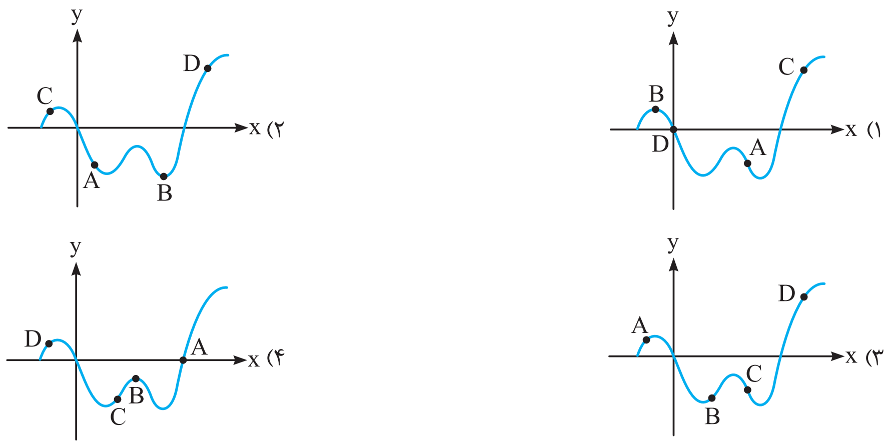
آشنایی با مفهوم مشتق

سلامی دوباره! رسیدیم به فصل مهم مشتق. در شروع فصل لازمه که با مفهوم مشتق آشنا بشین. بریم ببینیم قضیه چیه!

مشابه تمرین کتاب درسی

۱- نقاط داده‌شده روی کدام منحنی زیر، با شیب‌های ارائه‌شده در جدول مقابل، متناظر است؟

نقطه	شیب‌خط مماس
A	۱-
B	۰
C	۱
D	۲



۲- اگر مشتق تابع f در $x = ۳$ برابر $-\frac{۳}{۴}$ باشد، آن‌گاه حد عبارت $\frac{f(۳)-f(۳+h)}{h}$ وقتی $h \to ۰$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۲۵- ۴) ۰/۷۵-

۳- اگر $f'(-۵) = ۶$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{t \to -۵} \frac{f(t)-f(-۵)}{۳(t+۵)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۲

۴- اگر $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{(۲+h)^۳-۸}{h}$، تعریف مشتق تابع f در $x = x_۰$ باشد، کدام انتخاب برای f و $x_۰$ نادرست است؟

۱) $f(x) = x^۳ \ , \ x_۰ = ۲$ ۲) $f(x) = x^۳ + ۷ \ , \ x_۰ = ۲$ ۳) $f(x) = (x-۱)^۳ \ , \ x_۰ = ۱$ ۴) $f(x) = (x+۱)^۳ \ , \ x_۰ = ۱$

۵- اگر مشتق تابع f در همهٔ نقاط وجود داشته باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}f'(۱)$ ۲) $۳f'(۱)$ ۳) $۶f'(۱)$ ۴) $\frac{۳}{۲}f'(۱)$

۶- اگر $f(x)$ در $x = ۲$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{t \to ۰} \frac{۱}{t} \times \frac{f(۲)-f(۲+t)}{f(۲)f(۲+t)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{f'(۲)}$ ۲) $-\frac{f'(۲)}{f^۲(۲)}$ ۳) $-f'(۲)$ ۴) $\frac{f(۲)}{(f'(۲))^۲}$

۷- اگر مشتق تابع f در همهٔ نقاط وجود داشته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -۵}\dfrac{xf(-۵)+۵f(x)}{x+۵}$ کدام است؟

۱) $۵f'(-۵)+f(-۵)$　۲) $f'(-۵)+۵f(-۵)$　۳) $۵f'(-۵)-f(-۵)$　۴) $f'(-۵)-۵f(-۵)$

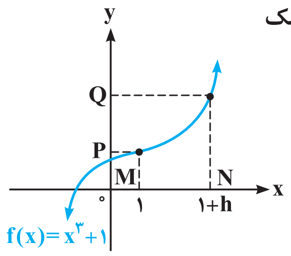
۸- شیب خط قاطع که نقاط A و B با طول‌های ۱- و x از نمودار $y=f(x)$ را به هم وصل می‌کند، برابر $۳x^۲-۲x+۱$ است. شیب مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول ۱- واقع بر منحنی، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　۲) ۶　۳) ۲　۴) ۸-

۹- اگر نقاط $M(k,k^۲+۱)$ و $N(k+h,(k+h)^۲+۱)$ روی نمودار تابع $f(x)=x^۲+۱$ باشند، شیب خط MN وقتی h به سمت صفر نزدیک می‌شود، کدام است؟

۱) $-۲k$　۲) $\frac{k}{۲}$　۳) $۲k$　۴) $-k$

۱۰- با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، حد نسبت اندازهٔ پاره‌خط PQ به MN وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، کدام است؟



۱) ۲　۲) ۱　۳) ۴　۴) ۳

۱۱- اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{(-۳+h)^۳-۲(-۳+h)+۲۱}{h}$ مربوط به مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x_۰$ باشد و نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۱,۵)$ عبور کند، مقدار $\dfrac{x_۰}{f(۳)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲۵}$　۲) $\frac{۳}{۲۵}$　۳) $-\frac{۱}{۵}$　۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۲- مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۲$ به صورت $۱۲=\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}$ بیان شده است. مقدار k کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۶

۱۳- اگر f تابعی پیوسته باشد و به ازای هر m و n، تساوی $f(m+n)-f(m)=m^۲n-n^۲$ برقرار باشد، $f'(-۱)$ کدام است؟ $(m,n\neq ۰)$

۱) ۱　۲) ۱-　۳) صفر　۴) ۲

۱۴- اگر $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=۲x$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x^۲-۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　۲) $\frac{۱}{۲}$　۳) ۱　۴) ۲

۱۵- اگر $f'(k)=۱۰$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(k)-f(k-۴h)}{۲h}$ کدام است؟

۱) ۱۰　۲) ۱۵　۳) ۲۵　۴) ۲۰

۱۶- اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x-h)-f(x+h)}{h}=\dfrac{۲}{\sqrt{x}}$ باشد، آن‌گاه $f'(۹)f'(\frac{۱}{۱۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$　۲) $\frac{۱}{۴}$　۳) $\frac{۱}{۶}$　۴) $\frac{۱}{۱۲}$

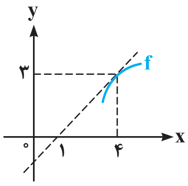
۱۷- اگر مشتق تابع f در نقطهٔ a وجود داشته باشد و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{۲h}=۴$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(a+۴h)-f(a)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳۲　۲) ۱۶　۳) ۶۴　۴) ۸

۱۸- اگر $f(\frac{۲}{۳})=۲f'(\frac{۲}{۳})=۸$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(\frac{۴-h}{۶})-۸}{۳h}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$　۲) $\frac{۲}{۹}$　۳) $-\frac{۲}{۹}$　۴) $\frac{۱}{۹}$

۱۹- بر اساس شکل مقابل، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+2h)-f(4)}{3h}$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۰- اگر خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، موازی خط به معادلهٔ $5x=3-2y$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3)-f(3+h)}{2h}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $-\frac{5}{4}$　　۳) $\frac{5}{4}$　　۴) $-\frac{1}{5}$

۲۱- اگر خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول k واقع بر آن، عمود بر خط به معادلهٔ $\frac{2x+1}{4}+\frac{y-1}{3}=-1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(k+4h)-f(k)}{3h}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$　　۲) $\frac{8}{9}$　　۳) $\frac{4}{9}$　　۴) $\frac{4}{3}$

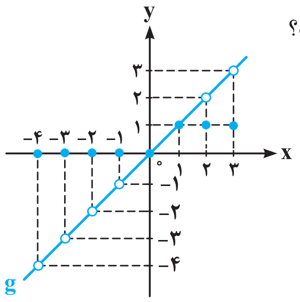
۲۲- نمودار چه تعداد از توابع زیر در $x=0$، مماس قائم ندارد؟

الف) $y=\sqrt[3]{x^2}$　　ب) $y=\sqrt{4-x^2}$　　پ) $y=\sqrt[3]{x}$

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۳- با توجه به نمودار تابع g در شکل مقابل، اگر $f(x)=(x^3+27)g(x)$ باشد، حاصل $f'(-3)$ کدام است؟

۱) -81
۲) -54
۳) -27
۴) صفر



مشتق‌گیری

حالا می‌خوایم بریم سراغ معرفی یه سری از فرمول‌های مشتق‌گیری.

۲۴- شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=(3x^2+3x+1)^8$، در نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) 2^{-8}　　۳) صفر　　۴) ۱

۲۵- اگر $f(x)=(2x^2-3)(3x-2)^3$ و $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{-4x+3}$ باشند، حاصل کدام‌یک از موارد زیر، کوچک‌تر از بقیه است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $f'(0)$　　۲) $g'(1)$　　۳) $f'(1)$　　۴) $g'(2)$

۲۶- اگر $f(x)=(\sqrt{4x+1})(x^3-2)$ و $g(x)=\dfrac{8x-3}{\sqrt{x}}$ باشند، حاصل $\dfrac{f'(2)}{2g'(4)}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $-\frac{32}{7}$　　۲) $\frac{64}{7}$　　۳) $\frac{32}{7}$　　۴) $-\frac{64}{7}$

۲۷- مقدار مشتق کدام‌یک از توابع زیر در $x=1$، از بقیه کم‌تر است؟

۱) $y=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$　　۲) $y=(1+\sqrt{x})^3$　　۳) $y=x^3(3x-2)$　　۴) $y=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

۲۸- اگر $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+1}}$ باشد، آن‌گاه $f'(2)$ کدام است؟

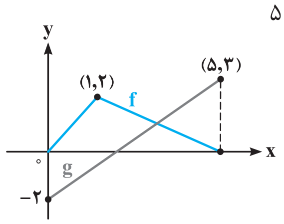
۱) $-0/2$　　۲) $-0/1$　　۳) $0/1$　　۴) $0/2$

۲۹- نقاط به طول‌های ۲ و $2+\Delta x$ را بر روی نمودار تابع $f(x)=x^{10}-1$ در نظر بگیرید. شیب خط گذرنده از این دو نقطه وقتی $\Delta x\to 0$ کدام است؟

۱) ۱۰۲۴　　۲) ۲۵۶۰　　۳) ۵۱۲۰　　۴) ۶۴۰

۳۰- اگر $g(2)=f'(2)=3$ و $g'(2)=f(2)=-1$ باشند، مشتق تابع $fg-\frac{1}{f^2}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



