به نام پروردگار مهربان

حسابان ۱ یازدهم

آموزش، تمرین، دوره

میثم خرمی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

فهرست

جبر و معادله

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی — **درس اول**

- دنبالهٔ حسابی
- مجموع جملات دنباله‌های حسابی
- روشی دیگر برای محاسبه S_n
- چند مجموع مهم از دنباله‌های حسابی
- دنبالهٔ هندسی
- مجموع جملات دنباله هندسی

معادلات درجه دوم — **درس دوم**

- معادلات درجه دوم
- روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم
- تشکیل معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن
- سهمی و رابطهٔ آن با معادله درجه دو
- صفرهای تابع
- تبدیل برخی معادلات به معادله درجه دو

معادلات گویا و گنگ — **درس سوم**

- معادلات گویا
- معادلات گنگ

قدرمطلق و ویژگی‌های آن — **درس چهارم**

- قدرمطلق
- ویژگی‌های قدرمطلق
- نمودارهای قدرمطلقی
- معادلات قدرمطلقی
- نامساوی‌های مهم قدرمطلقی

آشنایی با هندسه تحلیلی — **درس پنجم**

- آشنایی با هندسه تحلیلی

چون n عددی طبیعی است، پس فقط $n > ۱۷$ را قبول می‌کنیم. از طرفی اولین عدد طبیعی n که از ۱۷ بزرگ‌تر باشد عدد ۱۸ است، بنابراین $n \geq ۱۸$ قابل قبول است.

وعدهٔ ۳
روشی دیگر برای محاسبه S_n

در دنباله حسابی، فرض کنید $a_۱$ جمله اول، a_n جمله آخر و n تعداد جملات باشد. در این صورت:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

مثال ۸ مجموع مضارب طبیعی و کمتر از ۱۰۱ عدد ۵ را بیابید.

پاسخ مضارب خواسته شده به شکل زیر هستند:

$$۵, ۱۰, ۱۵, \ldots, ۱۰۰ \quad (n = ۲۰)$$

پس می‌توان گفت:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{اطلاعات}} S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۵ + ۱۰۰) = ۱۰۵۰$$

چاشنی: در هر دنباله حسابی، اگر a_n جمله عمومی و S_n مجموع n جمله اول دنباله باشند، آن‌گاه:

۱ $S_۱ = a_۱$

۲ $S_n - S_{n-۱} = a_n \ (n > ۱)$

به عنوان مثال: $S_۳ - S_۲ = a_۳$

زیرا:

$$-\begin{cases} S_۳ = \cancel{a_۱} + \cancel{a_۲} + a_۳ \\ S_۲ = \cancel{a_۱} + \cancel{a_۲} \end{cases} \Rightarrow S_۳ - S_۲ = a_۳$$

مثال ۹ در یک دنباله حسابی $S_n = ۴n^۲ + ۳n$ است. $S_{۱۰}$ و جمله عمومی را به دست آورید.

پاسخ برای محاسبه $S_{۱۰}$ کافیست در S_n به جای n، عدد ۱۰ را قرار دهیم:

$$S_{۱۰} = ۴(۱۰)^۲ + ۳(۱۰) = ۴۳۰$$

حال از چاشنی گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_۱ = a_۱ \Rightarrow ۴(۱)^۲ + ۳(۱) = a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۷ \\ S_۲ = ۴(۲)^۲ + ۳(۲) = ۲۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_۲ - S_۱ = a_۲ \Rightarrow ۲۲ - ۷ = ۱۵ \Rightarrow a_۲ = ۱۵ \\ d = a_۲ - a_۱ \Rightarrow d = ۱۵ - ۷ = ۸ \end{cases}$$

جمله عمومی: $a_n = a_۱ + (n-۱)d$

$$\xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{اطلاعات}} a_n = ۷ + (n-۱)(۸)$$

$$\Rightarrow a_n = ۸n - ۱$$

وعدهٔ ۴
چند مجموع مهم از دنباله‌های حسابی

۱ مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

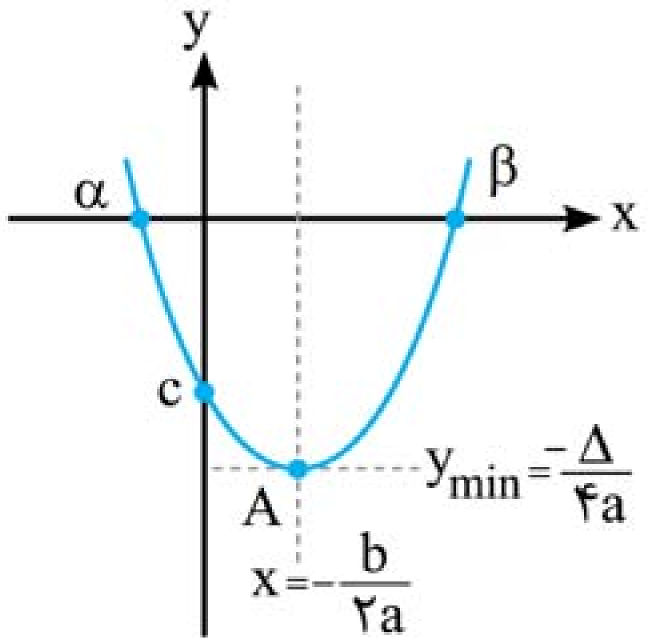
۲ مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲:

$$۲ + ۴ + \cdots + ۲n = n(n+۱)$$

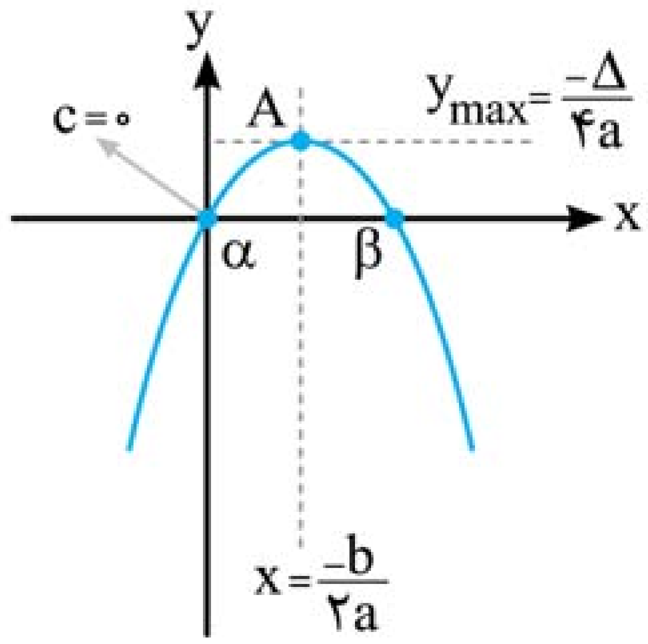
۳ مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱) = n^۲$$

