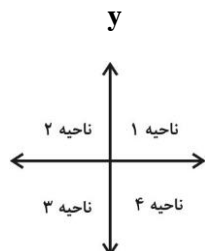


درس ۱: هندسه تحلیلی

دستگاه مختصات دکارتی، که از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند. از روی علامت  $x$  و  $y$  می‌توانیم تشخیص دهیم که نقطه در کدام ناحیه است:



مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط

اگر مختصات  $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$  باشد، در این صورت مختصات نقطه‌ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix}$$

فاصله‌ی دو نقطه

اندازه‌ی پاره‌خط  $AB$  همان فاصله‌ی بین این دو نقطه می‌باشد که برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

**مثال:** در صورتی که  $A = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$  باشد:

الف) مختصات نقطه‌ی وسط  $AB$  را به دست آورید.  
ب) فاصله‌ی دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{9+4}{2} \\ \frac{7+(-5)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } AB = \sqrt{(9-4)^2 + (7-(-5))^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

شیب‌خط:

برای محاسبه شیب‌خط  $AB$  با استفاده از رابطه‌ی زیر داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

نمایش معادله خط:

(۱) حالت استاندارد:  $y = ax + b$

شیب:  $a$       عرض از مبدأ:  $b$       طول از مبدأ:  $-\frac{b}{a}$   
خط

(۲) حالت غیراستاندارد:  $ax + by + c = 0$

شیب خط:  $-\frac{c}{a}$       طول از مبدأ:  $-\frac{c}{a}$       عرض از مبدأ:  $-\frac{c}{b}$       شیب خط:  $-\frac{a}{b}$

فاصله‌ی نقطه از خط

فاصله‌ی نقطه‌ی  $P(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  از خط  $3x + 4y = 2$  را به دست آورید.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d = \frac{|3(2) + 4(1) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{8}{5}$$

فاصله‌ی دو خط موازی

فاصله‌ی دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط  $6x + 8y = -4$  و  $6x + 8y + 14 = 0$  را به دست آورید.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|14 - (-4)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \Rightarrow d = \frac{18}{10} = 1.8$$

سؤالات

- ۱- خطوط با معادله‌ی کلی  $(m+1)x + (2m-3)y + m = 4$  در نقطه‌ی ثابتی هم‌رس‌اند. فاصله‌ی این نقطه از مبدأ مختصات را به دست آورید. (تألیفی)
- ۲- فاصله‌ی بین دو خط موازی  $2mx + (3m-2)y + 28 = 0$  و  $3x + 4y - 3 = 0$  را به دست آورید. (تألیفی)
- ۳- نقاط  $A(3,3)$  و  $B(-1,1)$  و  $O(0,0)$  سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟ (آزاد غیرپزشکی - ۸۰)
- ۴- مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های  $y + x = 2$  و  $2y - x = 4$  است و ضلع دیگر آن بر محور  $Ox$  قرار دارد را به دست آورید. (سراسری تجربی - ۷۳)
- ۵- یک خط از دسته خطوط به معادله‌ی  $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$  بر خط گذرنده از دو نقطه‌ی  $A(2, -1)$  و  $B(8, 3)$  عمود است. معادله‌ی آن خط کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۰)

سؤالات

- ۶- معادله‌ی سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$ ،  $y = 2x$  و  $x = 1$  است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۴)

(۱)  $y = \frac{2}{3}$       (۲)  $x = \frac{2}{3}$       (۳)  $y + x = \frac{2}{3}$       (۴)  $y + x = \frac{1}{3}$

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

۷- مساحت ناحیه‌ی محدود به دو خط  $x+y=1$  و  $x+y=3$  و محورهای مختصات، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳)  $\frac{7}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۸- دو ضلع از یک مستطیل، روی خطوط  $x-y+1=0$  و  $x+y-3=0$  قرار دارند. اگر نقطه‌ی  $(2, -2)$  یکی از رأس‌های این مستطیل باشد،

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

مساحت آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳)  $\frac{7}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۹- اگر مبدأ مختصات و دو نقطه‌ی  $A(1+6m, 2m-1)$  و  $B(3m, m+1)$  روی یک خط راست قرار داشته باشند، آنگاه فاصله‌ی مبدأ مختصات

