

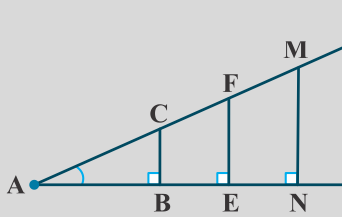
فصل دوم

(مثالآت)

نسبت‌های مثلثاتی

درس اول

شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. در این شکل مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ، $\triangle AEF$ و $\triangle ANM$ به دلیل برابری دو زاویه (زاویه A در همه مشترک است و هر کدام از آن‌ها زاویه قائمه دارند) با هم متشابه‌اند. می‌دانیم در صورت تشابه دو مثلث می‌توان برابری نسبت اضلاع را برای آن‌ها در نظر گرفت به طوری که:



$$\triangle ABC \sim \triangle AEF : \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ANM : \frac{BC}{NM} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{NM}{AN} \quad (2)$$

$$\triangle AEF \sim \triangle ANM : \frac{EF}{NM} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow \frac{EF}{AE} = \frac{NM}{AN} \quad (3)$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{NM}{AN}$$

با توجه به تساوی‌های فوق می‌توان نتیجه گرفت:

توجه شود که همان نسبت طول ضلع مقابل زاویه A به طول ضلع مجاور آن در مثلث قائم‌الزاویه ABC

است. هم‌چنین $\frac{NM}{AN}$ و $\frac{EF}{AE}$ به ترتیب نسبت طول ضلع مقابل زاویه به طول ضلع مجاور آن در مثلث‌های ANM و AEF هستند.

همان‌طور که دیدیم این نسبت‌ها در هر سه مثلث مساوی هستند و برابر مقدار ثابتی می‌باشند. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

* عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

* در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است

که آن را سینوس زاویه A می‌نامیم و با $\sin A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

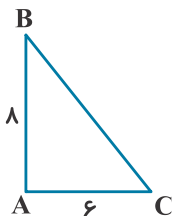
نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه A

می‌نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

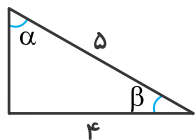
به سادگی می توان نشان داد که در مثلث قائم الزاویه ABC ، $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ و $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ، بنابراین در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

۱- با توجه به شکل در ابتدا طول وتر مثلث قائم الزاویه را به دست آورده و سپس حاصل عبارت های زیر را بیابید.



الف) $\tan \hat{B} = \dots\dots\dots$ ب) $\sin \hat{B} = \dots\dots\dots$ ج) $\cot \hat{B} = \dots\dots\dots$
 د) $\cos \hat{B} = \dots\dots\dots$ هـ) $\tan \hat{C} = \dots\dots\dots$ و) $\sin \hat{C} = \dots\dots\dots$

۲- با توجه به شکل پاسخ دهید.



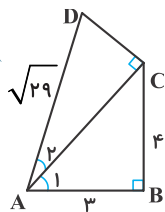
الف) نسبت های مثلثاتی زوایای α و β را به دست آورید.

۳۹

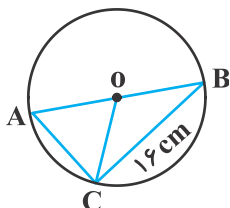
ب) تانژانت زوایای α و β چه رابطه ای با هم دارند؟

۳- اگر برای مثلث ABC داشته باشیم $BC = 2\sqrt{5}$ ، $AB = 6$ ، و $\hat{C} = 90^\circ$ ، آن گاه حاصل $\sin A$ و $\tan B$ را به دست آورید.

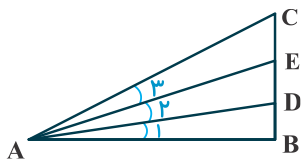
۴- در شکل روبه رو حاصل $\tan A_1 + \tan A_2$ را به دست آورید.



۵- اگر شعاع دایره ی روبه رو ۱۰ سانتی متر باشد و نقطه ی O مرکز دایره باشد، $\tan \hat{B}$ را به دست آورید.



۶- در شکل زیر تانژانت زاویه‌های A_1 ، A_2 و A_3 را به دست آورده و از کوچک به بزرگ مرتب کنید. در ادامه به چند سؤال زیر پاسخ دهید:



.....

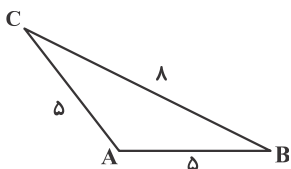
.....

الف) اگر زاویه‌ی حاده‌ای بزرگ شود، تانژانت زاویه چگونه تغییر می‌کند؟

ب) اگر زاویه‌ی حاده‌ای به صفر میل کند، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

ج) اگر زاویه‌ای خیلی به 90° نزدیک شود، در مورد تانژانت آن چه اظهارنظری می‌توان کرد؟

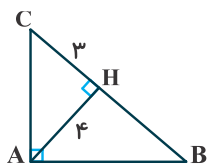
۷- با توجه به شکل مقابل، حاصل $\sin \hat{C}$ را به دست آورید.



.....

.....

۸- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر ضلع BC است. حاصل $\sin \hat{B}$ را بیابید.



.....

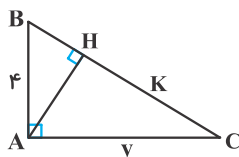
.....

۹- با توجه به شکل مقابل ثابت کنید: $(CH = k)$

الف) $4 \sin B = k \tan C$

ب) $k = y \sin B$

ج) $BH = 4 \sin B$

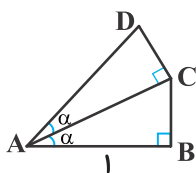


.....

.....

.....

۱۰- با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خط AD را برحسب $\cos \alpha$ به دست آورید.



.....

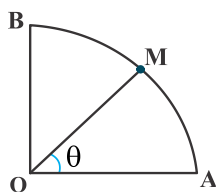
.....

۱۱- در ربع دایره‌ی نشان داده شده، شعاع برابر واحد است.

الف) برای زاویه‌ی حاده‌ی θ ، $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را به صورت یک پاره‌خط بر روی OA و OB نمایش دهید.

ب) اگر نقطه‌ی M بر روی کمان ربع دایره، از نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی B حرکت کند، $\sin \theta$ از چه

عددی به چه عددی تغییر می‌کند؟ (افزایش یا کاهش می‌یابد؟)



.....