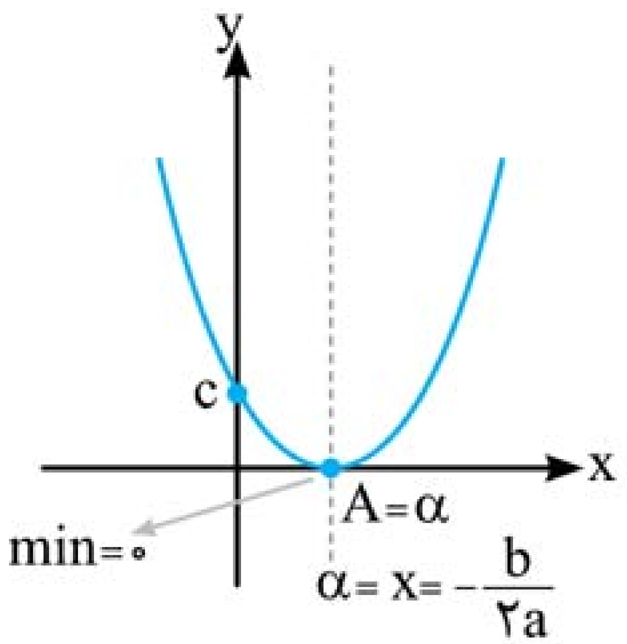
۱ $\Delta > ۰ , a > ۰ , b < ۰ , c < ۰$



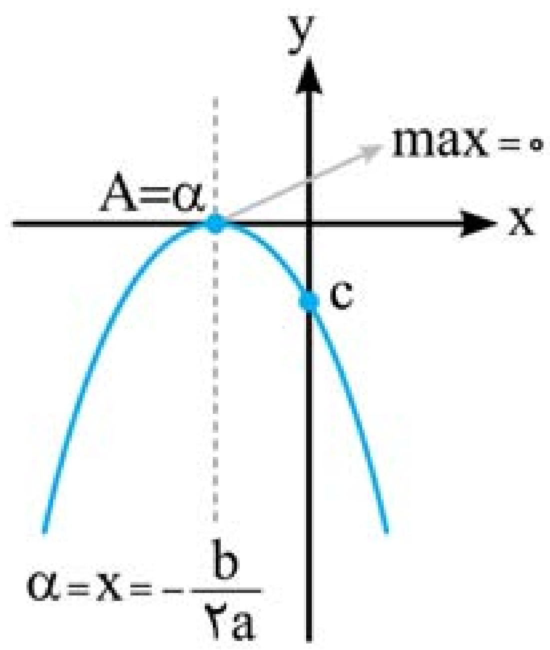
۲ $\Delta > ۰ , a < ۰ , b > ۰ , c = ۰$



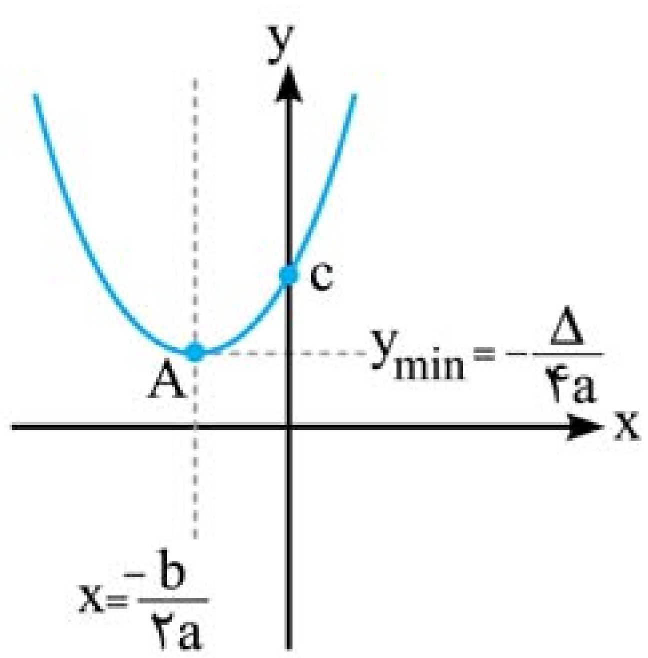
۳ $\Delta = ۰ , a > ۰ , b < ۰ , c > ۰$



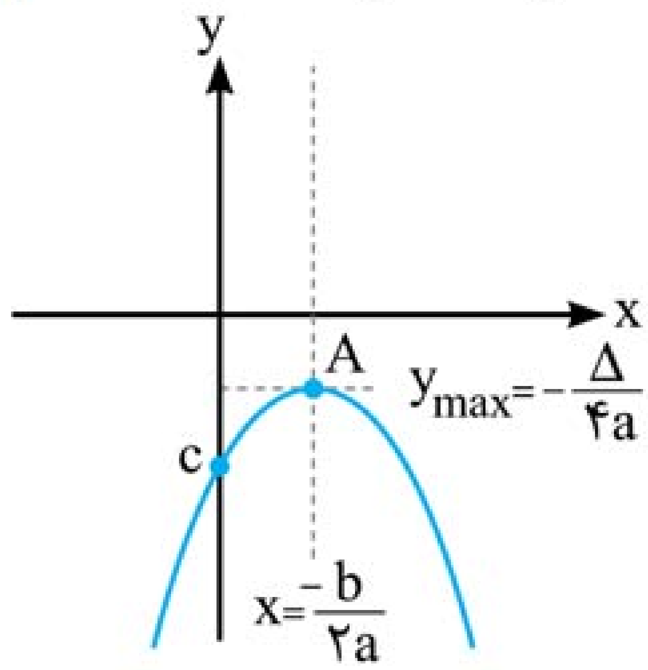
۴ $\Delta = ۰ , a < ۰ , b < ۰ , c < ۰$



۵ $\Delta < ۰ , a > ۰ , b > ۰ , c > ۰$

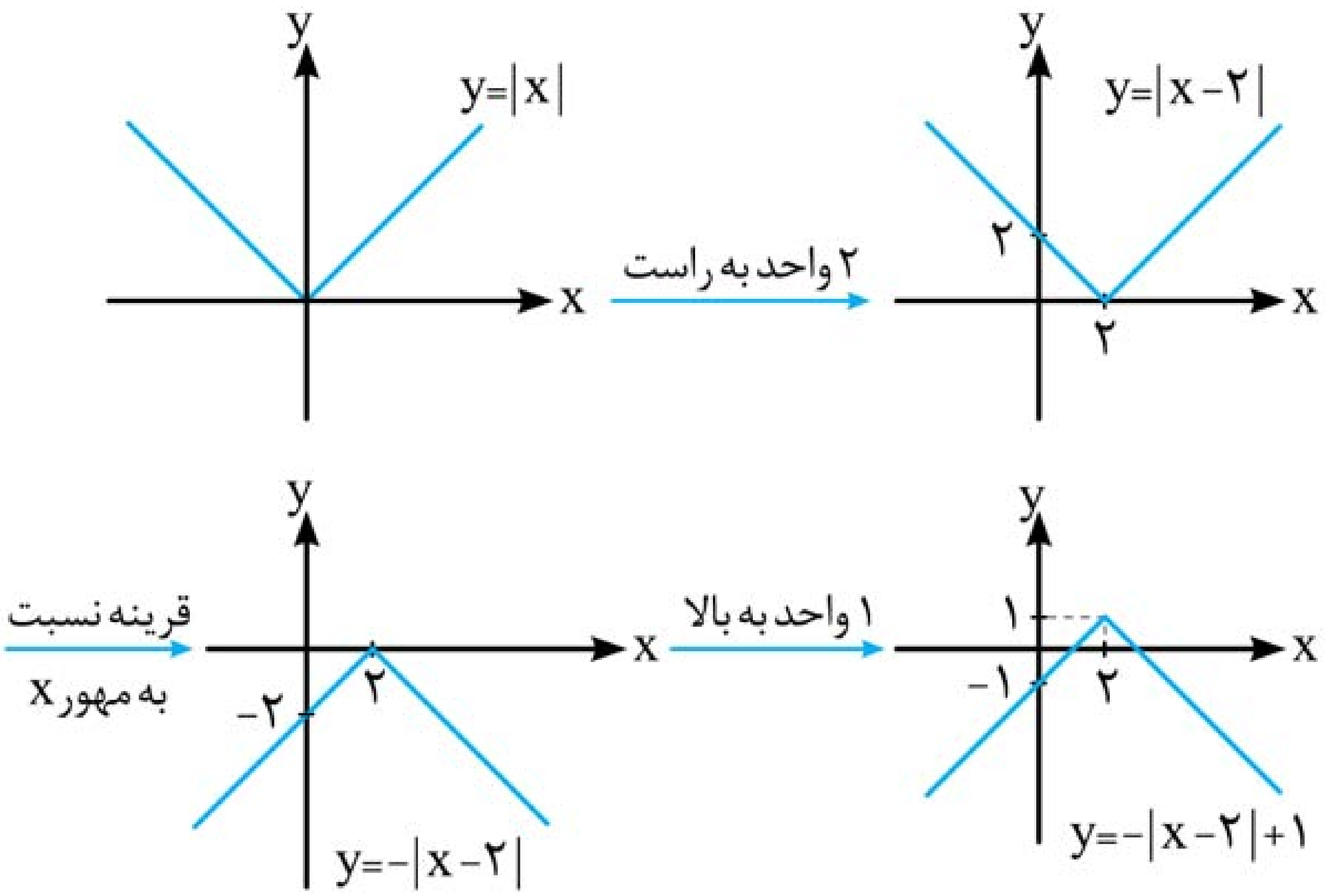


۶ $\Delta < ۰ , a < ۰ , b > ۰ , c < ۰$



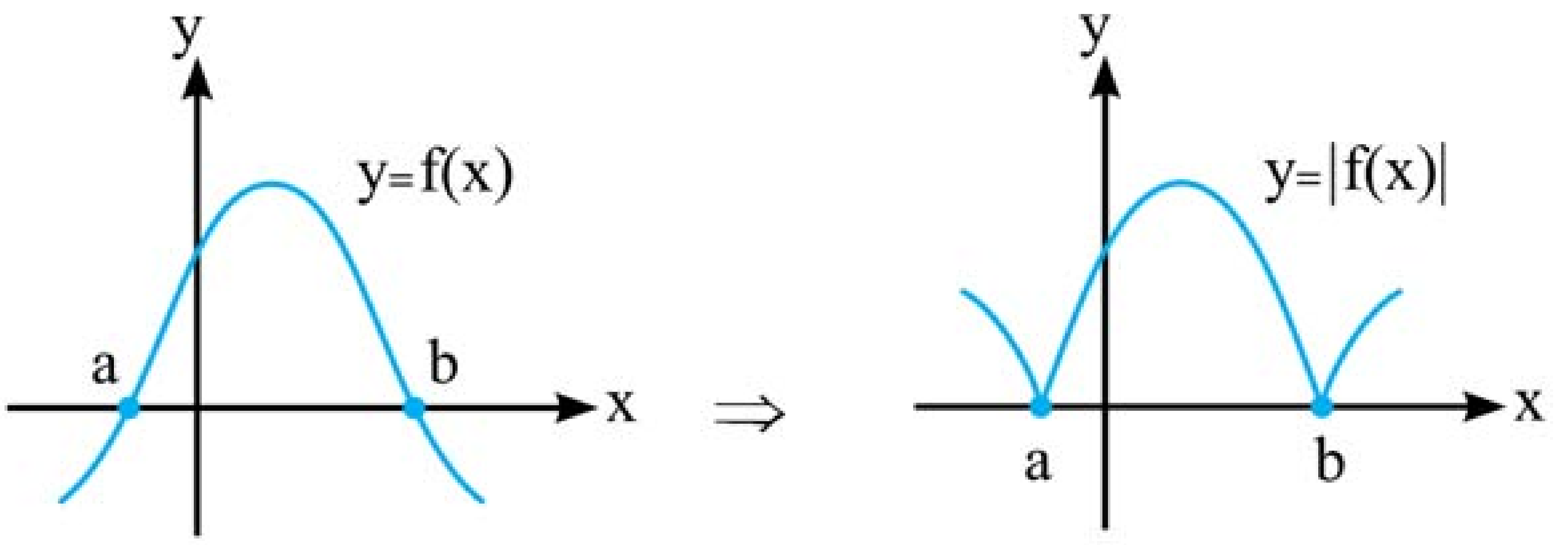
مثال ۶۲ نمودار $y=-|x-۲|+۱$ را رسم کنید.

پاسخ



۴ نمودار $y=|f(x)|$

برای رسم این‌گونه نمودارها، ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کرده، سپس قســمت‌هایی از نمودار که زیرمحور x ها (یعنی $y<۰$) قرار دارند را آینه‌وار به بالای محور x ها، منتقل می‌کنیم.



تابع

درس اول: آشنایی بیشتر با تابع

- تابع
- تشخیص تابع بودن در حالت زوج مرتبی و از روی نمودار
- تابع به عنوان یک ماشین
- تساوی دو تابع

درس دوم: انواع تابع