(آزمون کانون تجربی - ۸۷)

از وسط پاره خط  $AB$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۲)  $\frac{\sqrt{10}}{20}$  (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{20}$

۱۰- سه ضلع یک مثلث به ترتیب روی محور طول‌ها، نیمساز ربع اول و سوم و خط به معادله‌ی  $x+2y=2$  قرار دارند. معادله‌ی خطی که بزرگ‌ترین

(آزمون کانون تجربی - ۸۷)

ارتفاع این مثلث روی آن قرار دارد، کدام است؟

- (۱)  $x+y=2$  (۲)  $y=2x$  (۳)  $x=\frac{2}{3}$  (۴)  $y=\frac{2}{3}$

(آزمون کانون تجربی - ۹۴)

۱۱- اگر  $A(2, 4)$  و  $B(-4, 2)$ ، آنگاه عمود منصف پاره خط  $AB$ ، محور  $x$ ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) صفر

۱۲- یک خط از دسته‌ی خطوط با معادله‌ی کلی  $(m+1)x + (m+2)y + 1 = 0$  با خط گذرنده از دو نقطه‌ی  $(-1, 2)$  و  $(-2, 4)$  موازی است، معادله‌ی

(آزمون کانون تجربی - ۹۱)

آن خط کدام است؟

- (۱)  $y+2x=1$  (۲)  $3x+4y+1=0$   
(۳)  $y+1=0$  (۴)  $4x+5y+1=0$

۱۳- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $A(m, m+2)$  از خط به معادله‌ی  $3x+4y-9=0$  برابر ۴ باشد، آنگاه مقدار مثبت  $m$  کدام است؟

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{25}{4}$  (۳)  $\frac{19}{7}$  (۴)  $\frac{20}{7}$

(آزمون کانون تجربی - ۸۸)

۱۴- فاصله‌ی کدام یک از خطوط زیر از خط به معادله‌ی  $5x+12y+51=0$  برابر ۵ است؟

- (۱)  $5x+12y=-14$  (۲)  $5x+12y=-13$   
(۳)  $5x+12y=14$  (۴)  $5x+12y=13$

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

۱۵- سه خط  $x+y=k$ ،  $2x-y=1$  و  $3x+y=k$  هم‌رس هستند.  $k$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

۱۶- اگر نقطه‌ی  $(m, 2m)$  از دو خط به معادلات  $3x+4y-7=0$  و  $3x+4y-4=0$  به یک فاصله باشد،  $m$  کدام است؟

(آزمون کانون تجربی - ۹۴)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۷- به ازای کدام مقدار  $\lambda$ ، دو خط به معادلات  $\lambda x - y = 1$  و  $2x + y + 4 = 0$  روی خط به معادله‌ی  $y = 2x$  متقاطعند؟

(آزمون کانون تجربی - ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۸- معادله‌ی دسته خطوطی که از نقطه‌ی  $A$  می‌گذرند به صورت  $mx = y - m + 1$  است. از بین این خطوط، خطی که بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است،

محور عرض‌ها را در نقطه‌ی  $B$  قطع می‌کند. طول  $AB$  کدام است؟

(آزمون کانون تجربی - ۹۵)

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۲ (۴)  $\sqrt{5}$

## درس ۲: معادلات

معادلات گویا (کسری)

معادلاتی که از عبارتهای گویا ساخته شده باشند، معادله‌های گویا می‌نامند. معمولاً معادلات شامل عبارات گویا را پس از یافتن دامنه‌ی متغیر، با مخرج

مشترکگیری (معمولاً ک.م.م مخرج‌ها انتخاب می‌شود) می‌توان به شکل  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  نوشت.

در این صورت باید معادله‌ی  $P(x) = 0$  را حل کنیم و سپس این شرط را بررسی می‌کنیم که ریشه‌های به دست آمده مخرج کسر را صفر نکنند.  $(Q(x) \neq 0)$  روش‌هایی که حل معادله را ساده‌تر می‌کنند:

۱- می‌توان به جای مخرج مشترکگیری دو طرف معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنیم.