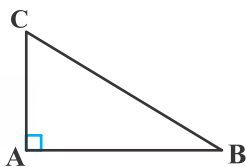
ج) اگر نقطه‌ی M بر روی کمان ربع دایره، از نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی B حرکت کند، $\cos \theta$ از چه عددی به چه عددی تغییر می‌کند؟ (افزایش یا کاهش می‌یابد؟)

۱۲- اگر زاویه‌ی حاده باشد، آن‌گاه در مورد زیر حدود m را به دست آورید.

الف) $\cos \theta = 2m - 1$

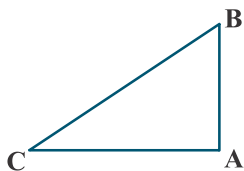
ب) $\sin \theta = \frac{1 - 3m}{2}$

۱۳- در شکل مقابل اگر $\sin \hat{C} = \frac{2}{3}$ و $AB = 4$ باشد، اولاً طول اضلاع AC و BC را بیابید، ثانیاً $\cos C$ را محاسبه کنید.



۴۱

۱۴- مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر $\sin B = \frac{1}{4}$ باشد، $\cos B$ و $\cot B$ را محاسبه کنید.



۱۵- اگر در مثلث ABC نشان داده شده رابطه‌ی $3 \sin \hat{B} = 4 \cos \hat{B}$ برقرار باشد و طول ضلع AB برابر ۶ باشد، طول وتر BC را به دست آورید.

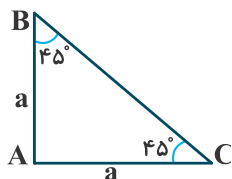
۱۶- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه‌ای 10 سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{3}{5}$ است. محیط این مثلث را حساب کنید.

نسبت‌های مثلثاتی

زوایای 30° ، 45° و 60°

یکی از مهم‌ترین بحث‌های نسبت‌های مثلثاتی، محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زوایای 30° ، 45° ، 60° و 90° و حفظ کردن این مقادیر است.

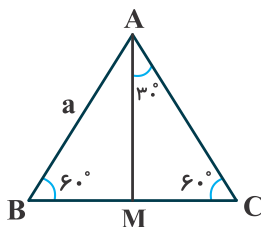
۱- با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین (مطابق شکل) نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زاویه‌ی 45° را محاسبه کنید.



.....

.....

۲- شکل زیر یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a می‌باشد و AM میانه و نیمساز در این مثلث است.



الف) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 30° را محاسبه کنید. ۴۲

.....

ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 60° را محاسبه کنید.

ج) اکنون با محاسبه‌ی مقادیر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زوایای 30° ، 45° و 60° و آنچه در بحث‌های گذشته در مورد نسبت‌های مثلثاتی 0° و 90° دیده‌اید، جدول زیر را کامل کنید.

θ نسبت	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					تعریف نشده
$\cot \theta$	تعریف نشده				

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱) $\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ =$

۲) $\tan 60^\circ + 2 \cos 30^\circ - 2 \sin^2 60^\circ =$

۳) $\frac{\cot^2 30^\circ - 4 \cos^2 60^\circ}{3 \cos^2 45^\circ + \sin 90^\circ + 1} =$

۴- با توجه به تساوی‌های زیر برای زاویه θ ، یک جواب پیدا کنید.

۱) $\sin \theta = \sin 6^\circ \cos 3^\circ + \sin 3^\circ \cos 6^\circ$

۲) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) $2 \sin 2\theta - 1 = 0$

۵- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

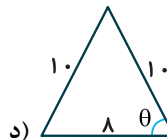
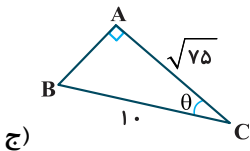
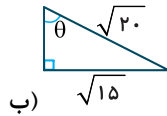
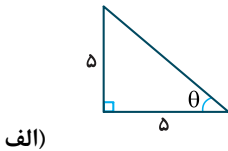
۱) $\frac{2 + 4 \sin 30^\circ + \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 60^\circ} = \frac{3}{2} \tan 45^\circ$

۲) $\left(\frac{1}{\sin 60^\circ} + \frac{1}{\tan 60^\circ} \right)^2 = \frac{1 + \cos 60^\circ}{1 - \cos 60^\circ}$

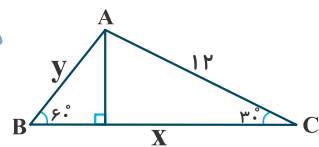
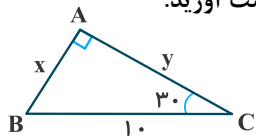
۴۳

۳) $|\cos 60^\circ + \cos 50^\circ| + |\cos 60^\circ - \cos 50^\circ| = 2 \cos 50^\circ$

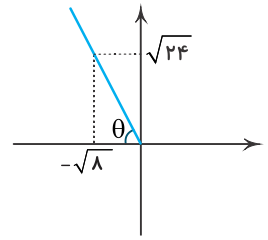
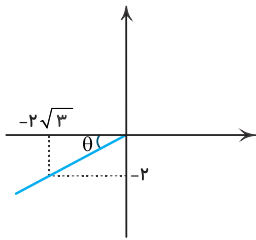
۶- با توجه به مثلث‌های داده شده بر اساس نسبت‌های مثلثاتی مناسب، زاویه θ را به دست آورید.



۷- در هر یک از مثلث‌های زیر با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 60° و 90° مقادیر x و y را به دست آورید.



۸- در شکل‌های مقابل $\sin \theta$ را به دست آورید.

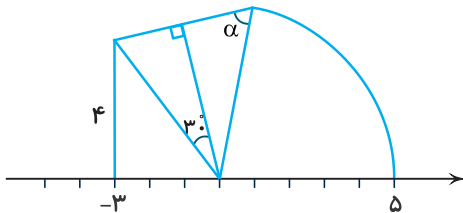


۹- جاهای خالی را پر کنید.

الف) در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه 30° وتر است.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه، هر دو ضلع مقابل و مجاور زاویه 45° وتر است.