- توابع گویا
- توابع رادیکالی (تابع ریشهٔ دوم)
- توابع پله‌ای
- جزء صحیح یک عدد حقیقی
- توابع جزء صحیح
- معادلات و توابع

درس سوم: وارون تابع

- توابع یک‌به‌یک
- وارون توابع
- محاسبهٔ وارون توابع

درس چهارم: اعمال روی توابع

- اعمال روی توابع
- ترکیب توابع

با داشتن مجموعهٔ زوج مرتب‌های تابع f، دامنه و برد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

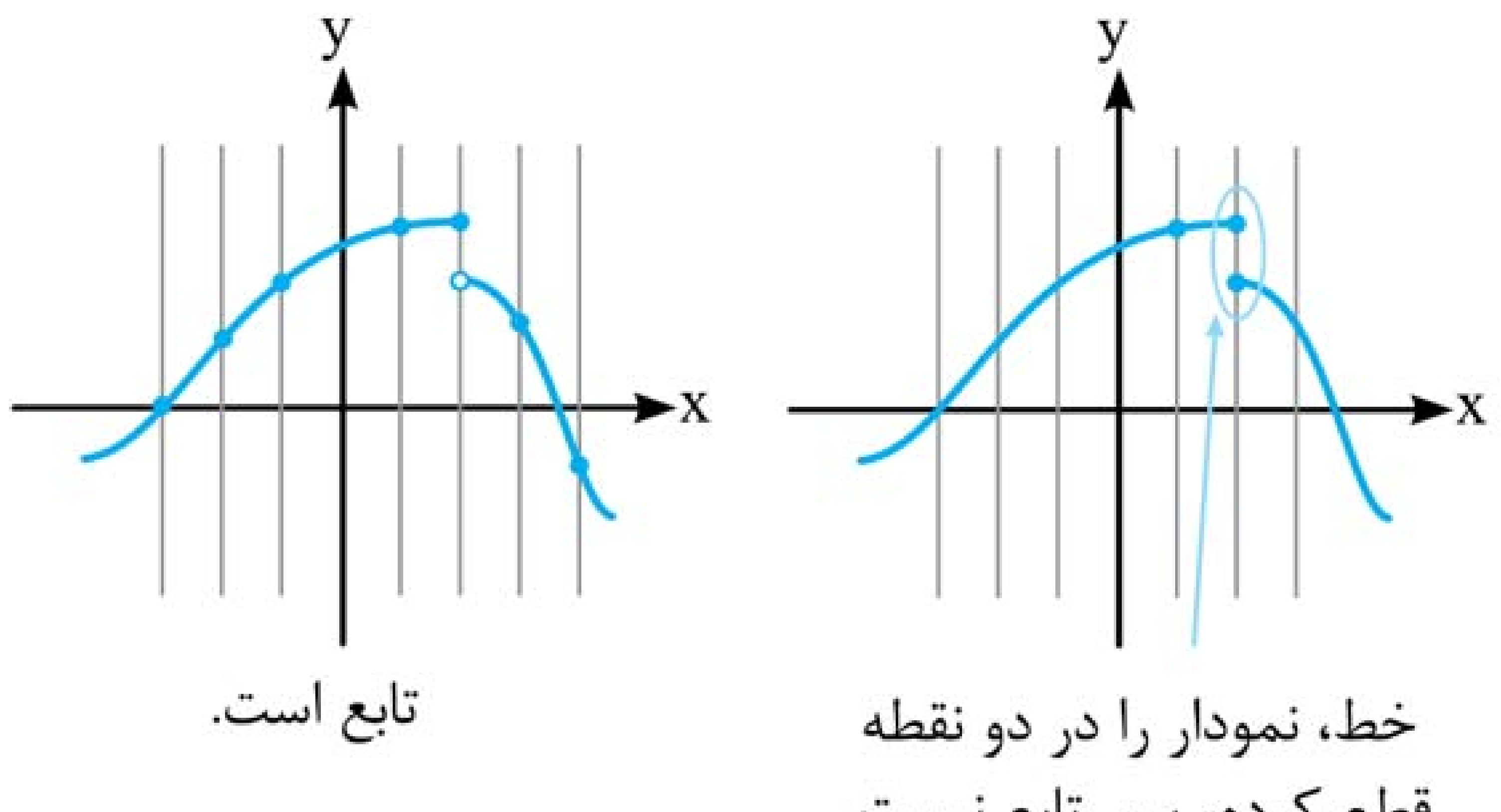
دامنهٔ تابع f : $D_f = \{$مؤلفهٔ اول زوج مرتب‌ها$\} = \{x_1, x_2, ...\}$

برد تابع f : $R_f = \{$مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌ها$\} = \{y_1, y_2, ...\}$

به عنوان مثال، مجموعهٔ $f = \{(1,1), (2,3), (3, \frac{1}{4})\}$ تابع است و دامنه و برد آن به صورت زیر می‌باشند:

$$D_f = \{1, 2, 3\} \quad , \quad R_f = \{1, 3, \frac{1}{4}\}$$

۲ نمودار یک منحنی نشان‌دهندهٔ یک تابع است اگر و تنها اگر «هر خط موازی **محور y ها**، نمودار را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.»



تابع است.