۲- ساده کردن عبارتهای مساوی از دو طرف تساوی یا تقسیم دو طرف بر یک عبارت یکسان می‌تواند راه حل را کوتاه‌تر نماید؛ تنها باید این شرط را در نظر گرفت که هنگام ساده کردن عبارت مساوی از دو طرف، ممکن است بعضی از ریشه‌ها را نیز ساده کنید.

۳- همچنین دقت داشته باشید که آیا هر کسر معادله را می‌توان ساده‌تر کرد یا خیر.

مثال: معادله‌ی  $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$  را حل کنید.

از آنجایی که ک.م.م مخرج‌ها  $x(x+2)$  می‌باشد، داریم:

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2 \Rightarrow 3(x+2) + 5x = 2x(x+2) \Rightarrow 8x+6 = 2x^2+4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x=3 \text{ یا } x=-1$$

با توجه به معادله، هر دو جواب قابل قبول‌اند.

معادلات گنگ (رادیکالی)

معادلاتی که در آن عبارات گنگ وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارات گنگ می‌نامند.

برای حل اینگونه معادلات بهتر است، ابتدا دامنه‌ی متغیر معادله را مشخص کرده و سپس معادله را از حالت گنگ خارج کنیم.

روش کلی حل معادلات گنگ

۱- عبارتهای رادیکالی را از سایر عبارتهای معادله جدا می‌کنیم. (هر کدام در یک طرف معادله)

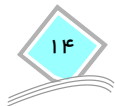
۲- با به توان رساندن، رادیکال‌ها را حذف می‌کنیم. (در صورت لزوم بیش از یکبار)

۳- معادله نهایی را حل کرده و جواب‌های به دست آمده را با صدق دادن در معادله‌ی اولیه امتحان می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی  $\sqrt{x+2} = x$  را حل کنید.

دامنه‌ی متغیر معادله از اشتراک شرایط  $x+2 \geq 0$  و  $x \geq 0$  به دست می‌آید، در

نتیجه  $x \geq 0$  است. بنابراین داریم:



$$x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \begin{cases} x=2 \\ \text{یا} \\ x=-1 \end{cases}$$

با توجه به دامنه‌ی متغیر معادله، تنها  $x=2$  قابل قبول است.

سؤالات

(فانم شهر - فرزاتگان - ۸۶)

۱۹- معادله  $\sqrt{x+2} + 8\sqrt{x+2} = 20$  را حل کنید.

(کرج - دکتر معین - ۹۰)

۲۰- معادله  $\sqrt{7+\sqrt{x-1}} - 1 = \sqrt{x-1}$  را حل کنید.

(کرج - قلمچی - ۹۰)

۲۱- نقطه‌ای روی خط  $y = 3x - 2$  بیابید که از دو نقطه  $A(3,0)$  و  $B(-2,0)$  به یک فاصله باشد.

(همانک کشوری - شهریور ۹۱)

۲۲- معادله  $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$  را حل کنید.

(اهواز - نوید صالحین - ۹۲)

۲۳- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{10}{x^2+2x} = \frac{2x+5}{x}$$

(آبیک - هدف - ۹۲)

۲۴- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

(همانک کشوری - شهریور ۹۲)

۲۵- به ازای چه مقدار  $k$  معادله  $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{k} = \frac{3x}{x+2}$  دارای جواب  $x=1$  است؟

(جلفا - نمونه دولتی - ۹۰)

۲۶- معادله  $2\sqrt{x+2} + 3 = x+2$  را حل کنید.

(همانک کشوری - خرداد ۹۰)

۲۷- جواب معادله  $\sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2x-2} = 0$  را بدست آورید.

