فصل

تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک تبدیل‌ها نمودار بسیاری از توابع دیگری که از آن تابع نتیجه می‌شوند، رسم کنیم. در این بخش انتقال، انبساط و انقباض عمودی و افقی و تبدیل‌های دیگری را یادآوری و تکمیل خواهیم کرد. نمودارهای مهمی که زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند نیز در انتهای درسنامهٔ این بخش قرار دارند.

۱ انتقال نمودارها در راستای محور عرض‌ها (انتقال عمودی): با فرض مثبت‌بودن k داریم:

برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

برای رسم نمودار $y=f(x)-k$، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

بدیهی است اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، در این صورت $(x_\circ, y_\circ+k)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

۲ انتقال نمودارها در راستای محور طول‌ها (انتقال افقی): با فرض مثبت‌بودن k داریم:

برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

بدیهی است اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(x+k)$ تعریف شده باشد، در این صورت $(x_\circ-k, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

۳ انبساط و انقباض عمودی: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. به عبارت بهتر داریم:

اگر $k>1$، نمودار f در امتداد محور عرض‌ها با ضریب k کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)

اگر $\circ<k<1$، نمودار f در امتداد محور عرض‌ها با ضریب k جمع می‌شود. (انقباض عمودی)

بدیهی است اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف شده باشد، در این صورت $(x_\circ, ky_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

۴ انبساط و انقباض افقی: برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. به عبارت بهتر داریم:

اگر $k>1$، نمودار f در امتداد محور طول‌ها با ضریب $\frac{1}{k}$ جمع می‌شود. (انقباض افقی)

اگر $\circ<k<1$، نمودار f در امتداد محور طول‌ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود. (انبساط افقی)

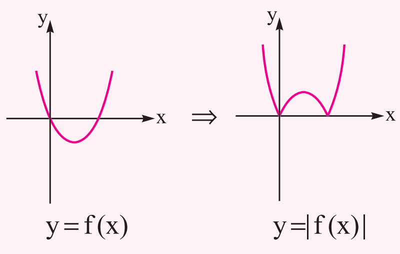
بدیهی است اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $f(x)=f(kx)$ تعریف شده باشد، در این صورت $(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع g و متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

۵ انعکاس: برای رسم نمودار $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم و برای رسم نمودار $y=f(-x)$، قرینهٔ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها رسم می‌کنیم.

۶ رسم نمودار $y=|f(x)|$ از روی $y=f(x)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینهٔ قسمتی از نمودار این تابع را که زیر محور xها قرار دارد نسبت به محور xها به دست می‌آوریم و بخش پایین محور x ها را حذف می‌کنیم.

به مثال روبه‌رو توجه کنید:

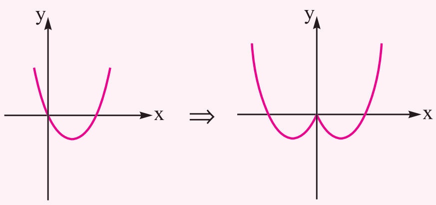
$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq \circ \\ -f(x) & f(x)<\circ \end{cases}$$



۷ رسم نمودار $y=f(|x|)$ از روی $y=f(x)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به ازای $x\geq ۰$ رسم کرده، سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور yها به دست می‌آوریم.

به مثال زیر توجه کنید:

$$y=f(|x|)\Rightarrow\begin{cases}y=f(x) & x\geq ۰\\ y=f(-x) & x<۰\end{cases}$$

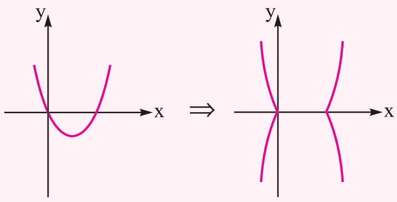


$y=f(x)$ $\Rightarrow$ $y=f(|x|)$

۸ رسم نمودار $|y|=f(x)$ از روی $y=f(x)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به ازای $y\geq ۰$ رسم کرده، سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.

به مثال زیر توجه کنید:

$$|y|=f(x)\Rightarrow\begin{cases}y=f(x) & y\geq ۰\\ y=-f(x) & y<۰\end{cases}$$



$y=f(x)$ $\Rightarrow$ $|y|=f(x)$

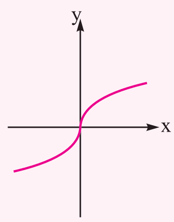
تذکرمهم سؤال متداولی که معمولاً در ذهن دانش‌آموزان ایجاد می‌شود آن است که اگر در رسم یک تابع نیاز به استفاده از چند تبدیل باشد ترتیب استفادهٔ آن‌ها چگونه است. در پاسخ باید بگوییم، در حالت کلی ترتیب خاصی نمی‌توان ارائه کرد، هر ترتیبی که بتوان با استفاده از ۸ مورد قبل به نمودار تابع خواسته‌شده رسید، مناسب است. برای درک بهتر به نمونه‌های زیر توجه کنید:

نحوهٔ رسم تابع $y=f(۲-x)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ می‌بریم تا تابع $f(۲+x)$ به دست آید، سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $f(۲-x)$ حاصل شود.

تذکر برای رسم تابع $y=f(۲-x)$ می‌توانیم ابتدا تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم تا تابع $y=f(-x)$ به دست آید، سپس نمودار را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا تابع $y=f(-(x-۲))=f(۲-x)$ حاصل شود. امّا در این کتاب مبنای حل تست‌ها، همان روش قبل است که اجرای آن برای دانش‌آموزان نیز ساده‌تر می‌باشد.

نحوهٔ رسم تابع $y=f(۲x-۱)$: ابتدا نمودار $f(x)$ را ۱ واحد به سمت راست می‌بریم تا تابع $f(x-۱)$ به دست آید، سپس طول‌های نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم (انقباض افقی) تا $f(۲x-۱)$ حاصل شود.

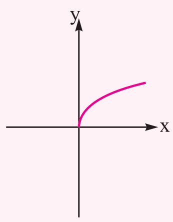
نمودارهای معروف: بهتر است نمودار توابع زیر را به خاطر بسپارید. با بعضی از این نمودارها در سال گذشته آشنا شده‌اید و نمودارهایی که برای شما تازگی دارد را در بخش یا فصل‌های بعدی خواهید آموخت.



$y=\sqrt[۳]{x}$

$D_y=\mathbb{R}$

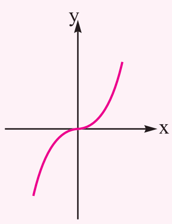
$R_y=\mathbb{R}$



$y=\sqrt{x}$

$D_y=[۰,+\infty)$

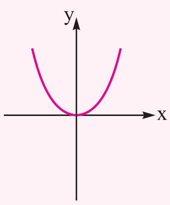
$R_y=[۰,+\infty)$



$y=x^۳$

$D_y=\mathbb{R}$

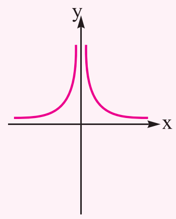
$R_y=\mathbb{R}$



$y=x^۲$

$D_y=\mathbb{R}$

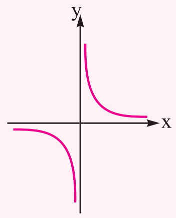
$R_y=[۰,+\infty)$



$y=\frac{۱}{x^۲}$

$D_y=\mathbb{R}-\{۰\}$

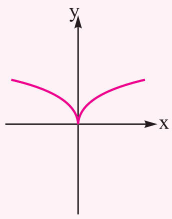
$R_y=(۰,+\infty)$



$y=\frac{۱}{x}$

$D_y=\mathbb{R}-\{۰\}$

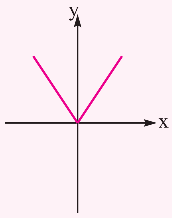
$R_y=\mathbb{R}-\{۰\}$



$y=\sqrt[۳]{x^۲}$

$D_y=\mathbb{R}$

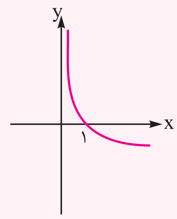
$R_y=[۰,+\infty)$



$y=|x|$

$D_y=\mathbb{R}$

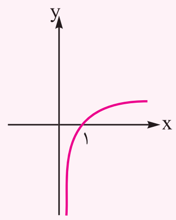
$R_y=[۰,+\infty)$



$y=\log_a x \quad (۰<a<۱)$

$D_y=(۰,+\infty)$

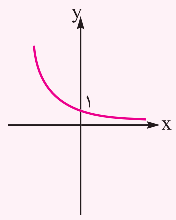
$R_y=\mathbb{R}$



$y=\log_a x \quad (a>۱)$

$D_y=(۰,+\infty)$

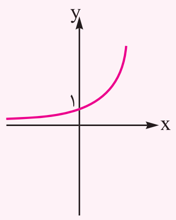
$R_y=\mathbb{R}$



$y=a^x \quad (۰<a<۱)$

$D_y=\mathbb{R}$

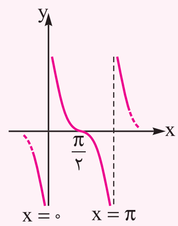
$R_y=(۰,+\infty)$



$y=a^x \, (a>۱)$

$D_y=\mathbb{R}$

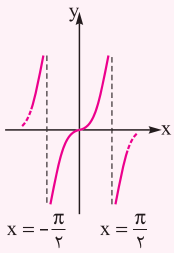
$R_y=(۰,+\infty)$



$y=\cot x$

$D_y=\mathbb{R}-\underset{(k\in\mathbb{Z})}{\{k\pi\}}$

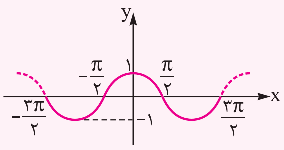
$R_y=\mathbb{R}$



$y=\tan x$

$D_y=\mathbb{R}-\underset{(k\in\mathbb{Z})}{\{k\pi+\frac{\pi}{۲}\}}$

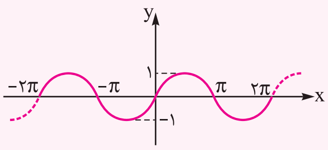
$R_y=\mathbb{R}$



$y=\cos x$

$D_y=\mathbb{R}$

$R_y=[-۱,۱]$



$y=\sin x$

$D_y=\mathbb{R}$

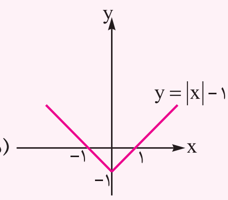
$R_y=[-۱,۱]$

مثال به کمک انتقال، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

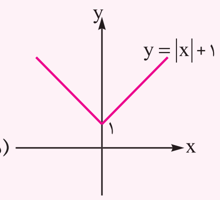
الف) $y=|x+۱|$ ب) $y=|x-۱|$ پ) $y=|x|+۱$ ت) $y=|x|-۱$

ث) $y=۲|x|$ ج) $y=\frac{۱}{۲}|x|$ چ) $y=-|x|$ ح) $y=|-x|$

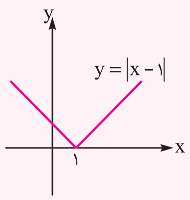
پاسخ از روی نمودار $y=|x|$ هر یک از توابع را رسم می‌کنیم (انتقال انجام‌شده را زیر نمودار نوشته‌ایم).:

ت)


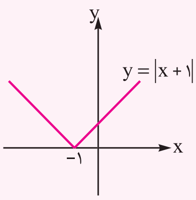
(یک واحد به سمت پایین)

پ)