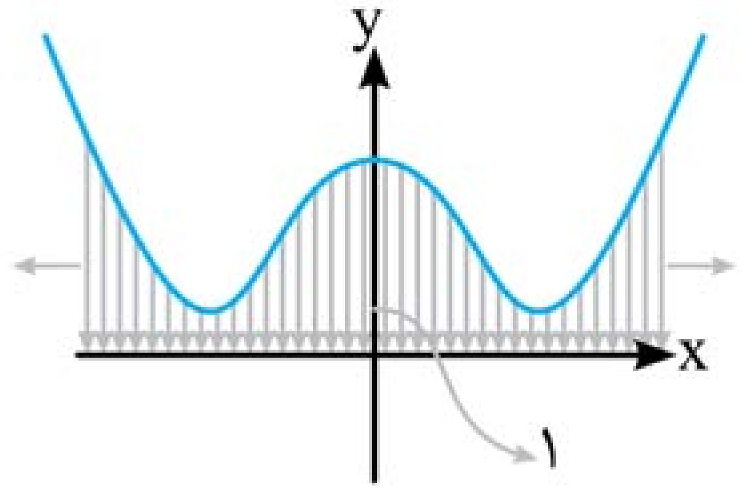
خط، نمودار را در دو نقطه قطع کرده، پس تابع نیست.

با داشتن نمودار تابع f، دامنه و برد آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

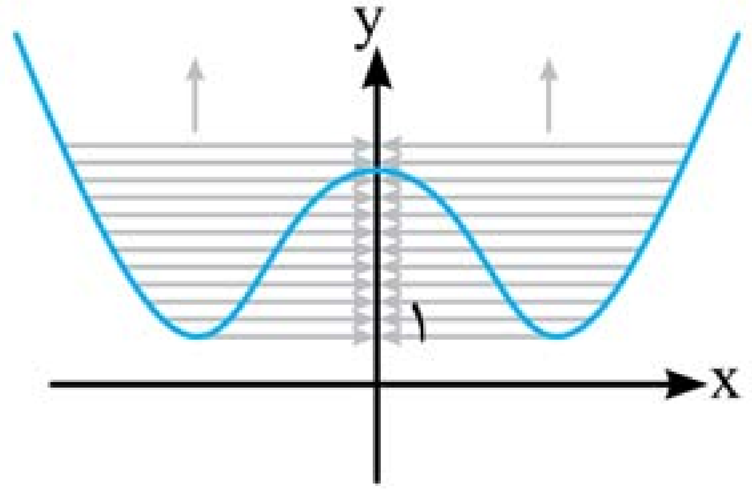
دامنهٔ تابع f: D_f = سایهٔ (تصویر) عمودی منحنی f روی محور xها

برد تابع f: R_f = سایهٔ (تصویر) افقی منحنی f روی محور yها

به عنوان مثال، در نمودار تابع زیر، سایهٔ عمودی تابع روی محور x ها، کل محور را پوشانده است، پس $D_f = \mathbb{R}$ ولی سایهٔ افقی تابع روی محور y ها، از $y=۱$ به بالا را پوشانده، پس $R_f = [۱, +\infty)$ است.



$D_f = \mathbb{R}$



$R_f = [۱, +\infty)$

چاشـنی: ۱) برای مشخص کردن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و ضابطهٔ تابع (دستور یا قاعده‌ای که رابطهٔ بین اعضای دامنه و برد را مشخص می‌سازد) معلوم باشند.

۲) اگر A دامنهٔ تابع $f(x)$ و B هم‌دامنهٔ آن باشد، برای سهولت و اختصار، تابع $f(x)$ را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$$ (نمایش تابع f به وسیلهٔ دامنه و هم‌دامنه)

به عنوان مثال، در تابع $\begin{cases} f: [۰, +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ داریم:

(اعداد حقیقی نامنفی) $D_f = [۰, +\infty) =$ دامنهٔ تابع

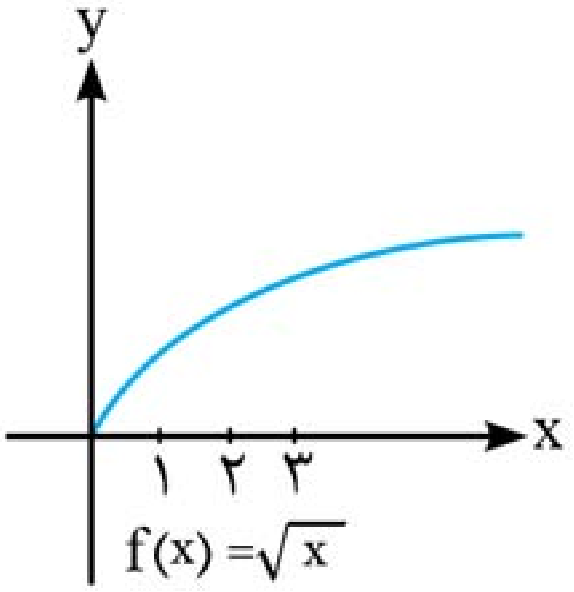
(اعداد حقیقی) $\mathbb{R} =$ هم‌دامنهٔ تابع

(از هر عضو دامنه، جذر می‌گیرد.) $\sqrt{x} =$ ضابطهٔ تابع

وعدهٔ ۶

توابع رادیکالی (تابع ریشهٔ دوم)

تابعی را که به هر عدد **نامنفی** ریشهٔ دوم **نامنفی** آن را نسبت می‌دهد، تابع ریشهٔ دوم می‌گوییم که ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است.



از تعریف تابع رادیکالی می‌توان دریافت که **دامنــه و بــرد** تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است.

- **دامنهٔ تابع** $y=\sqrt{f(x)}$

از آن‌جایی‌کــه $f(x)$ زیر رادیکال فرجــهٔ زوج قرار دارد، باید نامنفی باشد.
$\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\geq ۰\}=$ دامنهٔ تابع

مثال ۱۳ دامنهٔ توابع زیر را به دست آورده و به صورت بازه نمایش دهید.

الف) $f(x)=\sqrt{۳x-۲}$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid ۳x-۲\geq ۰\}$$

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۳x-۲\geq ۰\Rightarrow ۳x\geq ۲\xrightarrow{\div ۳}x\geq\frac{۲}{۳}\Rightarrow D_f=[\frac{۲}{۳},+\infty)$$

ب) $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۵}$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\mid x^{۲}-۵\geq ۰\}$$

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 5 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x| \geq \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$$

پ) $\mathbf{h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	
		جواب				جواب	

$$\Rightarrow D_h = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

ت) $\mathbf{k(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{x - 5}}}$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 9}{x - 5} \geq 0\}$$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 5} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		−3		3		5		$+\infty$
x^2-9		+	0	−	0	+		+	
$x-5$		−		−		−	0	+	
کل		−	0	+	0	−	تعریف نشده	+	

$$\Rightarrow D_k = [-3, 3] \cup (5, +\infty)$$

ث) $\mathbf{p(x) = \sqrt{|x| - x}}$

$$D_p = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x| - x \geq 0\}$$

$$|x| - x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq x$$

نامعادلهٔ اخیر، برای هر عدد حقیقی x برقرار است، زیرا «**قدرمطلق هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر یا مساوی آن عدد است.**»، پس: $D_p = \mathbb{R}$

«$[x]$ (جـزء صحیـح x) بزرگ‌ترین عـدد صحیحی اسـت که از x بیشتر نباشد.»

به عبارت دیگر: $n \le x < n+1 \Leftrightarrow [x]=n\ ,\ (n \in \mathbb{Z})$

با توجه به تعریف $[x]$، اگر x عددی صحیح باشـد آن‌گاه $x=[x]$.
(جزء صحیح هر عدد صحیح، خود آن عدد است.) به عنوان مثال:

$$[-۵]=-۵ \qquad [-۳/۲۵]=-۴ \qquad [۳/۲۵]=۳$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$-۵ \in \mathbb{Z} \qquad -۴ \le -۳/۲۵ < -۳ \qquad ۳ \le ۳/۲۵ < ۴$$

ویژگی‌های مقدماتی $[x]$

۱ $[x]=n \Leftrightarrow n \le x < n+۱, (n \in \mathbb{Z})$

۲ $[x] \in \mathbb{Z}$ (حاصل $[x]$ همواره مقداری صحیح است.)

۳ $[x \pm k]=[x] \pm k\ ,\ (k \in \mathbb{Z})$

۴ $[kx] \ne k[x]$

۵ $[x] \le x$ (جزء صحیح هر عدد، کوچک‌تر یا مساوی خود آن عدد است.)