۳۱- اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، آن‌گاه با توجه به نمودار مقابل، حاصل $k'(\frac{1}{2})-k'(3)$ کدام است؟

برگرفته از تمرین کتاب درسی

۱) $-\frac{5}{18}$ ۲) $\frac{5}{9}$

۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $-\frac{5}{9}$

ریاضی داخل ۸۸

۳۲- مشتق عبارت $(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$ به ازای $x=-8$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۳- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{2x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2x-1}{2x^3}$ ۲) $\frac{2x-1}{x^3}$ ۳) $\frac{2x+1}{x^3}$ ۴) $\frac{2x+1}{2x^3}$

۳۴- اندازهٔ مشتق تابع $y=|x|+|x^2-2x|$ در $x=-1$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) -3 ۴) ۳

۳۵- مشتق تابع $y=|x|+|x+1|+\dots+|x+99|$ در $x=-\frac{9}{2}$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) -90 ۳) ۱۰۰ ۴) -100

۳۶- با فرض $f(x)=x^2-\sqrt{x}$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{2}$ ۲) $\frac{29}{4}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{31}{4}$

۳۷- اگر $f(x)=x\sqrt[3]{3x-1}$ باشد، حاصل $\lim_{t\to 0}\frac{f(3+t)-f(3)}{t}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{11}{4}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۳۸- اگر $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{3}{2}$ باشد، مشتق عبارت $(x^2-2x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

تجربی داخل ۹۵

۳۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) -21 ۲) -18 ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۴۰- اگر $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{2x}$ باشند، حاصل $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x)-f(2)g(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۱- اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x+1$ باشند، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(9+h)}{f(9+h)}-\frac{g(9)}{f(9)}}{h}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{64}$

ساده‌سازی، سپس مشتق‌گیری

یه کار خوبی که می‌شه قبل از مشتق‌گرفتن انجام داد، اینه که اگه تونستین، حتماً تابع رو ساده کنین، بعدش از اون مشتق بگیرین.

۴۲- مشتق تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+\sqrt[3]{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

۴۳- مشتق تابع $y=\dfrac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ در $x=4$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{13}{72}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۴۴- مشتق تابع $y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^3(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $-\frac{27}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

۴۵- اگر $y=\sqrt[5]{\dfrac{2x}{x+1}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $y^5+5y^4y'+5xy^4y'$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۴۶- اگر $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ باشند، آن‌گاه حاصل $(f(x)-g(x))'$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $x-1$ ۴) $1-x$

۴۷- اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ و $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

۴۸- اگر $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ و $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x^2+1}$ ۲) صفر ۳) -1 ۴) $2x$

مشتق عامل صفر

می‌خوایم آشناتون کنیم با یه تکنیک خوب در محاسبهٔ مشتق.

۴۹- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{40}$ ۴) $\frac{5}{16}$

۵۰- اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۵۱- اگر $f(x)=\dfrac{(x^3-27)(x-3)}{x+2}$ باشد، $f'(3)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) ۱۲

۵۲- فرض کنید $f(x)=(x-a)(2x-a)\cdots(nx-a)$، در این صورت $f'(a)$ کدام است؟

۱) $(n-1)!a^n$ ۲) $(n-1)!a^{n-1}$ ۳) $n!a^n$ ۴) $n!a^{n-1}$

۵۳- مشتق تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{4}$ ۲) $-\sqrt[3]{2}$ ۳) صفر ۴) $\sqrt[3]{4}$

۵۴- مشتق تابع $y=(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}+x\sqrt{2x}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

۵۵- مشتق تابع $y=(x-3)|x-3|+\sqrt[3]{(x-3)^3(x-4)}$ در $x=3$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱

۳) صفر ۴) در $x=3$ مشتق‌پذیر نیست.

مشتق‌های یک‌طرفه ـ مشتق‌پذیری

نوبت می‌رسه به محاسبهٔ مشتق‌های چپ و راست تابع f در نقطه به طول a.

۵۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$، مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۷- اگر $f(x)=|x-2|+\sqrt{2x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۵۸- مشتق چپ تابع $f(x)=|x+1||x+2||x+3|+|x+2||x+3||x+4|$ در $x=-3$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) 1 ۴) -1

۵۹- مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[3]{9x}$ در $x=-3$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.) ریاضی داخل ۹۳

۱) $-\frac{16}{3}$ ۲) -5 ۳) -4 ۴) $\frac{7}{3}$

۶۰- اختلاف مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)=|x-3|[x^2]$ در $x_0=3$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.)

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۸ ۴) ۱

۶۱- اگر $f(x)=x^3-[2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.) تجربی خارج ۹۴

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۶۲- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-[x]+|x|}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.) ریاضی داخل ۹۷

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۶۳- اگر $f(x)=\frac{x^2}{|1-x|}[x]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.) ریاضی خارج ۹۷

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۴- مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در $x=0$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۹

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۶۵- به ازای چه مقادیری از m، نیم‌مماس‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x-1|(x-m)$ در $x=1$، برهم عمود هستند؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{2\}$

یکی از چیزایی که باید خیلی خوب بلد باشین، اینه که بتونین وضعیت مشتق‌پذیری یه تابع رو در یه نقطه بررسی کنین.

۶۶- چه تعداد از توابع زیر در $x=2$ مشتق‌پذیر هستند؟ برگرفته از کتاب درسی

الف) $f(x)=2x^2-1$ ب) $g(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x\neq 2\\ 1 & ;\ x=2\end{cases}$ پ) $h(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x\leq 2\\ x+3 & ;\ x>2\end{cases}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۷- چه تعداد از توابع زیر در $x=0$ مشتق‌پذیر هستند؟([ ] علامت جزءصحیح است.) برگرفته از کتاب درسی

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$ ب) $g(x)=[x]$ پ) $h(x)=\sqrt[3]{x}$ ت) $k(x)=\sqrt{x}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

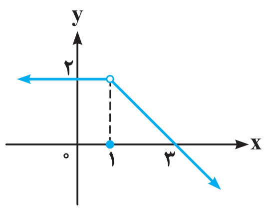
۶۸- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}-5 & ;\ x\geq 1\\ x^2+ax+b & ;\ x<1\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟ تجربی خارج ۹۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تجربی خارج ۹۰

۶۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x>1\\ ax+b & ; x\le 1\end{cases}$، مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$



۷۰- با توجه به نمودار تابع g در شکل مقابل، مشتق تابع $f(x)=\frac{x-1}{g(x)+1}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) وجود ندارد. ۲) ۱

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۷۱- مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2+2^{-\frac{1}{x^2}}} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) مشتق‌پذیر نیست.

مشابه کار در کلاس کتاب‌درسی

۷۲- تابع $f(x)=\begin{cases}3x+2 & ; x<-2\\ x^2-2 & ; -2\le x<1\\ -x+4 & ; 1<x<4\end{cases}$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر، مشتق‌پذیر نیست؟

۱) $(2,3]$ ۲) $[-3,-1]$ ۳) $[-2,0)$ ۴) $(1,4)$

تجربی داخل ۹۷

۷۳- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+4 & ; x\ge -2\\ x^3-x & ; x<-2\end{cases}$، همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۷۴- تابع f با ضابطهٔ مقابل، در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

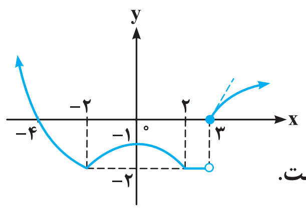
$$f(x)=\begin{cases}1 & ; x<0\\ x+1 & ; 0\le x<1\\ 2x+2 & ; 1\le x<2\\ x^2+2 & ; x\ge 2\end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر

۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر

۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر



۷۵- نمودار تابع f در شکل مقابل مفروض است. چه تعداد از موارد زیر در رابطه با مشتق تابع f، درست است؟

الف) فقط در یک نقطه، برابر صفر است.

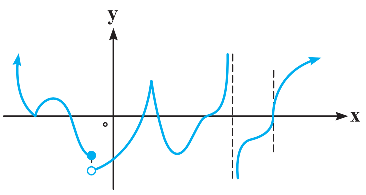
ب) در $x=0$، برابر -1 است.

پ) در همهٔ نقاط از بازهٔ $(-\infty,-2)$، منفی است.

ت) در $x=3$، برابر عددی مثبت است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۶- تابع f در شکل مقابل، در چند نقطه از مجموعهٔ اعداد حقیقی، مشتق‌پذیر نیست؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۷۷- اگر $g(x)=\begin{cases}1 & ; x\ge 0\\ 0 & ; x<0\end{cases}$ باشد، آن‌گاه تابع $y=(3x-1)g(x^6-16x^2)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) بی‌شمار ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۷۸- تابع $f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^3}+1$ در $x=1$ ....

۱) خط مماس دارد ولی مشتق ندارد.

۲) خط مماس و مشتق دارد.

۳) خط مماس و مشتق ندارد.

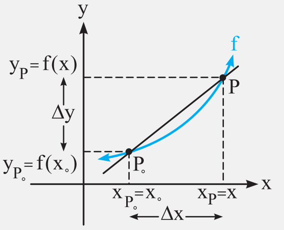
۴) مشتق دارد ولی خط مماس ندارد.

پاسخ‌های تشریحی

۱ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

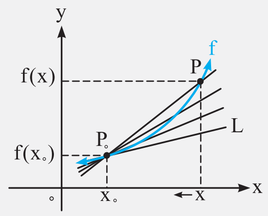
آشنایی با مفهوم مشتق

بررسی چگونگی تغییرات مقادیر یک تابع از مسائل مهم ریاضی است. مفهوم مشتق در ارتباط با چگونگی تغییرات یک تابع است. مشتق تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با $y'=f'(x)$ نشان می‌دهیم *(اینم بگیم که مشتق رو با* $\frac{dy}{dx}$ *هم نشون میدن)*. **از مشتق برای بیان‌کردن شیب خط مماس هم استفاده می‌شود.** به این ترتیب که **$f'(x_\circ)$ نشان‌دهندهٔ شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ است.** حال در این مورد بیشتر توضیح می‌دهیم:



شکل مقابل را ببینید. خطی که دو نقطهٔ P و $P_\circ$ را به هم وصل می‌کند، یک خط **قاطع** (یک **وتر** از منحنی) می‌نامند. شیب این خط قاطع برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_P-y_{P_\circ}}{x_P-x_{P_\circ}}=\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$



حال وقتی نقطهٔ P بر روی نمودار تابع، به نقطهٔ ثابت $P_\circ$ نزدیک می‌شود، آن‌گاه x هم به $x_\circ$ نزدیک می‌شود و خط $PP_\circ$ هم به خط مماس بر منحنی (یعنی خط L) نزدیک می‌شود. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=f'(x_\circ)=$$ حد شیب خط $PP_\circ$ وقتی P به $P_\circ$ میل می‌کند = شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $P_\circ$

توجه داشته باشید که حد بالا، به شرطی شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $P_\circ$ است که **موجود و متناهی باشد** (حد فوق را شیب منحنی در $x_\circ$ نیز می‌نامیم). در ضمن، اگر حاصل حد، **نامتناهی** شود، نتیجه می‌گیریم در نقطهٔ $P_\circ$، **مماس قائم** بر منحنی وجود دارد.