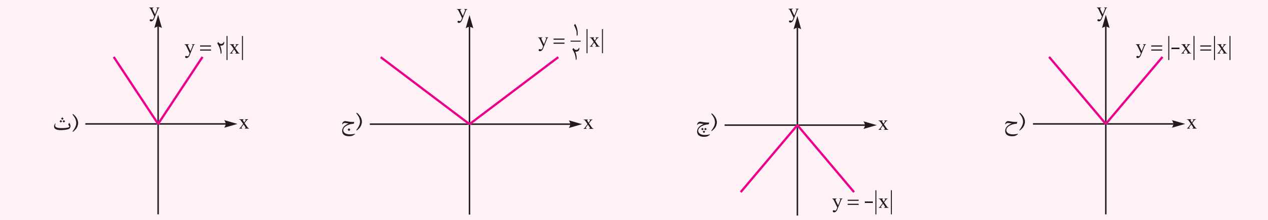
(یک واحد به سمت بالا)

ب)


(یک واحد به سمت راست)

الف)


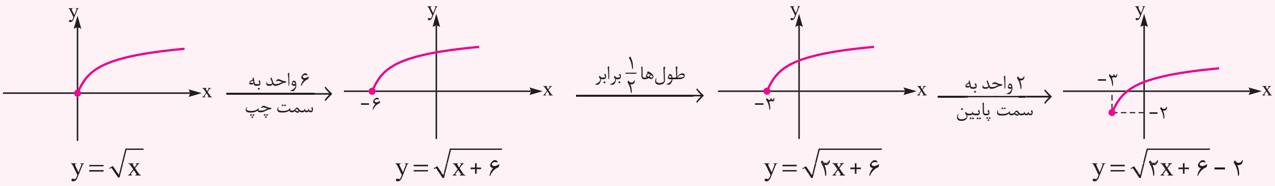
(یک واحد به سمت چپ)



(عرض‌ها دو برابر) (عرض‌ها نصف) (قرینه نسبت به محور طول‌ها) (قرینه نسبت به محور عرض‌ها)

مثال **نمودار تابع $y=\sqrt{2x+6}-2$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.**

پاسخ مراحل رسم نمودار به ترتیب زیر می‌باشد:



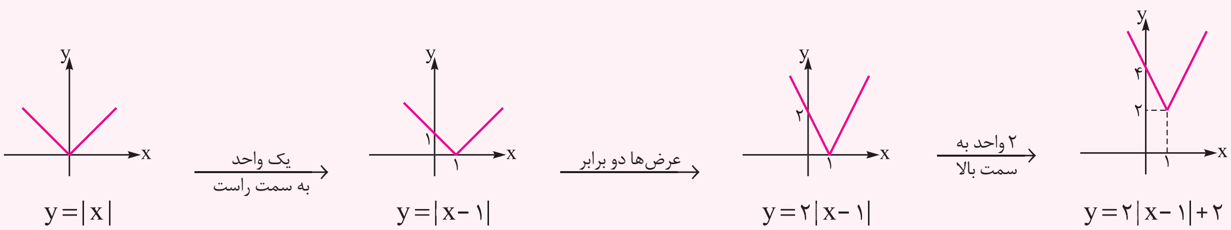
برای رسم دقیق‌تر نمودار، می‌توان نقاط تلاقی نمودار را با محورهای مختصات، تعیین کرد:

$$x=0\Rightarrow y=\sqrt{6}-2\simeq 2/4-2=0/4 \quad \text{و} \quad y=0\Rightarrow \sqrt{2x+6}=2\Rightarrow 2x+6=4\Rightarrow x=-1$$

با توجه به نمودار به دست آمده، دامنه، بازهٔ $[-3,+\infty)$ و برد، بازهٔ $[-2,+\infty)$ می‌باشد.

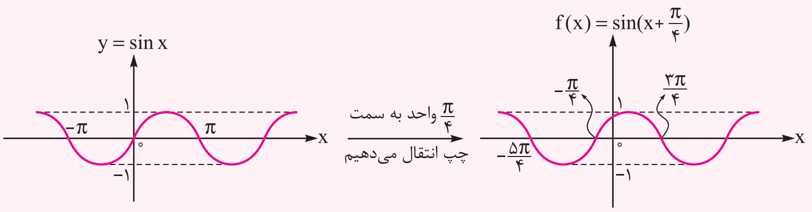
مثال **نمودار تابع $y=2|x-1|+2$ را رسم کنید.**

پاسخ با توجه به نمودار $y=|x|$ و استفاده از انتقال، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

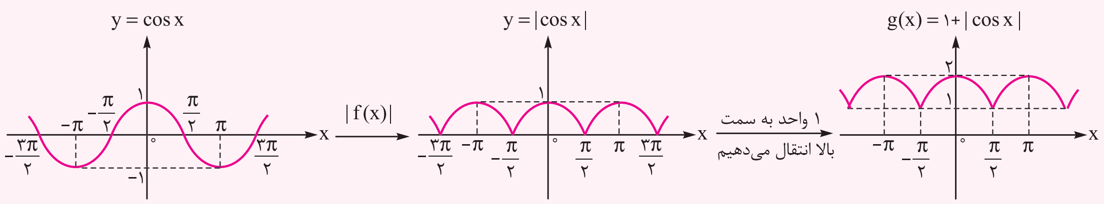


مثال **نمودار توابع مثلثاتی $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$، $g(x)=1+|\cos x|$ و $h(x)=\sin(2|x|)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.**

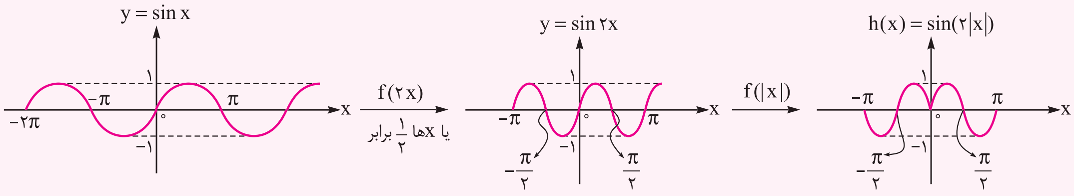
پاسخ با توجه به نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ داریم:



$$\Rightarrow\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\R_f=[-1,1]\end{cases}$$



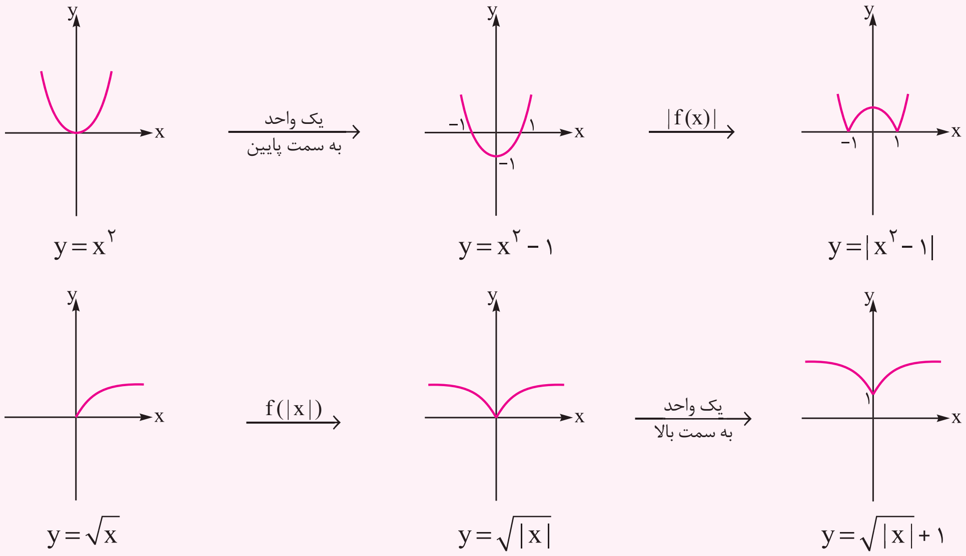
$$\Rightarrow\begin{cases}D_g=\mathbb{R}\\R_g=[1,2]\end{cases}$$



$\Rightarrow \begin{cases} D_h = \mathbb{R} \\ R_h = [-۱, ۱] \end{cases}$

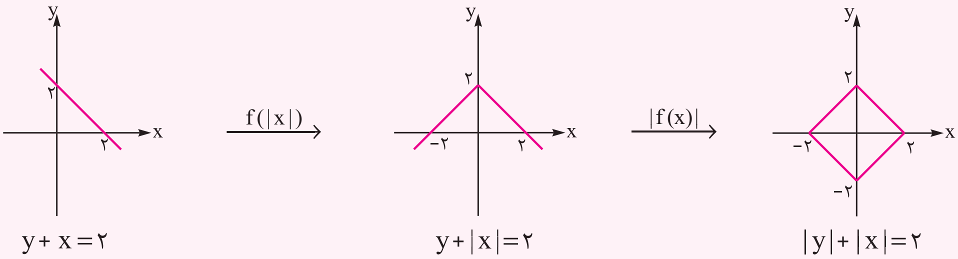
مثال نمودار تابع $y = |x^۲ - ۱|$ و $y = \sqrt{|x|} + ۱$ را رسم کنید.

پاسخ نمودار هر تابع را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



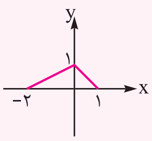
مثال نمودار رابطهٔ $|y| + |x| = ۲$ را رسم کنید.

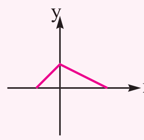
پاسخ مراحل رسم به صورت زیر است:

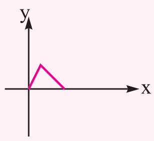


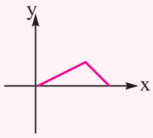
نمودار حاصل، نمودار مربعی به قطر ۲ است.

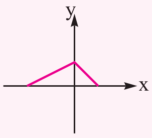
تست اگر نمودار $y = f(-x + ۲)$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y = f(۲x + ۱)$ کدام است؟



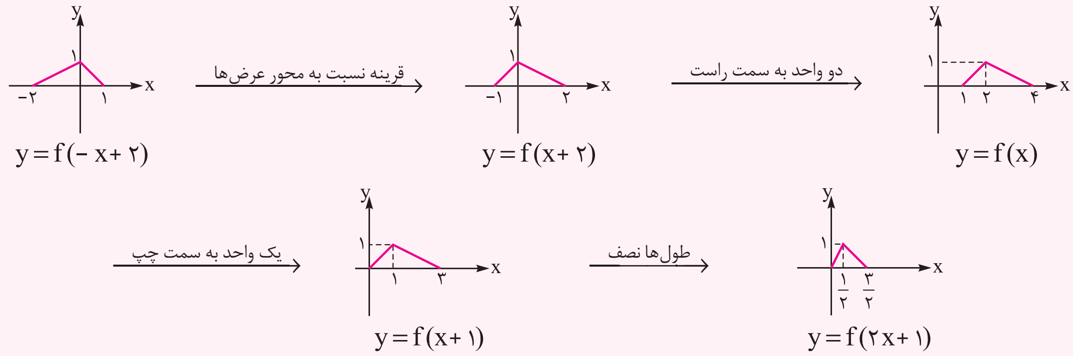
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

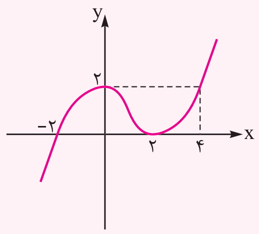
پاسخ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به دست آورده، سپس از روی آن نمودار $y=f(۲x+۱)$ را رسم می‌کنیم:



برای این‌که مستقیم از نمودار $y=f(x+۲)$ به $y=f(x+۱)$ برسی فقط لازمه که نمودار رو یک واحد به سمت راست ببری.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست اگر نمودار $y=f(x-۲)+۲$ به صورت روبه‌رو باشد،دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-۴)f(۲x)}$ کدام است؟



