خط به وسیلهٔ اعداد حقیقی پیدا کنیم، می‌توانیم نقاط موجود در یک صفحه را با نسبت‌دادن ۲ عدد حقیقی به آن نقطه به راحتی بیابیم. با دستگاه مختصات ۲بعدی آشنا هستید. هر نقطه طول و عرضی دارد که طول آن نقطه فاصله از محور yها و عرض آن نقطه فاصله از محورxها است و مطابق شکل، دستگاه به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود.

مختصات هر نقطه را با (x, y) نشان می‌دهیم که x طول آن نقطه و y عرض آن است.

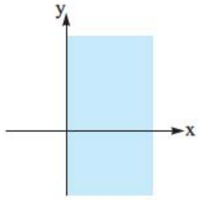


مختصات، دقیقاً مثل آدرس است! آدرس هر نقطه روی دستگاه مختصات منحصربه‌فرد است و با نقطهٔ دیگر فرق دارد.

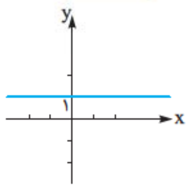
مثال **هر کدام از عبارت‌های زیر را روی دستگاه مختصات با رسم شکل توضیح دهید.**

الف $\{(x,y) \mid x \geq ۰\}$ **ب** $\{(x,y) \mid y = ۱\}$ **ج** $\{(x,y) \mid |y| < ۱\}$

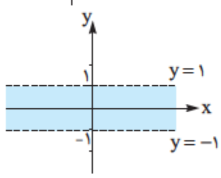
حل **الف** دنبال نقاطی هستیم که طول آن‌ها نامنفی است. پس می‌شود تمام نقاط سمت راست ورودی محور yها.



ب به دنبال نقاطی هستیم که عرض آن‌ها ۱ است یعنی تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۱+ از محور xها هستند. تمام نقاط روی خط مقابل، این ویژگی را دارند.



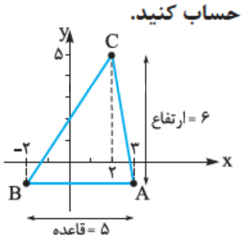
ج وقتی $|y| < ۱$ است یعنی $-۱ < y < ۱$ می‌باشد. پس دنبال نقاطی هستیم که عرض آن‌ها عددی بین ۱− تا ۱ است.



جالب است بدانید جی‌پی‌اس گوشی همراه با ایده‌ای مشابه با ایدهٔ دستگاه مختصات کار می‌کند. هر جایی روی کرهٔ زمین که باشید می‌تواند مکان دقیق شما را با محاسبهٔ فاصلهٔ شما از چند ماهوارهٔ خارج از جو زمین حساب کند.

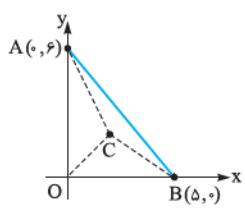
مثال **اگر $A(۳,-۱)$، $B(-۲,-۱)$ و $C(۲,۵)$ مختصات سه رأس از مثلث ABC باشند، مساحت مثلث را حساب کنید.**

حل شکل می‌کشیم:



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۵ \times ۶}{۲} = ۱۵$$

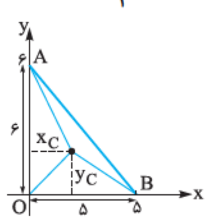
مثال **در شکل مقابل، مختصات نقطهٔ C را طوری تعیین کنید که مثلث‌های OBC، OAC و ABC هم‌مساحت باشند.**



حل مختصات نقطهٔ C را به صورت $C(x_C, y_C)$ فرض کنید. مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S_{OAB} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$$

پس مساحت هر کدام از ۳ مثلث کوچک‌تر برابر $\frac{۱۵}{۳} = ۵$ می‌شود. حالا به شکل نگاه کنید:



$$S_{OBC} = \frac{۵ \times y_C}{۲} = ۵ \Rightarrow y_C = ۲$$

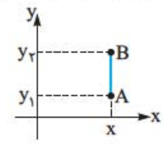
$$S_{OAC} = \frac{۶ \times x_C}{۲} = ۵ \Rightarrow x_C = \frac{۵}{۳}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ C به صورت $C(\frac{۵}{۳}, ۲)$ است. این سؤال راه‌حل دیگری هم دارد. چون مساحت ۳ مثلث ایجادشده برابر است پس C مرکز ثقل یا همان محل برخورد میانه‌ها است. در ادامهٔ درس خواهیم گفت که $C = \frac{A+B+O}{۳}$ می‌شود:

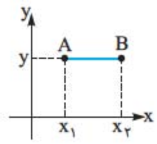
$$x_C = \frac{x_A + x_B + x_O}{۳} = \frac{۰+۵+۰}{۳} = \frac{۵}{۳} \ , \ y_C = \frac{y_A + y_B + y_O}{۳} = \frac{۶+۰+۰}{۳} = ۲$$

فاصلهٔ دو نقطه

مثال قبل به ما می‌گوید که اگر ۲ نقطه با طول برابر داشتیم برای پیداکردن فاصلهٔ آن‌ها باید عرض آن‌ها را از هم کم کنیم و به طور مشابه اگر دو نقطه با عرض برابر داشتیم طول آن‌ها را از هم کم کنیم.



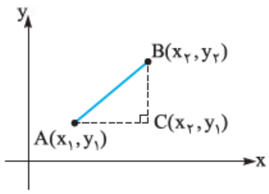
$$\text{فاصله} = AB = |y_۲ - y_۱|$$



$$\text{فاصله} = AB = |x_۲ - x_۱|$$

حالا اگر طول و عرض آن‌ها متفاوت بود باید چه‌کار کنیم؟ به شکل نگاه کنید. فاصلهٔ نقاط A و B را می‌خواهیم.

یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهیم و رأس قائم را C می‌نامیم.



اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ باشد، آن‌گاه $C(x_۲, y_۱)$ است.

می‌دانیم فاصلهٔ A تا C برابر $AC = |x_۲ - x_۱|$ و فاصلهٔ B تا C، برابر $BC = |y_۲ - y_۱|$ است. رابطهٔ فیثاغورس هم که مثل همیشه ما را تنها نمی‌گذارد و به کمک ما می‌آید:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow AB = \sqrt{|x_۲ - x_۱|^۲ + |y_۲ - y_۱|^۲} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

نتیجه فاصلهٔ بین نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ در دستگاه مختصات برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

برای مثال فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۲, -۱)$ و $B(-۱, ۳)$ در دستگاه مختصات برابر ۵ است:

$$AB = \sqrt{(۲-(-۱))^۲ + (-۱-۳)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

تست مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲, ۵)$ ، $B(۳, ۰)$ و $C(۰, ۲)$ کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) ۶   ۲) ۶/۵   ۳) ۷   ۴) ۷/۵

پاسخ گزینهٔ ۲ اگر فکر کرده‌اید که همیشه با رسم شکل به نتیجه می‌رسید، کور خوانده‌اید. ما هم آن‌قدر بیکار نیستیم که دوتا سؤال مشابه هم در درس‌نامه بدهیم. خب، برویم سراغ حل سؤال. اول طول اضلاع مثلث را حساب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (۰-۵)^۲} = \sqrt{۱+۲۵} = \sqrt{۲۶}$$

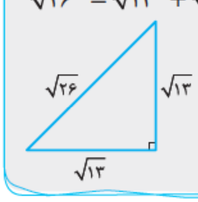
$$AC = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$BC = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

الان حتماً می‌گویید مثلث به دست آمده متساوی‌الساقین است. کمی دقیق‌تر باشید. حرفتان درست است ولی قائم‌الزاویه هم هست. طبق قضیهٔ مرحوم فیثاغورس:

$$\sqrt{۲۶}^۲ = \sqrt{۱۳}^۲ + \sqrt{۱۳}^۲ \Rightarrow \text{قائم‌الزاویه}$$

یعنی یک مثلث این شکلی داریم:



$$S = \frac{\sqrt{۱۳} \times \sqrt{۱۳}}{۲} = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

بعضی‌ها هم بیکار بوده‌اند و برای پرکردن ذهن شما نکتهٔ نه چندان جالب زیر را گفته‌اند. ما هم می‌گوییم که نگویید نگفتیم!

نکته اگر $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آن‌گاه مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \left|\frac{۱}{۲}(x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B))\right|$$

مثلاً در تست قبل داریم:

$$S = \left|\frac{۱}{۲}(۲(۰-۲) + ۳(۲-۵) + ۰(۵-۰))\right| = \left|\frac{۱}{۲}(-۴-۹+۰)\right| = |-۶/۵| = ۶/۵$$

مثال **نقطه‌ای روی محور xها بیابید که از نقاط $A(-۱,۳)$ و $B(۲,۴)$ به یک فاصله باشد.**

حل عرض هر نقطه روی محور xها صفر است پس مختصات آن به صورت $C(x,۰)$ خواهد بود که x طول نقطه است. حالا نقطه‌ای را می‌خواهیم که از نقاط A و B به یک فاصله باشد:

$$AC=BC \Rightarrow \sqrt{(x-(-۱))^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۴)^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x+۱)^۲+۹=(x-۲)^۲+۱۶$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+۱+۹=x^۲-۴x+۴+۱۶ \Rightarrow ۶x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}$$

پس مختصات نقطه برابر $C(\frac{۵}{۳},۰)$ است.

تست **نقطهٔ A در صفحهٔ مختصات به گونه‌ای انتخاب شده است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر ۲ و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(۳,۰)$ برابر ۳ می‌باشد. طول نقطهٔ A کدام است؟**

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ **گزینهٔ۲** مختصات نقطهٔ A را به صورت $A(x,y)$ در نظر بگیرید. فاصله از $O(۰,۰)$ برابر ۲ است:

$$AO=\sqrt{x^۲+y^۲}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+y^۲=۴$$

فاصلهٔ A از نقطهٔ $B(۳,۰)$ برابر ۳ است:

$$AB=\sqrt{(x-۳)^۲+y^۲}=۳ \Rightarrow (x-۳)^۲+y^۲=۹$$

حالا عبارت‌های به دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

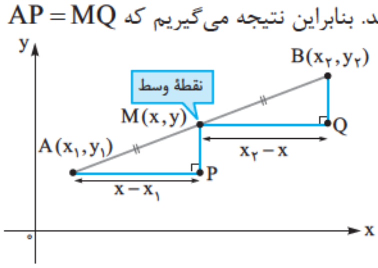
$$((x-۳)^۲+y^۲)-(x^۲+y^۲)=۹-۴ \Rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲-x^۲-y^۲=۵ \Rightarrow -۶x+۹=۵ \Rightarrow -۶x=-۴$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مختصات وسط دو نقطه

الان می‌خواهیم مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خطی را پیدا کنیم که دو سر آن نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ هستند. در شکل، مثلث‌های APM و MQB همنهشت (مساوی) هستند، چرا که $AM=MB$ است و زاویه‌های متناظر هم با هم برابرند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $AP=MQ$ است. پس:

$$x-x_۱=x_۲-x$$



از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که $۲x=x_۱+x_۲$ و در نتیجه $x=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$، به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $y=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$ است.

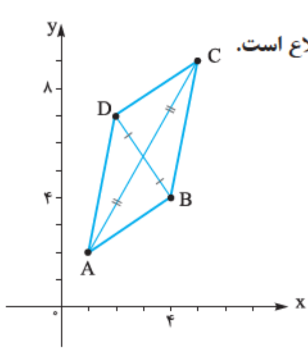
نتیجه را در نکتهٔ زیر برایتان نوشته‌ایم:

نکته اگر دو سر یک پاره‌خط نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشند مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط برابر است با:

$$M=\frac{A+B}{۲} \Rightarrow M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$$

البته می‌توانید کمی قشنگ‌تر هم فکر کنید، نقطهٔ M (وسط AB) باید سهم برابر از A و B داشته باشد پس برابر $\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}$ می‌شود. نصف از A و نصف از B. این منطق بعداً به دردتان می‌خورد. به من اعتماد کنید!

مثال **نشان دهید یک چهارضلعی با رئوس $A(۱,۲)$، $B(۴,۴)$، $C(۵,۹)$ و $D(۲,۷)$ متوازی‌الاضلاع است.**



حل در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس. یعنی اگر در یک چهارضلعی قطرها همدیگر را نصف کنند، حتماً آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مختصات وسط قطرهای AC و BD را به دست می‌آوریم:

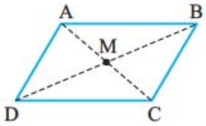
$$AC \text{ مختصات وسط } =M_۱=\frac{A+C}{۲}=(\frac{۱+۵}{۲},\frac{۲+۹}{۲})=(۳,\frac{۱۱}{۲})$$

$$BD \text{ مختصات وسط } =M_۲=\frac{B+D}{۲}=(\frac{۴+۲}{۲},\frac{۴+۷}{۲})=(۳,\frac{۱۱}{۲})$$

مختصات وسط دو قطر یکی به دست آمد، یعنی دو قطر همدیگر را نصف می‌کنند و چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

نتیجه‌ای که از مثال قبل می‌گیریم این است که:

نکته در متوازی‌الاضلاع می‌دانیم قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین داریم:



$$A+C=B+D \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

تست **مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $B(۲,-۳)$ کدام است؟**

۱) $(۳,-۸)$ ۲) $(۱,-۵)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{۵}{۲},-\frac{۱۱}{۲})$

پاسخ **گزینهٔ ۱** برای به دست آوردن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B باید چه‌کار کنیم؟

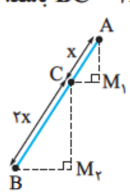
A را به B وصل می‌کنیم و به اندازهٔ AB جلوتر می‌رویم که به نقطهٔ C برسیم. C می‌شود قرینهٔ A نسبت به B. چرا این‌قدر سختش می‌کنید؛ یعنی B وسط A و C است:

$A\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ $C\begin{bmatrix}x_C\\y_C\end{bmatrix}$ $\qquad B=\frac{A+C}{۲}$

$$\frac{x_C+۱}{۲}=۲ \Rightarrow x_C=۳ \ , \ \frac{y_C+۲}{۲}=-۳ \Rightarrow y_C=-۸$$

پس قرینهٔ A نسبت به B نقطهٔ $C(۳,-۸)$ است.