حال اگر به‌جای $x-x_\circ$ از Δx استفاده کنیم، این‌طوری می‌شود:

$$x-x_\circ=\Delta x \Rightarrow \begin{cases} x\to x_\circ \xrightarrow{(x-x_\circ)\to\circ} \Delta x\to\circ \\ x=x_\circ+\Delta x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{\Delta x\to\circ}\frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}\overset{\Delta x=h}{=\!=}\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}}$$

مثال **شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^۲-۴$ را در نقطهٔ $A(۳,f(۳))$ به‌دست آورید.**

پاسخ **روش اول:** بر اساس مطالبی که گفتیم، می‌توان نوشت:

$$f'(۳)=\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to۳}\frac{(x^۲-۴)-(۹-۴)}{x-۳}=\lim_{x\to۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=\lim_{x\to۳}(x+۳)=۳+۳=۶$$: شیب خط مماس

روش دوم:

$$f'(۳)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{((۳+h)^۲-۴)-(۹-۴)}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{(۳+h)^۲-۹}{h}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{(\cancel{۹}+۶h+h^۲)\cancel{-۹}}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{۶h+h^۲}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\cancel{h}(۶+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to\circ}(۶+h)=۶+\circ=۶$$

در مسائل مختلف، ممکن است یکی از دو روش بالا بر دیگری به‌دلیل ساده‌تر بودن محاسبات، برتری داشته باشد.

مثال شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۱$ را در نقطه‌ای به طول ۲، واقع بر منحنی به دست آورید.

پاسخ **روش اول:** شیب خط مماس بر منحنی تابع f در $x=۲$ برابر است با:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\frac{۱}{x}+۱)-(\frac{۱}{۲}+۱)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۲}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۲-x}{۲x}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-\cancel{(x-۲)}}{۲x\cancel{(x-۲)}}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{۲x}=-\frac{۱}{۴}$$

روش دوم:

$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(\frac{۱}{۲+h}+\cancel{۱})-(\frac{۱}{۲}+\cancel{۱})}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۲-(۲+h)}{۲(۲+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{-h}{۲(۲+h)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}}{۲(۲+h)\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{۲(۲+h)}=\frac{-۱}{۲(۲+۰)}=-\frac{۱}{۴}$$

مثال تابع $f(x)=-x^۲+۸x$ را با دامنهٔ $[۰,۸]$ در نظر بگیرید.

الف) $f'(۴)$ را حساب کنید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید و نقاط به طول ۱، ۳، ۵ و ۷ را روی شکل مشخص کرده و خط مماس در این نقاط را رسم کنید.

پ) از بین نقاط مشخص‌شده در قسمت (ب)، مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در کدام‌یک از آن‌ها قرینهٔ یک‌دیگر است.

ت) تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی دارای مشتق منفی است؟

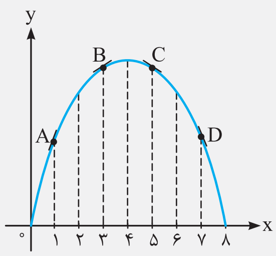
پاسخ

الف)

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{(-x^۲+۸x)-(-۱۶+۳۲)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-x^۲+۸x-۱۶}{x-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x^۲-۸x+۱۶)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)^۲}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}(-(x-۴))=۰$$

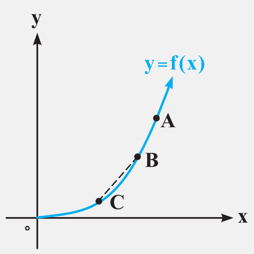
ب) نمودار تابع $f(x)=-x^۲+۸x=-x(x-۸)$ را رسم می‌کنیم:



پ) با توجه به تقارن شکل در بازهٔ $[۰,۸]$، شیب خطوط مماس در نقاط A و D و شیب خطوط مماس در نقاط B و C قرینهٔ یک‌دیگر هستند. به عبارتی، مقدار مشتق تابع در نقاط A و D و مقدار مشتق تابع در نقاط B و C قرینهٔ یک‌دیگر هستند.

ت) از روی نمودار در قسمت (ب)، پیدا است که شیب خطوط مماس در بازهٔ $(۰,۴)$، مثبت می‌باشد، بنابراین مقدار مشتق تابع در این بازه، مثبت است. هم‌چنین شیب خطوط مماس در بازهٔ $(۴,۸)$، منفی می‌باشد و در نتیجه مقدار مشتق تابع در این بازه، منفی است.

مثال **برای نمودار $y=f(x)$ در شکل مقابل، اعداد داده‌شده را از بزرگ‌ترین به کوچک‌ترین مرتب کنید.**



الف) شیب نمودار در نقطهٔ A $(m_۱)$.

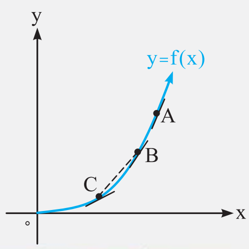
ب) شیب نمودار در نقطهٔ B $(m_۲)$.

پ) شیب نمودار در نقطهٔ C $(m_۳)$.

ت) شیب خط BC $(m_۴)$.

ث) شیب خط $y=۱$ $(m_۵)$.

پاسخ با توجه به داده‌های مسأله و شکل روبه‌رو، می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow m_۱>m_۲>m_۴>m_۳>m_۵$$

سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) نادرست است، زیرا شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ D، منفی است، در صورتی‌که در جدول داده‌شده، شیب خط مماس در نقطهٔ D، برابر ۲ می‌باشد.

۳) نادرست است، زیرا شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A، مثبت است، در صورتی‌که شیب خط مماس در نقطهٔ A، طبق جدول ارائه‌شده برابر ۱- می‌باشد. همچنین شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ C، منفی است، حال آن‌که شیب خط مماس در نقطهٔ C، طبق جدول برابر ۱ می‌باشد.

۴) نادرست است، زیرا شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A، مثبت است، در شرایطی که شیب خط مماس در نقطهٔ A، طبق جدول برابر ۱- می‌باشد.

۲ ۲ داریم $f'(۳)=-\frac{۳}{۴}$، پس:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳)-f(۳+h)}{h}=-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=-f'(۳)=-(-\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

۳ ۴ با توجه به معلومات مسأله، می‌توان نوشت:

$$\lim_{t\to -۵}\frac{f(t)-f(-۵)}{۳(t+۵)}=\frac{۱}{۳}\underbrace{\boxed{\lim_{t\to -۵}\frac{f(t)-f(-۵)}{t-(-۵)}}}_{f'(-۵)}=\frac{۱}{۳}f'(-۵)\xlongequal{f'(-۵)=۶}\frac{۱}{۳}(۶)=۲$$

۴ ۳ همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ f(x)=x^۳\ ,\ x_۰=۲\Rightarrow\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۳-(۲)^۳}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۳-۸}{h}\quad\checkmark$$

$$۲)\ f(x)=x^۳+۷,\ x_۰=۲\Rightarrow\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۳+۷-(۲^۳+۷)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۳-۸}{h}\quad\checkmark$$

$$۳)\ f(x)=(x-۱)^۳\ ,\ x_۰=۱\Rightarrow\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h-۱)^۳-(۱-۱)^۳}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۳}{h}\quad\times$$

$$۴)\ f(x)=(x+۱)^۳\ ,\ x_۰=۱\Rightarrow\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h+۱)^۳-(۱+۱)^۳}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۳-۸}{h}\quad\checkmark$$

بنابراین پاسخ این تست، گزینهٔ (۳) است.

۵ ۲ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(f(x)-f(۱))\overbrace{(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}^{۱+۱+۱=۳}}{x-۱}=۳\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=۳f'(۱)$$

۶ ۲

$$\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{t}\times\frac{f(۲)-f(۲+t)}{f(۲)f(۲+t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{-۱}{f(۲)f(۲+t)}\times\underbrace{\boxed{\lim_{t\to ۰}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}}}_{f'(۲)}=\frac{-۱}{f(۲)f(۲)}\times f'(۲)=\frac{-f'(۲)}{f^۲(۲)}$$

۷ ۱ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to -۵}\frac{xf(-۵)+۵f(x)}{x+۵}=\lim_{x\to -۵}\frac{xf(-۵)+۵f(-۵)-۵f(-۵)+۵f(x)}{x+۵}=\lim_{x\to -۵}\frac{f(-۵)(x+۵)+۵(f(x)-f(-۵))}{x+۵}$$

$$=\lim_{x\to -۵}\frac{f(-۵)\cancel{(x+۵)}}{\cancel{x+۵}}+۵\underbrace{\boxed{\lim_{x\to -۵}\frac{f(x)-f(-۵)}{x-(-۵)}}}_{f'(-۵)}=f(-۵)+۵f'(-۵)\ ۱$$

۸ ۲ با چیزهایی که در مسأله گفته شده، می‌توان این‌طور نوشت:

$$A(-۱,f(-۱))\ \text{و}\ B(x,f(x))\Rightarrow \text{شیب وتر گذرنده از A و B}=\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}=۳x^۲-۲x+۱\qquad(*)$$

در صورت مسأله، شیب مماس بر منحنی f در $x=-۱$ پرسیده شده، پس داریم:

$$\text{شیب خط مماس در } x=-۱ = f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to -۱}(۳x^۲-۲x+۱)=۳(-۱)^۲-۲(-۱)+۱=۶$$

۹ | **۳** می‌دانیم شیب خط گذرنده از نقاط M و N (یعنی m_{MN}) از رابطهٔ $m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}$ به دست می‌آید، بنابراین در مورد نقاط $M(k,k^۲+۱)$ و $N(k+h,(k+h)^۲+۱)$ که روی نمودار تابع $f(x)=x^۲+۱$ قرار دارند، می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰} m_{MN}=\lim_{h\to ۰}\frac{((k+h)^۲+۱)-(k^۲+۱)}{(k+h)-k}=\lim_{h\to ۰}\frac{(k+h)^۲-k^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(\cancel{k^۲}+۲kh+h^۲)-\cancel{k^۲}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲kh+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۲k+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(۲k+h)=۲k+۰=۲k$$