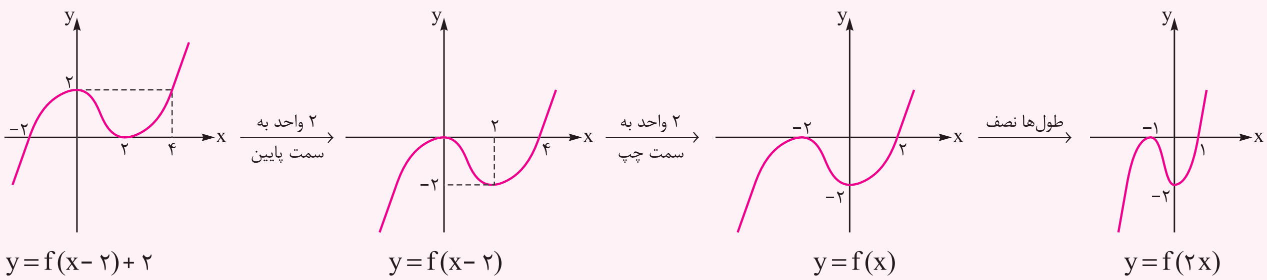
۱) $(-\infty,-۲]\cup[۲,۳]$

۲) $(-\infty,-۲]\cup[۱,۲]$

۳) $[۱,۲]\cup[۳,+\infty)$

۴) $[-۲,۱]\cup[۲,+\infty)$

پاسخ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را مشخص کرده و سپس از روی آن نمودار $y=f(۲x)$ را رسم می‌کنیم:



حال برای آن‌که نامعادلهٔ $(x^۲-۴)f(۲x)\geq ۰$ را حل کنیم، جدول تعیین علامت را برای عبارت $P(x)=(x^۲-۴)f(۲x)$ رسم می‌کنیم:

x		−۲		−۱		۱		۲	
$x^۲-۴$	+	۰	−		−		−	۰	+
$f(۲x)$	−		−	۰	−	۰	+		+
$(x^۲-۴)f(۲x)$	−	۰	+	۰	+	۰	−	۰	+

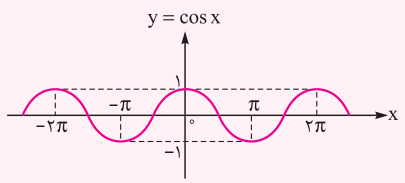
با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع به صورت $D_y=[-۲,۱]\cup[۲,+\infty)$ می‌باشد.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

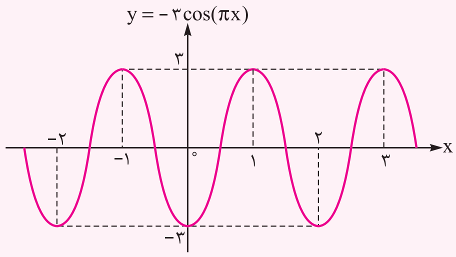
تست اگر برد تابع $y=-۳\cos(\pi x)$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم:



حال xها را $\frac{۱}{\pi}$ برابر و yها را سه برابر کرده و نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

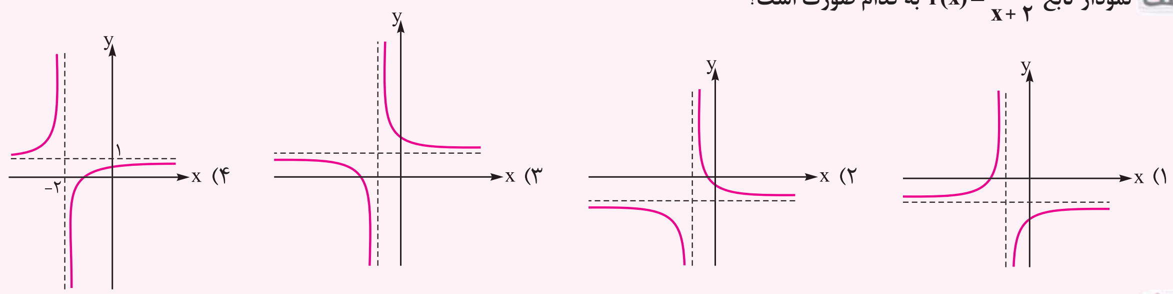


پس برد تابع، بازهٔ $[-۳,۳]$ می‌باشد. در نتیجه:

$$a=-۳, b=۳ \Rightarrow b-a=۶$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست **نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x+۲}$ به کدام صورت است؟**

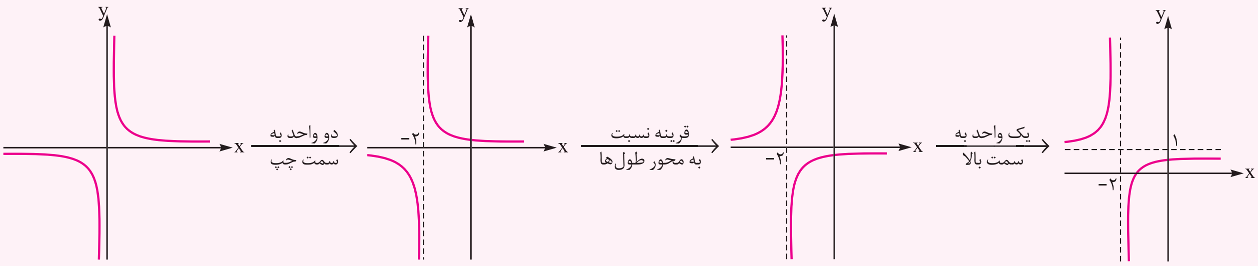


پاسخ روش اول:

ابتدا کسر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{x+۲-۱}{x+۲}=۱-\frac{۱}{x+۲}$$

حال با توجه به نمودار $y=\frac{۱}{x}$ نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

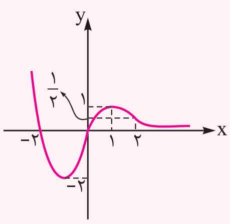


$y=\frac{۱}{x}$ ، $y=\frac{۱}{x+۲}$ ، $y=-\frac{۱}{x+۲}$ ، $y=۱-\frac{۱}{x+۲}$

روش دوم (عددگذاری):

$f(۰)=\frac{۱}{۲}$ و $f(-۱)=۰$ است. تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد، گزینهٔ (۴) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست **اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، برد تابع $y=f(|x|-۲)$ کدام است؟**



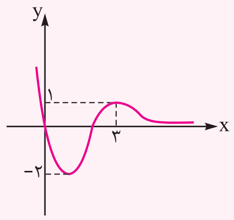
۱) $[۰,۲]$

۲) $[۰,۱]$

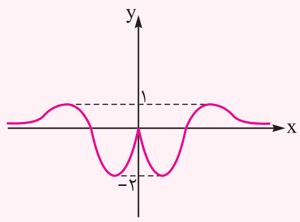
۳) $[-۲,۱]$

۴) $(۰,\frac{۱}{۴})$

پاسخ ابتدا نمودار $y=f(x-۲)$ و سپس $y=f(|x|-۲)$ را رسم می‌کنیم:



$y=f(x-۲)$



$y=f(|x|-۲)$

با توجه به شکل به دست آمده، برد تابع، بازهٔ $[-۲,۱]$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته در تابع $y=mf(ax+b)+n$، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند.

نکته اگر $D_{f(x)}=[m,n]$ باشد، برای محاسبهٔ $D_{f(ax+b)}$، کافی است نامعادلهٔ $m\le ax+b\le n$ را حل کرده، سپس محدودهٔ x را به دست آوریم که همان دامنهٔ $f(ax+b)$ می‌باشد.

نکته اگر $D_{f(ax+b)}=[m,n]$ باشد، برای محاسبهٔ $D_{f(x)}$، کافی است از نامساوی $m\le x\le n$، محدودهٔ $ax+b$ را به دست آوریم.

تست **اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۱,۷]$ باشد، دامنهٔ تابع $-۲f(۳x+۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۲۵ ۲) ۲۳ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ کافی است نامعادلهٔ $-۱\le ۳x+۱\le ۷$ را حل کنیم:

$$-۱\le ۳x+۱\le ۷ \Rightarrow -۲\le ۳x\le ۶ \Rightarrow -\frac{۲}{۳}\le x\le ۲ \Rightarrow D_{-۲f(۳x+۱)}=[-\frac{۲}{۳},۲]$$

بنابراین دامنهٔ تابع، شامل سه عدد صحیح $\{۰,۱,۲\}$ است. پس گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

تست **اگر دامنهٔ تابع $y=f(۲x-۳)$ برابر $[-۱,۲]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(۳x+۱)$ کدام است؟**

۱) $[-۱۴,۴]$ ۲) $[-۵,۱]$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۱۲,۲]$

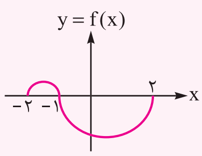
پاسخ ابتدا به کمک دامنهٔ تابع $y=f(۲x-۳)$، دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را تعیین کرده و سپس دامنهٔ $y=f(۳x+۱)$ را مشخص می‌کنیم:

$$-۱\le x\le ۲ \Rightarrow -۲\le ۲x\le ۴ \Rightarrow -۵\le ۲x-۳\le ۱ \Rightarrow D_{f(x)}=[-۵,۱]$$

$$-۵\le ۳x+۱\le ۱ \Rightarrow -۶\le ۳x\le ۰ \Rightarrow -۲\le x\le ۰ \Rightarrow D_{f(۳x+۱)}=[-۲,۰]$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

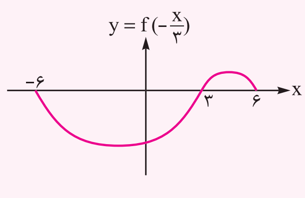
تست **شکل روبه‌رو، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x}{\sqrt[۴]{f(-\frac{x}{۳})}}$ کدام است؟**



۱) $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۶,-۳)$

۳) $(۳,۶)$ ۴) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

پاسخ ابتدا تابع $y=f(-\frac{x}{۳})$ را رسم می‌کنیم:



حال باید $f(-\frac{x}{۳})>۰$ باشد، پس $D_f=(۳,۶)$. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست **اگر برد تابع $f(x)$ به صورت $R_f=[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\sqrt{۳}]$ باشد، برد تابع $y=-\sqrt{۲}f(-۳x+۱)+۲$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ می‌دانیم در تابع $y=mf(ax+b)+n$، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند. چون $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le f(x)\le\sqrt{۳}$، پس $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le f(-۳x+۱)\le\sqrt{۳}$. بنابراین داریم:

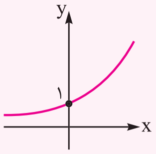
$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le f(-۳x+۱)\le\sqrt{۳}\Rightarrow-\sqrt{۶}\le-\sqrt{۲}f(-۳x+۱)\le۱\Rightarrow-\sqrt{۶}+۲\le-\sqrt{۲}f(-۳x+۱)+۲\le۳\Rightarrow R_y=[-\sqrt{۶}+۲,۳]$$

پس برد تابع، شامل اعداد $\{۰,۱,۲,۳\}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

در سال گذشته توابع نمایی و لگاریتم را به طور مفصل خوانده‌اید. حال به خاطر کاربرد این دو تابع مهم در این فصل به طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

تابع نمایی: هر تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ که در آن a عدد مثبت و مخالف یک است، **تابع نمایی** می‌نامیم. برای توابع نمایی دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف $(a>۱)y=a^x$: نمودار تابع در این حالت به صورت روبه‌رو است:



از روی نمودار تابع، ویژگی‌های زیر را نتیجه می‌گیریم:

۱ دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

۲ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

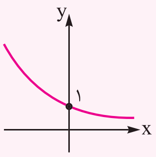
۳ همواره از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد.