مثال **اگر $A(۳,۴)$ و $B(-۹,۱)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، مختصات نقطهٔ C روی پاره‌خط AB را طوری بیابید که $BC=۲AC$ باشد.**



حل به شکل نگاه کنید. نقطه‌ی C باید طوری باشد که فاصله‌اش از B، ۲ برابر فاصله‌اش از A باشد.

راه اول این راه‌حل را بعداً خواهید فهمید. چون هنوز تشابه مثلث‌ها را نخوانده‌اید و در فصل بعد می‌خوانید. مثلث‌های $AM_۱C$ و $BM_۲C$ متشابه هستند چون اندازهٔ تمام زاویه‌های آن‌ها با هم برابر است. بنابراین نسبت اضلاع دو مثلث با هم برابر است.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AM_۱}{CM_۲}=\frac{CM_۱}{BM_۲} \Rightarrow \frac{x}{۲x}=\frac{AM_۱}{CM_۲}=\frac{CM_۱}{BM_۲} \Rightarrow \frac{AM_۱}{CM_۲}=\frac{CM_۱}{BM_۲}=\frac{۱}{۲}$$

اگر مختصات نقاط را $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ فرض کنیم، داریم:

$$AM_۱=y_A-y_C \ , CM_۲=y_C-y_B \ , CM_۱=x_A-x_C \ , BM_۲=x_C-x_B$$

$$\frac{AM_۱}{CM_۲}=\frac{y_A-y_C}{y_C-y_B}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲y_A-۲y_C=y_C-y_B \Rightarrow ۳y_C=۲y_A+y_B \Rightarrow y_C=\frac{۲y_A+y_B}{۳}$$

$$\frac{CM_۱}{BM_۲}=\frac{x_A-x_C}{x_C-x_B}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x_A-۲x_C=x_C-x_B \Rightarrow ۳x_C=۲x_A+x_B \Rightarrow x_C=\frac{۲x_A+x_B}{۳}$$

پس مختصات نقطهٔ C به صورت $C(\frac{۲x_A+x_B}{۳},\frac{۲y_A+y_B}{۳})$ به دست آمد، یعنی $C=\frac{۲A+B}{۳}$ می‌شود.

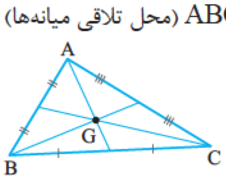
راستش را بخواهید راه‌حل اول را گفتیم که انگیزهٔ کافی برای خواندن و فهمیدن راه‌حل دوم داشته باشید.

راه دوم وقتی $BC=۲AC$ است یعنی فاصلهٔ C از B، ۲ برابر فاصلهٔ C از A است یا بهتر بگوییم که نقطهٔ C، ۲ برابر به A نسبت به B نزدیک‌تر است. وقتی که ۲ برابر به A نزدیک‌تر است یعنی چه؟ یعنی سهمی که از A می‌برد باید ۲ برابر سهمی باشد که از B می‌برد. پس اگر سهام C را ۳ قسمت کنیم، ۲تا متعلق به A و یکی متعلق به B است.

$$C=\frac{۲A+B}{۳}=(\frac{۲x_A+x_B}{۳},\frac{۲y_A+y_B}{۳})=(\frac{۲(۳)-۹}{۳},\frac{۲(۴)+۱}{۳})=(-۱,۳)$$

با احتساب نکاتی که تا الان گفته‌ایم، کار سختی نیست که خودتان نکتهٔ زیر را فهمیده باشید، پس نکتهٔ بدون شرح:

نکته اگر $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مختصات مرکز ثقل مثلث ABC (محل تلاقی میانه‌ها) برابر است با:

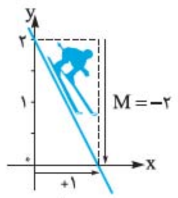


$$G=\frac{A+B+C}{۳}=(\frac{x_A+x_B+x_C}{۳},\frac{y_A+y_B+y_C}{۳})$$

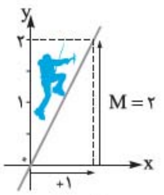
معادلهٔ خط

شیب خط

شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. تعریف قشنگ‌تر و دقیق‌تر این است که شیب یک خط برابر میزان تغییرات y است وقتی که به اندازهٔ ۱ واحد روی محور xها جابه‌جا می‌شوید که می‌تواند میزان این شیب مثبت یا منفی باشد. شیب خط در شکل سمت چپ برابر ۲ و در شکل سمت راست برابر ۲− است.



شیب منفی



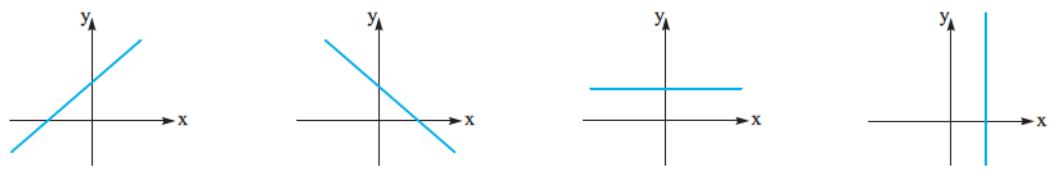
شیب مثبت

نکته مقدار شیب خطی که از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد برابر است با:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

بدیهی است که مخرج نباید صفر باشد، یعنی $x_۲ \neq x_۱$ است. یعنی خط داده‌شده قائم نیست. شیب یک خط عمودی تعریف‌شده نیست.

شما می‌توانید شیب یک خط را با استفاده از هر ۲ نقطهٔ دلخواه روی خط پیدا کنید، چون شیب یک خط در تمام نقاط روی خط ثابت است. علامت شیب خط در حالت‌های مختلف در شکل‌های زیر نشان داده شده است:



شیب تعریف‌نشده — شیب صفر — شیب منفی — شیب مثبت

تست **اگر طول نقطه‌ای روی یک خط به شیب $m = -۲$ را ۳ واحد افزایش دهیم، مقدار تغییرات عرض نقطه کدام است؟**

۱) ۶ واحد زیاد می‌شود. ۲) ۶ واحد کم می‌شود. ۳) ۳ واحد زیاد می‌شود. ۴) ۳ واحد کم می‌شود.

پاسخ (گزینهٔ ۲) وقتی شیب خط ۲− است، یعنی اگر یک واحد طول نقطه را زیاد کنیم، ۲ واحد عرض آن کم می‌شود. حالا اگر ۳ واحد طول آن را زیاد کنیم $۶ = ۲ \times ۳$ واحد عرض آن نقطه کم می‌شود.

تست **سه نقطهٔ $A(۰, ۳)$، $B(n, -۲n + ۳)$ و $C(-۲m + ۱, m)$ روی یک خط قرار دارند. $۳m - ۱$ کدام است؟**

۱) ۳− ۲) ۳ ۳) ۲− ۴) ۲

پاسخ (گزینهٔ ۳) شیب یک خط را با استفاده از هر دو نقطهٔ دلخواه روی خط می‌توانیم حساب کنیم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۳ - (-۲n + ۳)}{۰ - n} = \frac{۲n}{-n} = -۲$$

حالا شیب را با استفاده از نقاط A و C به دست می‌آوریم که حاصل باید همان ۲− باشد:

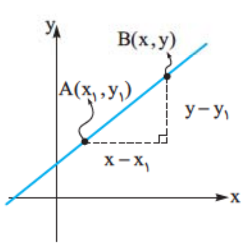
$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۳ - m}{۰ - (-۲m + ۱)} = -۲ \Rightarrow ۳ - m = -۴m + ۲ \Rightarrow ۳m = -۱ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۳}$$

$$۳m - ۱ = ۳(-\frac{۱}{۳}) - ۱ = -۲$$

نوشتن معادلهٔ خط

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ خطی را پیدا کنیم که از نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ می‌گذرد و دارای شیب m است. نقطهٔ $B(x, y)$ با شرط $x \neq x_۱$ روی این خط قرار دارد، اگر شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر m باشد، بنابراین داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_۱}{x - x_۱} = m$$



رابطهٔ بالا را می‌توانیم به صورت $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ بنویسیم که این معادله می‌گوید تمامی نقاطی مثل نقطهٔ $B(x, y)$ که روی خط گذرا از نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ با شیب m باشند، باید در رابطهٔ $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ صدق کنند و این رابطه همان معادلهٔ خطی است که می‌خواهیم.

نکته معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ می‌گذرد و دارای شیب m است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

حالا اگر به ما دو نقطه بدهند و از ما معادلهٔ خط گذرا از آن دو نقطه را بخواهند، اول شیب خط گذرا از دو نقطه را پیدا می‌کنیم و سپس با استفاده از

شیب و مختصات یکی از نقاط، معادلهٔ آن خط را می‌نویسیم.

مثال **مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$، $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است.**

الف **معادلهٔ ضلع AB را بنویسید.**
ب **معادلهٔ میانهٔ AM را بنویسید.**

حل **الف** معادلهٔ خطی را می‌خواهیم که از نقاط $A(1,4)$ و $B(-2,-2)$ می‌گذرد. اول شیب: $m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-(-2)}{1-(-2)}=\frac{6}{3}=2$

حالا نقطهٔ $A(1,4)$ را برمی‌داریم و با استفاده از فرمول و شیب، معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-4=2(x-1) \Rightarrow y=2x+2$$

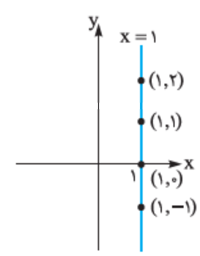
ب اول مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

$$M=\frac{B+C}{2}=(\frac{4-2}{2},\frac{2-2}{2})=(1,0)$$

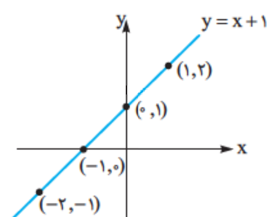
حالا معادلهٔ خط گذرا از نقاط $A(1,4)$ و $M(1,0)$ را می‌خواهیم. طول این دو خط یکسان است. پس شیب این خط تعریف‌شده نیست و خط گذرنده از این دو نقطه عمودی است و این ویژگی را دارد که طول تمام نقاط روی این خط برابر ۱ است. از قبل به خاطر دارید که معادلهٔ هر خط موازی محور yها به صورت $x=\alpha$ (α عددی ثابت است) و معادلهٔ هر خطی موازی محور xها به صورت $y=\beta$ (β عددی ثابت است) می‌باشد. پس معادلهٔ AM برابر $x=1$ است.

بیایید کمی عمیق باشیم:

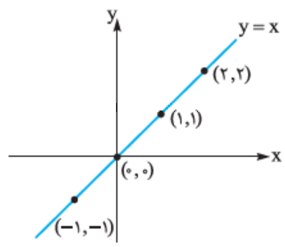
همهٔ شما می‌دانید معادلهٔ یک خط یعنی رابطهٔ بین طول و عرض نقاط واقع روی آن خط. خب این جمله یعنی چه؟ دکارت نقاط روی دستگاه مختصات را با یک جفت عدد که طول و عرض آن نقاط بود، نشان داد. حالا وقت آن بود که راهی برای معرفی خطوط و سایر شکل‌ها روی دستگاه مختصات پیدا کند. راه‌حل خردمندانهٔ او همان جملهٔ اول بود. اگر x طول نقاط روی یک منحنی و y عرض آن نقاط باشد، هر شکل را می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ای که طول و عرض نقاط روی آن منحنی دارند، نشان دهیم. مثلاً $y=x$ یک خط است که در تمام نقاط روی خط، طول و عرض نقاط با هم برابر است.



طول تمام نقاط روی خط ۱ است.



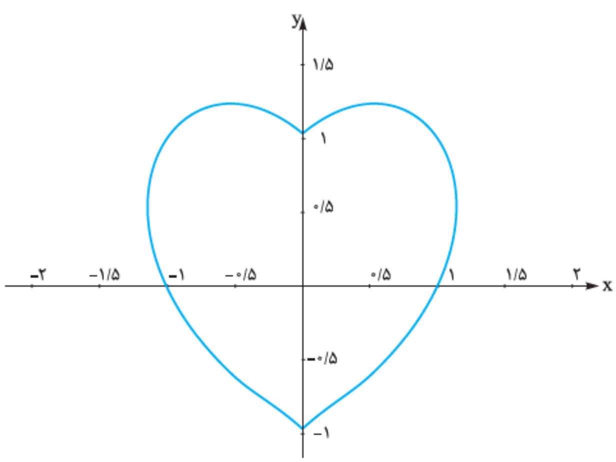
طول هر نقطه را به علاوهٔ ۱ کنید، عرض آن نقطه می‌شود.