(تالیفی)

۲۸- تعداد جواب‌های معادله  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$  کدام است؟

سؤالات

(آزمون کانون تجربی - ۹۴)

۲۹- معادله  $x(x^2-9)\sqrt{x-2} = 0$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- ۱ (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

۳۰- تعداد ریشه‌های معادله  $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} = 2$  کدام است؟

- بی‌شمار (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
هیچ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۵)

۳۱- تعداد ریشه‌های معادله  $\sqrt{x-1} + x^2 + x - 1 = 0$ ، کدام است؟

- ۱ (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴) صفر

(آزمون کانون تجربی - ۸۸)

۳۲- معادله  $\frac{x^2}{10} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{2x^2-2}$  چند ریشه دارد؟

- ۱ (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

۳۳- معادله  $\sqrt{\frac{3-x}{x+5}} + \sqrt{\frac{x+5}{3-x}} = 2$  چند ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

- ۱ (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
هیچ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

۳۴- کدام گزینه در مورد معادله  $\sqrt{x} + 5 = -\sqrt{7x+1}$ ، صحیح است؟

- (۱) دارای یک ریشه‌ی منفی است.  
(۲) دارای یک ریشه‌ی مثبت است.  
(۳) دارای دو ریشه‌ی هم‌علامت است.  
(۴) ریشه ندارد.

(آزمون کانون تجربی - ۸۸)

۳۵- تعداد ریشه‌های مثبت معادله  $5 = \frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x-1}$ ، کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

۳۶- تعداد ریشه‌های معادله  $\sqrt{x} + 2 - x = 0$  کدام است؟

- (۱) هیچ  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

۳۷- معادله  $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$ ، چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) هیچ  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

۳۸- کدام گزینه در مورد معادله  $x + 2\sqrt{x-1} = 4$  درست است؟

- (۱) فاقد ریشه‌ی حقیقی است.  
(۲) فقط دو ریشه‌ی مثبت دارد.  
(۳) فقط یک ریشه‌ی منفی دارد.  
(۴) فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد.

(آزمون کانون تجربی - ۹۵)

۳۹- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 - 7 = (2 - \frac{x+2}{x-3})(1 + \frac{x+2}{x-8})$ ، کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) صفر

(آزمون کانون تجربی - ۹۴)

۴۰- مجموعه‌ی  $\{0, -1\}$ ، مجموعه‌ی جواب معادله  $\frac{ax}{2x-b} + \sqrt{x+b} = 1$  است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳) ۱  
(۴) صفر

(آزمون کانون تجربی - ۸۸)

۴۱- مجموع ریشه‌های معادله  $1 = \frac{x-1}{x^2+x-2} + \frac{x-3}{x^2-3x}$ ، کدام است؟

- (۱)  $-2\sqrt{3}$   
(۲)  $2\sqrt{2}$   
(۳) صفر  
(۴) ۱

(آزمون کانون تجربی - ۹۴)

۴۲- معادله  $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x^3-8} = 4-2x$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) بی‌شمار  
(۲) ۲  
(۳) هیچ  
(۴) ۱

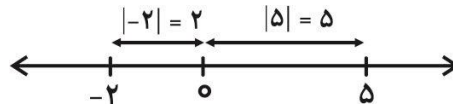
(آزمون کانون تجربی - ۸۹)

۴۳- اگر  $x = 4$  یکی از ریشه‌های معادله  $\sqrt{5x-x^2} = x+a$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) جواب دیگری ندارد.

**تعریف:** اگر  $a$  عددی حقیقی باشد، قدر مطلق  $a$  برابر است با:

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$



خواص قدر مطلق:

۱)  $|a| \geq 0$

۲)  $|a| = |-a|$

۳)  $\sqrt{a^2} = |a| \Rightarrow \sqrt[x]{a^x} = |a|, x \in \mathbb{N}$

معادلات قدر مطلق:

هر معادله که شامل عبارتهای قدر مطلق باشد، یک معادله قدر مطلق نامیده می‌شود.

**نوع اول:** در حالت کلی برای حل یک معادله قدر مطلق، باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه‌های داخل قدر مطلق تعیین علامت کرده، سپس معادله حاصل را حل کنیم.

تذکر: جواب‌هایی قابل قبول‌اند که در بازه‌ی اختیاری صدق کنند.

مثال: معادله  $x + |x - 3| = 1$  را حل کنید.