۴ با افزایش مقدار x، مقدار y افزایش می‌یابد (در درس بعدی یاد می‌گیرید که به این توابع صعودی می‌گویند.) و با کاهش مقدار x، مقدار y نیز کاهش یافته و به سمت صفر نزدیک می‌شود.

نکته اگر $a>۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}۱<a<a^۲<a^۳<\cdots<a^n\\ \sqrt{a}>\sqrt[۳]{a}>\sqrt[۴]{a}>\cdots>۱\end{cases}$$

ب $(۰<a<۱)\,y=a^x$: نمودار تابع در این حالت به صورت روبه‌رو است:



از روی نمودار تابع، ویژگی‌های زیر را نتیجه می‌گیریم:

۱ دامنهٔ تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

۲ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

۳ همواره از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد.

۴ با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد و به سمت صفر نزدیک می‌شود. (در درس بعدی یاد می‌گیرید که به این توابع نزولی می‌گویند.)

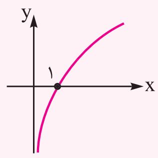
نکته اگر $۰<a<۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}۱>a>a^۲>a^۳>\cdots>a^n>۰\\ ۰<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt[۴]{a}<\cdots<\sqrt[n]{a}<۱\end{cases}$$

تابع لگاریتمی: وارون یک تابع نمایی را تابع لگاریتمی می‌نامیم. تابع نمایی $f(x)=a^x$ با شرط $a>۱$ و $a\neq۱$ یک‌به‌یک است و از این رو دارای تابع وارون $f^{-۱}$ می‌باشد که تابع لگاریتمی با پایه یا مبنای a نامیده شده و با نماد $y=\log_a x$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر داریم:

$$\log_a x=y\Leftrightarrow x=a^y$$

مانند آن‌چه در تابع نمایی اشاره شد، در تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ $(a\neq ۱, a>۰)$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:



الف $(a>۱)\log_a x$: با توجه به نمودار تابع، ویژگی‌های زیر را نتیجه می‌گیریم:

۱ دامنهٔ تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن، تمام اعداد حقیقی است.

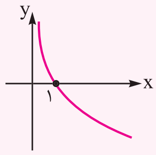
۲ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

۳ همواره از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد و با کاهش مقدار x مقدار y کاهش یافته و به سمت $-\infty$ می‌رود.

۴ با افزایش مقدار x، مقدار y افزایش می‌یابد (تابع صعودی است).

۵ این تابع و وارونش، نقطهٔ تقاطع ندارند.

ب $(۰<a<۱)\ y=\log_a x$: با توجه به نمودار تابع، ویژگی‌های زیر را نتیجه می‌گیریم:



۱ دامنهٔ تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن، تمام اعداد حقیقی است.

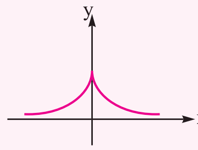
۲ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

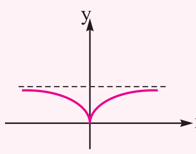
۳ همواره از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد و با کاهش مقدار x، مقدار y افزایش یافته و به سمت $+\infty$ می‌رود.

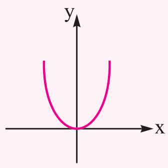
۴ با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد (تابع نزولی است).

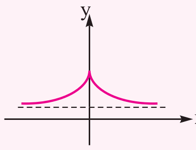
۵ این تابع و وارونش، یک نقطهٔ تقاطع دارند.

تست نمودار تابع $y=|۲^{-|x|}-۱|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ روش اول: در تابع $y=|(\frac{۱}{۲})^{|x|}-۱|$ با توجه به این که $۰<\frac{۱}{۲}<۱$ است، به ترتیب مراحل زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

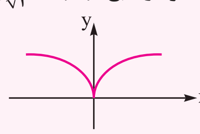
$y=(\frac{۱}{۲})^x$ ، $y=(\frac{۱}{۲})^{|x|}$ ، $y=(\frac{۱}{۲})^{|x|}-۱$ ، $y=|(\frac{۱}{۲})^{|x|}-۱|$

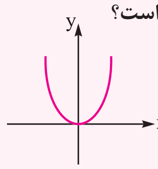
روش دوم: به کمک عددگذاری، کافی است $y(۰)$ و $y(۱۰)$ را به دست آوریم:

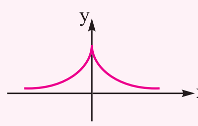
$$y(۰)=۰, y(۱۰)=|\frac{۱}{۲^{۱۰}}-۱|\simeq ۰/۹۹۹$$

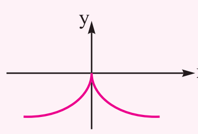
تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد، گزینهٔ (۲) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست نمودار تابع $y=\log_{\sqrt{۲}}(۱+|x|)$ کدام است؟

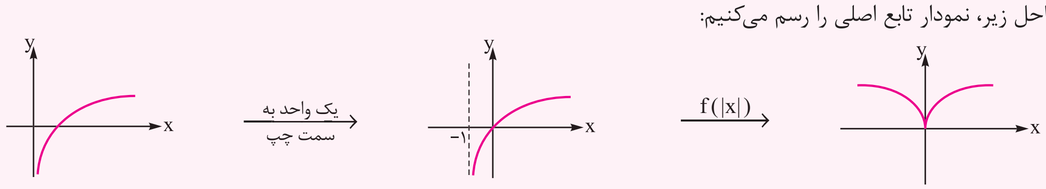
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ ابتدا نمودار $y=\log_{\sqrt{۲}} x$ را رسم می‌کنیم. (در این تابع چون $\sqrt{۲}>۱$ است، پس در نمودار آن با افزایش مقدار x، مقدار y زیاد می‌شود)، سپس به ترتیب مراحل زیر، نمودار تابع اصلی را رسم می‌کنیم:



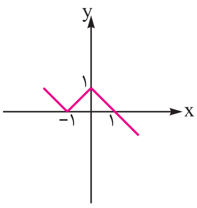
$y=\log_{\sqrt{۲}} x$ ، $y=\log_{\sqrt{۲}}(۱+x)$ ، $y=\log_{\sqrt{۲}}(۱+|x|)$

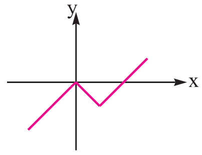
بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

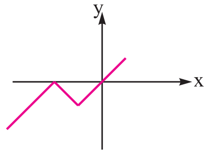
پرسش های چهارگزینه ای

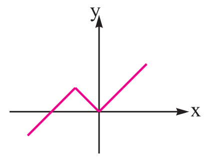
تبدیل نمودار تابع

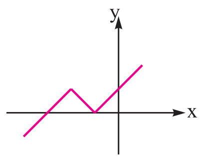
۱- اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=-f(x+1)$ به کدام صورت است؟



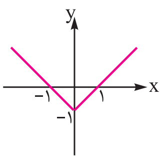
۱) 

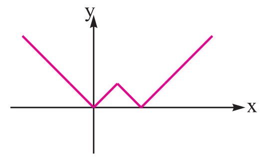
۲) 

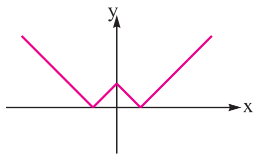
۳) 

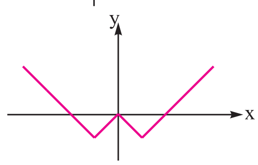
۴) 

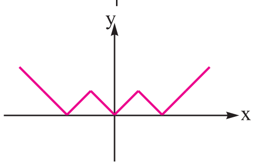
۲- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=|f(x-1)|$ کدام است؟



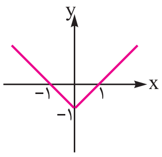
۱) 

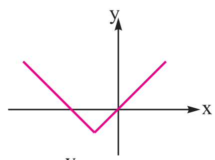
۲) 

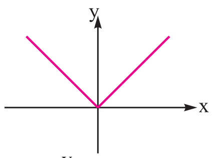
۳) 

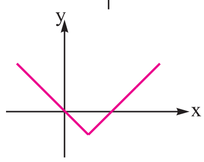
۴) 

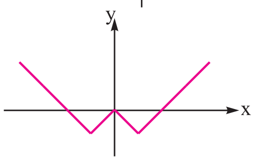
۳- اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ کدام است؟

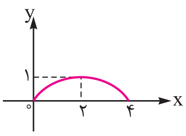


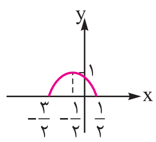
۱) 

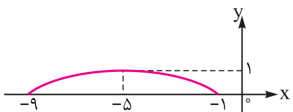
۲) 

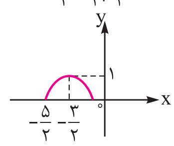
۳) 

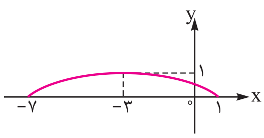
۴) 

۴- هرگاه نمودار $y=f(x)$ به صورت  باشد، نمودار $y=f(1-2x)$ به کدام صورت زیر است؟

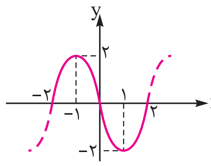
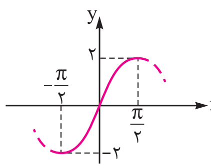
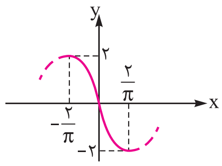
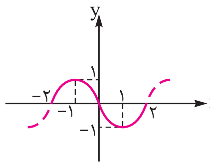
۱) 

۲) 

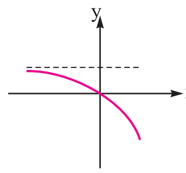
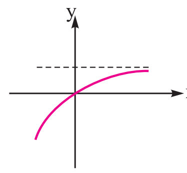
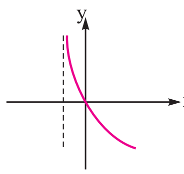
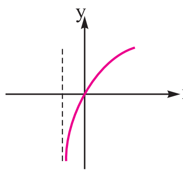
۳) 

۴) 

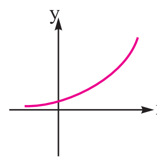
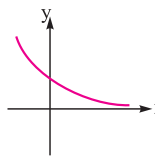
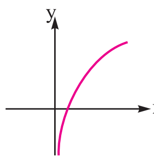
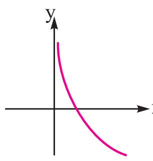
۵- نمودار تابع $f(x)=۲\cos(\frac{\pi}{۲}(x+۱))$ به کدام صورت زیر است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

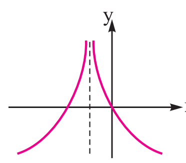
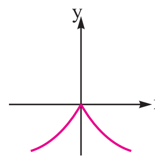
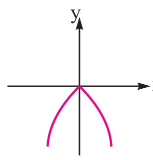
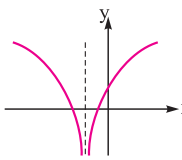
۶- نمودار تابع $y=۱-(\frac{۳}{۲})^x$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

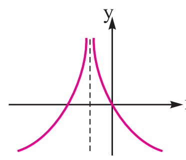
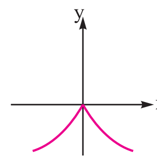
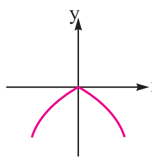
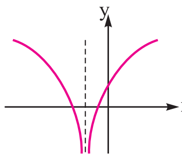
۷- نمودار $y=\frac{۴^x}{۲^{۳x-۱}}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

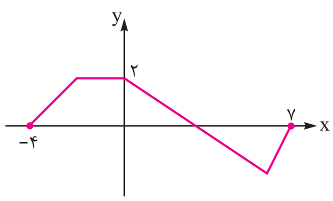
۸- نمودار تابع $y=\log_{۰/۲}(|x|+۱)$ کدام است؟