۱۰ | **۴** با توجه به نمودار داده‌شده، نتیجه می‌گیریم اندازهٔ پاره‌خط PQ برابر $f(۱+h)-f(۱)$ و اندازهٔ پاره‌خط MN برابر $(۱+h)-۱=h$ می‌باشد، بنابراین حد نسبت اندازهٔ پاره‌خط PQ به MN وقتی $h\to ۰$، برابر است با:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\xlongequal{f(x)=x^۳+۱}\lim_{h\to ۰}\frac{((۱+h)^۳+\cancel{۱})-(۱^۳+\cancel{۱})}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^۳-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(\cancel{۱}+۳h+۳h^۲+h^۳)-\cancel{۱}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۳+۳h+h^۲)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(۳+۳h+h^۲)=۳+۰+۰=۳$$

۱۱ | **۱** حد داده‌شده، مربوط به مشتق تابع $f(x)=x^۳-۲x+c$ در $x_۰=-۳$ است (چرا؟). از طرفی نمودار f از نقطهٔ $(-۱,۵)$ می‌گذرد، پس:

$$f(-۱)=۵\Rightarrow ۵=(-۱)^۳-۲(-۱)+c\Rightarrow ۵=-۱+۲+c\Rightarrow c=۴\Rightarrow f(x)=x^۳-۲x+۴\Rightarrow \frac{x_۰}{f(۳)}=\frac{-۳}{۲۷-۶+۴}=-\frac{۳}{۲۵}$$

۱۲ | **۳** می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۴+۴h+h^۲)+\cancel{۲k}+kh-\cancel{۲k}-۸}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{۸}+۸h+۲h^۲+kh-\cancel{۸}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۸+۲h+k)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(۸+۲h+k)=۸+۰+k=۸+k=۱۲\Rightarrow k=۴$$

۱۳ | **۱** طرفین تساوی $f(m+n)-f(m)=m^۲n-n^۲$ را بر n تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{f(m+n)-f(m)}{n}=m^۲-n\Rightarrow \lim_{n\to ۰}\frac{f(m+n)-f(m)}{n}=\lim_{n\to ۰}(m^۲-n)=m^۲\Rightarrow f'(m)=m^۲\xRightarrow{m=-۱}f'(-۱)=(-۱)^۲=۱$$

۱۴ | **۳** از تساوی $\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=۲x$ نتیجه می‌گیریم $f'(x)=۲x$، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{x+۴}\times\underbrace{\boxed{\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}}}_{f'(۴)}=\frac{۱}{۸}f'(۴)$$

از $f'(x)=۲x$ می‌فهمیم $f'(۴)=۲(۴)=۸$، پس:

$$\frac{۱}{۸}f'(۴)=\frac{۱}{۸}(۸)=۱$$

۱۵ | **۴** **روش اول**: برویم سراغ حد عبارت داده‌شده و تغییراتی را روی آن اعمال کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(k)-f(k-۴h)}{۲h}=-\lim_{h\to ۰}\frac{f(k-۴h)-f(k)}{۲h}\quad(*)$$

حال صورت و مخرج $(*)$ را در (-۲) ضرب می‌کنیم و به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-(-۲)\lim_{h\to ۰}\frac{f(k-۴h)-f(k)}{-۴h}\xlongequal{-۴h=\Delta x}۲\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(k+\Delta x)-f(k)}{\Delta x}=۲f'(k)\xlongequal{f'(k)=۱۰}۲(۱۰)=۲۰$$

روش دوم: به *نیم‌نگاه زیر دقت کنین:*

نیم‌نگاه

فرمول زیر را بلد باشید:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(a)$$

بر اساس نیم‌نگاه بالا، می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(k)-f(k-۴h)}{۲h}=(\frac{۰-(-۴)}{۲})f'(k)=۲f'(k)\xlongequal{f'(k)=۱۰}۲(۱۰)=۲۰$$

۱۶ **۴** **روش اول:** می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x-h)-f(x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(x-h)-f(x))+(f(x)-f(x+h))}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$$

$$=-\underbrace{\boxed{\lim_{h\to ۰}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}}}_{f'(x)}-\underbrace{\boxed{\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}}_{f'(x)}=-f'(x)-f'(x)=-۲f'(x)=\frac{۲}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{\sqrt{x}}$$

بنابراین داریم:

$$f'(۹)f'(\frac{۱}{۱۶})=(-\frac{۱}{\sqrt{۹}})(-\frac{۱}{\sqrt{۱۶}})=(-\frac{۱}{۳})(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۱۲}$$

روش دوم: با استفاده از فرمول $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(a)$، می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x-h)-f(x+h)}{h}\xlongequal[k=۱]{m=-۱,n=۱}(\frac{-۱-۱}{۱})f'(x)=-۲f'(x)=\frac{۲}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(۹)f'(\frac{۱}{۱۶})=(-\frac{۱}{۳})(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۷ **۱** براساس فرمول $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(a)$، وارد عمل می‌شویم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a)-f(a-h)}{۲h}=(\frac{۰-(-۱)}{۲})f'(a)=\frac{۱}{۲}f'(a)=۴\Rightarrow f'(a)=۸\quad(*)$$

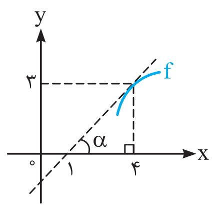
و حالا داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+۴h)-f(a)}{h}=(\frac{۴-۰}{۱})f'(a)\overset{(*)}{=}۴(۸)=۳۲$$

۱۸ **۳** داریم $f(\frac{۲}{۳})=۸$ و $f'(\frac{۲}{۳})=۴$، بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۴-h}{۶})-۸}{۳h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۴}{۶}-\frac{h}{۶})-۸}{۳h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۶}h)-f(\frac{۲}{۳})}{۳h}=(\frac{-\frac{۱}{۶}-۰}{۳})f'(\frac{۲}{۳})=(-\frac{۱}{۱۸})(۴)=-\frac{۲}{۹}$$

۱۹ **۱** اول مقدار $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+۲h)-f(۴)}{۳h}$ را به دست می‌آوریم:



$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+۲h)-f(۴)}{۳h}=(\frac{۲-۰}{۳})f'(۴)=\frac{۲}{۳}f'(۴)\qquad(*)$$

برای تعیین $f'(۴)$ می‌توانیم شیب خط مماس بر نمودار f را در $x=۴$، از روی شکل مقابل به دست آوریم:

$$m_{\text{مماس}}=\tan\alpha=\frac{۳}{۳}=۱\xRightarrow{f'(۴)=۱}(*)=\frac{۲}{۳}f'(۴)=\frac{۲}{۳}(۱)=\frac{۲}{۳}$$

۲۰ **۲** شیب خط به معادلهٔ $۲y-۳=۵x$، برابر $\frac{۵}{۲}$ است، پس خط مماس بر منحنی f در $x=۳$ که موازی این خط می‌باشد هم دارای شیب $\frac{۵}{۲}$ است، در نتیجه $f'(۳)=\frac{۵}{۲}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳)-f(۳+h)}{۲h}=(\frac{۰-۱}{۲})f'(۳)=-\frac{۱}{۲}f'(۳)=-\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۲})=-\frac{۵}{۴}$$

۲۱ **۲** ابتدا شیب خط به معادلهٔ $\frac{y-۱}{۳}+\frac{۲x+۱}{۴}=-۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{۳}-\frac{۱}{۳}+\frac{۲x}{۴}+\frac{۱}{۴}=-۱\Rightarrow\frac{y}{۳}+\frac{x}{۲}=-\frac{۱۱}{۱۲}\Rightarrow \text{شیب}=-\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

از آن‌جا که خط مماس بر منحنی f در $x=k$ عمود بر خط بالا می‌باشد، پس شیب آن عکس و قرینه شده و برابر $\frac{۲}{۳}$ خواهد بود، به عبارتی $f'(k)=\frac{۲}{۳}$ است و داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(k+۴h)-f(k)}{۳h}=(\frac{۴-۰}{۳})f'(k)=\frac{۴}{۳}f'(k)=\frac{۴}{۳}(\frac{۲}{۳})=\frac{۸}{۹}$$

۲۲ ۲ همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

$$\text{(الف)}\quad \begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x^2} \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0}=\infty$$

بنابراین تابع f در $x=0$ مماس قائم دارد.

$$\text{(ب)}\quad \begin{cases} f(x)=\sqrt{4-x^2} \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\times\frac{\sqrt{4-x^2}+2}{\sqrt{4-x^2}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4-x^2)-4}{x(\sqrt{4-x^2}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x(\sqrt{4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4}=0$$

بنابراین تابع f در $x=0$ مماس افقی دارد.

$$\text{(پ)}\quad \begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x} \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

بنابراین تابع f در $x=0$ مماس قائم دارد.

همان‌طور که می‌بینید فقط نمودار تابع مورد (ب) در $x=0$ مماس قائم ندارد.

۲۳ ۱ داریم $f(x)=(x^3+27)g(x)$، پس طبق تعریف مشتق، می‌توان نوشت:

$$f'(-3)=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x^3+27)g(x)-0}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}(x^2-3x+9)g(x)}{\cancel{x+3}}$$

$$=\lim_{x\to -3}(x^2-3x+9)g(x)=\lim_{x\to -3}(x^2-3x+9)\times\lim_{x\to -3}g(x)=(9+9+9)(-3)=(27)(-3)=-81$$

۲۴ ۳ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

مشتق‌گیری

در این قسمت با نحوهٔ مشتق‌گرفتن از توابع جبری آشنا می‌شوید.

① اگر $f(x)=c$ (c: عدد ثابت)، آن‌گاه $f'(x)=0$ است. به عبارت دیگر، مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

اثبات

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}(0)=0$$

مثال اگر $f(x)=2$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=0$ است.

مثال اگر $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ باشد،آن‌گاه $g(x)=1$ است و در نتیجه $g'(x)=0$ می‌باشد.

② اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $f(x)=x^n$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-1}$ است.