۶ $x-۱<[x] \le x$ (رابطه کلی بین x, $[x]$)

مثال ۱۸ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲[x]-۳=۰$

$$۲[x]-۳=۰ \Rightarrow ۲[x]=۳ \xrightarrow{\div ۲} [x]=\frac{۳}{۲}$$

تسـاوی اخیر، غیرممکن اسـت، زیرا حاصل $[x]$ همیشـه مقداری صحیح است، پس معادله جواب ندارد.

ب) $۳[x]-۱۲=۰$

$$۳[x]-۱۲=۰ \Rightarrow ۳[x]=۱۲ \xrightarrow{\div ۳} [x]=۴$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} ۴ \le x < ۵$$

پ) $[x]^۲ - ۵[x] + ۴ = ۰$

از تغییر متغیر $[x] = t$ استفاده می‌کنیم:

$$t^۲ - ۵t + ۴ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} t = ۱ , t = \frac{c}{a} = ۴$$

$$t = [x] \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq x < ۲ \\ [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \leq x < ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب} = [۱,۲) \cup [۴,۵)$$

ت) $۲[x]^۲ - x - ۱ = ۰$

$$۲[x]^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow \overbrace{۲[x]^۲ - ۱}^{\text{عدد صحیح}} = x$$

سمت چپ تساوی اخیر، عددی صحیح است، زیرا $[x]$ عددی صحیح می‌باشد، بنابراین $۲[x]^۲ - ۱$ نیز صحیح خواهد بود. پس سمت راست یعنی x نیز عددی صحیح است، در نتیجه $[x] = x$ (می‌توان [ ] را حذف کرد)

بنابراین:

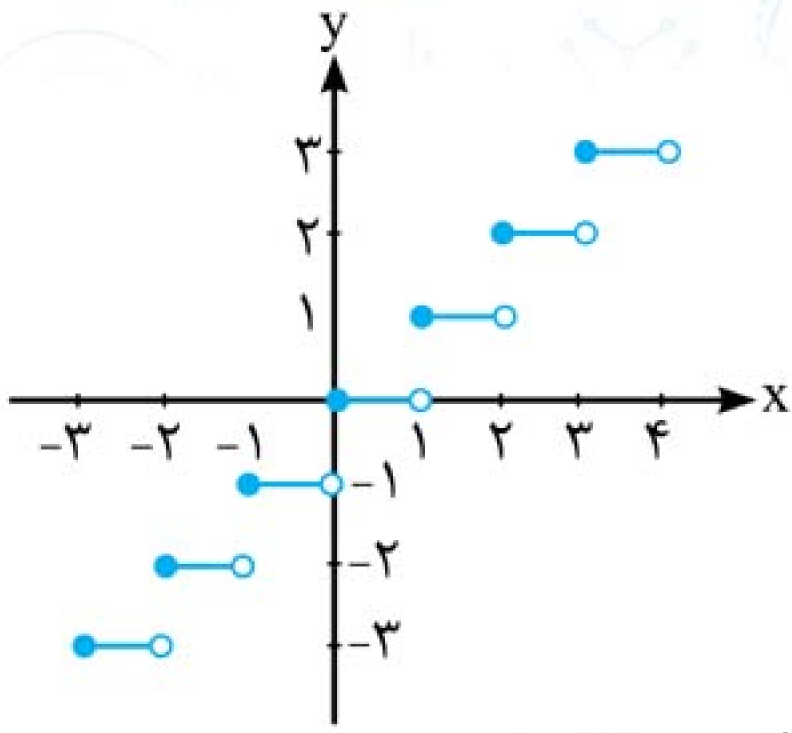
$$۲x^۲ - x - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ & \text{ق ق} \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$-\frac{۱}{۲}$ غیرقابل قبول است، زیرا x عددی صحیح است.

وعدهٔ ۹
توابع جزء صحیح

تابع $f(x) = [x]$ که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، یک گونه خاص از توابع پله‌ای است. در این تابع، دامنه مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد، مجموعهٔ اعداد صحیح است.

نمودار تابع $f(x) = [x]$ به صورت زیر است:

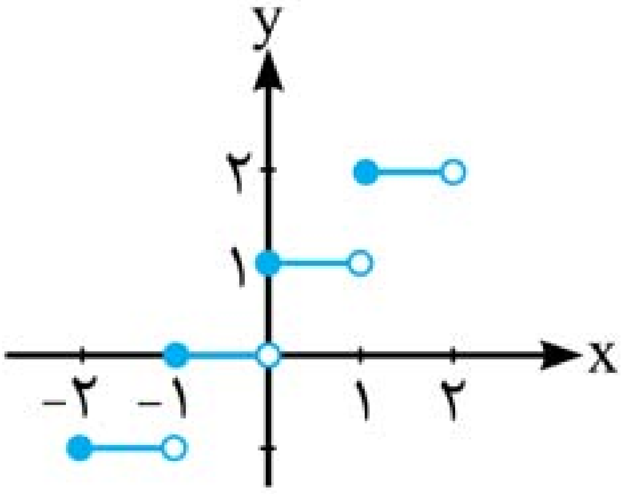


$D_f = \mathbb{R}$,

$R_f = \mathbb{Z}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح)

مثال ۱۹ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+۱ \quad , \quad [-۲,۲)$



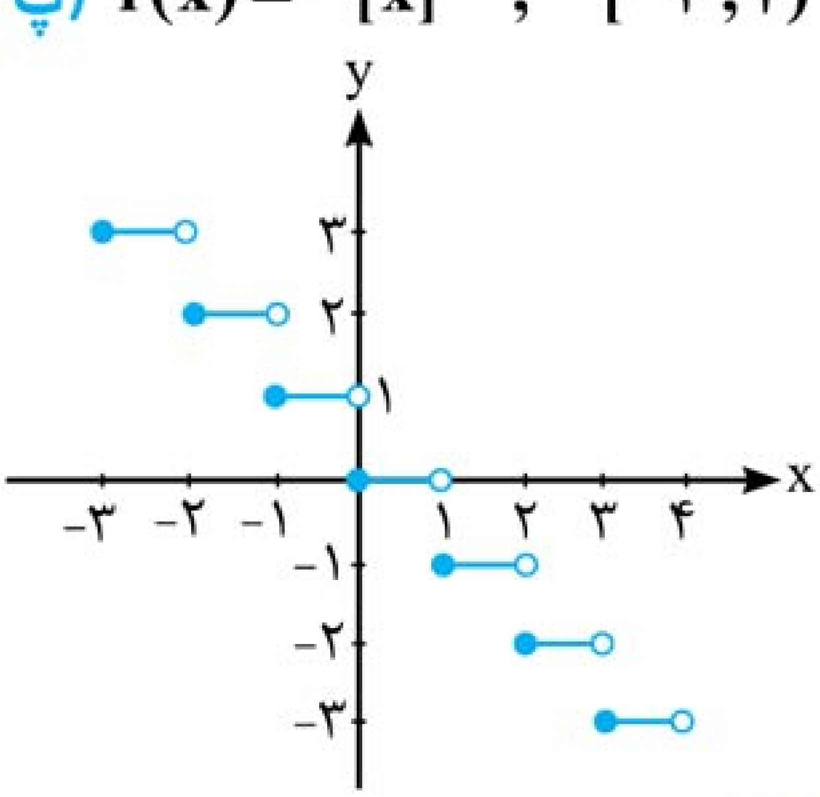
این تابع همان $y=[x]$ اســت که یک واحد به سمت بالا رفته است.

ب) $f(x)=[x+۱] \quad , \quad [-۲,۲)$

چون ۱ عددی صحیح است طبق ویژگی ۳ برای $[x]$ داریم:

$f(x)=[x+۱]=[x]+۱$ (همان نمودار «الف» است.)

پ) $f(x)=-[x] \quad , \quad [-۳,۴)$



این تابع همان $y=[x]$ است که نسبت به محور x ها قرینه شده است.

چاشنی: تکنیک رسم $f(x)=[kx]\ ,\ k>۰$

فرض کنید می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=[kx]$ را در بازهٔ I رسم کنیم. دراین صورت، بازهٔ I را به بازه‌هایی با طول $\frac{۱}{k}$ افراز می‌کنیم.