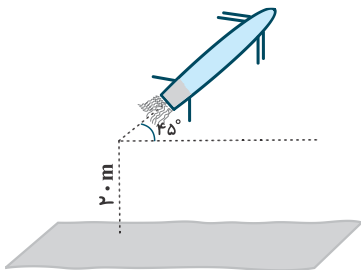
۱۰- در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه α چه قدر است؟



۴۴

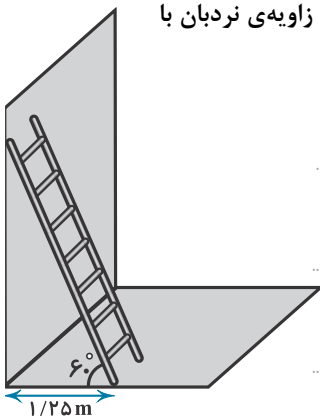
کاربرد مثلثات مسائل (ارتفاع و فاصله)

۱- یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویه 45° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۱۰۰۰ متر با همین زاویه موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟



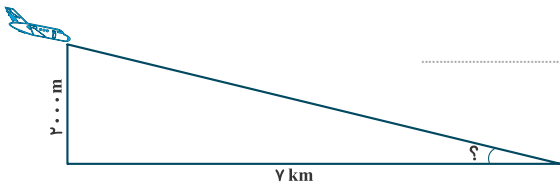
۲- اگر نردبانی را به دیوار تکیه داده باشیم و فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۱ متر و ۲۵ سانتی‌متر باشد و زاویه‌ی نردبان با

سطح زمین 60° درجه باشد، طول نردبان چه قدر است؟



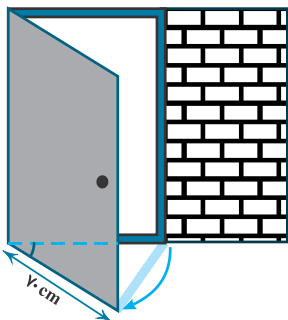
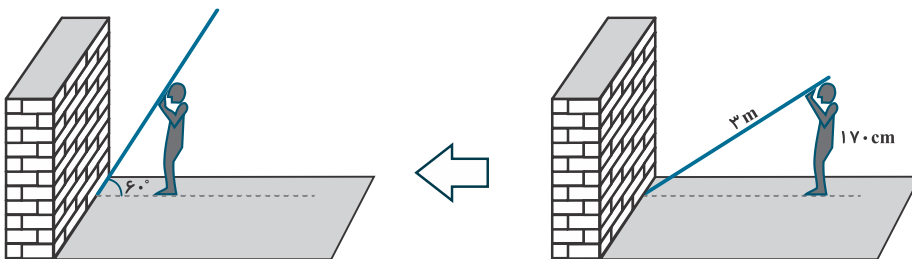
۳- هواپیمایی می خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویه‌ی ۴۵ درجه از زمین بلند می شود. وقتی به بالای انتهای باند می رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چه قدر است؟

۴- هواپیمایی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما وقتی به فاصله‌ی ۷ کیلومتری باند فرود می رسد، روی یک خط شروع به پایین آمدن می کند تا در ابتدای باند به زمین برسد. سینوس زاویه‌ای که مسیر این هواپیما با سطح زمین می سازد، چه قدر است؟



۴۵

۵- فردی با قد یک متر و هفتاد سانتی متر می خواهد میله‌ای به طول ۳ متر را طبق شکل زیر با زاویه‌ی ۶۰ درجه بلند کند. او ابتدا یک سر میله را به دیوار تکیه می دهد و میله را تا قد خود بالا می آورد. او آن قدر به سمت دیوار حرکت می کند تا زاویه‌ی میله با سطح زمین ۶۰ درجه شود. او چه قدر به سمت دیوار حرکت کرده است؟

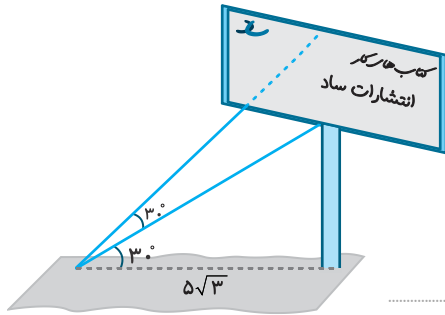


۶- میله‌ای فلزی داریم که می خواهیم برای باز نگه داشتن یک در طبق شکل زیر از آن استفاده کنیم.

عرض در ۷۰ سانتی متر است. $(\sin 20^\circ = 0.342)$

الف) طول میله چه قدر باشد تا زاویه‌ی بین در و دیوار ۴۰ درجه شود؟

ب) اگر طول میله $70\sqrt{2}$ سانتی متر باشد، زاویه‌ی بین در و دیوار چه قدر خواهد بود؟



۷- رضا روبه روی یک تابلو و روی زمین دراز کشیده است. فاصله ی خطی او با تابلو $5\sqrt{3}$ می باشد. او پایین ترین و بالاترین ارتفاع تابلو را به ترتیب با زاویه های 30° و 60° نسبت به سطح افق می بیند.

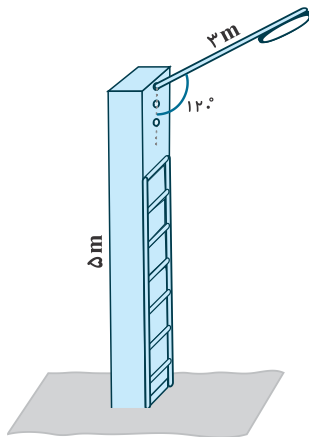
الف) پایین ترین نقطه تابلو تا سطح زمین چه فاصله ای دارد؟

.....

ب) بلندی تابلو را به دست آورید.

.....

.....



۸- مطابق شکل، در یک خیابان، چراغی نصب شده است.

الف) ارتفاع بالاترین نقطه چراغ از سطح زمین چه قدر است؟ ۴۶

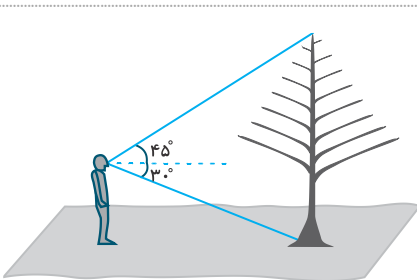
.....

.....

ب) اگر زاویه ی بین قسمت قائم و مایل 150° شود، ارتفاع بالاترین نقطه ی چراغ از سطح زمین چه قدر

خواهد شد؟

.....



۹- علی به صورت ایستاده، نوک یک درخت با زاویه ی 45° نگاه می کند. اگر

فاصله ی چشم او تا زمین 320 سانتی متر باشد و پایین درخت را با زاویه ی 30°

(زیر خط افق) ببیند:

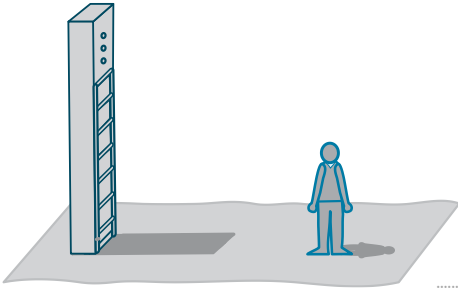
الف) فاصله ی افقی علی تا درخت چه قدر است؟

.....