با توجه به اینکه ریشه‌ی عبارت داخل قدر مطلق  $x = 3$  می‌باشد، داریم:

$$\begin{cases} x \geq 3: x + (x - 3) = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 & \text{در شرط } x \geq 3 \\ x < 3: x - (x - 3) = 1 \Rightarrow 3 = 1 & \text{امکان‌پذیر} \end{cases}$$

پس معادله جواب ندارد.

**نوع دوم:** برای حل بعضی از معادلات قدر مطلق، می‌توان از خواص قدر مطلق استفاده کرد و از این طریق جواب معادله را یافت.

به روابط مقابل توجه کنید: ( $u$  و  $v$ ، عبارتهایی بر حسب  $x$  (متغیر) می‌باشند)

۱)  $|u| = a \xrightarrow{a > 0} u = a, u = -a$

۲)  $|u| = |v| \Rightarrow u = v, u = -v$

۳)  $|u| = v \xrightarrow{v \geq 0} u = v, u = -v$

مثال: معادله  $||x| - 3| = 2$  را حل کنید.

$$||x| - 3| = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5 \\ |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

**نکته:** در نامساوی مثلثی داریم:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

نامعادلات قدر مطلق:



هر نامعادله که شامل عبارات قدرمطلق باشد، یک نامعادله قدرمطلق نامیده می‌شود.

**نوع اول:** در حالت کلی، باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه‌های داخل قدرمطلق، تعیین علامت نموده و با حذف قدرمطلق، هر یک از نامعادله‌های را حل کنیم.

**تذکر:** جواب‌هایی قابل قبول‌اند که با بازه‌ی اختیاری اشتراک داشته باشند.

**مثال:** نامعادله‌ی  $|x-1| < 2x+1$  را حل کنید.

ریشه‌ی داخل قدرمطلق  $x=1$  است، پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 1: 2x + (x-1) < 1 \Rightarrow 3x - 1 < 1 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \\ x < 1: 2x - (x-1) < 1 \Rightarrow x + 1 < 1 \Rightarrow x < 0 \end{array} \right. \quad (\text{اشتراکی})$$

بنابراین مجموعه جواب، بازه‌ی  $(-\infty, 0)$  است.

**نوع دوم:** برای حل بعضی از نامعادلات قدرمطلق، می‌توان از خواص قدرمطلق استفاده کرد.

به نامساوی‌های زیر توجه کنید: ( $u$  و  $v$ ، عبارت‌هایی بر حسب  $x$  (متغیر) می‌باشند).

$$1) |u| \leq a \xrightarrow{a > 0} -a \leq u \leq a$$

$$2) |u| \geq a \xrightarrow{a > 0} u \geq a \text{ یا } u \leq -a$$

$$3) |u| \leq |v| \rightarrow u^2 \leq v^2$$

**مثال:** نامعادله  $|x-1| < |x-3|$  را حل کنید.

$$|x-1| < |x-3| \Rightarrow (x-1)^2 < (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$$

### سؤالات

۴۴- نامعادله‌ی  $\frac{|2x-1|}{3} < 1$  را حل کنید و مجموعه جواب آن را به صورت بازه بنویسید. (تألیفی)

۴۵- معادله‌ی  $||x|-1|=5$  را حل کنید. (فارسان- دکتر حسن سلطانی- ۹۰)

۴۶- معادله‌ی  $|x-3| + |x+2| = 6$  را حل کنید. (تألیفی)

۴۷- معادله‌ی  $2|x+1| + 3|x-2| = 2$  را حل کنید. (تألیفی)

۴۸- معادله‌ی  $|2x-1| = 3$  را حل کنید. (تألیفی)

### سؤالات

(تألیفی)

۴۹- معادله  $|x^2 - 1| + |x - 1| + |x + 1| = 0$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) هیچ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

۵۰- معادله  $|2x - 9| + x - 1 = 0$ ، چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) هیچ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۳)

۵۱- اگر دو نامساوی  $x^2 \leq 2x$  و  $|x + a| \leq b$  با هم معادل باشند، آنگاه  $a + b$  کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

-۱ (۳) صفر (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

۵۲- مجموعه جواب نامعادله  $(|x| - 2) \leq 0$  کدام است؟

[۲, ۲] (۱)