مثال ۲۰ **نمودار توابع زیر را در بازه‌های داده شده رسم کنید.**

الف) $f(x)=[۲x]\quad , \quad ۰\le x<۲$

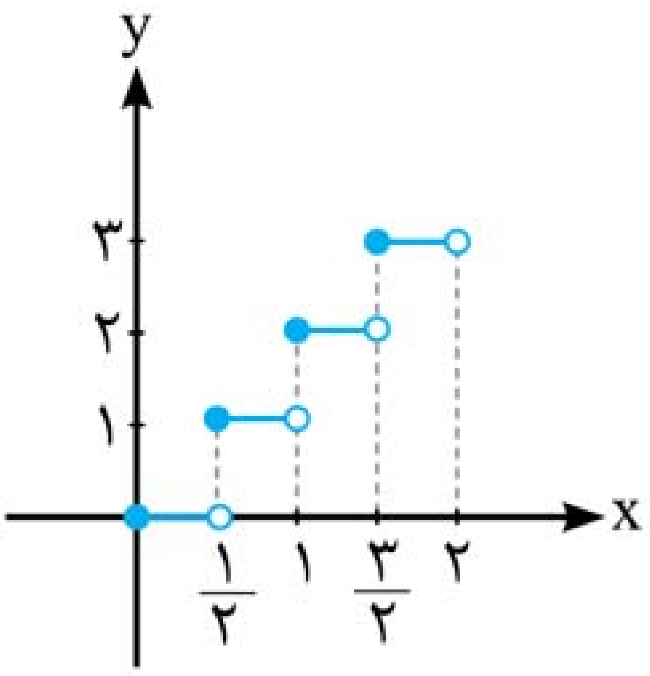
با استفاده از تکنیک گفته شده چون ضریب x برابر ۲ است $(k=۲)$، پس بازهٔ داده شده را به بازه‌هایی با طول $\frac{۱}{۲}$ افراز می‌کنیم:

$$۱)\ \overbrace{۰\le x<\frac{۱}{۲}}^{\text{بازه‌های با طول } \frac{۱}{۲}} \xrightarrow{\times ۲} ۰\le ۲x<۱ \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} [۲x]=۰ \Rightarrow y=۰$$

$$۲)\ \frac{۱}{۲}\le x<۱ \xrightarrow{\times ۲} ۱\le ۲x<۲ \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} [۲x]=۱ \Rightarrow y=۱$$

$$۳)\ ۱\le x<\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲\le ۲x<۳ \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} [۲x]=۲ \Rightarrow y=۲$$

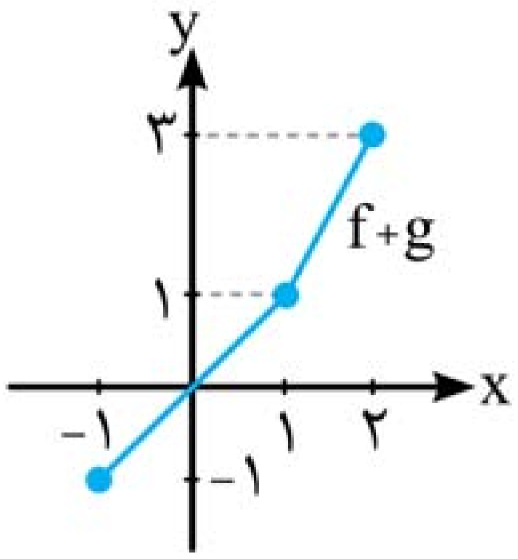
$$۴)\ \frac{۳}{۲}\le x<۲ \xrightarrow{\times ۲} ۳\le ۲x<۴ \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} [۲x]=۳ \Rightarrow y=۳$$



پس قسمتی از تابع g که در بازهٔ $[-۱,۱]$ است را یک واحد پایین می‌آوریم. از طرفی، تابع g نیز در بازهٔ $[۱,۲]$ تابع ثابت $g(x)=۲$ است، پس در بازهٔ $[۱,۲]$ خواهیم داشت:

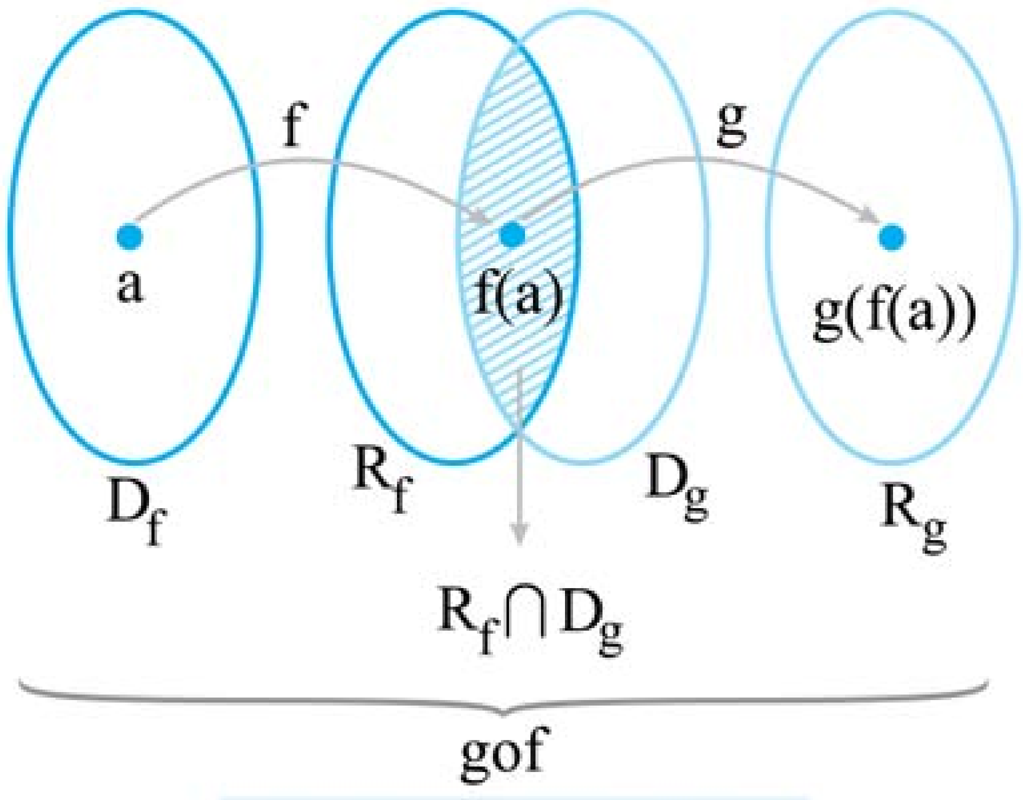
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(x)+۲$$

قسمتی از تابع f که در بازهٔ $[۱,۲]$ قرار دارد را ۲ واحد بالا می‌بریم:



وعدهٔ ۱۵
ترکیب توابع

فرض کنید f و g دو تابع باشند به طوری‌که $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ است. در این‌صورت ترکیب تابع g با تابع f را با نماد gof (جی اُ اِف) نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

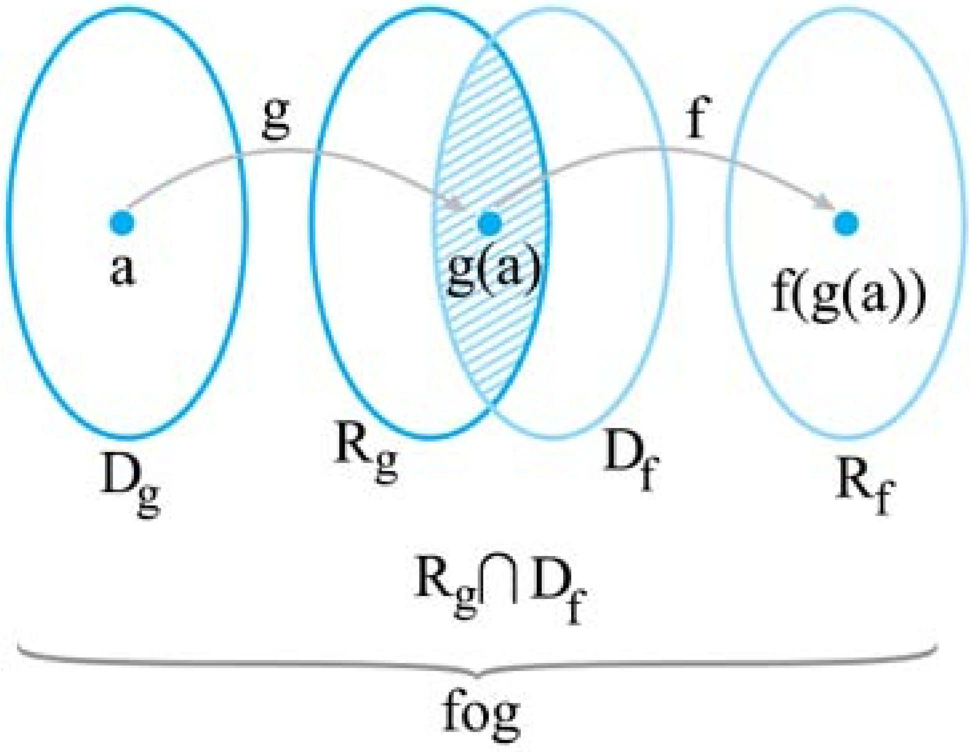


$$(gof)(x)=g(f(x))$$

دامنهٔ gof به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه، $(fog)(x)$ را نیز می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:



$$\boxed{(fog)(x) = f(g(x))}$$

دامنهٔ fog به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

چاشنی: **۱** برای محاسبهٔ ضابطهٔ fog، در تابع f هر جا x دیدیم به جای آن ضابطهٔ g را قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x) = f(\underbrace{g(x)}_{\downarrow})$$

جانشین x در f می‌شود.