اثبات

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\dots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{\text{n بار}}=nx^{n-1}$$

مثال **مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $f(x)=x^3$ **ب) $g(x)=x^5$**   **پ) $h(x)=\frac{1}{x}$**   **ت) $k(x)=\frac{1}{x^2}$**

پاسخ

الف) $f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=3x^2$

ب) $g(x)=x^5\Rightarrow g'(x)=5x^4$

پ) $h(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow h'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

ت) $k(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow k'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

۳) اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ است.

اثبات

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+\cancel{h})+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

مثال مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{3x-6}$ **ب)** $g(x)=\sqrt{\frac{x}{5}+2}$

پاسخ

الف) $f(x)=\sqrt{3x-6}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$

ب) $g(x)=\sqrt{\frac{x}{5}+2}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{1}{5}}{2\sqrt{\frac{x}{5}+2}}$

۴) روابط زیر را به خاطر بسپارید:

الف) $y=kf(x)\Rightarrow y'=kf'(x)$ (k : عدد ثابت)

ب) $y=f(x)\pm g(x)\pm\ldots\Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)\pm\ldots$

پ) $y=f(x).g(x)\Rightarrow y'=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$

$(y=f.g.h\Rightarrow y'=f'gh+g'fh+h'fg)$

ت) $y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

ث) $y=u^n\Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

ج) $y=\sqrt[n]{u^m}\Rightarrow y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

$y=u^{\frac{m}{n}}\Rightarrow y'=\frac{m}{n}u'u^{\frac{m}{n}-1}$

مثال مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$ **ب)** $f(x)=(1+3x)^2$ **پ)** $f(x)=(2x+3)(3x-7)$ **ت)** $f(x)=3x(x^2+1)(x+2)$

ث) $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ **ج)** $f(x)=(\frac{x-1}{3-x})^2$ **چ)** $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}}$

پاسخ

الف) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1\Rightarrow f'(x)=x^2+x+1$

ب) $f(x)=(1+3x)^2\Rightarrow f'(x)=2\times 3\times(1+3x)=6+18x$

پ) $f(x)=(2x+3)(3x-7)\Rightarrow f'(x)=2(3x-7)+3(2x+3)=6x-14+6x+9=12x-5$

ت) $f(x)=3x(x^2+1)(x+2)\Rightarrow f'(x)=3(x^2+1)(x+2)+2x(3x)(x+2)+1(3x)(x^2+1)$

ث) $f(x)=\frac{3x}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3(x-2)-1(3x)}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}$

ج) $f(x)=(\frac{x-1}{3-x})^2\Rightarrow f'(x)=2\times\frac{1(3-x)-(-1)(x-1)}{(3-x)^2}\times\frac{x-1}{3-x}=2\times\frac{2}{(3-x)^2}\times\frac{x-1}{3-x}=\frac{4(x-1)}{(3-x)^3}$

چ) $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(x+\sqrt{x})-(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x)}{(x+\sqrt{x})^2}=\frac{\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}$

منظور از شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=(3x^2+3x+1)^8$ در $x=-\frac{1}{2}$، همان $f'(-\frac{1}{2})$ است، پس داریم:

$$f'(x)=8(6x+3)(3x^2+3x+1)^7 \Rightarrow f'(-\frac{1}{2})=8(\underbrace{-3+3}_{0})(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1)^7=0$$

۲۵ **۱** با توجه به توابع $f(x)=(2x^2-3)(3x-2)^3$ و $g(x)=\frac{2x^2-3x+2}{-4x+3}$، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f'(x)=4x(3x-2)^3+3(3)(3x-2)^2(2x^2-3) \\ g'(x)=\dfrac{(4x-3)(-4x+3)-(-4)(2x^2-3x+2)}{(-4x+3)^2} \end{cases}$$

حال برویم سراغ بررسی گزینه‌ها:

۱) $f'(0)=0+3(3)(4)(-3)=-108$

۲) $g'(1)=\frac{(1)(-1)+4(1)}{(-1)^2}=\frac{3}{1}=3$

۳) $f'(1)=4(1)^3+3(3)(1)^2(-1)=4-9=-5$

۴) $g'(2)=\frac{(8-3)(-8+3)+4(8-6+2)}{(-8+3)^2}=\frac{5(-5)+4(4)}{25}=\frac{-25+16}{25}=-\frac{9}{25}$

بنابراین مقدار $f'(0)$، کوچک‌تر از سایر موارد است.

۲۶ **۲** با توجه به توابع $f(x)=(\sqrt{4x+1})(x^3-2)$ و $g(x)=\frac{8x-3}{\sqrt{x}}$، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f'(x)=(\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}})(x^3-2)+(3x^2)(\sqrt{4x+1}) \\ g'(x)=\dfrac{8(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(8x-3)}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=\frac{2}{3}(6)+12(3)=4+36=40 \\ g'(4)=\dfrac{8(2)-\frac{1}{4}(29)}{4}=\dfrac{16-\frac{29}{4}}{4}=\dfrac{\frac{35}{4}}{4}=\dfrac{35}{16} \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{f'(2)}{2g'(4)}=\frac{40}{2(\frac{35}{16})}=\frac{40}{\frac{35}{8}}=\frac{320}{35}=\frac{64}{7}$$

۲۷ **۱** همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$

نیم‌نگاه

به خاطر بسپارید:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad \text{و} \quad y=\frac{au+b}{cu+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$$

۲) $y=(1+\sqrt{x})^3\Rightarrow y'=3(\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})^2\Rightarrow y'(1)=3(\frac{1}{2})(4)=6$

۳) $y=x^3(3x-2)\Rightarrow y'=3x^2(3x-2)+3x^3\Rightarrow y'(1)=3(3-2)+3=6$

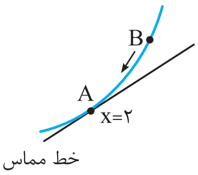
۴) $y=\frac{x^3-1}{x^3+1}\xRightarrow{x^3=u} y'=\frac{(1\times 1)-(-1\times 1)}{(x^3+1)^2}\times 3x^2=\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}\Rightarrow y'(1)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

پس مشتق گزینهٔ (۱) از همه کم‌تر است.

۲۸ **۳**

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\frac{3x-1}{2x+1})'}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}=\frac{\frac{3-(-2)}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}\Rightarrow f'(2)=\frac{\frac{5}{25}}{2}=\frac{\frac{1}{5}}{2}=\frac{1}{10}=0/1$$

۲۹ ۳ نقطهٔ A به طول ۲ و نقطهٔ B به طول $2+\Delta x$ را روی نمودار تابع $f(x)=x^{10}-1$ در نظر بگیرید. اگر $\Delta x\to 0$، آن‌گاه شیب خط گذرنده بر این دو نقطه، برابر با شیب خط مماس بر منحنی تابع در نقطه به طول $x=2$، به عبارتی $f'(2)$ است. بنابراین داریم:

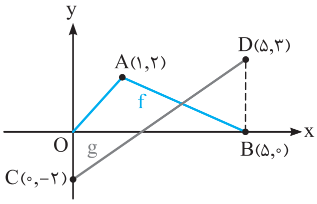


$$f(x)=x^{10}-1\Rightarrow f'(x)=10x^9\Rightarrow f'(2)=10\times 2^9=10\times 512=5120$$

۳۰ ۳ می‌توان نوشت:

$$\left(fg-\frac{1}{f^2}\right)'=f'\times g+g'\times f-\frac{0-2f'f}{f^4}\overset{x=2}{=\!=}f'(2)g(2)+g'(2)f(2)+\frac{2f'(2)}{f^3(2)}=(3\times 3)+(-1)(-1)+\frac{2\times 3}{(-1)^3}=9+1-6=4$$

۳۱ ۱ با توجه به نمودار داده‌شده، ضابطهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} O(0,0)\ \text{و}\ A(1,2)\Rightarrow m_{OA}=\frac{2-0}{1-0}=2\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}\ OA: y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x\\ A(1,2)\ \text{و}\ B(5,0)\Rightarrow m_{AB}=\frac{0-2}{5-1}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}\ AB: y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\end{cases}$$

بنابراین تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}2x & ;\ 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & ;\ 1<x\le 5\end{cases}$ می‌باشد. از طرفی داریم:

$$C(0,-2)\ \text{و}\ D(5,3)\Rightarrow m_{CD}=\frac{3-(-2)}{5-0}=\frac{5}{5}=1\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}\ CD: y-(-2)=1(x-0)\Rightarrow y=x-2\Rightarrow g(x)=x-2$$

حال از تابع $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مشتق می‌گیریم:

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}\Rightarrow k'(\tfrac{1}{2})=\frac{f'(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2})-g'(\frac{1}{2})f(\frac{1}{2})}{g^2(\frac{1}{2})}$$

$$\xrightarrow[g(x)=x-2\Rightarrow g'(x)=1]{f(x)=2x\Rightarrow f'(x)=2}\frac{(2)(-\frac{3}{2})-(1)(1)}{(-\frac{3}{2})^2}=\frac{-3-1}{\frac{9}{4}}=\frac{-4}{\frac{9}{4}}=-\frac{16}{9}$$

هم‌چنین می‌توان نوشت:

$$k'(3)=\frac{f'(3)g(3)-g'(3)f(3)}{g^2(3)}\xrightarrow[g(x)=x-2]{f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}\frac{(-\frac{1}{2})(1)-(1)(1)}{(1)^2}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{1}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow k'(\tfrac{1}{2})-k'(3)=-\frac{16}{9}-(-\frac{3}{2})=\frac{-32+27}{18}=-\frac{5}{18}$$

۳۲ ۱ قرار است از عبارت $\left(\frac{16}{x}-x^{\frac{2}{3}}\right)^2$ مشتق بگیریم، پس داریم:

$$2\times\left(\frac{16}{x}-x^{\frac{2}{3}}\right)\times\left(\frac{-16}{x^2}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=2\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\frac{-16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\overset{x=-8}{=\!=}2\left(\frac{16}{-8}-\sqrt[3]{64}\right)\left(\frac{-16}{64}-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}}\right)$$

$$=2(-2-4)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=2(-6)\left(\frac{1}{12}\right)=-1$$

۳۳ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\times\frac{(2x-1)^2}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2$$

و حالا خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times\left(\frac{2x-1}{x}\right)'\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\left(\frac{2(0)-(-1)(1)}{x^2}\right)\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x^3}$$

۳۴ ۲ *هواستون به نیم‌نگاه زیر باشه!*

نیم‌نگاه

برای تعیین مشتق توابع قدرمطلقی در نقاطی که عبارت داخل قدرمطلق را **صفر نمی‌کنند**، باید در همسایگی نقطهٔ مورد نظر، قدرمطلق را از بین ببریم و بعد مشتق بگیریم.