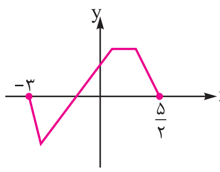
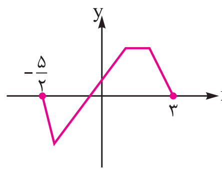
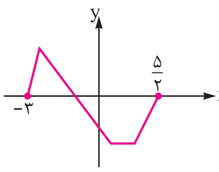
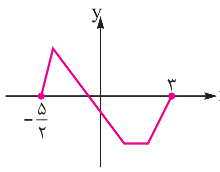
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹- نمودار تابع $y=\log_{۰/۲}|x+۱|$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۰- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=f(۱-۲x)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

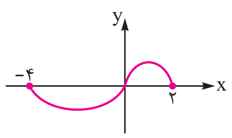


۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۱- مساحت محدود به نمودار $y=|۲x-۱|-۳$ و محور xها کدام است؟

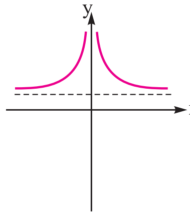
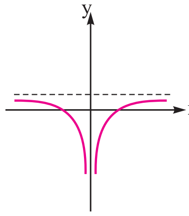
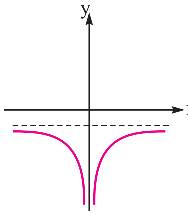
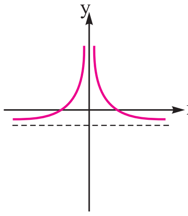
۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۱۲- اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{x+۱}{\sqrt{-f(-۲x)}}$ کدام است؟

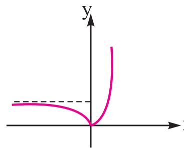
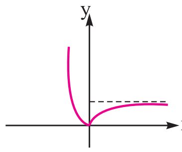
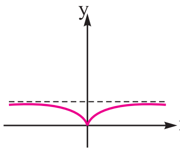
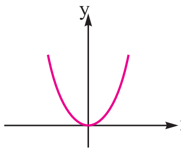


۱) $(-۱,۰)$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(۰,۲)$
۴) $(۰,۱)$

۱۳- نمودار تابع $y=۱-\frac{۱}{|x|}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۴- نمودار $y=|۱-(\sqrt{۲})^{x}|$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

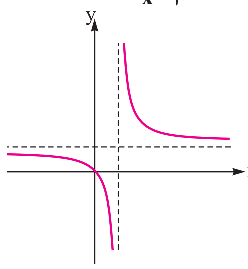
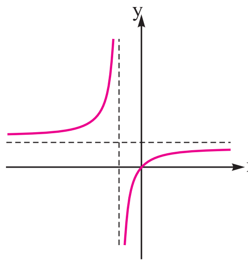
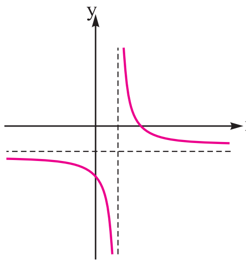
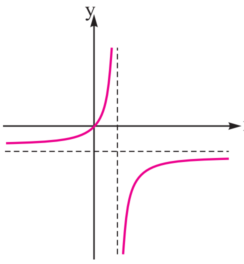
۱۵- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) ۲- ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

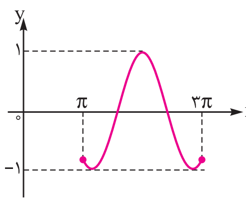
۱۶- سطح محصور بین نمودار $y=۳-||x|-۳|$ و محور طول‌ها کدام است؟

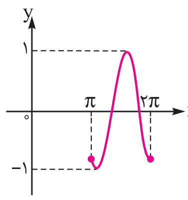
۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷

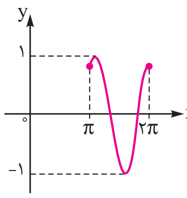
۱۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ به کدام صورت است؟

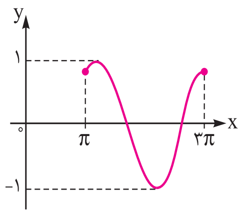
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۸- کدام گزینه بخشی از نمودار تابع $y=-\sin(۲x+\frac{\pi}{۴})$ را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

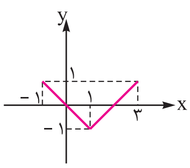
۳) 

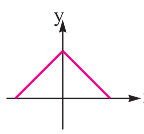
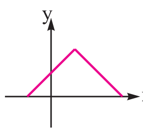
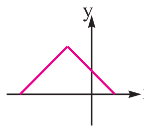
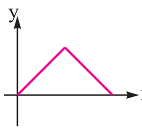
۴) 

۱۹- برد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{-۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\geq ۰\end{cases}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۲۰- اگر نمودار $y=-f(۲x)+۱$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=f(۳x+۲)$ کدام است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $D_f=(-۱,۲)$ باشد، طول بازهٔ دامنهٔ $y=۷f(۱-۲x)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

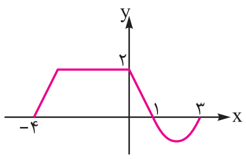
۲۲- اگر $D_{f(x)}=[-۳,۷)$ و $D_{g(x)}=(-۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=۵f(۳x)-۴g(\frac{x}{۲}-۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۳- اگر دامنهٔ تابع $y=f(\square x)$ بازهٔ $[-۴,۳]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(۳-۲|x|)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۲۴- اگر نمودار تابع $y=f(\frac{۳-x}{۲})$ به صورت مقابل بوده و دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\square}+f(\square x)$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، $b+a$ کدام است؟

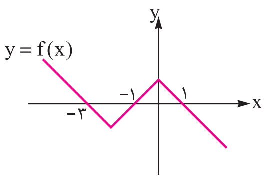


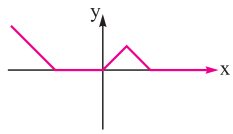
۱) $\frac{-۱}{۳}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۶}$

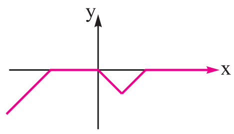
۲۵- اگر برد تابع $f(x)$ به صورت $R_f=[-۳,\sqrt{۲})$ باشد، برد تابع $y=۱-\frac{f(\sqrt{۳}x+۲)}{\sqrt{۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

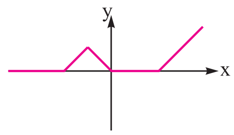
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

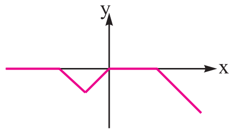
۲۶- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=\frac{f(x-۱)-|f(x-۱)|}{۲}$ کدام است؟



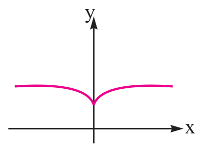
۱) 

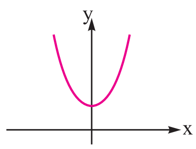
۲) 

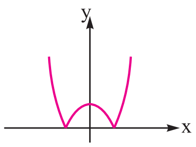
۳) 

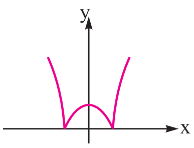
۴) 

۲۷- نمودار تابع $y=|(\sqrt{۳})^{|x|}-۲|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۸- معادلهٔ $(\frac{۱}{۵})^{|x|}=۱-x^۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

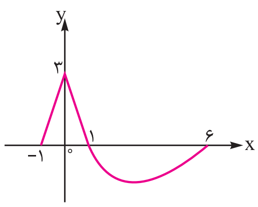
۲۹- معادلهٔ $۲^{-|x|}-|\log x|=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰- نمودار $y=|x-\square|$ را $\square$ واحد به چپ انتقال داده، قرینهٔ شکل حاصل را نسبت به محور yها تعیین می‌کنیم، سپس دو برابر در راستای محور yها منبسط کرده و بعد انعکاس آن را نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم. معادلهٔ نمودار حاصل، کدام است؟

۱) $y=-۲|x|+۱$ ۲) $y=-۲|۱-x|$ ۳) $y=-\frac{۱}{۲}|x+۱|$ ۴) $y=-۲|۲x+۱|$

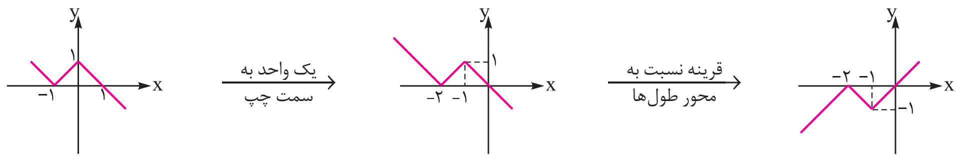
۳۱- اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{f(۲x)}{f(۱-x)}$ کدام است؟



۱) $[-۲,۱۲]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},۰)\cup(۰,۲)$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۱]$ ۴) $[-۱,۰)\cup(۰,۲]$

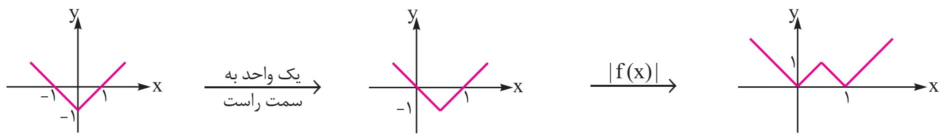
پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱ ۲ به ترتیب مراحل زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



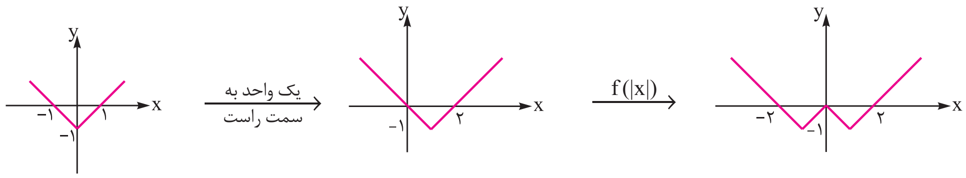
$y=-f(x+۱)$ $\qquad$ $y=f(x+۱)$

۲ ۱ به ترتیب مراحل زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



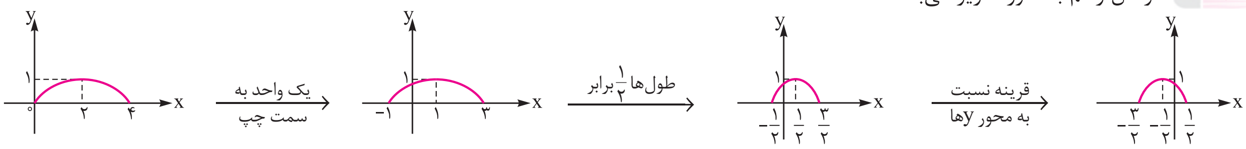
$y=|f(x-۱)|$ $\qquad$ $y=f(x-۱)$ $\qquad$ $y=f(x)$

۳ ۴ به ترتیب مراحل زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$y=f(|x|-۱)$ $\qquad$ $y=f(x-۱)$ $\qquad$ $y=f(x)$

۴ ۱ مراحل رسم به صورت زیر می‌باشد:

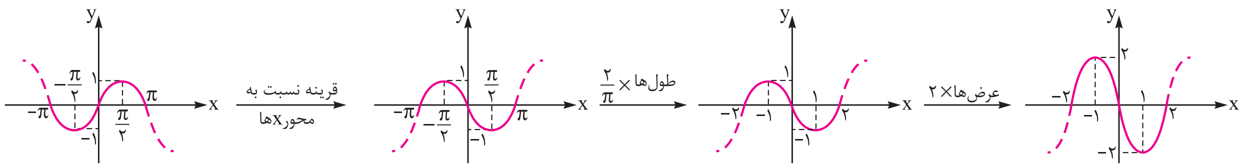


$y=f(۱-۲x)$ $\qquad$ $y=f(۱+۲x)$ $\qquad$ $y=f(۱+x)$

۵ ۱ روش اول: تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=۲\cos(\frac{\pi}{۲}x+\frac{\pi}{۲})=-۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)$$