۲ برای محاسبهٔ ضابطهٔ gof، در تابع g هر جا x دیدیم به جای آن ضابطهٔ f را قرار می‌دهیم:

$$(gof)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\downarrow})$$

جانشین x در g می‌شود.

توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی

درس اول

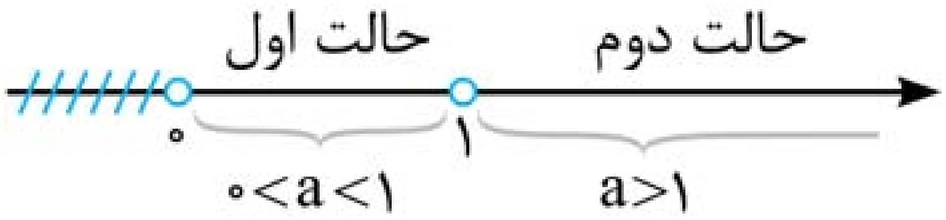
وعدهٔ ۱
تابع نمایی

هــر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن a عددی **حقیقی**، **مثبت** و **مخالف** یک است را یک **تابع نمایی** می‌نامیم.

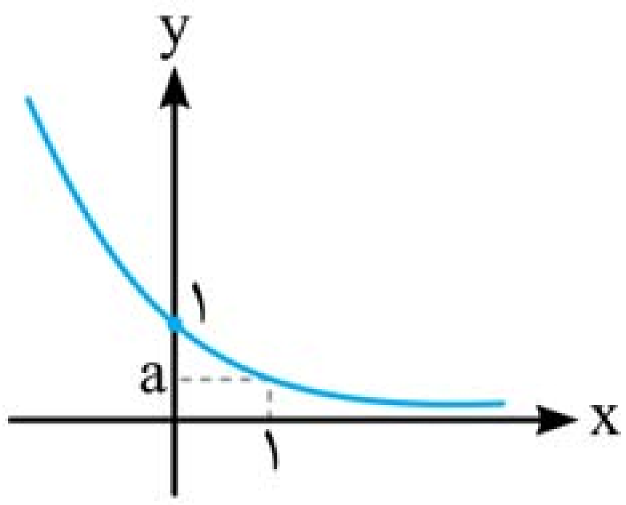
در تابع $f(x)=a^x$ ، a را **پایه** و x را **نما** یا **توان** می‌گوییم.

$y=a^x$

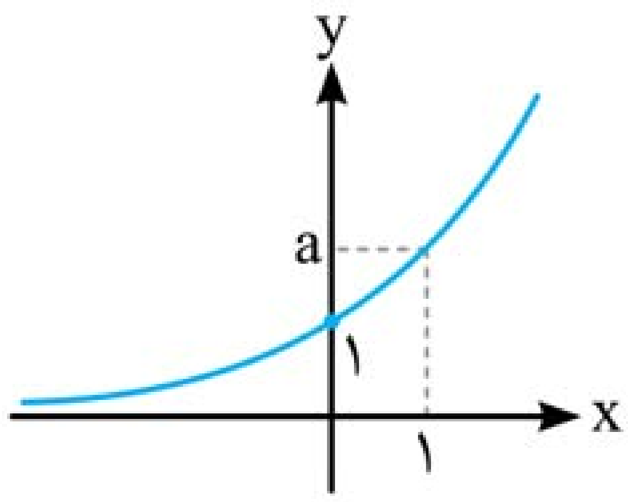
از آن‌جایی‌کــه a (پایه) مثبت و مخالف یک اســت پس برای a دو حالت وجود دارد:



با توجه به دو حالت گفته شــده، نمودار تابع $f(x)=a^x$ به یکی از دو شکل زیر است:



$f(x)=a^x \,;\, (۰<a<۱)$



$f(x)=a^x \,;\, (a>۱)$

چاشنی: با توجه به هر دو نمودار، می‌توان ویژگی‌های زیر را برای تابع $y=a^x$ در نظر گرفت:

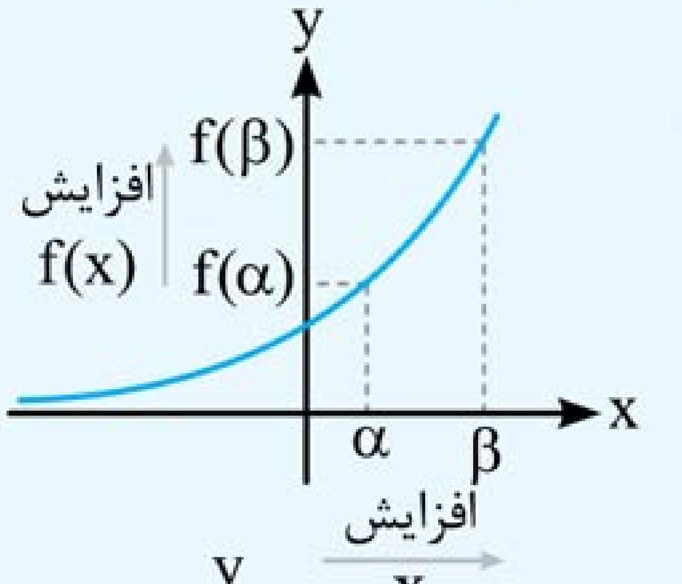
۱ در هر دو حالت، دامنه و برد تابع به صورت زیر است:

$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=(0,+\infty)$$

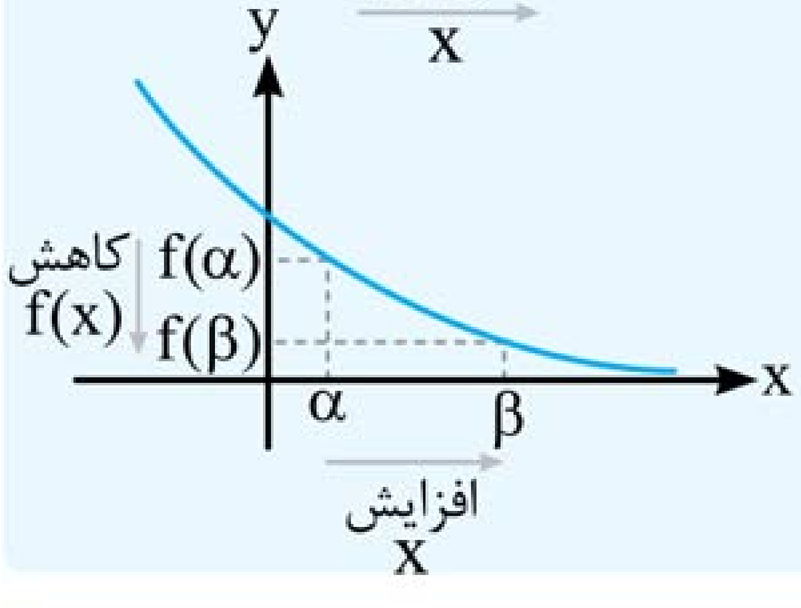
۲ در هر دو حالت، تابع $f(x)=a^x$ از نقاط $A\Big|_1^0$ و $B\Big|_a^1$ می‌گذرد.

۳ در هر دو حالت، تابع $f(x)=a^x$ تابعی **یک‌به‌یک** است.

۴ اگر $a>1$، آن‌گاه با **افزایش** مقدار x، مقدار $f(x)$ نیز **افزایش** می‌یابد. (تابع افزایشی است.)



۵ اگر $1>a>0$، آن‌گاه با **افزایش** x، مقدار $f(x)$ **کاهش** می‌یابد. (تابع کاهشی است.)