طول و عرض تمام نقاط روی خط با هم برابرند.

حالا اگر به شما بگویند معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $(2,5)$ و $(3,4)$ می‌گذرد، باید سریع بگویید $x+y=7$ است. چون رابطه‌ای که طول و عرض نقاط روی این خط دارند، این است که مجموع آن‌ها برابر ۷ است. این قضیه خیلی گسترده شد و پیشرفت کرد تا جایی که الان ما رابطهٔ بین طول و عرض نقاط روی یک قلب را می‌دانیم:

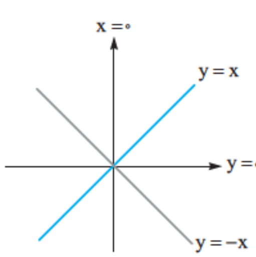
$$(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$$



جالب است بدانید در دنیای امروز معادلهٔ اجسام سه‌بعدی مثل معادلهٔ بدن شما را هم می‌توانند به راحتی به دست آورند و به یک پرینتر سه‌بعدی بدهند تا آن را چاپ کند.

بنا بر آن‌چه گفتیم معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $y=x$، معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y=-x$ و معادلهٔ محور xها، $y=0$ و معادلهٔ محور yها، $x=0$ است.

پس از این‌که معادلهٔ یک خط را نوشتیم، می‌توانیم آن را به صورت $y=ax+b$ بنویسیم که در این صورت a شیب خط و b همان عرض از مبدأ خط است.



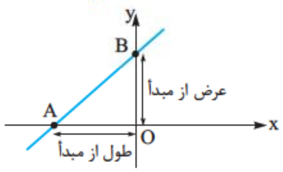
مثال **اگر بدانیم شیب خط $۲y-mx=۱+m$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، عرض از مبدأ آن را پیدا کنید.**

حل برای پیداکردن شیب خط باید معادلهٔ آن را به حالت استاندارد تبدیل کنیم:

$$۲y-mx=۱+m \Rightarrow ۲y=mx+۱+m \xrightarrow{\div ۲} y=\frac{m}{۲}x+\frac{۱+m}{۲}$$

$$\text{شیب: } \frac{m}{۲}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow m=-۳ \qquad \text{عرض از مبدأ: } \frac{۱+m}{۲} \xrightarrow{m=-۳} \frac{۱-۳}{۲}=-۱$$

نکته اگر خطی محور xها و yها را در نقاط A و B قطع کند، با آن‌ها مثلثی تشکیل می‌دهد که مساحت این مثلث برابر است با:



$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}|$$

عرض از مبدأ، عرض نقطه‌ای است که محور yها را قطع می‌کند و طول از مبدأ هم طول نقطه‌ای است که محور xها را قطع می‌کند.

مثال **مساحت مثلثی را که خط $۳x+۴y=۱۲$ با محورهای مختصات می‌سازد، به دست آورید.**

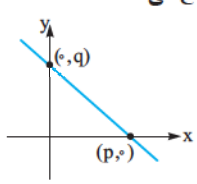
حل برای به دست آوردن طول از مبدأ، y را صفر می‌گذاریم و برای به دست آوردن عرض از مبدأ، x را صفر می‌گذاریم:

$$\text{طول از مبدأ: } y=۰ \Rightarrow ۳x=۱۲ \Rightarrow x=۴ \qquad \text{عرض از مبدأ: } x=۰ \Rightarrow ۴y=۱۲ \Rightarrow y=۳$$

$$S=\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$$

مثال **معادلهٔ خطی را بنویسید که محور xها را در نقطه‌ای به طول p و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض q قطع می‌کند.**

حل مطابق شکل این خط از نقاط $(p,۰)$ و $(۰,q)$ می‌گذرد.



اول شیب:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{q-۰}{۰-p}=-\frac{q}{p}$$

حالا معادله را با استفاده از نقطهٔ $(p,۰)$ می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۰=-\frac{q}{p}(x-p) \Rightarrow y=-\frac{q}{p}x+q$$

حالا شکل معادله را کمی قشنگ‌تر می‌کنیم. طرفین را بر q تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{y}{q}=-\frac{x}{p}+۱ \Rightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$$

از مثال قبل یک نکتهٔ کاملاً غیرضروری می‌توانیم نتیجه بگیریم.

نکته اگر طول از مبدأ خطی p و عرض از مبدأ آن q باشد، معادلهٔ آن به صورت مقابل است:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$$

تست **چند خط وجود دارد که از نقطهٔ $(۲,۳)$ می‌گذرد، و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۶ می‌سازد؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) بی‌شمار

پاسخ **گزینهٔ ۳**

راه اول معادلهٔ هر خطی که از نقطهٔ $(۲,۳)$ با شیب m می‌گذرد، برابر است با:

$$y-۳=m(x-۲) \Rightarrow y=mx-۲m+۳$$

حالا طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط را حساب می‌کنیم و مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\text{طول از مبدأ: } y=۰ \Rightarrow mx-۲m+۳=۰ \Rightarrow mx=۲m-۳ \Rightarrow x=\frac{۲m-۳}{m}$$

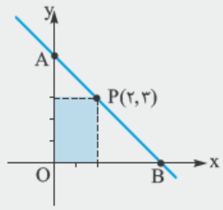
$$\text{عرض از مبدأ: } x=۰ \Rightarrow y=-۲m+۳$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\frac{۲m-۳}{m}\times(-۲m+۳)}{۲}=۶ \xrightarrow{\times ۲} \frac{۲m-۳}{m}\times-(۲m-۳)=۱۲ \Rightarrow -\frac{(۲m-۳)^۲}{m}=۱۲$$

$$\xrightarrow{\times(-m)} (۲m-۳)^۲=-۱۲m \Rightarrow ۴m^۲-۱۲m+۹=-۱۲m \Rightarrow ۴m^۲+۹=۰ \Rightarrow m^۲=-\frac{۹}{۴}$$

معادلهٔ بالا جواب ندارد، چون $m^۲$ نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس چنین خطی وجود ندارد.

راه‌دوم این راه‌حل فقط در این سؤال جواب می‌دهد. شکل را ببینید.

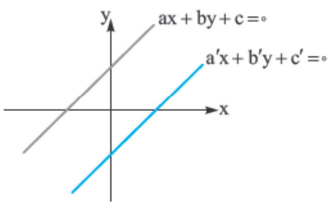


مساحت مستطیل در شکل برابر با ۶ است. پس مساحت مثلث هیچ‌وقت نمی‌تواند ۶ باشد، چون مساحت مثلث از مساحت مستطیل بیشتر است.

اوضاع نسبی دو خط

دو خط وقتی با هم موازی هستند که شیب برابری داشته باشند. در حالت کلی اگر بخواهیم وضعیت دو خط نسبت به هم را بررسی کنیم، ۳ حالت داریم. دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ را در نظر بگیرید:

۱ دو خط موازی:



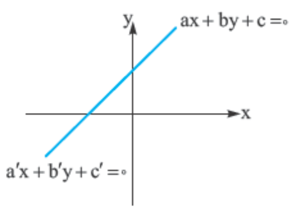
این دو خط با هم موازی هستند هرگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد.

مثل دو خط:

$$\begin{cases}2x+2y+1=0\\x+y-1=0\end{cases}$$

در این حالت دو خط همدیگر را قطع نمی‌کنند.

۲ دو خط منطبق:



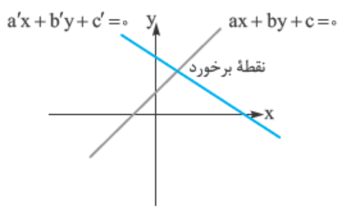
دو خط وقتی منطبق هستند که در واقع یکی باشند! باید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد.

مثل:

$$\begin{cases}2x+2y+2=0\\x+y+1=0\end{cases}$$

در این حالت دو خط همدیگر را در بی‌نهایت نقطه قطع می‌کنند.

۳ دو خط متقاطع:

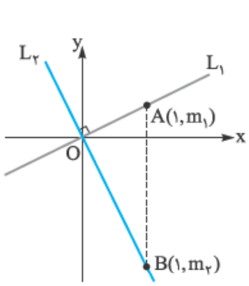


دو خط وقتی متقاطع هستند که موازی نباشند و باید $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$. در این حالت دو خط همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که نقطهٔ برخورد، جواب دستگاه $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ است.

مثلاً نقطهٔ برخورد دو خط $y=x+1$ و $2y-x=3$ نقطهٔ $(1,2)$ است، چون این نقطه در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند.

نکته دو خط با شیب m_1 و m_2 بر هم عمودند هرگاه $m_1m_2=-1$ باشد، یعنی شیب یکی از آن‌ها باید قرینه و معکوس شیب دیگری باشد: $m_1=-\frac{1}{m_2}$

به علاوه یک خط افقی (با شیب صفر) بر هر خط عمودی (بدون شیب) عمود است.



اثبات در شکل دو خط L_1 و L_2 را می‌بینید که از مبدأ مختصات می‌گذرند. اولی دارای شیب m_1 و دومی دارای شیب m_2 است. پس نقطهٔ $A(1,m_1)$ روی خط اول و نقطهٔ $B(1,m_2)$ روی خط دوم قرار دارد.

مرحوم فیثاغورس (روحش شاد) همیشه و همه جا به کمک ما می‌آید و می‌توانیم در مثلث OAB از قضیهٔ او استفاده کنیم: $AB^2=OA^2+OB^2$

طول پاره‌خط‌های AB، OA و OB را هم می‌توانیم با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه به راحتی حساب کنیم:

$$\underbrace{(1-1)^2+(m_1-m_2)^2}_{AB^2}=\underbrace{(1-0)^2+(m_1-0)^2}_{OA^2}+\underbrace{(1-0)^2+(m_2-0)^2}_{OB^2}\Rightarrow m_1^2+m_2^2-2m_1m_2=1+m_1^2+1+m_2^2$$

$$\Rightarrow -2m_1m_2=2\Rightarrow m_1m_2=-1$$

اگر دو خط در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات با هم برخورد کنند، می‌توانیم ۲ خط موازی آن‌ها را در نظر بگیریم که در مبدأ همدیگر را قطع می‌کنند و شیب خط‌های جدید با خط‌های اولیه برابر است. پس سؤال را در حالت خاص حل نکرده‌ایم.

مثال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۵,۲)$ می‌گذرد و با خط $۴x+۶y+۵=۰$ موازی است.**

حل اول شیب خط $۴x+۶y+۵=۰$ را پیدا می‌کنیم:

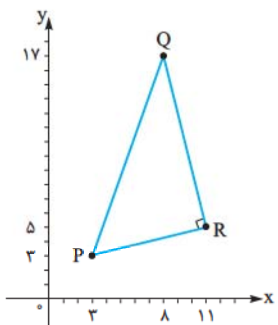
$$۴x+۶y+۵=۰ \Rightarrow ۶y=-۴x-۵ \xrightarrow{\div ۶} y=-\frac{۲}{۳}x-\frac{۵}{۶}$$

شیب این خط $m=-\frac{۲}{۳}$ است. اگر خط ما با این خط موازی باشد، باید شیب آن هم $-\frac{۲}{۳}$ باشد. حالا معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از $(۵,۲)$ می‌گذرد و شیب آن $m=-\frac{۲}{۳}$ است.

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۲=-\frac{۲}{۳}(x-۵) \Rightarrow y-۲=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۶}{۳}$$

مثال **ثابت کنید مثلثی که رئوس آن $P(۳,۳)$، $Q(۸,۱۷)$ و $R(۱۱,۵)$ هستند، قائم‌الزاویه است.**

حل راه‌حل اول این است که طول اضلاع را به دست آوریم و بعد بررسی کنیم که بین طول اضلاع رابطهٔ فیثاغورس برقرار است. این کار را قبلاً انجام داده‌ایم. حالا یک راه‌حل جدید می‌خواهیم. شیب پاره‌خط‌های PR و QR را حساب می‌کنیم:



$$m_۱=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۵-۳}{۱۱-۳}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$m_۲=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱۷-۵}{۸-۱۱}=\frac{۱۲}{-۳}=-۴$$

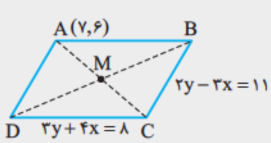
چون $m_۱m_۲=-۱$ است، پس خطوط PR و QR بر هم عمودند و مثلث قائم‌الزاویه است.

تست **نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟** (تجربی ۹۰)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$

۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

پاسخ گزینهٔ ۳ این سؤال ایدهٔ خیلی قشنگی دارد. مختصات نقطهٔ $A(۷,۶)$ در هیچ‌کدام از معادله‌های دو خط داده‌شده صدق نمی‌کند؛ یعنی نقطهٔ A روی هیچ‌کدام از این ۲ خط نیست. شکل را نگاه کنید.