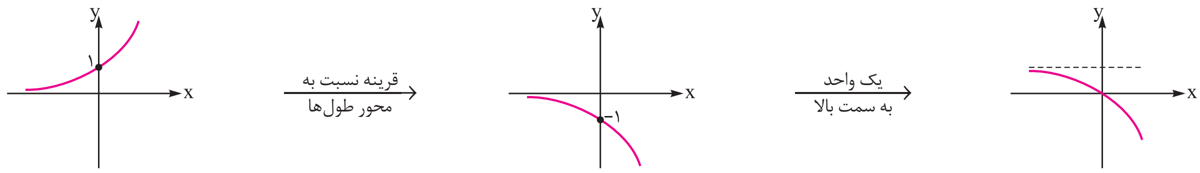
حال به صورت زیر آن را رسم می‌کنیم:



روش دوم: با عددگذاری، گزینهٔ مناسب را انتخاب می‌کنیم:

$x=۱\Rightarrow f(۱)=۲\cos(\pi)=-۲\Rightarrow$ فقط گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۶ ۱ روش اول:



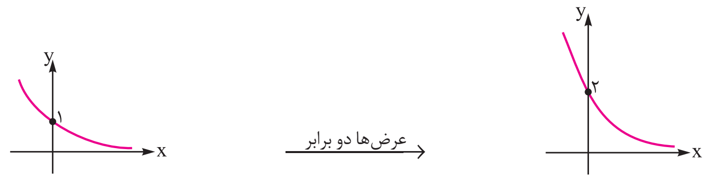
$y=۱-(\frac{۳}{۲})^x$ $\qquad$ $y=-(\frac{۳}{۲})^x$ $\qquad$ $y=(\frac{۳}{۲})^x\ ;\ (\frac{۳}{۲}>۱)$

روش دوم (عددگذاری): دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند، از طرفی $f(۱)=-\frac{۱}{۲}$ است، پس گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۷ **۲** روش اول: تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=\frac{۴^{x}}{۲^{۳x-۱}}=\frac{۴^{x}}{۲^{۳x}\times ۲^{-۱}}=\frac{۴^{x}\times ۲}{۸^{x}}=۲(\frac{۱}{۲})^{x}$$

حال نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را رسم کرده و سپس عرض‌های نمودار را دو برابر می‌کنیم:



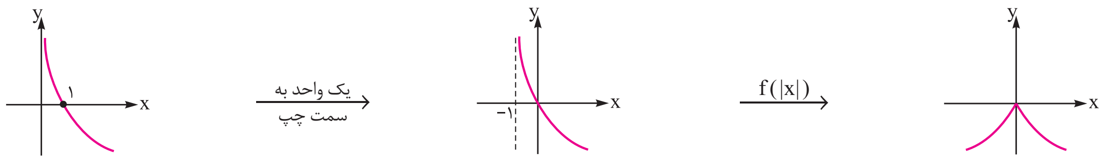
$y=(\frac{۱}{۲})^{x}\ ;\ (۰<\frac{۱}{۲}<۱)$ $\qquad$ $y=۲(\frac{۱}{۲})^{x}$

روش دوم (عددگذاری): با تعیین مختصات چند نقطه، می‌توان نمودار تابع را حدس زد:

x	-۱	۰	۱
$y=۲(\frac{۱}{۲})^{x}$	۴	۲	۱

با توجه به جدول فوق، تنها نموداری که سه نقطهٔ $(۱,۱)$، $(۰,۲)$ و $(-۱,۴)$ روی آن قرار دارد، گزینهٔ (۲) می‌تواند باشد.

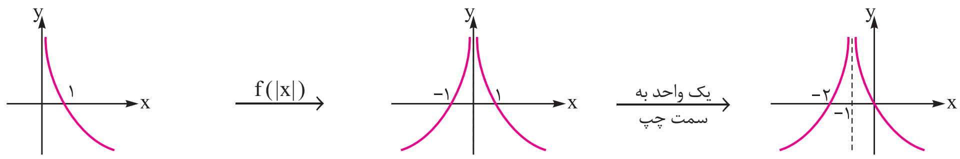
۸ **۲** ابتدا تابع $y=\log_{۰/۲}x$ را رسم می‌کنیم، سپس مرحله به مرحله به نمودار تابع خواسته‌شده می‌رسیم:



$y=\log_{۰/۲}x\ ;\ (۰<۰/۲<۱)$ $\qquad$ $y=\log_{۰/۲}(x+۱)$ $\qquad$ $y=\log_{۰/۲}(|x|+۱)$

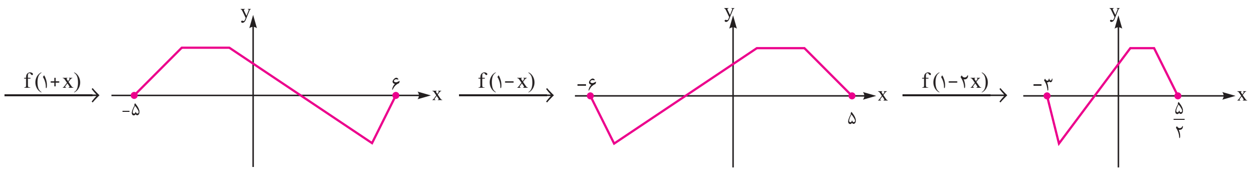
اگه احیاناً خودت نتونستی به جواب درست برسی، شاید ترتیب مراحل رو اشتباه کردی. حالا بیا تست بعدی رو هم حل کن و بعد سعی کن تفاوت این دو تا تست و ترتیب مراحل هر کدوم رو متوجه بشی.

۹ **۱** با توجه به نمودار $y=\log_{۰/۲}x$ نمودار تابع خواسته شده را مشخص می‌کنیم:

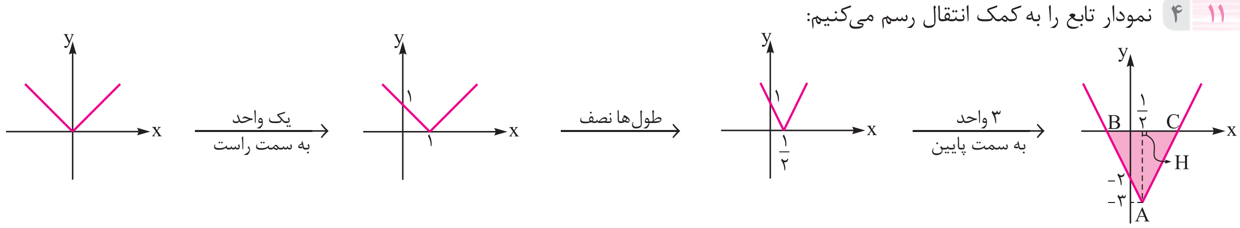


$y=\log_{۰/۲}x$ $\qquad$ $y=\log_{۰/۲}|x|$ $\qquad$ $y=\log_{۰/۲}|x+۱|$

۱۰ **۱** ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم تا نمودار $f(۱+x)$ به دست آید. سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=f(۱-x)$ حاصل شود. در انتها طول‌ها را نصف می‌کنیم تا به نمودار $y=f(۱-۲x)$ برسیم:



۱۱ **۴** نمودار تابع را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:



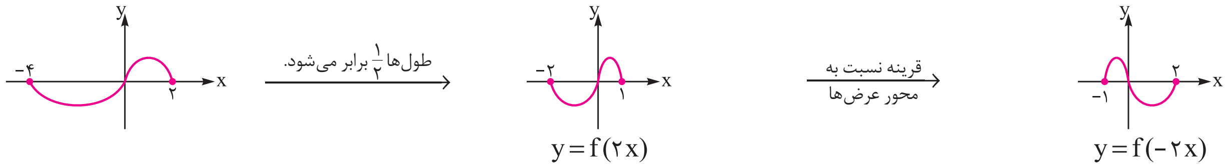
$y=|x|$ $\qquad$ $y=|x-۱|$ $\qquad$ $y=|۲x-۱|$ $\qquad$ $y=|۲x-۱|-۳$

حال طول نقاط B و C را تعیین می‌کنیم:

$$y=۰\Rightarrow|۲x-۱|-۳=۰\Rightarrow|۲x-۱|=۳\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱=۳\Rightarrow x=۲\\ ۲x-۱=-۳\Rightarrow x=-۱\end{cases}\Rightarrow BC=۳$$

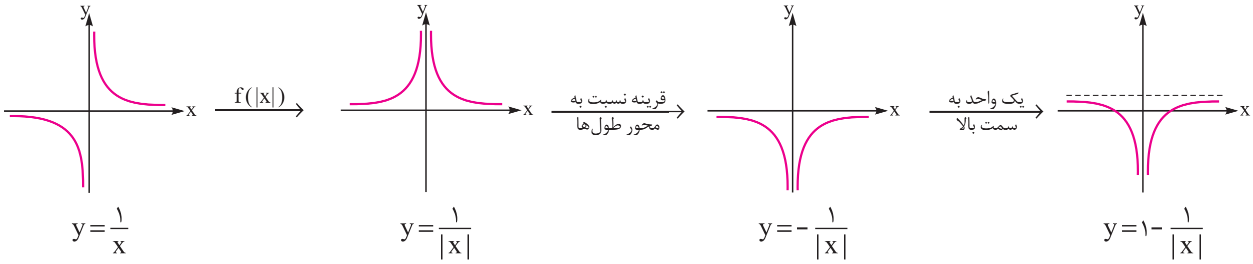
$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{۳\times ۳}{۲}=۴/۵$$

۱۲ ۳ تابع داده‌شده زمانی تعریف می‌شود که $-f(-2x)>0$ و در نتیجه $f(-2x)<0$ باشد. بنابراین به‌کمک انتقال، نمودار $y=f(-2x)$ را رسم می‌کنیم:



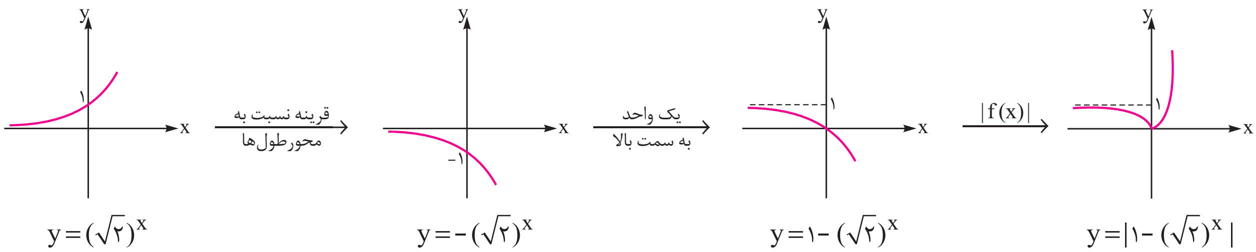
بنابراین نمودار $y=f(-2x)$ در بازهٔ $(0,2)$ منفی است، پس $D_y=(0,2)$.

۱۳ ۲ روش اول: به ترتیب مراحل زیر، نمودار را رسم می‌کنیم:



روش دوم (عددگذاری): با تعیین مقادیر $y(1)=0$ و $y(2)=\frac{1}{2}$، تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد، گزینهٔ (۲) می‌باشد.