در همسایگی $x=-1$، عبارت x^2-2x مثبت و x منفی می‌شود، پس: $y=|x|+|x^2-2x|=-x+x^2-2x=x^2-3x\Rightarrow y'=2x-3\Rightarrow y'(-1)=-5$

۳۵ ۱ در همسایگی $-۴/۵ = -\frac{۹}{۲}$ ، $x=$ داریم:

$$y=-(x)-(x+۱)-(x+۲)-(x+۳)-(x+۴)+(x+۵)+(x+۶)+\cdots+(x+۹۹)$$

$$\Rightarrow y'=\underbrace{-۱-۱-۱-۱-۱}_{۵\text{تا}}\underbrace{+۱+۱+\cdots+۱}_{۹۵\text{تا}}=-۵+۹۵=۹۰$$

۳۶ ۴ منظور از $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$ ، همان مشتق تابع f در $x=۴$ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=x^۲-\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=۲x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=۸-\frac{۱}{۴}=\frac{۳۱}{۴}$$

۳۷ ۳ منظور از $\lim\limits_{t\to ۰}\frac{f(۳+t)-f(۳)}{t}$ ، همان $f'(۳)$ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=x\sqrt[۳]{۳x-۱}\Rightarrow f'(x)=(۱)\sqrt[۳]{۳x-۱}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x-۱)^۲}}(x)\xrightarrow{x=۳}f'(۳)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۶۴}}(۳)=۲+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۱}{۴}$$

۳۸ ۱ از تساوی $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۳}{۲}$ نتیجه می‌گیریم $f'(۱)=\frac{۳}{۲}$ ، بنابراین می‌توان نوشت:

$$y=(x^۲-۲x)f(x)\Rightarrow y'=(۲x-۲)f(x)+f'(x)(x^۲-۲x)\xrightarrow{x=۱}y'(۱)=\underbrace{(۲-۲)}_{۰}f(۱)+f'(۱)(۱-۲)\xrightarrow{f'(۱)=\frac{۳}{۲}}۰+\frac{۳}{۲}(-۱)=-\frac{۳}{۲}$$

۳۹ ۱ منظور از $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ همان $f'(۲)$ است، پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳\Rightarrow f'(x)=۳\times\frac{\frac{-۷}{(۲x-۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}}\times\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲\Rightarrow f'(۲)=۳\times\left(-\frac{۷}{۴}\right)\times۴=-۲۱$$

۴۰ ۴ خواستهٔ مسأله، مشتق fg در $x=۲$ است. پس ابتدا تابع fg را می‌سازیم و بعد از آن مشتق می‌گیریم:

$$(fg)(x)=(x^۲-x)\sqrt{۲x}\Rightarrow (fg)'(x)=(۲x-۱)\sqrt{۲x}+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}(x^۲-x)\Rightarrow (fg)'(۲)=(۴-۱)(۲)+\frac{۱}{۲}(۲)+۱=۶+۱=۷$$

۴۱ ۴

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{g(۹+h)}{f(۹+h)}-\frac{g(۹)}{f(۹)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(\frac{g}{f})(۹+h)-(\frac{g}{f})(۹)}{h}=(\frac{g}{f})'(۹)$$

حال برویم سراغ تشکیل $(\frac{g}{f})(x)$:

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۱}=\frac{\cancel{x+۱}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\frac{۱}{x-۱}\Rightarrow(\frac{g}{f})'(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow(\frac{g}{f})'(۹)=\frac{-۱}{(۹-۱)^۲}=-\frac{۱}{۶۴}$$

۴۲ ۱ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

ساده‌سازی، سپس مشتق‌گیری

گاهی اوقات می‌توانیم قبل از مشتق گرفتن، ضابطهٔ تابع را از طریق اتحادها، فاکتورگیری و ... ساده‌تر کنیم.

مثال مشتق تابع $y=\frac{\sqrt{x^۲+x}+x}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$y=\frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})}}{\cancel{x+۱+\sqrt{x}}}=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

مثال اگر $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-x+۲}$ و $g(x)=\frac{x+۲}{x^۲-x+۲}$ باشند، حاصل عبارت $xf'(x)+g'(x)+f(x)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $x+۱$ ۳) $x-۱$ ۴) -۱

پاسخ عبارت $xf'(x)+g'(x)+f(x)$ ، همان مشتق $xf(x)+g(x)$ است، بنابراین داریم:

$$(xf(x)+g(x))'=\left(\frac{x^۳}{x^۲-x+۲}+\frac{x+۲}{x^۲-x+۲}\right)'=\left(\frac{x^۳+x+۲}{x^۲-x+۲}\right)'=\left(\frac{(x+۱)\cancel{(x^۲-x+۲)}}{\cancel{x^۲-x+۲}}\right)'=(x+۱)'=۱\Rightarrow$$ (گزینهٔ ۱)

می‌توان نوشت:

$$y=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}{x+\sqrt[۳]{x}}=\frac{\cancel{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}}{\sqrt[۳]{x}\,\cancel{(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\Rightarrow y=x^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'=-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۴}{۳}}\Rightarrow y'(۱)=-\frac{۱}{۳}$$

۴۳ **۴** قبل از مشتق گرفتن، بهتر است ضابطهٔ تابع را ساده کنیم:

$$y=\frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}=\frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\cancel{\sqrt{x+5}}(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\cancel{\sqrt{x}}\,\cancel{\sqrt{x+5}}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\Rightarrow y'(4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

۴۴ **۴** ابتدا قیافهٔ تابع $y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^3(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2$ را کمی تغییر می‌دهیم:

$$y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})\underbrace{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2}=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})(\underbrace{(x+4)-(x+1)}_{3})^2=9(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})$$

و حالا مشتق می‌گیریم و $x=0$ را جای‌گذاری می‌نماییم:

$$\Rightarrow y'=9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\Rightarrow y'(0)=9\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=9\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{4}$$

۴۵ **۱** از روی $y=\sqrt[5]{\frac{2x}{x+1}}$ نتیجه می‌گیریم:

$$y^5=\frac{2x}{x+1}\Rightarrow (x+1)y^5=2x\xrightarrow{\text{مشتق}}1\times y^5+5y^4y'(x+1)=2\Rightarrow y^5+5xy^4y'+5y^4y'=2$$

۴۶ **۱** ابتدا تابع $f(x)-g(x)$ را می‌سازیم و بعد از آن مشتق می‌گیریم، به این صورت:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{x^2+x+1}}=x-1\Rightarrow (f(x)-g(x))'=(x-1)'=1$$

۴۷ **۱** خواستهٔ مسأله، مشتق تابع $(f.g)(x)$ است، پس:

$$(f.g)(x)=\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\cancel{x+2}}\times\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cancel{\sqrt{x+1}}}=\frac{x+2}{x+1}\Rightarrow (f\times g)'(x)=\frac{1-2}{(x+1)^2}\Rightarrow (f\times g)'(1)=-\frac{1}{4}$$

۴۸ **۲** با توجه به این‌که قرار است عبارت $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)$ را به‌دست آوریم، پس بهتر است ابتدا $\frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهیم و بعد از آن مشتق بگیریم. به این صورت:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{1}{x^2-(x^2+1)}=\frac{1}{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}=-1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Rightarrow\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0\Rightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0$$

۴۹ **۱** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

مشتق عامل صفر

وقتی عبارتی شامل عاملی به صورت $(x-a)$ باشد، یعنی به صورت ضرب $(x-a)$ در بقیهٔ عوامل باشد، آن‌گاه به این عامل، چون بـه ازای $x=a$ صـفر می‌شود، عامل صفر گفته می‌شود و برای محاسبهٔ مشتق آن عبارت در $x=a$، کافی است فقط از عامل صـفر مشـتق بگیـریم و در حـد بقیـهٔ عوامل غیرصفر در نقطهٔ مورد نظر، ضرب کنیم.

مثال اگر $f(x)=\frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟ $(h(-1)\neq 0)$

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ در $x=-1$، عبارت $x+1$ عامل صفرشونده است، پس:

$$f(x)=(x+1)\times\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}\Rightarrow f'(x)=1\times\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}\Rightarrow f'(-1)=1\times\frac{\cancel{h(-1)}}{(-1)\cancel{h(-1)}}=-1\Rightarrow$$ (گزینهٔ ۲)

مثال مشتق تابع $y=(x-2)^2\frac{\sqrt{2x}}{x^2+1}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{8}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ در $x=2$، عبارت $(x-2)^2$ عامل صفرشونده است، پس:

$$y=(x-2)^2\frac{\sqrt{2x}}{x^2+1}\Rightarrow y'=2(x-2)\times\frac{\sqrt{2x}}{x^2+1}\xrightarrow{x=2}y'(2)=2(0)\times\frac{2}{5}=0\Rightarrow$$ (گزینهٔ ۱)

هم می‌توانیم از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ استفاده کنیم و هم از روش مشتق عامل صفر. در این‌جا با روش دوم، مسأله را حل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\overbrace{(x-1)}^{\text{عامل صفر}}\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\times\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}\xrightarrow{x=1}f'(1)=\frac{1}{16}$$

۵۰ | ۱ **روش اول:** حد خواسته‌شده، همان $f'(-1)$ است، پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\underbrace{(x^2-x-2)}_{\text{عامل صفر}}\sqrt[3]{x^2-7x}\Rightarrow f'(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x^2-7x}\xrightarrow{x=-1}f'(-1)=(-3)\sqrt[3]{8}=-3(2)=-6$$

روش دوم: از تعریف مشتق در $x=-1$ هم می‌توانیم آن را حل کنیم، یعنی حاصل $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$ را حساب کنیم (محاسبهٔ این حد را به شما می‌سپاریم).