مثال ۱ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید، دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=2^x$

این تابع، نمایی است زیرا به شکل $y=a^x$ است که در آن $a=2>1$ است، پس نمودار آن، افزایشی است.

درس سوم
ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

وعدهٔ ۴
ویژگی‌های لگاریتم

اگــر a ، b و c اعداد حقیقی مثبت و m و n اعــداد حقیقی دلخواه باشند، داریم:

۱ $\log_{a}^{1}=0\,,(a\neq 1)$ لگاریتم ۱ در هر مبنایی برابر صفر است.

۲ $\log_{a}^{a}=1\,,(a\neq 1)$ لگاریتم هر عدد نامنفی در مبنای خودش، ۱ است.

۳ $\log_{c}^{ab}=\log_{c}^{a}+\log_{c}^{b}\,,(c\neq 1)$ (تبدیل ضرب به جمع)

۴ $\log_{c}^{\frac{a}{b}}=\log_{c}^{a}-\log_{c}^{b}\,,(c\neq 1)$ (تبدیل تقسیم به تفریق)

مستقیم

۵ $\log_{b}^{a^{n}}=n\log_{b}^{a}\,,(b\neq 1)$

۶ $\log_{b^{m}}^{a}=\dfrac{1}{m}\log_{b}^{a}\,,(b\neq 1)$

معکوس

۷ $\log_{b^{m}}^{a^{n}}=\dfrac{n}{m}\log_{b}^{a}\,,(b\neq 1)$

۸ $\log_{b}^{a}=\dfrac{1}{\log_{a}^{b}}\,,(a\,,b\neq 1)$

۹ $\log_{b}^{a}=\dfrac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}\,,(c\neq 1)$

(c دلخواه است و c و b مثبت و مخالف یک هستند.) (قانون تغییر مبنا)

۱۰ $a^{\log_a^b} = b\,, (a \neq ۱)$

۱۱ $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

این ویژگی، شکل کلی‌تر از ویژگی ۱۰ است. $(a, b, c \neq ۱)$

۱۲ $\log^a = \log_{۱۰}^a$

(اگر مبنا ذکر نشود، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم و به $\log^a$، لگاریتم اعشاری a می‌گوییم.)

۱۳ $\log^۵ = ۱ - \log^۲$

در ویژگی‌های ۱۲ و ۱۳، توجه کنیم که مبنا باید ۱۰ باشد.

۱۴ $\log^۲ = ۱ - \log^۵$

تذکر: همـــواره دقت کنیم که لگاریتم برای **صفر** و **اعداد منفی** تعریف نمی‌شود. ضمناً مبنا، عددی مثبت و مخالف یک است.

مثال۱۹ با اســتفاده از ویژگی‌های لگاریتم، عبارت‌های زیر را ساده کنید: (تمرین ۱ صفحهٔ ۸۵)

الف) $\log_۷^{\sqrt[۳]{۷^۲}}$

$$\log_۷^{\sqrt[۳]{۷^۲}} \xleftarrow{\text{مستقیم}} \log_۷^{۷^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۲}{۳}\underbrace{\cancel{\log_۷^۷}}_{\log_a^a = ۱} = \frac{۲}{۳}$$

ب) $\log_۶^{\frac{۱}{۶}}$

$$\log_۶^{\frac{۱}{۶}} \xleftarrow{\text{مستقیم}} \log_۶^{۶^{-۱}} = -\cancel{\log_۶^۶}^{\,۱} = -۱$$

وعدهٔ ۶

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{۲} \pm \theta$ $(\theta > ۰)$

ابتدا یادآوری می‌کنیم که انتهای کمان $\frac{\pi}{۲} - \theta$ در ناحیهٔ اول و انتهای کمان $\frac{\pi}{۲} + \theta$ در ناحیهٔ دوم است. حال، اگر در کمان یک نسبت مثلثاتی، $\frac{\pi}{۲} \pm \theta$ دیدیم، ابتدا، «تعیین ناحیه» می‌کنیم و علامت آن نسبت را در آن ناحیه مشخص می‌کنیم. سپس $\frac{\pi}{۲} \pm$ ($\frac{\pi}{۲}$ و علامت $+$ یا $-$ بعد از آن) را حذف می‌کنیم. توجه می‌کنیم که پس از این کار، نسبت‌ها را به شکل ضربدری عوض می‌کنیم. (سینوس به کسینوس و تانژانت به کتانژانت و برعکس، تبدیل می‌شوند.) موارد بالا، به این شکل قابل بیان هستند:

علامت سینوس در ناحیهٔ دوم	علامت سینوس در ناحیهٔ اول
$\sin(\frac{\pi}{۲} + \theta) = +\cos\theta$	$\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = +\cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{۲} + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) = +\sin\theta$
$\tan(\frac{\pi}{۲} + \theta) = -\cot\theta$	$\tan(\frac{\pi}{۲} - \theta) = +\cot\theta$
$\cot(\frac{\pi}{۲} + \theta) = -\tan\theta$	$\cot(\frac{\pi}{۲} - \theta) = +\tan\theta$

مثال ۱۵ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(\frac{۳\pi}{۴})$

چاشنی: ۱ توابع شامل جزء صحیح ([ ]) در هر نقطه‌ای که داخل براکت عدد صحیح شــود، مشکوک به ناپیوستگی هستند و باید حد چپ و راست و مقدار تابع را در آن نقطه بررسی کنیم.

۲ توابــع چندضابطــه ای، در **نقــاط مــرزی** خــود مشــکوک به ناپیوســتگی هستند و باید حد چپ و راست و مقدار تابع را در آن نقاط بررسی کنیم.

مثال ۲۷ پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده، بررسی کنید.

الف) $\mathbf{f(x)=[x]} \quad , \quad \mathbf{x=۲}$

چــون $x=۲$ ، داخل براکت را عدد صحیــح می‌کند، باید حد چپ و راست و $f(۲)$ بررسی شوند:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+}[x]=[۲^+]=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}[x]=[۲^-]=۱ \Rightarrow \text{تابع } f(x) \text{ در } x=۲ \text{ ناپیوسته است} \\ f(۲)=[۲]=۲ \end{cases}$$

ب) $\mathbf{f(x)=(x-۲)[x]} \quad , \quad \mathbf{x=۲}$

حد چپ و راست و $f(۲)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+}((x-۲)[x])=۰\times[۲^+]=۰\times ۲=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}((x-۲)[x])=۰\times[۲^-]=۰\times ۱=۰ \\ f(۲)=(۲-۲)[۲]=۰\times ۲=۰ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است.

پ) $f(x)=\begin{cases}[x]+۱ & ; \quad x>۲\\ ۳ & ; \quad x=۲\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۲\end{cases} \quad , \quad x=۲$

$x=۲$ نقطهٔ مرزی تابع $f(x)$ اســت، پس باید حد چپ و راست و $f(۲)$ بررسی شوند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}([x]+۱)=[۲^+]+۱=۳\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(۲x-۱)=۲(۲)-۱=۳\\ f(۲)=۳\end{cases}\Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=۳$ پیوسته است.

ت) $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ; \quad x\geq ۱\\ ۳x-۱ & ; \quad x<۱\end{cases} \quad , \quad x=۱$

باید حد چپ و راست و $f(۱)$ بررسی شوند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲x+۱)=۲(۱)+۱=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}(۳x-۱)=۳(۱)-۱=۲\\ f(۱)=۲(۱)+۱=۳\end{cases}\Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است.

مثال ۲۸ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=۰$ پیوسته باشد. (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۵۱)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & ; \quad x>۰\\ b-۱ & ; \quad x=۰\\ x-۲a & ; \quad x<۰\end{cases}$$

۲ همسایگی محذوف عدد x_0:

اگر از بازهٔ (a,b) عدد x_0 را حذف کنیم، همسایگی محذوف عدد x_0 به دست می‌آید: $(a,b)-\{x_0\}$

$$(a,b)-\{x_0\}=(a,x_0)\cup(x_0,b)$$

۳ تعریف حد:

الف) اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد راست تابع f در $x=a$ برابر عدد L_1 است.

ب) اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر L_2 است.

پ) حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

۴ قضایای حد:

$$\lim_{x\to a} c=c \quad \lim_{x\to a} x=a$$

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=(\lim_{x\to a} f(x))\pm(\lim_{x\to a} g(x))=L_1\pm L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=(\lim_{x\to a} f(x)).(\lim_{x\to a} g(x))=L_1.L_2$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad (L_2\neq 0)$$

$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$ (چندجمله‌ای است. $(P(x))$)