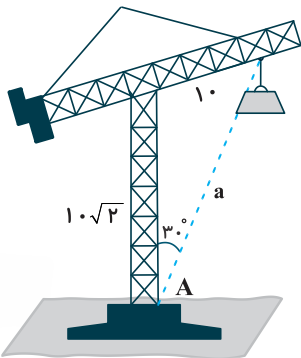
ب) ارتفاع درخت چه قدر است؟

.....

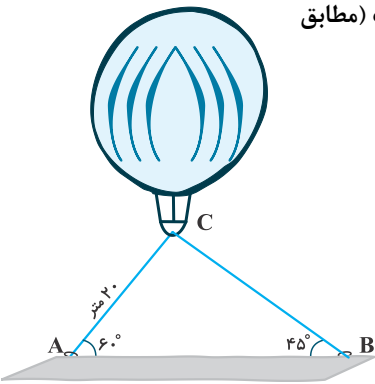
۱۰- مسعود می خواهد ارتفاع یک تیر برق که طول سایه اش $\frac{3}{5}$ متر است را حساب کند. قد مسعود $\frac{1}{72}$ متر و طول سایه اش ۸۶ سانتی متر است. ارتفاع تیر برق چه قدر است؟



۱۱- در شکل مقابل، جرثقیلی با بارش نشان داده می شود. فاصله ی بالاترین نقطه ی جرثقیل از نقطه ی A چه قدر است؟

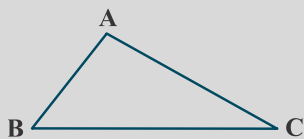


۱۲- یک شرکت تبلیغاتی در محوطه ی شرکت خود یک بالن را توسط دو طناب به زمین بسته است (مطابق شکل). طول یکی از طناب ها ۲۰ متر است. طول طناب دوم را به دست آورید.



پافذن مساحت مثلث
با استفاده از Sin

مساحت هر مثلثی مانند مثلث ABC برابر است با: حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه ی بین آن ها

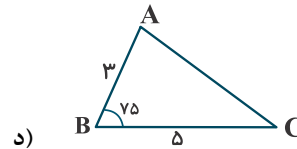
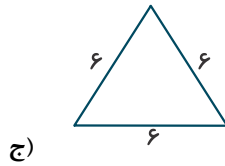
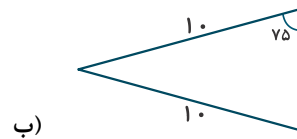
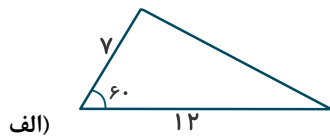


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin \hat{C}$$

۱- مساحت مثلث‌های زیر را به دست آورید. ($\sin 75^\circ = 0.96$)

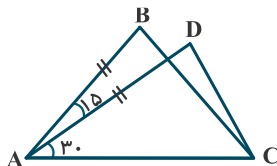


۲- در یک مثلث دارای ۳ زاویه‌ی حاده، طول دو ضلع ۷ و ۱۲ می‌باشد. اگر مساحت مثلث $21\sqrt{3}$ باشد، زاویه‌ی بین این دو ضلع چند درجه است؟

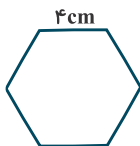
۴۸

۳- اگر بخواهیم مثلثی با طول اضلاع ۵ و ۶ سانتی‌متر رسم کنیم، حداکثر مقدار مساحت این مثلث را به دست آورید.

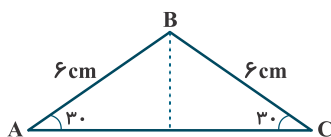
۴- با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC و مساحت مثلث ACD را به دست آورید. ($AB = AD$)



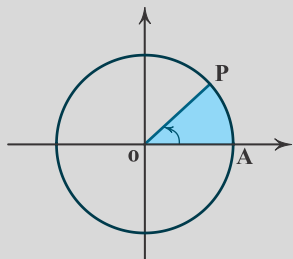
۵- مساحت شش‌ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



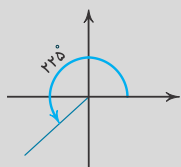
۶- مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



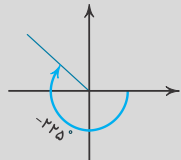
درس دوم
دایره
مثلثاتی



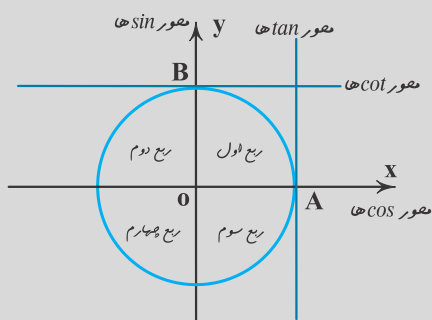
دایره‌ی روبرو به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را در نظر بگیرید. نقطه‌ی A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه‌ی P روی این دایره در خلاف سمت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه‌ی AOP مثبت و در جهت عقربه‌های ساعت منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره‌ی مثلثاتی می‌نامیم.



در واقع زاویه‌ی مثبت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد.



و زاویه‌ی منفی در جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

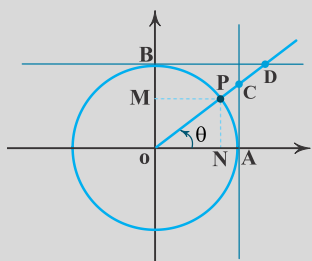


به طور کلی جهت در دایره‌ی مثلثاتی، خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

شعاع دایره‌ی مثلثاتی برابر یک است.

محور عمودی محور sinها و محور افقی، محور cosهاست.

خطی که در نقطه‌ی A بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است، محور tanهاست و خطی که در نقطه‌ی B بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است، محور cotهاست.