نقطهٔ A را رأسی در نظر گرفتیم که روی هیچ‌کدام از دو خط داده‌شده نباشد. حالا با برابر قراردادن معادلهٔ دو خط داده‌شده، می‌توانیم مختصات نقطهٔ C را به دست آوریم:

$$\text{نقطهٔ } C: \begin{cases} ۲y-۳x=۱۱ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \xrightarrow[\times ۲]{\times(-۳)} \begin{cases} -۶y+۹x=-۳۳ \\ ۶y+۸x=۱۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۱۷x=-۱۷ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=۴ \end{cases}$$

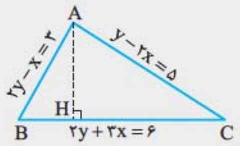
مختصات نقطهٔ C به صورت $C(-۱,۴)$ به دست آمد. حالا مختصات وسط قطر را می‌خواهیم:

$$M=\frac{A+C}{۲}=(\frac{۷-۱}{۲},\frac{۶+۴}{۲})=(۳,۵)$$

تست سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$، $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟ *(خارج ۸۹)*

۱) $6y - 4x = 15$ ۲) $9y - 6x = 17$ ۳) $3y - 2x = 7$ ۴) $3y + 2x = 9$

پاسخ **گزینهٔ ۲** شکل را ببینید.



AH خطی است که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر ضلع BC عمود است.

اول نقطهٔ A را به دست می‌آوریم. این نقطه محل برخورد خط‌های AB و AC است:

$$\text{نقطهٔ A}: \begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -4y + 2x = -6 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} -3y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم $y = \frac{1}{3}$ تا x را پیدا کنیم.

$$2(\frac{1}{3}) - x = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3} \Rightarrow A(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$$

حالا شیب BC را پیدا می‌کنیم. شیب AH، قرینه و معکوس شیب BC است:

$$BC: 2y + 3x = 6 \Rightarrow 2y = -3x + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{2}{3}$$

در آخر هم معادلهٔ AH را با داشتن مختصات $A(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ و شیب $m_{AH} = \frac{2}{3}$ می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x + \frac{7}{3}) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{14}{9}$$

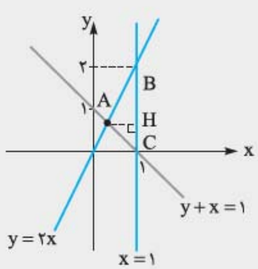
طرفین را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$9y - 3 = 6x + 14 \Rightarrow 9y - 6x = 17$$

تست معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$، $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ *(تجربی ۸۴)*

۱) $y = \frac{2}{3}$ ۲) $x = \frac{2}{3}$ ۳) $y + x = \frac{2}{3}$ ۴) $y + x = \frac{1}{3}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** اگر به دنبال یک راه‌حل علمی و منطقی هستید، به شما بگویم که اگر بخواهید آن چیزی که در ذهنتان می‌گذرد را انجام دهید، احتمالاً عمرتان به دنیا قدر نمی‌دهد و قبل از تمام‌شدن حل این سؤال از دنیا خواهید رفت!



حواستان را جمع کنید. می‌خواهیم تست حل کنیم، باید سریع و دقیق باشیم. در این بخش هر وقت در حل سؤالی گیر کردید، رسم شکل دقیق یک راه‌حل خوب به نظر می‌رسد. شکل را دقیق رسم کنید.

شکل خط $x = 1$ را قبلاً توضیح دادیم. برای رسم دو خط دیگر هم به ۲تا نقطه نیاز داریم:

x	۱	۰
$y = -x + 1$	۰	۱

x	۰	۱
$y = 2x$	۰	۲

حالا از روی شکل باید حدس بزنید کوتاه‌ترین ارتفاع کدام است. کار سختی نیست که بفهمیم AH کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث ABC است. اگر حالتان خوب باشد، همین الان گزینهٔ (۱) را انتخاب می‌کنید. چون AH خطی افقی است و تنها گزینه‌ای که یک خط افقی را نشان می‌دهد، گزینهٔ (۱) است. حالا اگر در گزینه‌ها ۲تا خط افقی داشتیم، چه کار کنیم؟ کاری ندارد! مختصات نقطهٔ A را با برابرگذاشتن معادله‌های $y + x = 1$ و $y = 2x$ حساب کنید. معادلهٔ AH همان (عرض نقطهٔ A = y) است. سؤال بعدی این‌که اگر از شکل مشخص نبود کوتاه‌ترین ارتفاع کدام است، چه کار کنیم. جواب این‌که این تست را رها کنیم و بروید سراغ تست‌های بعدی چون راه‌حل خیلی طولانی می‌شود.

تست **به ازای کدام مقدار m دو خط به معادله‌های $mx+y=m-1$ و $3x+(m-2)y=4-2m$ همدیگر را در بی‌نهایت نقطه قطع می‌کنند؟** (مشابه تجربی ۹۳)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 3 ۴) هیچ مقدار m

پاسخ (گزینهٔ ۲) شرط آن‌که دو خط همدیگر را در بی‌نهایت نقطه قطع کنند، این است که بر هم منطبق باشند یعنی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد.

$$\begin{cases} mx+y=m-1 \\ 3x+(m-2)y=4-2m \end{cases}$$

$$\frac{m}{3}=\frac{1}{m-2}=\frac{m-1}{4-2m}$$

ابتدا قسمت اول تساوی را حل می‌کنیم:

$$\frac{m}{3}=\frac{1}{m-2} \Rightarrow m(m-2)=3 \Rightarrow m^2-2m-3=0 \Rightarrow (m-3)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}$$

حالا باید مقادیر به دست آمده را بررسی کنیم و ببینیم به ازای آن‌ها آیا رابطهٔ $\frac{m}{3}=\frac{1}{m-2}=\frac{m-1}{4-2m}$ برقرار هست یا نه:

$$\text{اگر } m=3 \Rightarrow \frac{3}{3}=\frac{1}{3-2}\neq\frac{3-1}{4-6} \Rightarrow 1=1\neq-1 \quad \times$$

پس $m=3$ قابل‌قبول نیست.

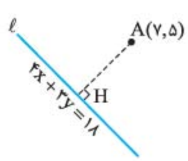
$$\text{اگر } m=-1 \Rightarrow -\frac{1}{3}=\frac{1}{-1-2}=\frac{-1-1}{4-2(-1)} \Rightarrow -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3} \quad \checkmark$$

به ازای $m=-1$ تساوی برقرار می‌شود و دو خط بر هم منطبق هستند یعنی در بی‌شمار نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

فاصلهٔ نقطه از خط

این قسمت را با یک مثال شروع می‌کنیم:

مثال **فاصلهٔ نقطهٔ $A(7,5)$ را از خط به معادلهٔ $4x+3y=18$ به دست آورید.**



حل فاصلهٔ یک نقطه از یک خط یعنی طول پاره‌خطی که از A عمود بر خط رسم می‌شود. یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به خط که همان AH است.

اول معادلهٔ AH را می‌نویسیم:

$$\ell: 4x+3y=18 \Rightarrow 3y=-4x+18 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+6 \Rightarrow m_1=-\frac{4}{3} \Rightarrow m_{AH}=\frac{3}{4}$$

$$\text{معادلهٔ AH}: y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-5=\frac{3}{4}(x-7) \Rightarrow y-5=\frac{3}{4}x-\frac{21}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4y-20=3x-21 \Rightarrow 3x-4y=1$$

با حل دستگاه زیر نقطهٔ برخورد خط ℓ با AH یعنی H به دست می‌آید.

$$\begin{cases} 4x+3y=18 \\ 3x-4y=1 \end{cases} \Rightarrow x=3, y=2 \Rightarrow H(3,2)$$

جواب سؤال برابر طول پاره‌خط AH است:

$$AH=\sqrt{(7-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

این کاری که برای حل این سؤال انجام دادیم، کمی طولانی به نظر می‌رسد. برای همین اگر حوصله کنیم و یک بار این مراحل را در حالت کلی انجام دهیم، به فرمول زیر می‌رسیم:

نکته فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

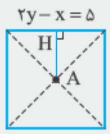
$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثلاً در مثال بالا می‌توانیم با استفاده از این فرمول فاصلهٔ $A(7,5)$ را از خط $4x+3y-18=0$ به دست آوریم:

$$AH=\frac{|4(7)+3(5)-18|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|25|}{5}=5$$

تست **نقطهٔ $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $2y-x=5$ است. مساحت این مربع کدام است؟** *(خارج ۹۳)*

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰



پاسخ **گزینهٔ ۴** فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,-1)$ از خط $2y-x-5=0$ را به دست می‌آوریم:

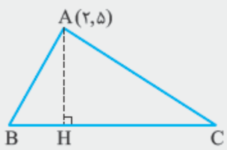
$$AH=\frac{|2(-1)-(3)-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

مطابق شکل AH برابر نصف طول ضلع مربع است. پس طول ضلع آن $2(\frac{10}{\sqrt{5}})=\frac{20}{\sqrt{5}}$ می‌شود.

مساحت مربع هم که طول ضلع به توان ۲ می‌شود: $S=(\frac{20}{\sqrt{5}})^2=\frac{400}{5}=80$

تست **اگر نقاط $A(2,5)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟**

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{6}$



پاسخ **گزینهٔ ۳** طول ارتفاع AH همان فاصلهٔ نقطهٔ A از ضلع BC است.

مختصات نقطهٔ A را که داریم. باید معادلهٔ ضلع BC را هم به دست آوریم:

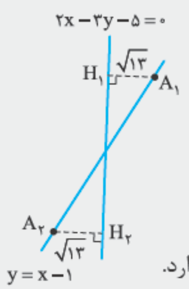
$$m_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0-(-2)}{3-1}=\frac{2}{2}=1$$

$$\text{معادلهٔ BC}: y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-0=1(x-3) \Rightarrow y=x-3$$

حالا فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,5)$ را از ضلع BC به معادلهٔ $y-x+3=0$ پیدا می‌کنیم: $AH=\frac{|5-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

تست **دو نقطه بر خطی به معادلهٔ $y=x-1$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $2x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟** *(تجربی ۸۹)*

۱) ۹ و -15 ۲) ۱۱ و -15 ۳) ۱۵ و -11 ۴) -9 و ۱۱



پاسخ **گزینهٔ ۲** هر نقطه که روی خط $y=x-1$ قرار داشته باشد، به صورت $(a,a-1)$ است. یعنی نقطهٔ روی خط را شناور در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ این نقطه از خط $2x-3y-5=0$ را پیدا می‌کنیم:

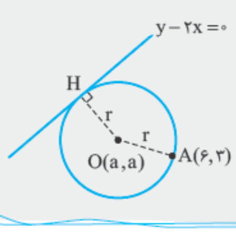
$$AH=\frac{|2a-3(a-1)-5|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|-a-2|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \Rightarrow |-a-2|=13 \Rightarrow \begin{cases}-a-2=13 \Rightarrow a=-15\\ -a-2=-13 \Rightarrow a=11\end{cases}$$

پس طول نقاط می‌تواند -15 یا ۱۱ باشد. در شکل فرضی رسم‌شده، نشان داده‌ایم که ۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

تست **مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(6,3)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y=2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟** *(ریاضی ۹۲)*

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{10}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** راستش را بخواهید شاید طرح این تست در این‌جا درست نباشد ولی کتاب درسی چندین‌بار در مورد دایره صحبت کرده و سؤالاتی مطرح کرده. ما هم گفتیم کم نیاوریم و یک سؤال جذاب حل کنیم.



اگر مرکز دایره روی نیمساز ربع اول یعنی خط $y=x$ باشد، می‌توانیم مختصات آن را به صورت $O(a,a)$ در نظر بگیریم.

شکل را نگاه کنید. قبول دارید که $OA=OH=r$ است؟

برویم سراغ حل تست:

$$OA = OH \Rightarrow \sqrt{(a-6)^2+(a-3)^2} = \frac{|a-2a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2-12a+36+a^2-6a+9} = \frac{|-a|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a^2-18a+45} = \frac{|a|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2-18a+45 = \frac{a^2}{5} \xrightarrow{\times 5} 10a^2-18\times 5a+45\times 5 = a^2$$

$$\Rightarrow 9a^2-18\times 5a+45\times 5 = 0$$

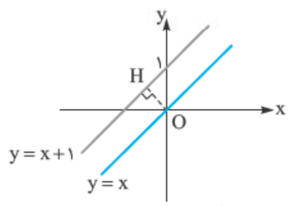
طرفین را بر ۹ تقسیم می‌کنیم: $a^2-10a+25=0 \Rightarrow (a-5)^2=0 \Rightarrow a=5$

حالا باید شعاع را پیدا کنیم. قبلاً حساب کرده بودیم که $r = OH = \frac{|-a|}{\sqrt{5}}$. اگر $a=5$ باشد، $r = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ می‌شود. *با تشکر از صبر و شکیبایی شما!*

فاصلهٔ دو خط موازی

باز هم با مثال این قسمت را شروع می‌کنیم.

مثال **فاصلهٔ بین دو خط موازی $y=x$ و $y=x+1$ را به دست آورید.**



حل امیدوارم از آن دسته دانش‌آموزانی نباشید که سریع جواب داده‌اید که فاصلهٔ این دو خط برابر ۱ است. فاصلهٔ دو خط یعنی کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین آن‌ها که برابر طول پاره‌خطی است که عمود بر هر دو خط است و بین آن‌ها قرار دارد. پس فاصلهٔ بین دو خط روی شکل OH می‌شود که قطعاً برابر ۱ نیست.

برای به دست آوردن این فاصله کافی است یک نقطه روی خط اول در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دوم حساب کنید. مثلاً نقطهٔ $(0,0)$ را از خط اول در نظر بگیرید. فاصلهٔ آن را از خط $y=x+1$ یا همان $y-x-1=0$ می‌خواهیم که برابر است با:

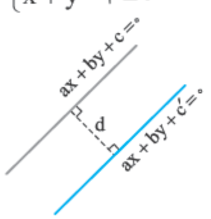
$$OH = \frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در این سؤال از روش هندسی و با استفاده از فیثاغورس هم می‌توانید فاصلهٔ بین دو خط را به دست آورید.