۵۱ | ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را کمی تغییر می‌دهیم، سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{(x^3-27)(x-3)}{x+2}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)(x-3)}{x+2}=\frac{\overbrace{(x-3)^2}^{\text{عامل صفر}}(x^2+3x+9)}{x+2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x+2}\xrightarrow{x=3}f'(3)=\frac{2(0)(27)}{5}=0$$

۵۲ | ۲ $f'(a)$ را می‌خواهیم، پس $(x-a)$ عامل صفر است، بنابراین:

$$f(x)=\underbrace{(x-a)}_{\text{عامل صفر}}(2x-a)(3x-a)\cdots(nx-a)\Rightarrow f'(x)=(1)(2x-a)(3x-a)\cdots(nx-a)$$

$$\xrightarrow{x=a}f'(a)=a\times 2a\times\cdots\times(n-1)a=(1\times2\times\cdots\times(n-1))\times a^{n-1}=(n-1)!a^{n-1}$$

۵۳ | ۱ ضابطهٔ تابع را به فرم $y=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$ می‌نویسیم و چون مشتق تابع در $x=1$ پرسیده شده، پس $(x-1)$ عامل صفر است و داریم:

$$y'=(1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}\xrightarrow{x=1}y'(1)=\sqrt[3]{(1+1)^2(1-2)}=\sqrt[3]{-4}=-\sqrt[3]{4}$$

۵۴ | ۲ برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}+x\sqrt{2x}$ در $x=1$، باید از عبارت‌های $(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}$ و $x\sqrt{2x}$ به‌طور جداگانه مشتق بگیریم و $x=1$ را جای‌گذاری نماییم. توجه داشته باشید که مشتق عبارت $(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}$ به ازای $x=1$ برابر صفر می‌باشد، زیرا هر دو عامل (x^2-1) و $\sqrt[3]{x-1}$ در $x=1$ برابر صفر هستند. در نتیجه فقط از عامل $x\sqrt{2x}$ مشتق می‌گیریم و $x=1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=x\sqrt{2x}\Rightarrow f'(x)=1\times\sqrt{2x}+\frac{2}{2\sqrt{2x}}\times x\xrightarrow{x=1}f'(1)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۵۵ | ۱ ضابطهٔ تابع را به فرم $y=(x-3)|x-3|+(x-3)\sqrt[3]{x-4}$ می‌نویسیم و داریم:

$$y=(x-3)(|x-3|+\sqrt[3]{x-4})\xrightarrow{(x-3)\text{ عامل صفر است.}}y'=(1)(|x-3|+\sqrt[3]{x-4})\xrightarrow{x=3}y'(3)=-1$$

۵۶ | ۳ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

مشتق‌های یک‌طرفه

همان‌طور که می‌دانید برای محاسبهٔ مشتق تابع f در نقطهٔ x_0، باید یکی از حدهای زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad \text{یا}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

بر این اساس، مشتق‌های چپ و راست تابع f در x_0 را به شکل زیر نشان می‌دهند:

$$\begin{cases}\text{مشتق راست تابع } f \text{ در } x_0: f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & \text{یا}\quad \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ \text{مشتق چپ تابع } f \text{ در } x_0: f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & \text{یا}\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{cases}$$

◉ منظور از مشتق چپ تابع f در x_0، شیب مماس بر نمودار f در سمت چپ x_0 (نیم‌مماس چپ) و منظور از مشتق راست تابع f در x_0، شیب مماس بر نمودار f در سمت راست x_0 (نیم‌مماس راست) می‌باشد.

◉ معمولاً در توابع شامل قدرمطلق یا جزءصحیح و توابع چندضابطه‌ای، مشتق‌های چپ و راست را بررسی می‌کنیم (اگر تابع شامل قدرمطلق یا جزءصحیح باشد، اول باید آن‌ها را از بین ببریم و بعد مشتق بگیریم).

◉ *فقط باید حواستون باشه که شرط اول مشتق‌پذیری در یک نقطه، پیوستگی در اون نقطه هست (که در ادامهٔ درسنامه به طور مفصل در موردش باهاتون حرف می‌زنیم).*

مشتق پذیری

اگر تابع $y = f(x)$ در $x = a$ $(a \in D_f)$ مشتق‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم که اولاً تابع در این نقطه، **پیوسته** است. ثانیاً مشتق‌های چپ و راست در این نقطه، **موجود و با هم برابرند**، یعنی:

$f'_-(a) = f'_+(a) =$ عدد معین : شرط مشتق‌پذیری	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$: شرط پیوستگی

توجه داشته باشید که اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه، پیوسته است. یعنی پیوسته بودن تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری آن است، نه شرط کافی. در واقع تابع می‌تواند در $x = a$ پیوسته باشد ولی در آن نقطه، مشتق‌پذیر نباشد، مثل نقطهٔ **گوشه** (نقطه‌ای است که پیوسته می‌باشد ولی مشتق‌های راست و چپ آن، دو عدد نابرابر و یا یکی عدد و دیگری بی‌نهایت است). اما امکان ندارد که تابع در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد و پیوسته نباشد.

مثال **به ازای چه مقادیری از a و b، تابع** $y = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & ; x \geq 2 \\ x^3 & ; x < 2 \end{cases}$ **در $x = 2$ مشتق‌پذیر است؟**

پاسخ باید اولاً تابع در $x = 2$ پیوسته باشد، ثانیاً مشتق‌های چپ و راست آن، موجود و برابر باشند، پس:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 8 \Rightarrow 4a + 2b = 7 \quad (1)$$: شرط پیوستگی

$$\begin{cases} \text{اگر } x > 2 \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'_+(2) = 4a + b \\ \text{اگر } x < 2 \Rightarrow y' = 3x^2 \Rightarrow y'_-(2) = 12 \end{cases} \Rightarrow 4a + b = 12 \quad (2) \xrightarrow{(1),(2)} b = -5 \ , \ a = \frac{17}{4}$$: شرط مشتق‌پذیری

مثال **تابع با ضابطهٔ** $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x - 3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ **بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است، b کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در $x = 1$ هم مشتق‌پذیر است، در نتیجه:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax^3 + bx) = a + b \ , \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2\sqrt{4x - 3} = 2 \ , \ f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$: شرط پیوستگی

$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'_-(1) = 3a + b \\ x > 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \times \dfrac{4}{2\sqrt{4x - 3}} = \dfrac{4}{\sqrt{4x - 3}} \Rightarrow f'_+(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow 3a + b = 4 \quad (2)$$: شرط مشتق‌پذیری

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = 1 \ , \ b = 1 \Rightarrow$$ (گزینهٔ ۱)

قرار است که مشتق چپ و راست را در $x = 1$ تعیین کنیم تا مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ به‌دست آید، پس داریم:

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x} + x - 1 = x^{\frac{3}{2}} + x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \\ x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x} - (x - 1) = x^{\frac{3}{2}} - x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow f'_-(1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

۵۷ **۲** حد موردنظر همان $f'_-(2)$ است، پس خواهیم داشت:

$$f(x) = |x - 2| + \sqrt{2x} \xrightarrow{x\to 2^- \Rightarrow |\overbrace{x-2}^{\text{منفی}}| = -x + 2} f(x) = -x + 2 + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'_-(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۵۸ **۱** با فاکتورگیری از $|x+۳|$ خواهیم داشت:

$$f(x)=|x+۳|(|x+۱||x+۲|+|x+۲||x+۴|)$$

قرار است مشتق چپ f را در $x=-۳$ حساب کنیم، پس $x<-۳$ است، در نتیجه $|\underbrace{x+۳}_{\text{منفی}}|=-x-۳$ و داریم:

$$f(x)=\underbrace{(-x-۳)}_{\text{عامل صفر}}(|x+۱||x+۲|+|x+۲||x+۴|)\Rightarrow f'(x)=(-۱)(|x+۱||x+۲|+|x+۲||x+۴|)$$

$$\Rightarrow f'_-(-۳)=(-۱)(۲\times۱+۱\times۱)=-۳$$

۵۹ **۲** می‌توان نوشت:

$$x\to(-۳)^+ : f(x)=([x]-|\underbrace{x}_{\text{منفی}}|)\sqrt[۳]{۹x}=([(-۳)^+]-(-x))\sqrt[۳]{۹x}=(-۳+x)\sqrt[۳]{۹x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{۹x}+\frac{۹}{۳\sqrt[۳]{(۹x)^۲}}\times(-۳+x)\Rightarrow f'_+(-۳)=-۳+\frac{۹}{۳\times۹}\times(-۶)=-۳-۲=-۵$$

۶۰ **۲** تابع در $x_۰=۳$ از چپ و راست پیوسته است، بنابراین:

$$\begin{cases}x\to۳^- : f(x)=-(x-۳)[۹^-]=-(x-۳)(۸)=-۸x+۲۴\Rightarrow f'_-(۳)=-۸\\ x\to۳^+ : f(x)=(x-۳)[۹^+]=(x-۳)(۹)=۹x-۲۷\Rightarrow f'_+(۳)=۹\end{cases}$$

پس اختلاف مشتق چپ و مشتق راست تابع در $x_۰=۳$ برابر ۱۷ است.

۶۱ **۲** از آن‌جا که تابع در $x=\sqrt{۲}$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ در این نقطه، موجود نمی‌باشد. بنابراین سؤال ایراد دارد! اما چیزی که طراح در نظر گرفته، این است:

$$f(x)=x^۳-[۲x^۲]x\Rightarrow\begin{cases}x\to(\sqrt{۲})^+ : f(x)=x^۳-[\underbrace{۲(۲^+)}_{۴^+}]x=x^۳-۴x\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۴\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲})=۳(۲)-۴=۲\\ x\to(\sqrt{۲})^- : f(x)=x^۳-[\underbrace{۲(۲^-)}_{۴^-}]x=x^۳-۳x\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳\Rightarrow f'_-(\sqrt{۲})=۳(۲)-۳=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲})-f'_-(\sqrt{۲})=۲-۳=-۱$$

۶۲ **۳** منظور از $\lim\limits_{h\to۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$، همان $f'_+(۱)$ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}\xRightarrow{x\to۱^+}f(x)=\sqrt{x^۲-[۱^+]+|\underbrace{x}_{+}|}=\sqrt{x^۲-۱+x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲-۱+x}}\Rightarrow f'_+(۱)=\frac{۲(۱)+۱}{۲\sqrt{۱-۱+۱}}=\frac{۳}{۲}$$

۶۳ **۴** منظور از $\lim\limits_{h\to۰^-}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$، همان $f'_-(۳)$ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{x^۲}{|۱-x|}[x]\xRightarrow{x\to۳^-}f(x)=\frac{x^۲}{|\underbrace{۱-x}_{\text{منفی}}|}\times[۳^-]=\frac{x^۲}{x-۱}\times۲=\frac{۲x^۲}{x-۱}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(۴x)(x-۱)-(۱)(۲x^۲)}{(x-۱)^۲}\xRightarrow{x\to۳^-}f'_-(۳)=\frac{(۱۲)(۲)-۱۸}{(۲)^۲}=\frac{۲۴-۱۸}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۶۴ **۳** مشتق چپ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در $x=۰$ را به کمک تعریف حدی تعیین می‌کنیم:

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}-۰}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-(۱-x^۲)}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{\overset{-x}{|x|}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to۰^-}\frac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۵ **۱** شیب نیم‌مماس راست، یعنی مشتق راست و شیب نیم‌مماس چپ، یعنی مشتق چپ که آن‌ها را با تعریف حدی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{شیب نیم مماس راست}: f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{\overbrace{|x-۱|}^{(\cancel{x-۱})}(x-m)}{\cancel{x-۱}}=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-m)=۱-m \\ \text{شیب نیم مماس چپ}: f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{\overbrace{|x-۱|}^{-(\cancel{x-۱})}(x-m)}{\cancel{x-۱}}=\lim\limits_{x\to ۱^-}-(x-m)=-(۱-m) \end{cases}$$

وقتی دو خط برهم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر ۱- می‌شود، بنابراین چون نیم مماس‌های چپ و راست تابع در $x=۱$ برهم عمود هستند، پس $f'_-(۱)\times f'_+(۱)=-۱$ می‌باشد، یعنی داریم:

$$-(۱-m)(۱-m)=-۱\Rightarrow(۱-m)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}۱-m=۱\Rightarrow m=۰\\ ۱-m=-۱\Rightarrow m=۲\end{cases}$$

۶۶ **۲** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) تابع f در $x=۲$ پیوسته است $(\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=f(۲)=۷)$ و می‌توان نوشت:

$$f'(x)=۴x\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=۴(۲)=۸$$

همان‌طور که می‌بینید تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است.