می‌توان نسبت‌های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \sin \theta = OM = y \\ \cos \theta = ON = x \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \theta = AC = y/x \\ \cot \theta = BD = x/y \end{cases}$$

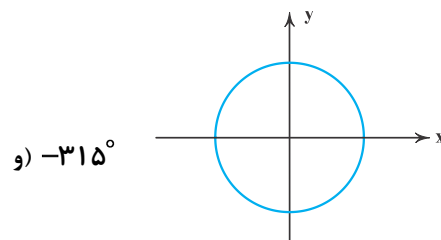
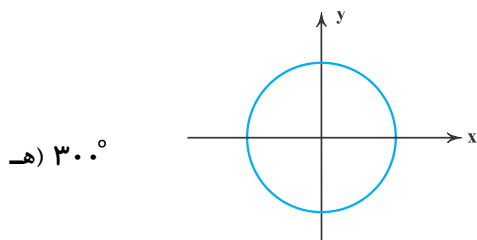
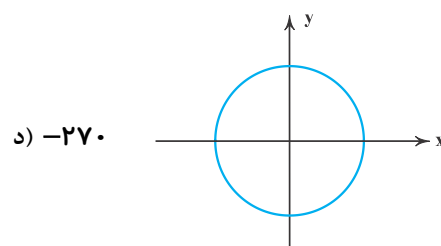
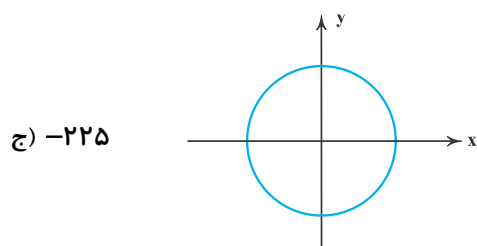
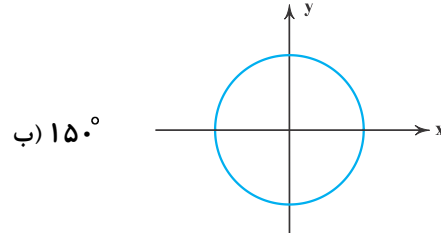
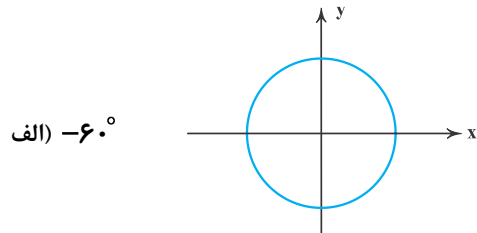
x و y، طول و عرض نقطه‌ی P در دستگاه مختصات می‌باشد.

بدین ترتیب مختصات هر نقطه مانند P متناظر با زاویه θ روی دایرهی مثلثاتی برابر است با $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. البته با توجه به موقعیت θ در یکی از چهار ناحیهی دایرهی مثلثاتی می توان علامت نسبت های مثلثاتی را به صورت زیر در نظر گرفت:

مقدار θ	ربع	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$
$0 < \theta < 90$	اول	+	+	+	+
$90 < \theta < 180$	دوم	+	-	-	-
$180 < \theta < 270$	سوم	-	-	+	+
$270 < \theta < 360$	چهارم	-	+	-	-

و نهایتاً برای هر زاویهی دلخواه θ می توان نتیجه گرفت: $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

۱- هر یک از زاویه های زیر را روی دایرهی مثلثاتی داده شده نشان دهید.



۲- مشخص کنید که هر یک از زوایای زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد؟

الف) -100° ب) 195° ج) -165° د) -65°

۳- برای هر زاویه‌ی زیر یک زاویه بنویسید که معادل آن باشد.

..... : 135° (د) : 31° (ج) : -21° (ب) : -6° (الف)

۴- برای هر زاویه‌ی زیر یک زاویه بنویسید که در امتداد زاویه‌ی داده‌شده باشد.

..... : 195° (ج) : -7° (ب) : -285° (الف)

۵- اگر زوایای 3° ، 15° ، -15° و 33° را بر روی یک دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنیم و نقاط انتهایی آن‌ها را به هم وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

۵۱

۶- اگر زاویه‌ی θ ، دایره‌ی مثلثاتی را در هر کدام از نقاط داده‌شده قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زاویه‌ی θ را برای هر کدام به دست آورید.

الف) $P\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

ب) $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

۷- مختصات نقطه‌ی P متناظر با هر کدام از زاویه‌های زیر را به دست آورید و آن‌ها را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.

..... : 45° (ب) : 30° (الف)

..... : 90° (د) : 0° (ج)

۸- هر کدام از زوایای زیر را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید و مقادیر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن‌ها را به دست آورید و در ادامه جدول زیر را کامل کنید.

- الف) ۱۸۰° ب) ۲۷۰° ج) -۲۷۰° د) ۳۶۰°

.....

.....

.....

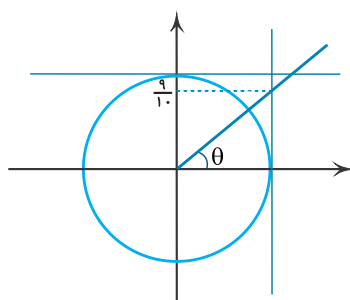
.....

زاویه	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin				
cos				
tan				
cot				

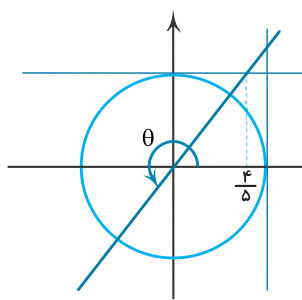
۵۲

می‌توان نتیجه گرفت: $-۱ \leq \sin \theta \leq ۱$ و

۹- با توجه به شکل‌های داده‌شده حاصل نسبت‌های مثلثاتی خواسته‌شده را بنویسید.



$\tan \theta =$



$\cot \theta =$

۱۰- علامت هر کدام از موارد زیر را مشخص کنید.

- الف) $\sin(-۷۰^\circ)$ ب) $\tan(۲۱۰^\circ)$ ج) $\cos(-۱۶۵^\circ)$ د) $\cot(-۲۷۵^\circ)$

۱۱- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زاویه‌های زیر را به دست آورید.

الف) ۱۵۰°

.....

ب) -60°

ج) 225°

۱۲- برای هر مورد مثالی بزنید.

الف) زاویه‌ای که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

ب) زاویه‌ای که سینوس آن منفی و تانژانت آن مثبت باشد.

ج) زاویه‌ای که کسینوس آن منفی و تانژانت آن نیز منفی باشد.

د) زاویه‌ای که سینوس و تانژانت هم علامت باشند.

۱۳- در هر مورد درباره‌ی ناحیه‌ای که انتهای کمان α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

الف) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

ب) $\sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

ج) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$

۱۴- حدود زاویه‌ی θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$

ب) $\cos \theta < 0$, $\tan \theta > 0$

ج) $\sin \theta > 0$, $\cot \theta < 0$

د) $\sin \theta \times \cos \theta < 0$

۱۵- در هر کدام از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن را به دست آورید.