حالا می‌خواهیم کمی سریع‌تر باشیم و یک فرمول برای فاصلهٔ بین دو خط ارائه بدهیم:

اگر $Ax+By+C=0$ و $A'x+B'y+C'=0$ دو خط موازی باشند، قبلاً گفته‌ایم که $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ است. این یعنی ضرایب x و y نظیربه‌نظیر مضربی از هم هستند. مثلاً دو خط زیر را در نظر بگیرید. ضرایب x و y در بالایی -3 برابر پایینی است.

$$\begin{cases} -3x-3y+3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$$



اولین کاری که باید بکنید، این است که ضرایب x و y در هر دو خط یکسان باشند؛ یعنی مثلاً در اولی طرفین را تقسیم بر -3 بکنید تا به $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$ برسیم. یعنی به حالت $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+c'=0 \end{cases}$ می‌رسیم. در این صورت فاصلهٔ بین این دو خط برابر است با:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

در مثال قبل دو خط $y-x=0$ و $y-x-1=0$ را داشتیم. فاصله برابر است با:

$$\frac{|-1-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر خیلی مشتاق اثبات هستید با خودتان! روش آن هم مشابه کاری است که در حل مثال قبل انجام دادیم.

تست **دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟** *(تجربی ۹۲)*

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{25}{8}$ ۴) $\frac{25}{4}$

پاسخ **گزینهٔ ۳** دو خط داده‌شده موازی هستند؛ چرا که شیب برابری دارند. اگر طرفین دومی را در ۲ ضرب کنیم، می‌توانیم معادلهٔ آن‌ها را به صورت $2x-2y-3=0$ و $2x-2y+2=0$ بنویسیم.

$$\text{طول ضلع مربع} = \text{فاصلهٔ ۲ خط} = \frac{|2-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

مساحت مربع هم که برابر طول ضلع به توان ۲ است، یعنی $\frac{25}{8} = (\frac{5}{\sqrt{8}})^2$ می‌شود.

تست **اگر فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by-۴=۰$ و $y-۱=\sqrt{۳}x$ برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، a کدام است؟**

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $-۳\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $-۲\sqrt{۳}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** اولین نکته این‌که حواستان باشد دو خط داده‌شده موازی هستند:

$$\begin{cases} ax+by-۴=۰ \\ \sqrt{۳}x-y+۱=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط موازی بودن}} \frac{a}{\sqrt{۳}}=\frac{b}{-۱} \Rightarrow a=-\sqrt{۳}b$$

در دستگاه بالا به جای a مقدار $-\sqrt{۳}b$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} -\sqrt{۳}bx+by-۴=۰ \\ \sqrt{۳}x-y+۱=۰ \end{cases}$$

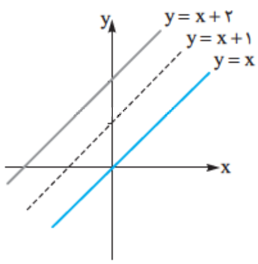
گفتیم ضرایب x و y را باید یکی بکنیم. پس طرفین معادلهٔ بالایی را بر $-b$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt{۳}x-y+\frac{۴}{b}=۰ \\ \sqrt{۳}x-y+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله}=\frac{|\frac{۴}{b}-۱|}{\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|\frac{۴}{b}-۱|}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow |\frac{۴}{b}-۱|=۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۴}{b}-۱=۱ \Rightarrow \frac{۴}{b}=۲ \Rightarrow b=۲ \\ \frac{۴}{b}-۱=-۱ \Rightarrow \frac{۴}{b}=۰ \Rightarrow \text{امکان ندارد.} \end{cases}$$

پس $b=۲$ است و چون $a=-\sqrt{۳}b$ بود، $a=-۲\sqrt{۳}$ به دست می‌آید.

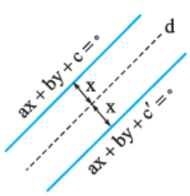
اگر از شما بپرسند معادلهٔ خطی که بین دو خط $y=x$ و $y=x+۲$ قرار دارد چیست، چه می‌گویید؟
قطعاً جواب شما این است که $y=x+۱$!



که جواب منطقی‌ای هم به نظر می‌رسد. پس می‌توانیم این نتیجه را بگیریم که:

نکته مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، خطی است موازی آن‌ها (بین آن‌ها) که از هر دو خط به یک فاصله است. اگر معادلهٔ این دو خط را به صورت $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ بنویسیم، معادلهٔ خط وسط برابر است با:

$$d: ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$

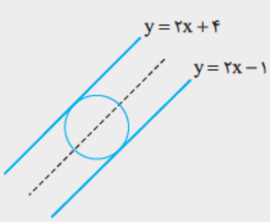


تست **مرکز دایره‌هایی که بر دو خط $y=۲x+۴$ و $y=۲x-۱$ مماس هستند، روی کدام خط قرار دارند؟**

۱) $۲y=۴x+۵$ ۲) $۲y=۴x+۳$
۳) $y=۲x-۳$ ۴) $y=۲x+۳$

پاسخ **گزینهٔ ۲** مرکز تمام دایره‌هایی که بر دو خط $y=۲x+۴$ و $y=۲x-۱$ مماس هستند، مطابق شکل روی خطی بین این دو خط قرار دارند. معادلهٔ خط وسط این دو را پیدا می‌کنیم:

$$y-۲x+۱=۰ \quad , \quad y-۲x-۴=۰$$



$$ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰ \Rightarrow \text{خط وسط}: y-۲x+\frac{۱-۴}{۲}=y-۲x-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲y-۴x-۳=۰ \Rightarrow ۲y=۴x+۳$$

قرینه‌یابی

فرض کنید نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ را به ما داده‌اند. بعضی مواقع از ما می‌خواهند قرینهٔ آن را نسبت به یک نقطه یا خط پیدا کنیم:

قرینهٔ $A(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات $A_1(-\alpha,-\beta)$ است.

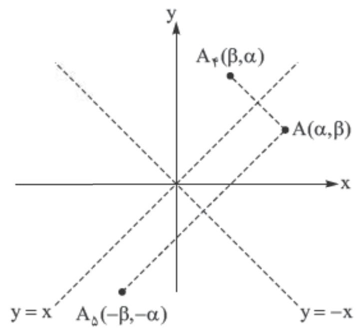
قرینهٔ $A(\alpha,\beta)$ نسبت به محور xها $A_2(\alpha,-\beta)$ است.

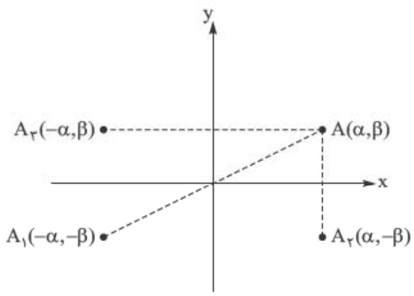
قرینهٔ $A(\alpha,\beta)$ نسبت به محور yها $A_3(-\alpha,\beta)$ است.

قرینهٔ $A(\alpha,\beta)$ نسبت به خط $y=x$ برابر $A_4(\beta,\alpha)$ است.

قرینهٔ $A(\alpha,\beta)$ نسبت به خط $y=-x$ برابر $A_5(-\beta,-\alpha)$ است.

شکل‌ها را ببینید:





اگر هم قرینهٔ یک نقطه را نسبت به یک خط مثل $ax+by+c=0$ بخواهند که معرکه داریم. آن را به عنوان تمرین به شما محول کرده‌ایم.

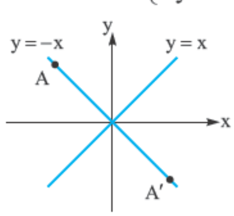
مثال **تمامی نقاطی را بیابید که قرینهٔ آن‌ها نسبت به نیمساز ربع اول و سوم منطبق بر قرینهٔ آن‌ها نسبت به مبدأ مختصات است.**

حل فرض کنید نقاط موردنظر به صورت $A(x,y)$ باشند. در این صورت قرینهٔ این نقاط نسبت به مبدأ مختصات به صورت $A'(-x,-y)$ و قرینهٔ این نقاط نسبت به خط $y=x$ به صورت $A''(y,x)$ است. می‌خواهیم A' بر A'' منطبق باشد. یعنی:

$$A'=A'' \Rightarrow \begin{cases}-x=y\\ -y=x\end{cases} \Rightarrow y=-x$$

ویژگی مشترک تمام این نقاط این است که $y=-x$ می‌باشد یعنی طول و عرض آن‌ها قرینه است.

پس نتیجه می‌گیریم تمام نقاط روی خط $y=-x$ این ویژگی را دارند.



درسمان تمام شد. در این‌جا بر خود لازم می‌دانیم از دکارت بابت این همه زحمت و تلاش تشکر کنیم. جالب است بدانید که ایدهٔ معرفی دستگاه مختصات، وقتی که روی یک تخت دراز کشیده بود و یک پروانه را نگاه می‌کرد، به ذهنش خطور کرد. با خودش گفت: باید بتواند مکان دقیق پروانه را با دانستن فاصلهٔ پروانه از ۲ دیوار عمود بر هم حدس بزند. در سال ۱۶۴۹ دکارت معلم شخصی ملکهٔ سوئد شد. روال دکارت در طول زندگی‌اش این بود که شب‌ها دیر می‌خوابید و صبح‌ها هم دیر بلند می‌شد؛ در حالی که ملکه علاقه‌مند بود درس‌هایش را ساعت ۵ صبح از دکارت بگیرد چون معتقد بود آن موقع ذهنش برای دریافت مطالب آماده‌تر است. این تغییر عادت به همراه هوای خیلی سرد سوئد در آن دوران اتفاق خوشایندی برای دکارت نبود و باعث شد که او تنها پس از ۲ ماه، از ذات‌الریه رنج ببرد و در سن ۵۵ سالگی از دنیا برود.


(رنه دکارت ۱۶۵۰ ـ ۱۵۹۶)

"I Think Therefore I am"

یاد و خاطرش گرامی

مسائل تشریحی درس اول

۱- اگر نقاط $A(۲,۰)$ ، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ سه رأس مثلث ABC باشند.

الف) محیط مثلث را به دست آورید. ب) نوع مثلث را مشخص کنید. ج) روش دیگری برای حل قسمت دوم ارائه دهید.

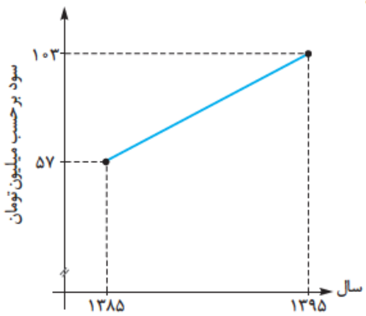
۲- دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات از نقطهٔ $(۸,-۶)$ می‌گذرد.

الف) شعاع دایره چه‌قدر است؟ ب) در حالت کلی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ از مبدأ مختصات چه‌قدر است؟

۳- مثلث ABC با رئوس $A(۱,۹)$ ، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید.

الف) طول میانهٔ AM را حساب کنید. ب) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

۴- سود سالیانهٔ یک واحد تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است.



الف) میانگین سود سالیانهٔ این شرکت در دههٔ موردنظر را به دست آورید.

ب) در کدام سال مقدار سود سالیانه با میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

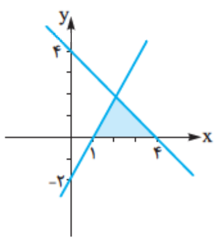
ج) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانهٔ شرکت چه‌قدر باشد؟

۵- مساحت مثلث با رئوس $A(۳,۰)$ ، $B(-۵,۱)$ و $C(۷,۶)$ را به دست آورید.

۶- دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ بر خط $۳x=۴y$ مماس است. این دایره محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۷- معادلهٔ اضلاع مثلثی به صورت $۲y+x=۸$ ، $۳y+x-۴=۰$ و $۲x-y-۱=۰$ هستند. نوع مثلث را مشخص کنید.

۸- در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی چه‌قدر است؟



۹- اگر فاصلهٔ دو خط $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+a=۰$ برابر ۱ باشد، a را بیابید.

۱۰- اگر نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۲,۲)$ ، ۲ رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس سوم را بیابید.

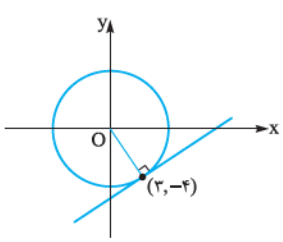
۱۱- ثابت کنید قرینهٔ نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات $A'(-\alpha,-\beta)$ است.

۱۲- نقطهٔ $A(۱,۳)$ مفروض است. قرینهٔ این نقطه را:

الف) نسبت به نقطهٔ $B(۳,۷)$ بیابید. ب) نسبت به خط $y=-x$ بیابید. ج) نسبت به خط $y=-x+۱$

۱۳- ثابت کنید قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به خط $y=x$ برابر نقطهٔ $B(b,a)$ است.

۱۴- در شکل زیر، نمودار دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ را رسم کرده‌ایم. در نقطه‌ای به طول $(۳,-۴)$ روی دایره، خطی بر دایره مماس می‌کنیم.



الف) معادلهٔ خط مماس را پیدا کنید.