[۲, +∞) (۲)

(-∞, ۲] ∪ [۲, +∞) (۳)

(-∞, ۲] (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۲)

۵۳- تعداد ریشه‌های معادله  $(x + 1)^2 - 2|x| - 3 = 0$  کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۹۱)

۵۴- چه تعداد از ریشه‌های معادله  $|15 - x| = |2x - 19| + |4 - x|$ ، اعداد صحیح هستند؟

هیچ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳) ۶ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۸۹)

۵۵- نمودارهای دو تابع به معادله‌های  $y = |x|$  و  $y = \frac{|x - |x||}{|x|}$  چند نقطه‌ی مشترک دارند؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) هیچ (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۸۹)

۵۶- اگر  $x(x - 2) < 8$ ، آنگاه حاصل عبارت  $|2|x + 2| + 3|x - 4|$  همواره کدام است؟ $5x - 8$  (۱) $-x + 16$  (۲) $x - 12$  (۳) $-5x + 8$  (۴)

(آزمون کانون تجربی - ۸۹)

۵۷- چند عدد صحیح در نامعادله  $|1 - \frac{x}{2}| \leq |\frac{x}{3} - 1|$  صدق می‌کند؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) بی‌شمار (۴)

(آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

۵۸- معادله  $|x^2 - 3x + 2| = 3x - x^2 - 2$ ، چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟

صفر (۱)

۱ (۲)

۲ (۳) بی‌شمار (۴)

(آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

۵۹- مجموع جواب‌های معادله  $||x - 1| - |x + 1|| = 2$  کدام است؟ $\frac{3}{4}$  (۱) $\frac{3}{2}$  (۲) $-\frac{3}{2}$  (۳) $-\frac{3}{4}$  (۴)

درس ۴: عبارتهای جبری

همانطور که می‌دانید به عبارتهای کسری که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای هستند، عبارات گویا گفته می‌شود و دامنه‌ی عبارات گویا شامل مقادیری از متغیر است که به ازای آنها مخرج کسر صفر نمی‌شود.

ساده کردن عبارات گویا

در ساده کردن عبارتهای گویا، ابتدا صورت و مخرج را تجزیه کرده، سپس بعد از حذف عبارتهای مشترک، محاسبات را انجام می‌دهیم.

**تذکر:** استفاده از اتحادها، در ساده کردن عبارات گویا، بسیار موثر است.

**مثال:** عبارتهای گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{12x^2y^3}{3xy} \quad \text{ب) } \frac{4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 8x^2y}{2xy} \quad \text{ج) } \frac{x^2 - 4}{2x + 4}$$

حل:

$$\text{الف) } \frac{12x^2y^3}{3xy} = 4xy^2 \quad (x, y \neq 0)$$

$$\text{ب) } \frac{4x^3y^2}{2xy} + \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{-8x^2y}{2xy} = 2x^2y + 3xy^2 - 4x \quad (x, y \neq 0)$$

$$\text{ج) } \frac{x^2 - 4}{2x + 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)} = \frac{x-2}{2} \quad (x \neq -2)$$

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

هر چندجمله‌ای مانند  $P(x)$  را می‌توان بر چندجمله‌ای دیگری مانند  $B(x)$  تقسیم کرد و خارج قسمت  $Q(x)$  و باقی‌مانده  $R(x)$  را بدست آورد. در این صورت داریم:

$$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \quad (1)$$

(۲) درجه‌ی  $R(x) <$  درجه‌ی  $B(x)$

**تذکر:** اگر باقیمانده‌ی تقسیم  $P(x)$  بر  $B(x)$  برابر صفر باشد، آنگاه  $P(x)$  بر  $B(x)$  بخش‌پذیر است.

**مثال:** در تقسیم  $x^2 + 3x + 3$  بر  $x + 1$ ، خارج قسمت و باقیمانده را مشخص کنید.

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ x+2 \end{array} \right. \\ \hline -x^2 - x \\ \hline 2x + 3 \\ \hline -2x - 2 \\ \hline \end{array}$$