الف) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ (α در ربع دوم)

ب) $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ (در ربع سوم)

۱۶- اگر α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم و $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$A = \sin \alpha + 2 \cot \alpha$

۱۷- به کمک دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیری از θ بین 0° و 360° را بیابید، به طوری که روابط زیر برقرار باشد:

الف) $\cos \theta = \frac{1}{2}$

ب) $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ج) $2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0$

د) $\cot \theta = 0$

هـ) $4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 1 = 0$

۵۴

۱۸- پاسخ دهید.

الف) حدود زاویه‌ی α را طوری بیابید که $\sin \alpha > \cos \alpha$

ب) حدود زاویه‌ی α را طوری پیدا کنید که $\tan \alpha > \cot \alpha$

۱۹- برای هر یک از حدود داده‌شده برای θ ، حدود تغییرات \sin و \cos را مشخص کنید.

۱) $30^\circ < \theta < 90^\circ$

۲) $-60^\circ < \theta < 60^\circ$

۳) $60 \leq \theta \leq 150$

۴) $30 \leq \theta \leq 135$

۲۰- در هر کدام از موارد زیر با توجه به حدود θ و عبارت داده شده برای نسبت مثلثاتی، حدود m را به دست آورید.

الف) $30 < \theta < 120$; $\sin \theta = 3m + 1$

ب) $-30 \leq \theta \leq 90$; $\cos \theta = \frac{1 - 5m}{4}$

۵۵ ج) $135 < \theta < 180$; $\tan \theta = \frac{m - 2}{3}$

د) $-20 \leq \theta \leq 20$; $\cos 3\theta = \frac{m - 1}{2}$

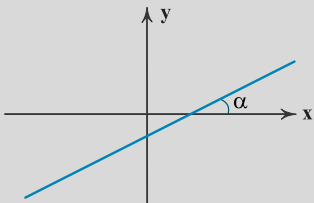
۲۱- اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$ و $\tan \theta \cos \theta > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۲۲- از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $\sin 63^\circ$, $\sin 110^\circ$, $\sin 119^\circ$, $\sin 203^\circ$, $\sin 253^\circ$

ب) $\cos(107^\circ)$, $\cos(22^\circ)$, $\cos(17^\circ)$, $\cos(34^\circ)$, $\cos(1^\circ)$

شیب خط و تانژانت



شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:

شیب خط = $\tan \alpha$

با توجه به این‌که در معادله‌ی خط $y = mx + b$ ، شیب خط برابر با m می‌باشد، داریم:

$m = \tan \alpha$

۱- برای خط‌های زیر، تانژانت زاویه‌ی α (شیب خط) را مشخص کنید.

الف) $y - 2x + 5 = 0$ ب) $y + 3x - 1 = 0$

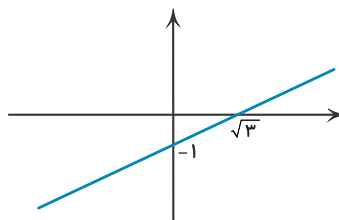
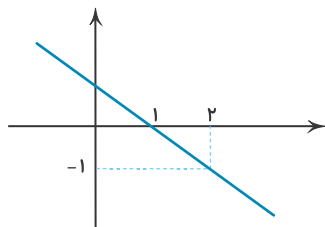
ج) $2y + 5x - 2 = 0$ د) $x - \sqrt{3}y = 6$

۲- در هر کدام از خط‌های زیر، زاویه‌ی بین خط و جهت مثبت محور x ها را مشخص کنید.

الف) $y - x + 3 = 0$ ب) $2x + 2y = -4$

ج) $\sqrt{3}x - y = 0$ د) $3y + \sqrt{3}x - 1 = 0$

۳- با توجه به شکل زاویه‌ای که هر کدام از خطوط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، بیابید.



۴- معادله‌ی خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 60° درجه بسازد و از نقطه‌ی $(1, 2)$ بگذرد.

۵- معادله‌ی خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه‌ی ۱۳۵° درجه بسازد و از نقطه‌ی $(-۱, ۳)$ بگذرد.

۶- اگر خط $۲my - (m-۲)x = ۵$ با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی ۶۰° بسازد، مقدار m را به دست آورید.

۷- زاویه‌ی حاده‌ی بین خطوط زیر را پیدا کنید.

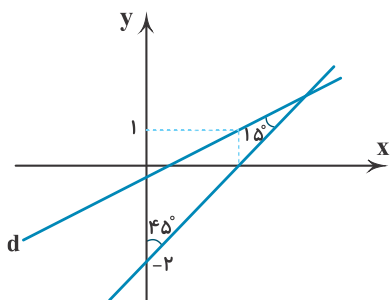
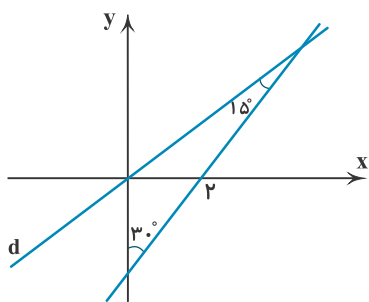
۱) $y - x + ۲ = 0$, $y = 0$

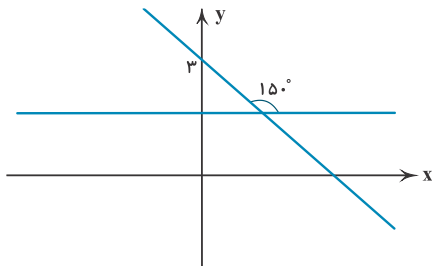
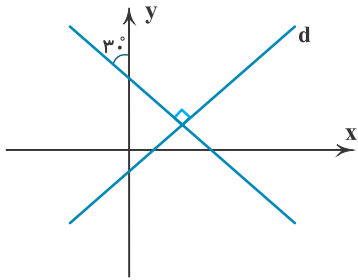
۵۷

۲) $y - \sqrt{۳}x = -۲$, $y = 1$

۳) $-x + \sqrt{۳}y = ۳$, $x = ۳$

۸- در هر کدام از شکل‌های زیر معادله‌ی خط d را بنویسید.





۹- مقدار b را طوری بیابید که خط گذرنده از نقاط $\begin{bmatrix} -2 \\ 2b-1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} b+1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، محور طولها با زاویه‌ی حاده‌ی 45° قطع نماید.