ب) حدس بزنید در چه نقطهٔ دیگری روی دایره اگر خطی بر دایره مماس کنیم، موازی خط مماس کشیده شده است؟

پرسش‌های چندگزینه‌ای درس اول

۱- فاصلهٔ بین دو خط به معادلات $y=\sqrt{۳}x+۲$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ کدام است؟ (خارج ۸۸)

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۲- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $۷/۲$ ۲) $۹/۶$ ۳) $۱۱/۴$ ۴) $۱۲/۸$ (خارج ۹۰)

۳- به ازای کدام مقدار a نقاط $(a,۳)$ و $(۶,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟ (خارج ۸۵)

۱) $\frac{۹}{۴}$ و -۲ ۲) $\frac{۳}{۴}$ و -۲ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ و ۲ ۴) $-\frac{۹}{۴}$ و ۲

۴- مساحت مثلثی که سه رأس آن نقاط $A(۱,۴)$، $B(۱,-۱)$ و $C(۲,۲)$ باشد، کدام است؟ (خارج ۸۸)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۵}{۴}$

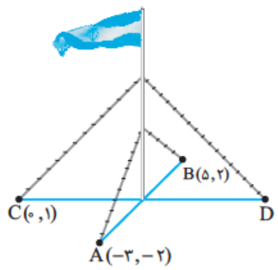
۵- دو نقطهٔ $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰,-۱۳)$ را در نظر بگیرید. عمودمنصف پاره‌خط AB محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) -۷ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۲

۶- اگر نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ دو انتهای یکی از قطرهای دایره باشند، آن‌گاه کدام نقطه می‌تواند روی محیط دایره باشد؟ (کتاب درسی)

۱) $(۷,۳)$ ۲) $(۷,۲)$ ۳) $(۳,-۱)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۷- یک میلهٔ پرچم مطابق شکل، توسط کابل‌هایی به چهار نقطهٔ زمین متصل شده است؛ به طوری که فاصلهٔ هر نقطه از میله با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله برابر است. مختصات نقطهٔ D کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $(۲,۱)$

۲) $(-۲,-۱)$

۳) $(۲,-۱)$

۴) $(-۲,۱)$

۸- اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، آن‌گاه کدام گزینه غلط است؟

۱) خط گذرا از نقاط (a,b) و (b,a) همواره بر $y = x$ عمود است. ۲) قرینهٔ (a,b) نسبت به خط $y = x$، نقطهٔ (b,a) است.

۳) نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل (a,b) و (b,a) روی $y = -x$ قرار دارد. ۴) هیچ‌کدام

۹- نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,۰)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $(-۲,۲\sqrt{۳})$ ۲) $(۲,۲\sqrt{۲})$ ۳) $(۲,-۲\sqrt{۳})$ ۴) $(۲,-\sqrt{۲})$

۱۰- نقاط $O(۰,۰)$، $A(۲,۱)$ و $B(۴,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر مختصات پای ارتفاع AH به صورت $H(a,b)$ باشد، b کدام است؟

۱) $\frac{۲۸}{۱۷}$ ۲) $-\frac{۲۸}{۱۷}$ ۳) $\frac{۷}{۱۷}$ ۴) $-\frac{۷}{۱۷}$

۱۱- دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۱۲- نقطهٔ $A(۳,-۲)$، بین نقطهٔ $B(x_B,y_B)$ و قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۵)$ نسبت به مبدأ مختصات قرار دارد. در این صورت حاصل $y_B - x_B$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۶ ۳) ۴ ۴) -۳

۱۳- دو نقطهٔ $A(-۴,۷)$ و $B(۱,۵)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادلهٔ قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y + ۴x = ۰$ ۲) $۴x + y = ۰$ ۳) $y - ۴x = ۰$ ۴) $۲y - ۵x = ۰$

۱۴- دایره‌ای به مرکز $O(۳,۲)$ و مماس بر خط $۴x - ۳y + ۹ = ۰$، محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۲)$ نسبت به خط $y = x - ۳$ کدام است؟

۱) $(۴,۳)$ ۲) $(۵,۰)$ ۳) $(\frac{۱۱}{۲},\frac{۷}{۲})$ ۴) $(\frac{۱۳}{۳},\frac{۹}{۴})$

۱۶- اگر خطوط $-bx + (a-b)y - ۸ = ۰$ و $۳ax + by - c = ۰$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ همدیگر را قطع کنند و بر هم عمود باشند، آن گاه c کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) -۴

۱- الف) $AB=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$$AC=\sqrt{(2-(-2))^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$BC=\sqrt{(5-(-2))^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$$

محیط $=10+5\sqrt{2}$

ب) مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. دلیل قائم‌الزاویه بودن آن این است که بین طول اضلاع رابطهٔ فیثاغورس برقرار است.

$$5^2+5^2=(\sqrt{50})^2$$

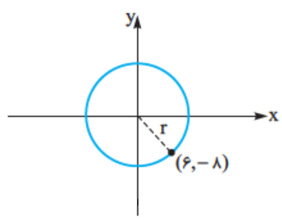
ج) می‌توانیم شیب پاره‌خط‌های AB و AC را به دست آوریم و ثابت کنیم که بر هم عمودند.

$$m_{AB}=\frac{0-4}{2-5}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$$m_{AC}=\frac{0-3}{2-(-2)}=-\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad m_{AB}\times m_{AC}=-1$$

$\Rightarrow$ دو خط بر هم عمودند و مثلث قائم‌الزاویه است.

۲- الف) شعاع دایره برابر فاصلهٔ یک نقطه روی دایره از مرکز است. پس کافی است فاصلهٔ نقطهٔ $A(6,-8)$ را از مرکز دایره $O(0,0)$ به دست آوریم:



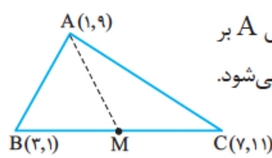
$$r=OA=\sqrt{(6-0)^2+(-8-0)^2}=\sqrt{36+64}=10$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ از $O(0,0)$ برابر است با:

$$OA=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

رابطهٔ اخیر به عنوان فرمول در بعضی کتاب‌ها آمده است!

۳- میانهٔ AM خطی است که از رأس A بر وسط ضلع BC یعنی نقطهٔ M وارد می‌شود.



الف) $M=\frac{B+C}{2}=(\frac{3+7}{2},\frac{11+1}{2})=(5,6)$

$$AM=\sqrt{(1-5)^2+(9-6)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

ب) باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از نقاط A و M می‌گذرد.

$$m_{AM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{9-6}{1-5}=\frac{3}{-4}$$

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-9=-\frac{3}{4}(x-1)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+9\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{39}{4}$$

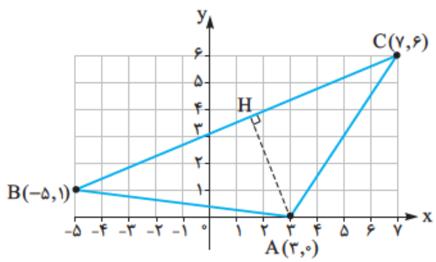
۴- الف) سود شرکت در سال ۱۳۸۵ برابر ۵۷ میلیون تومان و در سال ۱۳۹۵ برابر ۱۰۳ میلیون تومان است. چون رابطهٔ داده‌شده خطی است، پس میانگین سود شرکت برابر $80=\frac{160}{2}=\frac{57+103}{2}$ میلیون تومان است.

ب) با توجه به نمودار مشخص است که وقتی در طی ۱۰ سال میزان سود $103-57=46$ میلیون افزایش یافته، یعنی هر سال $\frac{46}{10}=4/6$ میلیون تومان افزایش سود داشته‌ایم. ۵ سال طول می‌کشد تا میزان سود به ۸۰ میلیون تومان برسد، چون: $57+5(4/6)=80$

یعنی در سال ۱۳۹۰ این اتفاق می‌افتد که از همان اول هم مشخص بود.

ج) هر ۱۰ سال سود شرکت ۴۶ میلیون تومان افزایش می‌یابد. پس در سال ۱۴۰۵ سود شرکت برابر $103+46=149$ میلیون تومان خواهد بود. (به امید خدا)!

۵- ضلع BC را به عنوان قاعده و AH را به عنوان ارتفاع در نظر می‌گیریم.



با داشتن طول این دو، مساحت مثلث را می‌توانیم محاسبه کنیم.

طول ضلع BC: $\sqrt{(6-1)^2+(7-(-5))^2}=\sqrt{25+144}$

$=\sqrt{169}=13$

حالا باید معادلهٔ BC را حساب کنیم: $m_{BC}=\frac{6-1}{7-(-5)}=\frac{5}{12}$

معادلهٔ BC: $y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-1=\frac{5}{12}(x-(-5))$

$$\Rightarrow y-1=\frac{5}{12}(x+5)$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$12y-12=5(x+5)\Rightarrow 12y-5x-37=0$$

حالا طول AH: $AH=\frac{|12(0)-5(3)-37|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{52}{13}=4$

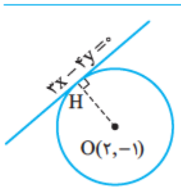
مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}(4\times 13)=26$$

البته در حل این سؤال نمی‌خواستیم از فرمول استفاده کنیم و دنبال راه‌حل تشریحی بودیم وگرنه از همان اول می‌دانستیم که مساحت برابر است با: $S=|\frac{1}{2}(3(1-6)+(-5)(6-0)+7(0-1))|$

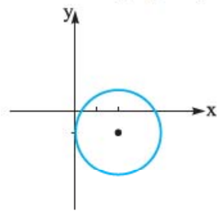
$$=\frac{1}{2}|-15-30-7|=26$$

۶- به شکل نگاه کنید. اگر دایره به مرکز $O(2,-1)$ بر خط $3x=4y$ مماس باشد، آن‌گاه شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ $O(2,-1)$ از خط $3x=4y$ است.



$$OH = r = \frac{|۳(۲)-۴(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

حالا باید شکل را رسم کنیم. دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ و شعاع ۲ داریم. باید ببینیم در چند نقطه محورهای مختصات را قطع می‌کند.



مطابق شکل محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند و بر محور yها مماس می‌شود. پس با محورهای مختصات در ۳ نقطه برخورد می‌کند.

۷- شیب‌ها را نگاه کنید:

$$y = ۲x-۱ \quad \text{و} \quad ۳y+x=۴ \quad \text{و} \quad ۲y+x=۸$$

$$m_۱ = ۲ \qquad m_۲ = -\frac{۱}{۳} \qquad m_۳ = -\frac{۱}{۲}$$

اولی و سومی بر هم عمود هستند. پس مثلث قائم‌الزاویه است. برای بررسی متساوی‌الساقین بودن باید طول اضلاع را به دست آوریم. اول باید رأس‌ها را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y = ۲x-۱ \\ ۳y+x=۴ \end{cases} \Rightarrow A(۱,۱)$$

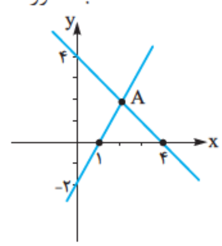
$$\begin{cases} ۳y+x=۴ \\ ۲y+x=۸ \end{cases} \Rightarrow B(۱۶,-۴)$$

$$\begin{cases} ۲y+x=۸ \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow C(۲,۳)$$

$$AB = \sqrt{۱۵^۲+۵^۲} \quad \text{و} \quad AC = \sqrt{۱^۲+۲^۲} \quad \text{و} \quad BC = \sqrt{۱۴^۲+۷^۲}$$

طول هیچ‌کدام از اضلاع با هم برابر نیست. پس مثلث صرفاً قائم‌الزاویه است.

۸- اول معادلهٔ خط‌ها را به دست می‌آوریم. قبلاً گفته بودیم که اگر طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q باشد، معادلهٔ خط به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ است؛ پس:



$$\frac{x}{۴}+\frac{y}{۴}=۱ \Rightarrow x+y=۴$$

$$\frac{x}{۱}+\frac{y}{-۲}=۱ \Rightarrow y=۲x-۲$$

نقطهٔ تلاقی دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$\text{نقطهٔ A:} \begin{cases} x+y=۴ \\ y=۲x-۲ \end{cases} \Rightarrow A(۲,۲)$$

پس مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $۳ = \frac{۲\times ۳}{۲}$ می‌شود.

۹- دو خط $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+a=۰$ موازی هستند. برای این‌که یک‌شکل باشند باید طرفین خط دوم را بر -۲ تقسیم کنیم:

$$\begin{cases} ۵x-۱۲y+۸=۰ \\ ۵x-۱۲y-\frac{a}{۲}=۰ \end{cases} \Rightarrow \text{فاصلهٔ دو خط:} \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

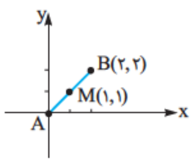
$$\Rightarrow d = \frac{|۸-(-\frac{a}{۲})|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}} = \frac{|۸+\frac{a}{۲}|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}} = \frac{|۸+\frac{a}{۲}|}{۱۳} = ۱$$

$$\Rightarrow |۸+\frac{a}{۲}| = ۱۳$$

$$\begin{cases} ۸+\frac{a}{۲}=۱۳ \Rightarrow \frac{a}{۲}=۵ \Rightarrow a=۱۰ \\ ۸+\frac{a}{۲}=-۱۳ \Rightarrow \frac{a}{۲}=-۲۱ \Rightarrow a=-۴۲ \end{cases}$$

البته راه‌حل کتاب درسی این است که باید یک نقطه روی خط اول در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن نقطه را از خط دوم به دست آورید که در مورد این راه‌حل در درس‌نامه صحبت کردیم.