درجه‌ی مقسوم‌علیه  $<$  درجه‌ی ۱

بیدا کردن باقی‌مانده بدون انجام عمل تقسیم:

(۱) باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x - a$  برابر است با:  $P(a)$

(۲) باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $ax + b$  برابر است با:  $P(-\frac{b}{a})$

(۳) در چندجمله‌ای‌های درجه‌ی بالاتر، ابتدا ریشه‌ی مقسوم‌علیه را یافته و سپس با بدست آوردن جمله‌ی شامل بزرگترین درجه‌ی  $x$  برحسب جمله‌های دیگر و جای‌گذاری آن در مقسوم، باقی‌مانده به دست می‌آید.

**مثال:** باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای  $x^3 + 2x + 1$  بر  $x + 2$  را بیابید.

طبق نکته‌ی فوق داریم:

$$P(-\frac{b}{a}) = P(-\frac{2}{1}) = P(-2) = (-2)^3 + 2(-2) + 1 = -11$$

۶۰- خارج قسمت تقسیم  $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 4$  بر  $x+1$  را حساب کنید. (اصفهان- غیرانتفاعی پرتو نور-۹۰)

۶۱- در صورتی که دو چندجمله‌ای  $x^2 + 3x - 2$  و  $x^3 - 4x^2 + 5x + a$  در تقسیم بر  $x+2$  هم‌باقیمانده باشند، مقدار  $a$  چقدر

است؟ (همدان- تربیت-۹۰)

۶۲- چندجمله‌ای  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx + 2$  بر  $x+2$  بخش‌پذیر است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر  $x-1$  برابر ۶ است. مقادیر  $a$  و

$b$  را بیابید. (تهران- سپهر معرفت-۸۶)

۶۳- با استفاده از تجزیه، عبارات زیر را ساده کنید: (نجف‌آباد- نخبگان-۹۰)

$$\frac{(a^2b^5 - a^7)(a+b)}{a^4 - a^2b^2} \quad (\text{الف})$$

$$(a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2 \quad (\text{ب})$$

۶۴- حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید: (شهرضا- مهدیه-۹۰)

$$\frac{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x^{10} - 1} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{a^2 + a - 2}{a^3 + 2a^2} \div \frac{a^2 - 5a + 4}{a^2 - 4a} \quad (\text{ب})$$

### سوالات

۶۵- (آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

در تقسیم عبارت  $x^{10} - 4x^5 + 3x^2 - 1$  بر  $x+1$ ، مجموع ضرایب خارج‌قسمت کدام است؟

- (۱) -4      (۲) 4      (۳) 7      (۴) -7

۶۶- خارج‌قسمت تقسیم کوچک‌ترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌های  $P(x) = x^3 + 1$ ،  $Q(x) = x^6 - 1$  و  $R(x) = 4x^2 - 4$  بر  $x+1$

کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

$$(1) \quad 4(x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$(2) \quad (x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$$

$$(3) \quad 4(x^2 - x + 1)$$

$$(4) \quad 4(x^2 - x + 1)(x^3 - 1)$$

۶۷- اگر عبارت  $4x - 2$  از عبارت  $P(x) = x^5 + 4x^2 - ax + b$  کم شود، آن‌گاه عبارت حاصل بر  $x^2 - 1$  بخش‌پذیر می‌شود. در این صورت

$a + b$  کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

$$(1) \quad -3$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad -9$$

$$(4) \quad 9$$

۶۸- (آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

اگر چندجمله‌ای  $f(x-1)$  بر  $x-9$  بخش‌پذیر باشد، چندجمله‌ای  $f(x^3)$  بر کدام عبارت همواره بخش‌پذیر است؟

$$(1) \quad x - 4$$

$$(2) \quad x - 8$$

$$(3) \quad x - 2$$

$$(4) \quad x + 4$$

۶۹- چندجمله‌ای  $P(x) = x^3 + ax + b - 4$  بر  $(x-1)^2$  بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $P(x)$  بر  $x+1$  کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۴)

$$(1) \quad 2$$

$$(2) \quad -2$$

$$(3) \quad 4$$

$$(4) \quad -4$$