۱۴ ۱ ابتدا نمودار $y=(\sqrt{2})^x$ را رسم می‌کنیم و سپس مرحله به مرحله با انتقال به $y=|1-(\sqrt{2})^x|$ می‌رسیم. در تابع $y=(\sqrt{2})^x$ چون $\sqrt{2}>1$ است، پس نمودار آن حالت افزایشی (صعودی) دارد:



بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۵ ۳ با توجه به مراحل زیر ضابطهٔ تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم:

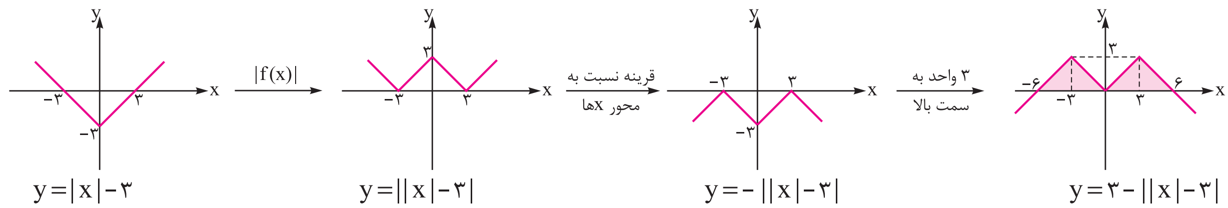
$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}}y=\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{۲واحد به سمت راست}}y=\sqrt{-(x-2)}$$

حال معادلهٔ $\sqrt{-x+2}=x$ را حل می‌کنیم تا نقطهٔ تلاقی به دست آید:

$$\sqrt{-x+2}=x\xrightarrow[x\geq 0]{\text{توان۲}}-x+2=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-2\ \ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

با توجه به آن‌که $x=-2$ در شرط $x\geq 0$ صدق نمی‌کند(جواب خارجی معادله است.) پس نمودار تابع، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را فقط در $x=1$ قطع می‌کند.

۱۶ ۳ نمودار این تابع را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



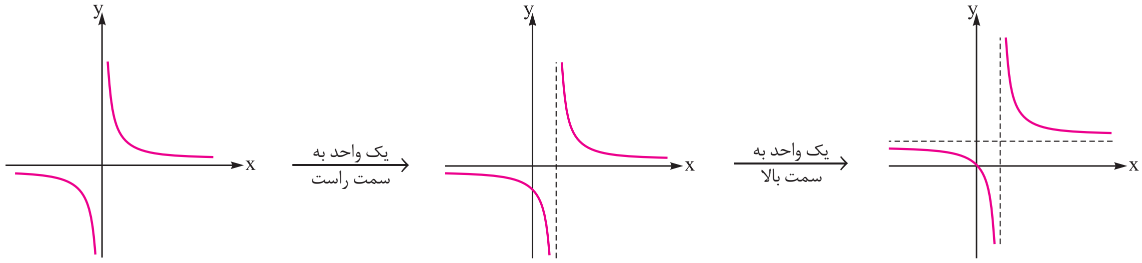
سطح خواسته‌شده برابر مجموع مساحت دو مثلث است که مساحت هر مثلث به صورت زیر به دست می‌آید: (طول‌های ۶ و ۶- یعنی طول نقاط تقاطع با محور xها از حل معادلهٔ $3-||x|-3|=0$ به دست می‌آیند.)

$$S_{\text{هر مثلث}}=\frac{1}{2}(6)(3)=9\Rightarrow S_{\text{کل}}=18$$

۱۷ **۱** روش اول: ابتدا کسر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$$

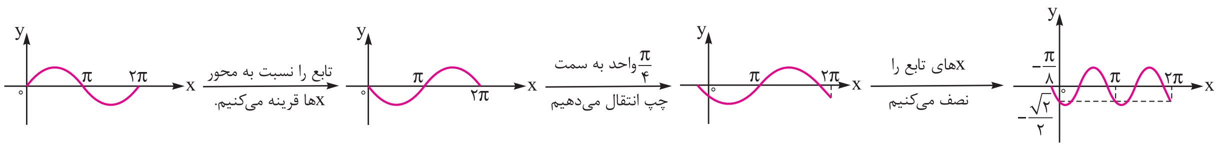
حال با توجه به نمودار $y=\frac{1}{x}$ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$y=\frac{1}{x}$ $y=\frac{1}{x-1}$ $y=1+\frac{1}{x-1}$

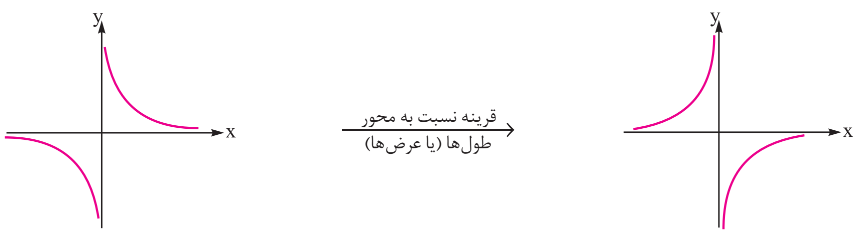
روش دوم (عددگذاری): دامنهٔ تابع به صورت $\mathbb{R}-\{1\}$ است و $f(0)=0$ و $f(2)=2$ می‌باشد. پس با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۱۸ **۲** با استفاده از تبدیل‌ها، نمودار تابع $y=-\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ را از روی نمودار $y=\sin x$ رسم می‌کنیم:

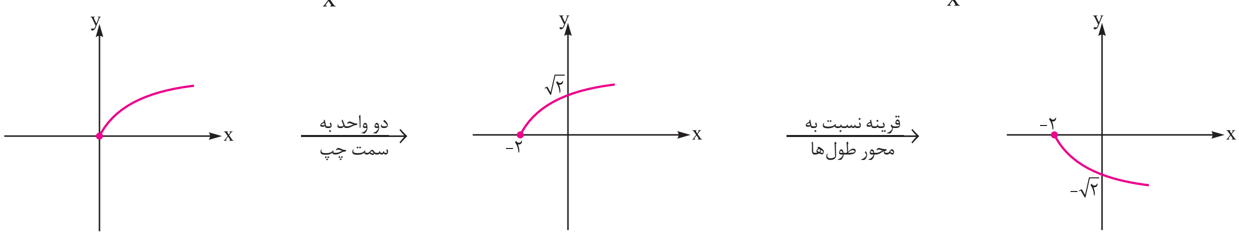


$y=\sin x$ $y=-\sin x$ $y=-\sin(x+\frac{\pi}{4})$ $y=-\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

۱۹ **۲** ابتدا نمودارهای $y=-\frac{1}{x}$ و $y=-\sqrt{x+2}$ را رسم می‌کنیم:

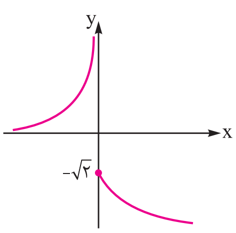


$y=\frac{1}{x}$ $y=-\frac{1}{x}$



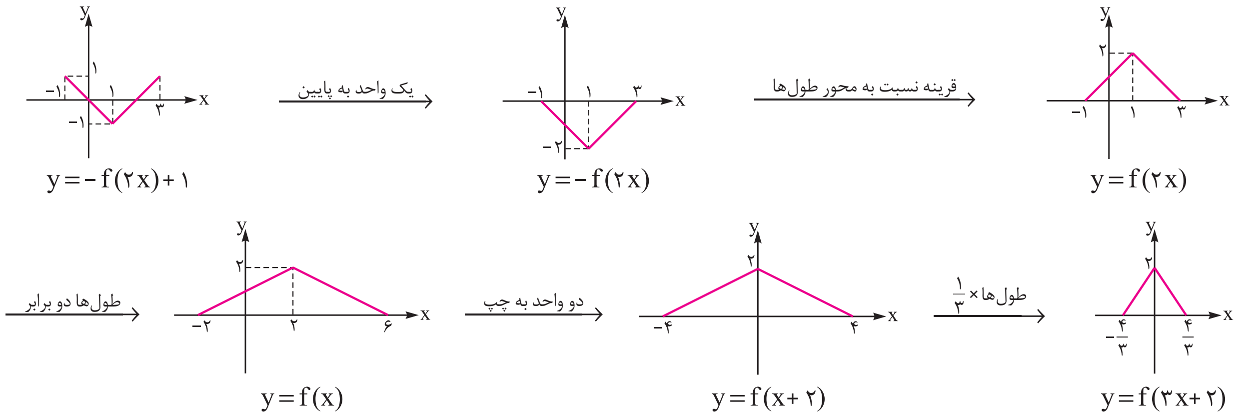
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt{x+2}$ $y=-\sqrt{x+2}$

حال با توجه به دامنهٔ هر یک از ضوابط، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع به صورت $R_f=(-\infty,-\sqrt{2}]\cup(0,+\infty)$ می‌باشد که شامل دو عدد صحیح $\{-1,0\}$ نیست.

۲۰ ۱ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به دست آورده و سپس از روی آن، نمودار $y=f(۳x+۲)$ را رسم می‌کنیم:



۲۱ ۲ می‌دانیم اگر $D_{f(x)}=(m,n)$ باشد، برای محاسبهٔ $D_{f(ax+b)}$، کافی است نامعادلهٔ $m<ax+b<n$ را حل کنیم:

$$-۱<۱-۲x<۲\Rightarrow -۲<-۲x<۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x<۱$$

پس دامنهٔ $y=۷f(۱-۲x)$ بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},۱)$ می‌باشد که طول بازهٔ آن برابر $۱-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$ است.

۲۲ ۲

$$\begin{cases} -۳\le ۳x<۷\Rightarrow -۱\le x<\frac{۷}{۳}\Rightarrow D_{f(۳x)}=[-۱,\frac{۷}{۳})\Rightarrow D_{۵f(۳x)}=[-۱,\frac{۷}{۳}) \\ -۱<\frac{x}{۲}-۱\le ۴\Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}\le ۵\Rightarrow ۰<x\le ۱۰\Rightarrow D_{g(\frac{x}{۲}-۱)}=(۰,۱۰]\Rightarrow D_{۴g(\frac{x}{۲}-۱)}=(۰,۱۰] \end{cases}\Rightarrow D_y=D_{۵f(۳x)}\cap D_{۴g(\frac{x}{۲}-۱)}=(۰,\frac{۷}{۳})$$

پس دامنه شامل ۲ عدد صحیح $\{۱,۲\}$ است.

۲۳ ۳ دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ برابر بازهٔ $[-۴,۳]$ است. بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$-۴\le x\le ۳\Rightarrow -۸\le ۲x\le ۶\Rightarrow D_{f(x)}=[-۸,۶]$$

از این که دامنهٔ $y=f(x)$ بازهٔ $[-۸,۶]$ است، دامنهٔ تابع $y=f(۳-۲|x|)$ را به دست می‌آوریم:

$$-۸\le ۳-۲|x|\le ۶\Rightarrow -۱۱\le -۲|x|\le ۳\Rightarrow \underbrace{-\frac{۳}{۲}\le |x|}_{\text{بدیهی}}\le \frac{۱۱}{۲}\Rightarrow |x|\le \frac{۱۱}{۲}\Rightarrow -۵/۵\le x\le ۵/۵$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۳-۲|x|)$ بازهٔ $[-۵/۵,۵/۵]$ می‌باشد که شامل ۱۱ عدد صحیح است.