۱۰- طول AB برابر $\sqrt{۸} = \sqrt{۲^۲+۲^۲}$ است.



پس طول هر ضلع از مثلث ABC برابر $\sqrt{۸}$ می‌شود. نقطهٔ C نقطه‌ای است که فاصلهٔ آن از رأس A و از رأس B برابر $\sqrt{۸}$ است ولی این برای حل سؤال کافی نیست. به علاوه ما می‌دانیم نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. پس معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را اول می‌نویسیم. شیب خط AB برابر ۱ است. پس شیب پاره‌خط عمودمنصف ۱− می‌شود، به علاوه از نقطهٔ وسط پاره‌خط AB یعنی $M(۱,۱)$ می‌گذرد.

حالا معادلهٔ عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y-۱=-۱(x-۱) \Rightarrow y=-x+۲$$

رأس سوم یعنی نقطهٔ C روی این خط قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $C(a,-a+۲)$ خواهد بود. فاصلهٔ این نقطه از رأس $A(۰,۰)$ هم باید برابر $\sqrt{۸}$ باشد:

$$AC = \sqrt{(a-۰)^۲+(-a+۲-۰)^۲} = \sqrt{۸}$$

$$\Rightarrow a^۲+a^۲-۴a+۴=۸ \Rightarrow ۲a^۲-۴a-۴=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} a^۲-۲a-۲=۰$$

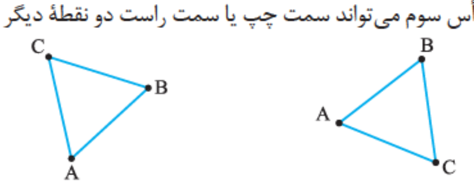
$$\Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۲+\sqrt{۴+۸}}{۲} = ۱+\sqrt{۳} \\ a_۲ = \frac{۲-\sqrt{۴+۸}}{۲} = ۱-\sqrt{۳} \end{cases}$$

بنابراین رأس سوم ۲ حالت می‌تواند داشته باشد.

$$\text{اگر } a=۱+\sqrt{۳} \Rightarrow C(۱+\sqrt{۳},۱-\sqrt{۳})$$

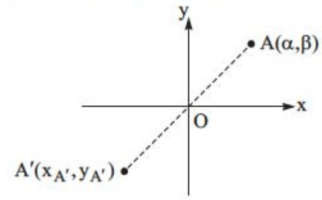
$$\text{اگر } a=۱-\sqrt{۳} \Rightarrow C(۱-\sqrt{۳},۱+\sqrt{۳})$$

می‌دانید چرا ۲تا جواب به دست آمد؟ چون ۲ حالت مختلف وجود دارد. رأس سوم می‌تواند سمت چپ یا سمت راست دو نقطهٔ دیگر باشد:



حالت اول　　　حالت دوم

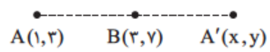
۱۱- قرینهٔ A نسبت به مبدأ مختصات را می‌خواهیم. پس مبدأ بین A و A' قرار دارد:



$$O=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۰=\dfrac{\alpha+x_{A'}}{۲}\Rightarrow x_{A'}=-\alpha\\[2mm] ۰=\dfrac{\beta+y_{A'}}{۲}\Rightarrow y_{A'}=-\beta\end{cases}$$

$$\Rightarrow A'(-\alpha,-\beta)$$

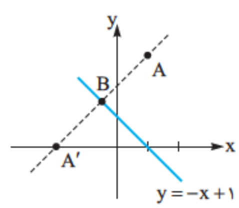
۱۲- الف) اگر قرینهٔ A نسبت به B نقطهٔ A' باشد، آن‌گاه B بین A و A' قرار دارد. یعنی:



$$B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۳=\dfrac{۱+x}{۲}\Rightarrow x=۵\\[2mm] ۷=\dfrac{۳+y}{۲}\Rightarrow y=۱۱\end{cases}\Rightarrow A'(۵,۱۱)$$

ب) گفتیم قرینهٔ (α,β) نسبت به $y=-x$ برابر $(-\beta,-\alpha)$ است. پس قرینهٔ این نقطه نسبت به خط $y=-x$ برابر $A'(-۳,-۱)$ می‌شود.

ج) برای پیداکردن قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۳)$ نسبت به خط $y=-x+۱$ اول معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از $A(۱,۳)$ می‌گذرد و بر خط $y=-x+۱$ عمود است.



شیب خط عمود برابر ۱ است:

$$\text{معادلهٔ خط عمود}: y-۳=۱(x-۱)\Rightarrow y=x+۲$$

نقطهٔ برخورد خط به دست آمده و خط $y=-x+۱$ را نقطهٔ B می‌نامیم:

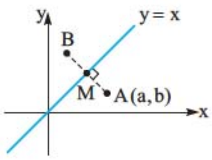
$$\text{نقطهٔ } B:\begin{cases}y=x+۲\\ y=-x+۱\end{cases}\Rightarrow x+۲=-x+۱$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲},\ y=\frac{۳}{۲}\Rightarrow B(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

اگر قرینهٔ A نسبت به خط $y=-x+۱$ نقطهٔ A' باشد، آن‌گاه B بین A و A' است: $B=\dfrac{A+A'}{۲}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۱+x_{A'}}{۲}\Rightarrow x_{A'}=-۲\\[2mm] \dfrac{۳}{۲}=\dfrac{۳+y_{A'}}{۲}\Rightarrow y_{A'}=۰\end{cases}\Rightarrow A'(-۲,۰)$$

۱۳- نقطهٔ $A(a,b)$ در دستگاه مختصات را در نظر بگیرید. برای پیداکردن قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$ باید از آن پاره‌خطی به $y=x$ عمود کنیم و آن پاره‌خط را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم.



پس نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB روی خط $y=x$ است. برای پیداکردن M باید معادلهٔ پاره‌خط AB را به دست آوریم و با خط $y=x$ آن را قطع دهیم. شیب AB قرینه و معکوس شیب $y=x$ و برابر -۱ است.

$$\text{معادلهٔ } AB: y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-b=-۱(x-a)$$

$$\Rightarrow y=-x+a+b$$

حالا خط به دست آمده را با $y=x$ قطع می‌دهیم تا M به دست آید:

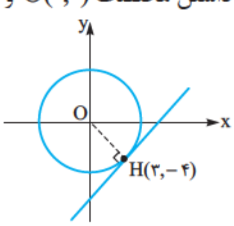
$$\text{نقطهٔ } M:\begin{cases}y=-x+a+b\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x=-x+a+b$$

$$\Rightarrow ۲x=a+b\Rightarrow x=\frac{a+b}{۲}$$

مختصات M برابر $M(\frac{a+b}{۲},\frac{a+b}{۲})$ است و نقطهٔ وسط $A(a,b)$ و $B(x_B,y_B)$ است:

$$\begin{cases}\dfrac{x_B+a}{۲}=\dfrac{a+b}{۲}\Rightarrow x_B=b\\[2mm] \dfrac{y_B+b}{۲}=\dfrac{a+b}{۲}\Rightarrow y_B=a\end{cases}\Rightarrow B(b,a)$$

۱۴- الف) کاری به معادلهٔ داده‌شده نداشته باشید. برای نوشتن معادلهٔ خط مماس، ۲ چیز می‌خواهیم. یکی یک نقطه که سؤال آن را به ما داده است $(۳,-۴)$ و دیگری شیب. پس برویم سراغ شیب خط مماس. شیب پاره‌خط OH را می‌توانیم با داشتن مختصات $O(۰,۰)$ و $H(۳,-۴)$ به راحتی پیدا کنیم:



$$m_{OH}=\frac{-۴-۰}{۳-۰}=-\frac{۴}{۳}$$

پس شیب خط مماس برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

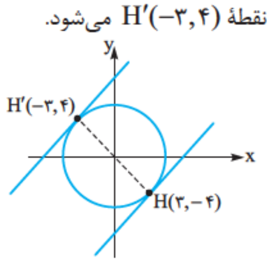
$$\text{معادلهٔ خط مماس}: y-y_۰=m(x-x_۰)$$

$$\Rightarrow y+۴=\frac{۳}{۴}(x-۳)\xrightarrow{\times ۴}۴y+۱۶=۳x-۹$$

$$\Rightarrow ۴y-۳x=-۲۵$$

ب) با کمی دقت متوجه می‌شوید که قرینهٔ نقطهٔ $(۳,-۴)$ نسبت به مبدأ مختصات، جواب سؤال است که نقطهٔ $H'(-۳,۴)$ می‌شود.

هر دوی این نقاط در معادلهٔ دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ صدق می‌کنند.



۱۵-

$$۳x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۲۴}}{۶}=\frac{۵\pm۱}{۶}=\begin{cases}\alpha=۱\\ \beta=\dfrac{۲}{۳}\end{cases}$$

پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل اول

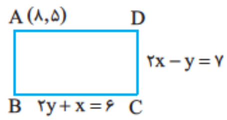
۱- گزینهٔ ۳ اول باید دو خط را یک‌شکل بکنیم: طرفین معادلهٔ خط بالایی را در $\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} y-\sqrt{۳}x-۲=۰ \\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{۳}y-۳x-۲\sqrt{۳}=۰\\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰\end{cases}$$

فاصلهٔ دو خط: $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow d=\frac{|۶-(-۲\sqrt{۳})|}{\sqrt{\sqrt{۳}^۲+(-۳)^۲}}$

$$=\frac{۶+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۲(۳+\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}+\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}+۱$$

۲- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $A(۸,۵)$ در هیچ‌کدام از خطوط $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ صدق نمی‌کنند. به علاوه، این دو خط بر هم عمود هستند، پس شکل این‌طوری می‌شود:



برای به دست آوردن طول و عرض مستطیل باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(۸,۵)$ را از دو ضلع آن به دست آوریم:

$$AB=\frac{|۲(۸)-۵-۷|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$AD=\frac{|۲(۵)+۸-۶|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$S=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=\frac{۹۶}{۱۰}=۹/۶$$

۳- گزینهٔ ۴ وقتی سه نقطه بر یک راستا قرار می‌گیرند که روی یک خط واقع شده باشند؛ یعنی شیب را با استفاده از هر دو نقطه به دست آوریم باید حاصل یک عدد باشد.

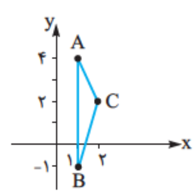
$$A(۰,۰)\,,\,B(a,۳)\,,\,C(۶,۴a+۱)$$

$$m_{AB}=m_{AC} \Rightarrow \frac{۳-۰}{a-۰}=\frac{۴a+۱-۰}{۶-۰} \Rightarrow \frac{۳}{a}=\frac{۴a+۱}{۶}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} (۴a+۱)a=۳(۶) \Rightarrow ۴a^۲+a-۱۸=۰$$

$$a=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۴)(-۱۸)}}{۲(۴)}=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۸۹}}{۸}=\frac{-۱\pm۱۷}{۸}=\begin{cases}\frac{-۱+۱۷}{۸}=۲\\ \frac{-۱-۱۷}{۸}=-\frac{۹}{۴}\end{cases}$$

۴- گزینهٔ ۱ شکل رسم می‌کنیم:



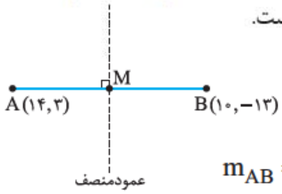
طول قاعدهٔ AB برابر ۵ (از ۱− تا ۴) و طول ارتفاع CH برابر ۱ (فاصلهٔ AB از C) است، پس مساحت مثلث $\frac{۵}{۲}=\frac{۵\times۱}{۲}$ است.

اگر می‌خواهید از فرمول استفاده کنید هم که داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}|۱(-۱-۲)+۱(۲-۴)+۲(۴-(-۱))|$$

$$=\frac{۱}{۲}|-۳-۲+۱۰|=\frac{۱}{۲}|۵|=\frac{۵}{۲}$$

۵- گزینهٔ ۴ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که از نقطهٔ وسط AB یعنی $M(\frac{۱۰+۱۴}{۲},\frac{-۱۳+۳}{۲})=(۱۲,-۵)$ می‌گذرد و بر پاره‌خط AB عمود است.



$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۳-(-۱۳)}{۱۴-۱۰}=\frac{۱۶}{۴}=۴$$

پس شیب خط عمودمنصف برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

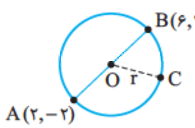
حالا معادلهٔ عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y-(-۵)=-\frac{۱}{۴}(x-۱۲)$$

$$\xrightarrow{x=۰\ \text{عرض‌ازمبدأ}} y+۵=-\frac{۱}{۴}(۰-۱۲)$$

$$\Rightarrow y+۵=۳ \Rightarrow y=-۲$$

۶- گزینهٔ ۱ شکل را ببینید. وقتی نقاط A و B دو انتهای قطری از دایره هستند، یعنی نقطهٔ وسط A و B همان مرکز دایره می‌شود.



$$O=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۶+۲}{۲},\frac{۴-۲}{۲})=(۴,۱)$$

فاصلهٔ نقاط A و B هم، ۲ برابر شعاع دایره است:

$$۲r=AB=\sqrt{(۶-۲)^۲+(۴-(-۲))^۲}=\sqrt{۱۶+۳۶}$$

$$=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow r=\sqrt{۱۳}$$

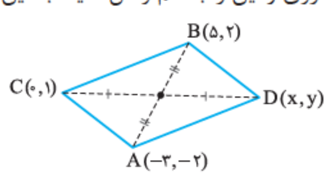
حالا می‌خواهیم بدانیم کدام نقطه روی دایره قرار دارد. اگر نقطه‌ای مثل نقطهٔ C روی دایره باشد، باید فاصلهٔ آن نقطه از مرکز دایره برابر طول شعاع یعنی $\sqrt{۱۳}$ باشد. گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم. حواستان باشد مرکز دایره $O(۴,۱)$ است:

گزینهٔ (۱): $OC=\sqrt{(۷-۴)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$

$\Rightarrow$ روی دایره است.