ب) تابع g در $x=۲$ پیوسته نیست (زیرا $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=\lim\limits_{x\to ۲}x^۲=۴$ و $g(۲)=۱$)، بنابراین تابع g در $x=۲$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

پ) تابع h در $x=۲$ پیوسته نیست (زیرا $\lim\limits_{x\to ۲^-}h(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}x^۲=۴$ و $\lim\limits_{x\to ۲^+}h(x)=\lim(x+۳)=۵$)، بنابراین تابع h در $x=۲$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۶۷ **۱** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) $x=۰$ متعلق به دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ نیست و در نتیجه تابع در این نقطه، ناپیوسته می‌باشد، پس تابع f در این نقطه، مشتق‌پذیر نیست.

ب) تابع $g(x)=[x]$ در $x=۰$ پیوسته نیست (زیرا $\lim\limits_{x\to ۰^+}[x]=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}[x]=-۱$ که با هم برابر نیستند)، در نتیجه تابع g در این نقطه، مشتق‌پذیر نیست.

پ) تابع $h(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x=۰$ پیوسته است، پس مجاز به بررسی مشتق آن در $x=۰$ هستیم، بنابراین داریم:

$$\lim\limits_{x\to ۰}(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{h(x)-h(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-۰}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

بنابراین تابع h در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

ت) تابع $k(x)=\sqrt{x}$ در $x=۰$ پیوسته نیست، زیرا $x=۰$ نقطهٔ ابتدای دامنهٔ تابع است $[D_k=[۰,+\infty)]$ و در نتیجه تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

خلاصه این‌که هیچ‌کدام از توابع فوق در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیستند.

۶۸ **۲** تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است، پس اولاً در این نقطه، پیوسته است، ثانیاً مشتق‌های چپ و راست برابر دارد.

$$\text{شرط پیوستگی}: \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=f(۱)\Rightarrow ۱+a+b=-۲\Rightarrow a+b=-۳$$

$$\text{شرط مشتق‌پذیری}: \begin{cases}x>۱\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{۳}{x^۲}\Rightarrow f'_+(۱)=-۳\\ x<۱\Rightarrow f'(x)=۲x+a\Rightarrow f'_-(۱)=۲+a\end{cases}\Rightarrow ۲+a=-۳\Rightarrow a=-۵\xrightarrow{a+b=-۳}b=۲$$

۶۹ **۴** $f'(۱)$ موجود است، پس اولاً تابع در این نقطه، پیوسته است، ثانیاً مشتق‌های چپ و راست برابر دارد.

$$\text{شرط پیوستگی}: \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=f(۱)\Rightarrow a+b=۴$$

$$\text{شرط مشتق‌پذیری}: \begin{cases}x>۱\Rightarrow f(x)=(۲x+۶)^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{۲}{۳}\times ۲\times(۲x+۶)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'_+(۱)=\dfrac{۴}{۳}\times(۸)^{-\frac{۱}{۳}}=\dfrac{۴}{۳}\times\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۲}{۳}\\ x<۱\Rightarrow f(x)=ax+b\Rightarrow f'(x)=a\Rightarrow f'_-(۱)=a\end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)}a=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{a+b=۴}b=۴-\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$

۷۰ **۴** تابع f در $x=۱$ پیوسته است، زیرا:

$$f(۱)=۰\ ,\ \lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{g(x)+۱}=\frac{۰}{۲+۱}=۰\Rightarrow f(۱)=\lim_{x\to ۱}f(x)=۰$$

پس مجاز به بررسی $f'(۱)$ هستیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{\cancel{x-۱}}{g(x)+۱}-۰}{\cancel{x-۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{g(x)+۱}=\frac{۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۷۱ **۱** تابع در $x=۰$ پیوسته است، زیرا:

$$f(۰)=۰\ ,\ \lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۲+۲^{-\frac{۱}{x^۲}}}=\frac{۰}{۲+۲^{(\frac{-۱}{۰^+})}}=\frac{۰}{۲+۲^{-\infty}}=\frac{۰}{۲+۰}=۰\Rightarrow f(۰)=\lim_{x\to ۰}f(x)=۰$$

پس مجازیم مشتق تابع را در $x=۰$ بررسی کنیم، بنابراین:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\cancel{x}}{۲+۲^{-\frac{۱}{x^۲}}}-۰}{\cancel{x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۲+۲^{-\frac{۱}{x^۲}}}=\frac{۱}{۲+۲^{(\frac{-۱}{۰^+})}}=\frac{۱}{۲+۲^{-\infty}}=\frac{۱}{۲+۰}=\frac{۱}{۲}$$

۷۲ **۲** تابع f در بازهٔ $[۲,۳)$ مشتق‌پذیر است، زیرا در هر نقطه از بازهٔ $(۲,۳)$ مشتق‌پذیر می‌باشد و در $x=۳$ هم مشتق چپ دارد که از ضابطهٔ $f(x)=-x+۴$ به دست می‌آید. همچنین این تابع در بازهٔ $[-۲,۰)$ هم مشتق‌پذیر است، زیرا در هر نقطه از بازهٔ $(-۲,۰)$ مشتق‌پذیر می‌باشد و در $x=-۲$ هم مشتق راست دارد که از ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲$ به‌دست می‌آید. ضمناً تابع در بازهٔ $(۱,۴)$ هم‌مشتق‌پذیر می‌باشد و مشتق آن در این بازه از ضابطهٔ $f(x)=-x+۴$ به‌دست می‌آید. اما در بازهٔ $[-۳,-۱]$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در $x=-۲$ ناپیوسته است و در نتیجه تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۷۳ **۲** تابع f همواره مشتق‌پذیر است، پس در $x=-۲$ (نقطهٔ مرزی) هم مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین در این نقطه، پیوسته هم است و مشتق‌های چپ و راست در این نقطه، با هم برابر هستند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}(ax^۲+bx+۴)=a(-۲)^۲+b(-۲)+۴=۴a-۲b+۴\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}(x^۳-x)=(-۲)^۳-(-۲)=-۸+۲=-۶\\ f(-۲)=a(-۲)^۲+b(-۲)+۴=۴a-۲b+۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴a-۲b+۴=-۶\Rightarrow ۴a-۲b=-۱۰\xRightarrow{\div ۲} ۲a-b=-۵\qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\text{اگر } x>-۲\Rightarrow f(x)=ax^۲+bx+۴\Rightarrow f'(x)=۲ax+b\Rightarrow f'_+(-۲)=۲a(-۲)+b=-۴a+b\\ \text{اگر } x<-۲\Rightarrow f(x)=x^۳-x\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱\Rightarrow f'_-(-۲)=۳(-۲)^۲-۱=۱۲-۱=۱۱\end{cases}\Rightarrow -۴a+b=۱۱\qquad (۲)$$

$$\xRightarrow{(۱),(۲)}\begin{cases}۲a-b=-۵\\ -۴a+b=۱۱\end{cases}\xRightarrow{\text{جمع}} -۲a=۶\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=-۱$$

حال برای محاسبهٔ مقدار $f(۱)$ سراغ ضابطهٔ بالایی $(f(x)=ax^۲+bx+۴)$ می‌رویم:

$$f(۱)=a(۱)^۲+b(۱)+۴\xlongequal{a=-۳,b=-۱}-۳-۱+۴=۰$$

۷۴ **۳** نقاط مرزی تابع عبارت‌اند از: $x=۰,۱,۲$ که فقط $x=۱$ یک نقطهٔ ناپیوسته برای تابع f است (چون حد چپ و راست آن با هم مساوی نیستند)، پس $x=۱$ یک نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است. از طرفی نقاط $x=۰$ و $x=۲$ نیز مشتق‌ناپذیرند (با وجود این‌که پیوسته‌اند ولی مشتق چپ و راست نابرابر دارند)، ببینید:

$$\begin{cases}x<۰\Rightarrow f(x)=۱\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow f'_-(۰)=۰ \quad \text{و} \quad x>۰\Rightarrow f(x)=x+۱\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow f'_+(۰)=۱\\ x<۲\Rightarrow f(x)=۲x+۲\Rightarrow f'(x)=۲\Rightarrow f'_-(۲)=۲ \quad \text{و} \quad x>۲\Rightarrow f(x)=x^۲+۲\Rightarrow f'(x)=۲x\Rightarrow f'_+(۲)=۴\end{cases}$$

در نتیجه تابع f در یک نقطه، ناپیوسته و در سه نقطه، مشتق‌ناپذیر است.

۷۵ **۲** با توجه به نمودار تابع f، نتیجه می‌گیریم:

الف) نادرست است، زیرا مقدار مشتق تابع f در همهٔ نقاط از بازهٔ $(۲,۳)$ برابر صفر است.

ب) نادرست است، زیرا مقدار مشتق تابع f در $x=۰$ برابر صفر است (به دلیل این‌که مماس بر منحنی در این نقطه، افقی است و دارای شیب صفر می‌باشد).

پ) درست است، زیرا شیب خطوط مماس بر منحنی تابع f در هر نقطه از بازهٔ $(-\infty,-۲)$، برابر عددی منفی می‌باشد.

ت) نادرست است، زیرا تابع f در $x=۳$ ناپیوسته می‌باشد و در نتیجه مشتق تابع در این نقطه وجود ندارد.