۲۴ ۴ با توجه به نمودار داده‌شده، دامنهٔ تابع $y=f(\frac{۳-x}{۲})$ برابر بازهٔ $[-۴,۳]$ است. حال دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$-۴\le x\le ۳\Rightarrow -۳\le -x\le ۴\Rightarrow ۰\le ۳-x\le ۷\Rightarrow ۰\le \frac{۳-x}{۲}\le \frac{۷}{۲}$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر بازهٔ $[۰,\frac{۷}{۲}]$ است. برای تعیین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳}+f(۳x)$ داریم:

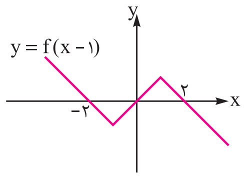
$$۰\le ۳x\le \frac{۷}{۲}\Rightarrow ۰\le x\le \frac{۷}{۶}$$

در نتیجه دامنهٔ $y=\sqrt{۳}+f(۳x)$ برابر بازهٔ $[۰,\frac{۷}{۶}]$ است. پس $a=۰$ و $b=\frac{۷}{۶}$ و از آن جا $b+a=\frac{۷}{۶}$ می‌شود.

۲۵ ۳ می‌دانیم در تابع $y=mf(ax+b)+n$، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند، چون $-۳\le f(x)<\sqrt{۲}$، پس $-۳\le f(\sqrt{۳}x+۲)<\sqrt{۲}$. بنابراین داریم:

$$-۳\le f(\sqrt{۳}x+۲)<\sqrt{۲}\Rightarrow -۱<\frac{-f(\sqrt{۳}x+۲)}{\sqrt{۲}}\le \frac{۳}{\sqrt{۲}}\Rightarrow ۰<۱-\frac{f(\sqrt{۳}x+۲)}{\sqrt{۲}}\le ۱+\frac{۳}{\sqrt{۲}}\Rightarrow R_y=(۰,۱+\frac{۳}{\sqrt{۲}}]$$

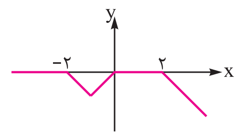
پس برد تابع، شامل اعداد صحیح $\{۱,۲,۳\}$ می‌باشد.



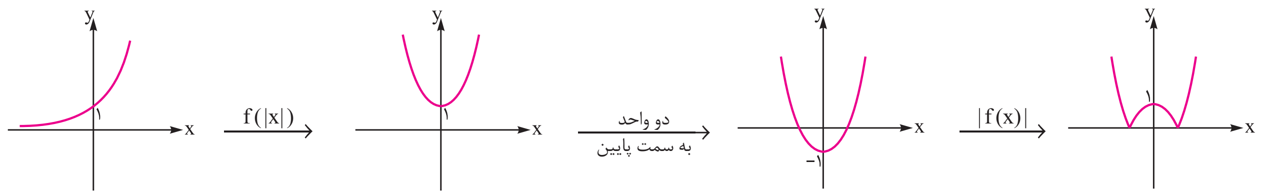
۲۶ **۴** ابتدا نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x-۱)$ به دست آید:

حال تابع $y=\dfrac{f(x-۱)-|f(x-۱)|}{۲}$ را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و آن را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{f(x-۱)-f(x-۱)}{۲} & f(x-۱)\geq ۰\\[2mm] \dfrac{f(x-۱)+f(x-۱)}{۲} & f(x-۱)<۰\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}۰ & x\leq -۲ \text{ یا } ۰\leq x\leq ۲\\ f(x-۱) & -۲<x<۰ \text{ یا } x>۲\end{cases}$$

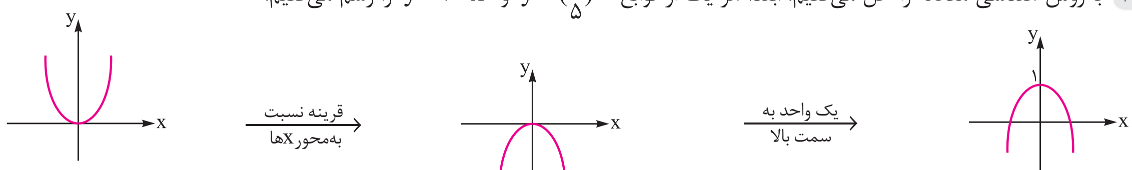


۲۷ **۳** ابتدا نمودار $y=(\sqrt{۳})^x$ را رسم می‌کنیم و سپس مرحله به مرحله با انتقال به نمودار تابع $y=|(\sqrt{۳})^{|x|}-۲|$ می‌رسیم. در تابع $y=(\sqrt{۳})^x$ چون $\sqrt{۳}>۱$ است، پس نمودار آن حالت افزایشی (صعودی) دارد:

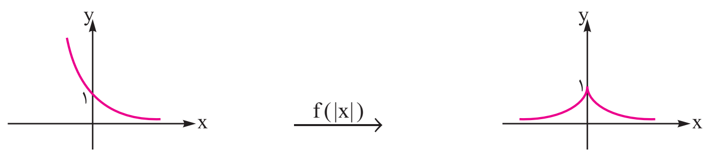


$y=(\sqrt{۳})^x$ $\quad$ $y=(\sqrt{۳})^{|x|}$ $\quad$ $y=(\sqrt{۳})^{|x|}-۲$ $\quad$ $y=|(\sqrt{۳})^{|x|}-۲|$

۲۸ **۳** با روش هندسی معادله را حل می‌کنیم. ابتدا هر یک از توابع $y=(\frac{۱}{۵})^{|x|}$ و $y=۱-x^۲$ را رسم می‌کنیم:

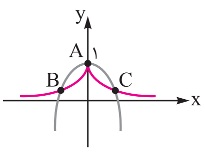


$y=x^۲$ $\quad$ $y=-x^۲$ $\quad$ $y=-x^۲+۱$



$y=(\frac{۱}{۵})^x$ $\quad$ $y=(\frac{۱}{۵})^{|x|}$

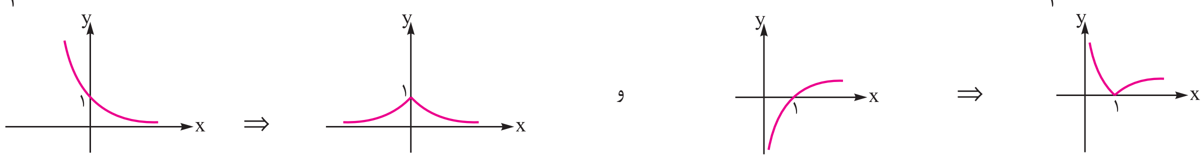
سپس دو نمودار را در یک دستگاه مختصات می‌کشیم!



حال می‌بینیم که نمودار دو تابع در سه نقطهٔ A، B و C مشترک‌اند. پس معادلهٔ $(\frac{۱}{۵})^{|x|}=۱-x^۲$ سه ریشه دارد.

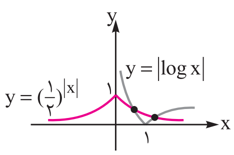
$(\frac{۱}{۲})^{|x|}=|\log x|$

۲۹ **۲** دو تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{|x|}$ و $y=|\log x|$ را رسم می‌کنیم:

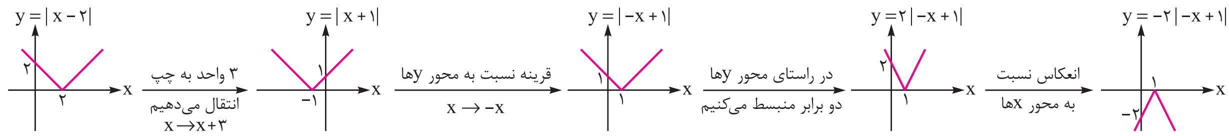


$y=(\frac{۱}{۲})^x$ $\quad$ $y=(\frac{۱}{۲})^{|x|}$ $\quad$ $y=\log x$ $\quad$ $y=|\log x|$

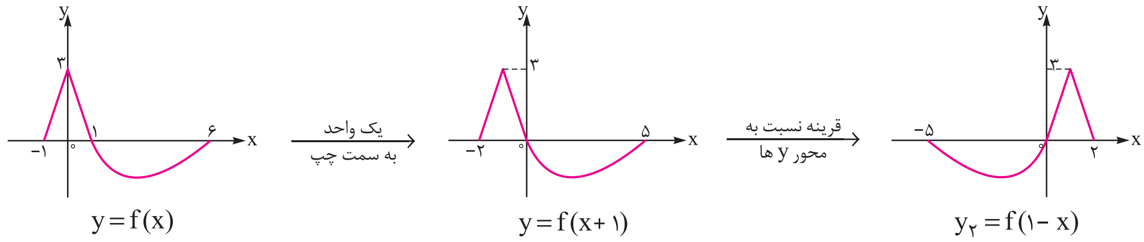
دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. و همان‌طور که می‌بینیم، دو نمودار هم‌دیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.



۳۰ ۲



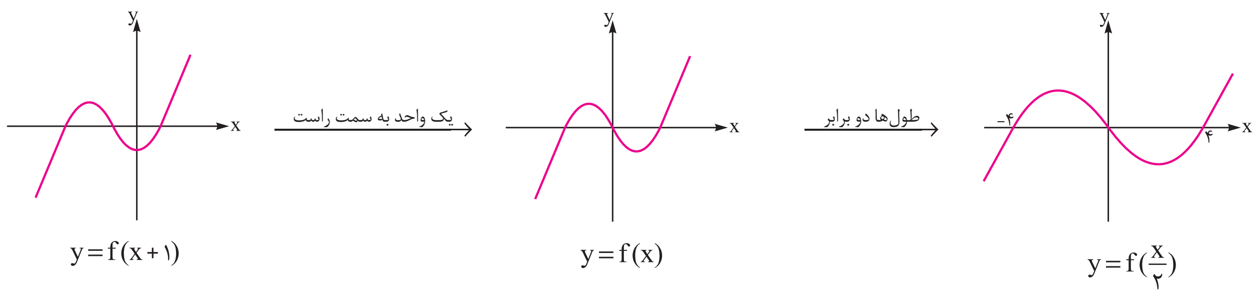
۳۱ ۲ ابتدا توسط انتقال‌های خطی نمودار توابع $y_۱=f(۲x)$ و $y_۲=f(۱-x)$ را از روی نمودار $y=f(x)$ رسم می‌کنیم:



حال دامنهٔ تابع $y=\frac{f(۲x)}{f(۱-x)}$ را محاسبه می‌کنیم: ($y_۱=f(۲x)$ و $y_۲=f(۱-x)$)

$$D_y=D_{y_۱}\cap D_{y_۲}-\{x|y_۲=۰\}=[-\frac{۱}{۲},۳]\cap[-۵,۲]-\{-۵,۰,۲\}=[-\frac{۱}{۲},۰)\cup(۰,۲)$$

۳۲ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را مشخص کرده و سپس از روی آن نمودار $y=f(\frac{x}{۲})$ را رسم می‌کنیم:



حال برای آن‌که نامعادله $(۴-x)f(\frac{x}{۲})>۰$ را حل کنیم، جدول تعیین علامت را برای عبارت $P(x)=(۴-x)f(\frac{x}{۲})$ رسم می‌کنیم:

x		-۴		۰		۴	
$۴-x$	+		+		+	۰	−
$f(\frac{x}{۲})$	−	۰	+	۰	−	۰	+
$(۴-x)f(\frac{x}{۲})$	−	۰	+	۰	−	۰	−

با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع به صورت $D_y=(-۴,۰)$ می‌باشد که شامل ۳ عدد صحیح است.

۳۳ ۳

$$-۱\le f(x)\le ۲\Rightarrow -۱\le f(\frac{x}{۲})\le ۲\Rightarrow -۶\le -۳f(\frac{x}{۲})\le ۳\Rightarrow -\frac{۱۶}{۳}\le -۳f(\frac{x}{۲})+\frac{۲}{۳}\le\frac{۱۱}{۳}\Rightarrow ۰\le|-۳f(\frac{x}{۲})+\frac{۲}{۳}|\le\frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین برد تابع به صورت $R_y=[۰,\frac{۱۶}{۳}]$ می‌باشد که شامل ۶ عدد صحیح $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ است.