چون تست حل می‌کنیم نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست. ما خودمان بررسی کرده‌ایم بقیهٔ گزینه‌ها $\sqrt{۱۳}$ نمی‌دهد.

۷- گزینهٔ ۳ اگر نقاط روی زمین را به هم وصل کنید، به این شکل می‌رسیم:



قطرهای چهارضلعی ایجادشده همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی این

چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است:

$$A+B=C+D \Rightarrow \begin{cases} -۳+۵=۰+x \Rightarrow x=۲ \\ -۲+۲=۱+y \Rightarrow y=-۱ \end{cases}$$

۸- گزینهٔ ۳ نکته قرینهٔ نقطهٔ (a,b) نسبت به خط $y=x$ برابر (b,a) است.

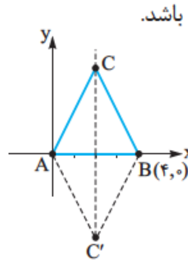
نکتهٔ بالا را در خاطرتان نگه دارید. به دردتان می‌خورد.

گزینهٔ (۱): صحیح است. شیب خطی که از نقاط (a,b) و (b,a) می‌گذرد برابر $\frac{b-a}{a-b}=-۱$ است. پس این خط بر $y=x$ عمود است.

گزینهٔ (۲): اثبات گزینهٔ دوم را در تمارین کتاب آورده‌ایم.

گزینهٔ (۳): نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل نقاط (a,b) و (b,a) برابر $M=(\frac{a+b}{۲},\frac{a+b}{۲})$ می‌شود. این نقطه لزوماً در معادلهٔ $y=-x$ صدق نمی‌کند. پس گزینهٔ سوم نمی‌تواند صحیح باشد.

۹- گزینهٔ ۳ رأس سوم روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. معادلهٔ عمودمنصف هم که $x=۲$ است، پس طول C برابر ۲ می‌شود.



مختصات C را به صورت $C(۲,y)$ در نظر می‌گیریم. چون فاصلهٔ A و B برابر ۴ است، فاصلهٔ A از C هم باید ۴ باشد:

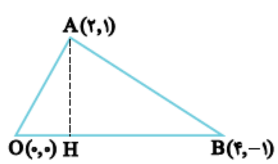
$$AC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{۴+y^۲}=۴$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴+y^۲=۱۶ \Rightarrow y^۲=۱۲ \Rightarrow y=\pm ۲\sqrt{۳}$$

مختصات رأس سوم می‌تواند $C(۲,۲\sqrt{۳})$، $C'(۲,-۲\sqrt{۳})$ باشد.

راه‌حل دیگر هم این بود که از بین گزینه‌ها چک می‌کردید کدام یکی فاصله‌اش از A و B برابر ۴ است.

۱۰- گزینهٔ ۴ برای به دست آوردن نقطهٔ H باید معادلهٔ OB و AH را به دست آوریم و آن‌ها را برابر بگذاریم. اول برویم سراغ معادلهٔ OB:



$$M_{OB}=\frac{-۱-۰}{۴-۰}=-\frac{۱}{۴}$$

$$\text{معادلهٔ OB}: y-۰=-\frac{۱}{۴}(x-۰) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x$$

اگر شیب OB، $-\frac{۱}{۴}$ باشد، شیب AH برابر ۴ است؛ زیرا این دو بر هم عمود هستند.

$$\text{معادلهٔ AH}: y-۱=۴(x-۲) \Rightarrow y=۴x-۷$$

$$\text{نقطهٔ H}: \begin{cases} y=۴x-۷ \\ y=-\frac{۱}{۴}x \end{cases} \Rightarrow ۴x-۷=-\frac{۱}{۴}x$$

$$\Rightarrow ۴x+\frac{۱}{۴}x=۷ \Rightarrow \frac{۱۷}{۴}x=۷ \Rightarrow x=\frac{۲۸}{۱۷}$$

چون $y=-\frac{۱}{۴}x$ است؛ پس $y=\frac{-\frac{۲۸}{۱۷}}{۴}=-\frac{۷}{۱۷}$ می‌شود. مختصات نقطهٔ H به صورت $H(\frac{۲۸}{۱۷},-\frac{۷}{۱۷})$ خواهد بود.

۱۱- گزینهٔ ۳ وقتی مرکز دایره، روی نیمساز ربع اول است؛ یعنی بر روی خط $y=x$ قرار دارد و می‌توانیم مرکز دایره را به صورت (a,a) در نظر بگیریم. به علاوه این دایره از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ هم می‌گذرد.

می‌دانیم $OA=OB=r$ است:

$$OA=OB \Rightarrow \sqrt{(a-۳)^۲+a^۲}=\sqrt{(a-۱)^۲+a^۲}$$

$$\Rightarrow (a-۳)^۲+a^۲=(a-۱)^۲+a^۲ \Rightarrow (a-۳)^۲=(a-۱)^۲$$

$$a^۲-۶a+۹=a^۲-۲a+۱ \Rightarrow ۴a=۸ \Rightarrow a=۲$$

پس مختصات مرکز $O(۲,۲)$ است. شعاع دایره را می‌خواهیم:

$$OA=\sqrt{(۲-۳)^۲+۲^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

۱۲- گزینهٔ ۲ قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۵)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ $C'(-۱,-۵)$ می‌باشد.

نقطهٔ A بین B و C' قرار دارد. یعنی:

$$A=\frac{B+C'}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۳=\frac{x_B-۱}{۲} \Rightarrow x_B=۷ \\ -۲=\frac{y_B-۵}{۲} \Rightarrow y_B=۱ \end{cases}$$

$$y_B-x_B=-۶$$

۱۳- گزینهٔ ۱ مرکز دایره بین نقاط A و B قرار دارد. مختصات آن $O_۱=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۱-۴}{۲},\frac{۵+۷}{۲})$ است.

معادلهٔ خطی را می‌خواهیم که از مبدأ مختصات و نقطهٔ $O_۱(-\frac{۳}{۲},۶)$ می‌گذرد.

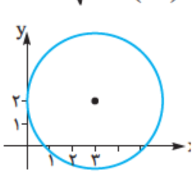
$$O(۰,۰)\,,\,O_۱(-\frac{۳}{۲},۶)$$

$$m=\frac{۶-۰}{-\frac{۳}{۲}-۰}=\frac{۶}{-\frac{۳}{۲}}=-۴ \Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: y=-۴x$$

۱۴- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است:

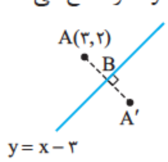
$$r=\frac{|۴(۳)-۳(۲)+۹|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

حالا شکل می‌کشیم:



دایره در ۲ نقطه محور xها و در یک نقطه محور yها را قطع می‌کند.

۱۵- گزینهٔ ۲



معادلهٔ خطی که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر خط $y=x-۳$ عمود است را می‌نویسیم:

$$y-۲=-۱(x-۳) \Rightarrow y-۲=-x+۳ \Rightarrow y=-x+۵$$

برای به دست آوردن نقطهٔ B باید معادلهٔ دو خط را برابر بگذاریم:

$$x-۳=-x+۵ \to ۲x=۸ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow B(۴,۱)$$

نقطهٔ B وسط A و A' قرار دارد یعنی $B=\dfrac{A+A'}{۲}$ پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۴=\dfrac{۳+x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'}=۵ \\ ۱=\dfrac{۲+y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'}=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow A'(۵,۰)$$

۱۶- گزینهٔ ۲ هر دو از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرند.

$$\begin{cases} -b+(a-b)(۲)-۸=۰ \Rightarrow ۲a-۳b-۸=۰ \\ ۳a(۱)+b(۲)-c=۰ \Rightarrow ۳a+۲b-c=۰ \end{cases}$$

به علاوه سؤال گفته دو خط بر هم عمودند. شیب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$-bx+(a-b)y-۸=۰ \Rightarrow (a-b)y=bx+۸$$

$$\Rightarrow y=\frac{b}{(a-b)}x+\frac{۸}{(a-b)} \Rightarrow m_۱=\frac{b}{a-b}$$

و

$$۳ax+by-c=۰ \Rightarrow by=-۳ax+c$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۳a}{b}x+\frac{c}{b} \Rightarrow m_۲=-\frac{۳a}{b}$$

$$m_۱m_۲=-۱ \Rightarrow \frac{b}{a-b}\times-\frac{۳a}{b}=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{-۳a}{a-b}=-۱ \Rightarrow ۳a=a-b \Rightarrow ۲a=-b$$

در رابطه‌های اول به جای $۲a$، مقدار $-b$ را قرار می‌دهیم.

$$۲a-۳b-۸=۰ \xrightarrow{۲a=-b} -۴b-۸=۰$$

$$\Rightarrow b=-۲\,,\, a=۱$$

$$۳a+۲b-c=۰ \Rightarrow ۳(۱)+۲(-۲)-c=۰$$

$$\Rightarrow ۳-۴-c=۰ \Rightarrow c=-۱$$

۱۷- گزینهٔ ۱ اگر x سن برادر بزرگ‌تر باشد، سن برادر کوچک‌تر $x-۴$ است و چهار سال دیگر سن آن‌ها $x+۴$ و x می‌شود:

$$x(x+۴)=۶۰ \Rightarrow x^۲+۴x-۶۰=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۰)(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱۰ & \text{غ ق ق} \\ x=۶ \end{cases}$$

پس الان سن برادر بزرگ‌تر برابر ۶ و سن برادر کوچک‌تر ۲ است. مجموع سن آن‌ها $۸=۲+۶$ می‌شود.

۱۸- گزینهٔ ۴ اگر عدد کوچک‌تر x باشد، عدد بزرگ‌تر $x+۱$ است:

$$x^۲+(x+۱)^۲=۲۶۵ \Rightarrow x^۲+x^۲+۲x+۱=۲۶۵$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x-۲۶۴=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+x-۱۳۲=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(-۱۳۲)}}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۵۲۹}}{۲}$$

$$=\frac{-۱\pm ۲۳}{۲}=\begin{cases} \dfrac{۲۲}{۲}=۱۱ \\ -\dfrac{۲۴}{۲}=-۱۲ \end{cases}$$

عدد کوچک‌تر برابر -۱۲ یا ۱۱ است.

۱۹- گزینهٔ ۱ باید $\Delta<۰$ باشد:

$$\Delta<۰ \Rightarrow (m+۱)^۲-۴(۲)(\tfrac{۱}{۲}m+۲)$$

$$=m^۲+۲m+۱-۴m-۱۶=m^۲-۲m-۱۵<۰$$

$$\Rightarrow (m-۵)(m+۳)<۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} m & & -۳ & & ۵ & \\ \hline m^۲-۲m-۱۵ & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}$$

$$\Rightarrow -۳<m<۵$$

۲۰- گزینهٔ ۴ $x=-۲$ یکی از ریشه‌های معادله است. از آن‌جا این ریشه را حدس زدیم که $۴-۲b+c=۰$ است. ببینید:

$$x^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{x=-۲} ۴-۲b+c=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{۱}=c$ می‌باشد. اگر ریشهٔ دیگر را β بگیریم، داریم:

$$\beta(-۲)=c \Rightarrow \beta=-\frac{c}{۲}$$

۲۱- گزینهٔ ۲ $mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰$

اگر ریشه‌های معادله معکوس یکدیگر باشند، باید حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱ باشد. به علاوه حواستان باشد شرط $\Delta>۰$ هم باید برقرار باشد. یعنی در ابتدا باید معادله ۲تا ریشه داشته باشد، بعد معکوس‌بودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{c}{a}=۱ \Rightarrow \frac{m^۲-۲}{m}=۱ \Rightarrow m^۲-۲=m$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۱ \end{cases}$$

اگر $m=۲ \Rightarrow ۲x^۲+۳x+۴-۲=۲x^۲+۳x+۲=۰$

$\Rightarrow \Delta=۹-۴(۲)(۲)<۰ \Rightarrow$ ریشه ندارد.

اگر $m=-۱ \Rightarrow -x^۲+۳x+۱-۲=۰$

$\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow \Delta>۰$. فقط $m=-۱$ قابل‌قبول است.

۲۲- گزینهٔ ۳ مجموع ضرایب صفر است. پس $x=۱$ حتماً یکی از ریشه‌ها است و اگر عبارت $x^۳-۵x^۲+x+۳=۰$ را تجزیه کنیم، در آن عامل $x-۱$ وجود دارد.

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۵x^۲+x+۳ & x-۱ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۳+x^۲} & x^۲-۴x-۳ \\ -۴x^۲+x+۳ & \\ \underline{۴x^۲-۴x} & \\ -۳x+۳ & \\ \underline{۳x-۳} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$(x-۱)(x^۲-۴x-۳)=۰$$