۱۰- خطی که از نقاط زیر می‌گذرد، چه زاویه‌ای با جهت مثبت محور طولها می‌سازد؟

۱) $(-1, 1), (2, 1)$

۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

۱۱- خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(3, m-1)$ و $B(2m-1, -2)$ با جهت مثبت محور طولها، زاویه‌ی 60° می‌سازد، مقدار m را بیابید.

۱۲- در معادله‌ی خط $(m+1)x - (2m-1)y = 3$ مقدار m را طوری بیابید که خط با خط $y = 1$ زاویه‌ی 90° بسازد.

روابط بین
نسبت‌های
مثلثاتی

درس سوم

با توجه به این که تاکنون با دایره‌ی مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی آشنا شده‌ایم، اکنون می‌خواهیم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی را مورد بحث قرار دهیم. روابطی که گاهی آن‌ها را اتحادهای مثلثاتی نیز می‌نامند. در واقع هر یک از تساوی‌های مثلثاتی که به ازای هر مقدار α برقرار باشند، اتحادهای مثلثاتی می‌گویند. برای اثبات درستی اتحادهای مثلثاتی که به صورت یک تساوی نوشته می‌شود، می‌توان یک طرف تساوی را نوشت و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر دست یافت.

برخی از مهم‌ترین اتحادهای مثلثاتی عبارت‌اند از:

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۲) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$۴) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

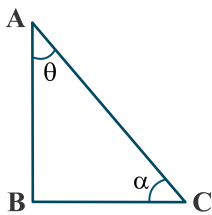
$$۶) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$۷) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

یکی از کاربردهای اتحادها، مثلاً به دست آوردن $\cos \alpha$ از روی اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ بر اساس داشتن مقدار $\sin \alpha$ می‌باشد.

۵۹

۱- با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مقابل، درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید.



الف) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

ب) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲- مشخص کنید در کدام مورد دو عدد داده شده نمی‌توانند سینوس و کسینوس یک زاویه باشند؟

الف) $0/6, 0/8$

ب) $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}$

ج) $\frac{8}{9}, \frac{4}{9}$

د) ۰, ۱

۳- درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

۱) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\cos \alpha \neq 0$

۲) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\sin \alpha \neq 0$

۶۰

۴- آیا تساوی زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

۵- با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ در $\tan \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید. سپس درستی آن را ثابت کنید.

۶- با توجه به نسبت مثلثاتی داده شده و وضعیت زاویه α در دایرهی مثلثاتی، سایر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به α را به دست آورید.

الف) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ در ناحیهی چهارم دایرهی مثلثاتی، α

ب) $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

ج) $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ در ناحیهی سوم دایرهی مثلثاتی، α

د) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

۷- بر اساس نسبت مثلثاتی داده شده برای هر زاویه‌ی خاص، سایر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن زاویه را به دست آورید.

الف) $\sin 150^\circ = -\frac{1}{2}$

ب) $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶۱ ج) $\tan 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

د) $\cot 330^\circ = -\sqrt{3}$

۸- درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $\frac{1}{\sin \alpha} - \cot \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

۲) $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

۳) $\sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = |\sin \theta + \cos \theta|$

۴) $\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} = |\sin x - \cos x|$

۵) $\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) = \tan^2 x$

۶) $\cos^6 x - \sin^6 x = 1 - 2 \sin^2 x$

۷) $\tan \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$

$$۸) \frac{\cos^r \alpha - \sin^r \alpha}{\cos^r \alpha} = (1 - \tan \alpha)(1 + \tan \alpha)$$

$$۹) \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)^2$$

۹- درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید. (تمام زوایا حاده‌اند و در نتیجه مخارجها غیرصفرند).

$$۱) \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$۲) 1 - \frac{\cos^r x}{1 + \sin x} = \sin x$$

$$۳) \frac{\tan^r x}{1 + \tan^r x} = 1 - \cos^r x$$

$$۴) \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^r \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$۵) \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \tan^r \theta \sin \theta} = 1 - \sin^r \theta$$

۱۰- عبارات زیر را ساده کنید و حاصل آنها را بیابید.

$$۱) A = (1 - \sin^r \alpha)(1 + \tan^r \alpha)$$

$$۲) B = \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} - 2 \tan^r \alpha$$

$$۳) C = \frac{\sin^r x + \cos^r x}{\sin^r x \cos^r x} - (\tan x + \cot x)^r$$

$$۴) D = (1 + \tan x)(1 + \cot x) - \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$۵) E = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$۶) F = \frac{(1 + \tan \alpha)(1 - \cot \alpha)}{(1 + \cot \alpha)(1 - \tan \alpha)}$$

۱۱- اگر θ زاویه‌ای حاده و $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، محاسبه نسبت هر مثلثاتی زاویه‌ی θ حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\text{الف) } A = \left(\cot \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\text{ب) } B = \frac{4 \tan \theta - 3}{2 \tan \theta + 1}$$

۶۳

۱۲- اگر $\tan \theta = 7$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2 \sin \theta - 3 \cos \theta}{\sin \theta + 4 \cos \theta}$ را به دست آورید.

۱۳- اگر $\frac{2 \tan \alpha - 1}{1 + 3 \tan \alpha} = 1$ باشد، حاصل $\frac{5 \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$ را به دست آورید.

۱۴- اگر $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sin x \cos x$ را به دست آورید.

۱۵- اگر $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{3}{2}$ ، آن‌گاه حاصل $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$ را به دست آورید.

۱۶- اگر $4\cos\theta - 3\sin\theta = 0$ ، با فرض حاده بودن θ حاصل $2\tan\theta + 3\cos\theta - \sin\theta$ را به دست آورید.

۱۷- اگر $\frac{3\cos x - \sin x}{5\sin x - 2\cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ را بیابید.

۱۸- با توجه به شرایط داده شده در هر مورد زیر، مشخص کنید زاویه α در کدام ناحیه یا سوی دایره ی مثلثاتی قرار می گیرد؟

۱) $\frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha \cdot \tan\alpha < 0$ ، $\sin\alpha + \tan\alpha > 0$

۲) $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$ ، $\cos\alpha + \sin\alpha > 0$

۳) $\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

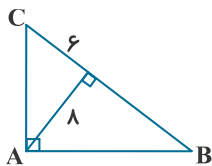
۱۹- به ازای کدام مقدار A ، تساوی $1 - \tan^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x}$ یک اتحاد مثلثاتی می باشد؟

۲۰- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، آن گاه حاصل هر کدام از عبارات زیر را بیابید.

الف) $\sin^4 x + \cos^4 x$

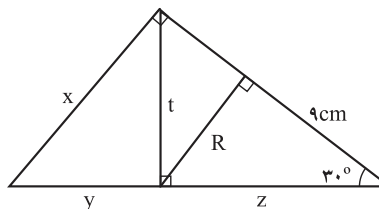
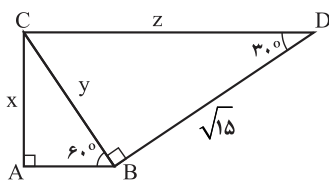
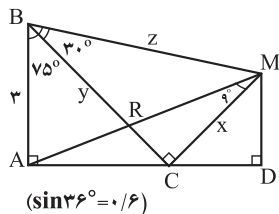
ب) $|\sin x - \cos x|$

تمرینات تکمیلی
فصل دوم

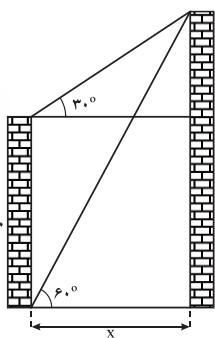


۱- با توجه به شکل مقابل، حاصل $\sin B$ و $\tan B$ را به دست آورید.

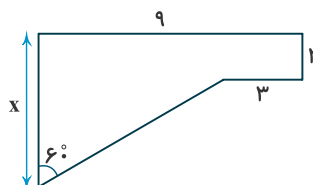
۲- در شکل‌های زیر اجزای مجهول را به دست آورید.



۳- زاویه‌ی حاده‌ی بین دو قطر مستطیلی که اندازه‌ی قطر آن ۸ cm است، برابر 30° می‌باشد. مساحت مستطیل را به دست آورید.



۴- با توجه به شکل فاصله‌ی بین دو دیوار را به دست آورید.



۴- استخری به شکل مقابل مفروض است. حداکثر عمق استخر را به دست آورید.

۶- مثلث ABC در رأس A قائمه است. با داده‌های زیر، طول اضلاع مثلث را معلوم کنید.

الف) $\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $AB = 4$

ب) $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $AB = 4$

ج) $\tan C = 3$, $BC = 5$

د) $3 \sin B = 4 \sin C$, $BC = 10$

۷- شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر بعد از غروب خورشید در فاصله‌ی $3/5$ متری یک تیر چراغ برق ایستاده و سایه‌اش ۲۱۰ سانتی‌متر است.

الف) ارتفاع تیر چراغ برق چه قدر است؟

ب) اگر این شخص ۷۵ سانتی‌متر به تیر نزدیک شود، طول سایه‌اش چه قدر می‌شود؟

ج) این شخص در چه فاصله‌ای از تیر بایستد تا سایه‌اش با خودش هم‌اندازه شود؟

۸- بالنی از نقطه‌ی A بر سطح زمین شروع به حرکت می‌کند. این بالن ابتدا ۱۲۰۰ متر به طور عمودی بالا می‌رود.

سپس ۱۲۰۰ متر را به طور مایل بر خطی با شیب $\sqrt{3}/3$ حرکت می‌کند و به قلعه‌ی یک کوه می‌رسد. مطلوب است:

الف) فاصله‌ی افقی بین نقاط A و C
ب) ارتفاع نوک قلعه از سطح زمین

ج) اگر شخصی در نقطه‌ی A روی زمین دراز کشیده باشد و به قلعه نگاه کند، آن را با چه زاویه‌ای نسبت به افق می‌بیند؟

۹- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

۲) $\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$

۳) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

۴) $\frac{\sin 70^\circ - 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 20^\circ}{1 - 3 \tan 30^\circ \cos 30^\circ}$

۵) $2\cos^2 27^\circ - 3\tan 30^\circ + \sin 90^\circ + 2\sin^2 27^\circ$

۶) $\frac{2\sin 30^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 0^\circ}{\cos 45^\circ + \tan^2 60^\circ - \cos 0^\circ}$

۷) $1 + \tan^2 36^\circ - \frac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} - \frac{1}{\cos^2 36^\circ}$

۸) $(\tan 27^\circ)(1 + \cot 27^\circ) - \tan 45^\circ \cot 60^\circ - \tan 27^\circ$

۱۰- اگر $\sin\theta = 2a + b$ و $\cos\theta = a - 2b$ باشد، نشان دهید $a^2 + b^2 = \frac{1}{5}$.

۱۱- مجموع ماکزیمم و می‌نیمم عبارت $A = 1 - 4\sin^2 x + 2\cos^2 x$ را به دست آورید.

۱۲- با شرط $1 = 2\sin^2 x - 3\cos^2 x$ حاصل $2\sin^4 x + 5\cos^4 x$ را به دست آورید.

۱۳- به کمک دایره مثلثاتی همه‌ی مقادیر θ بین 0° و 360° را بیابید، به طوری که روابط زیر برقرار باشد:

الف) $\tan^2 \theta - 2\sqrt{3}\tan\theta + 3 = 0$

ب) $4\sin^2 \theta + 4\sin\theta + 1 = 0$

ج) $2\sin^2 \theta + 5\sin\theta + 2 = 0$

د) $2\cos^2 \theta + 5\cos\theta = 0$

۱۴- در هر کدام از موارد زیر با توجه به حدود θ و عبارت داده‌شده برای نسبت مثلثاتی، حدود m را بیابید.

الف) $-10^\circ < \theta < 10^\circ : \cos 3\theta = \frac{5-2m}{7}$

ب) $225^\circ < \theta < 360^\circ : \sin\theta = \frac{3}{2} + \frac{m-1}{4}$

ج) $135^\circ < \theta < 180^\circ : \cot\theta = \frac{2m-5}{3}$

۱۵- محدوده هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $A = 3\cos^2 x - 1$

ب) $B = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x$

ج) $C = \sin^2 x - 2\sin x + 1$

د) $D = \cos^2 x - 4\cos x + 5$

۱۶- نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2}b-1 \\ 2b+7 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. b را طوری بیابید که خط گذرنده از این دو نقطه با جهت مثبت محور x زاویه‌ی 60° بسازد.

۱۷- زاویه‌ی حاده بین خطوط مقابل را پیدا کنید. $\sqrt{3}y = x + 5$, $x = 2$ (ب) $y - \sqrt{3}x = 5$, $y = 0$ (الف)

۱۸- پاسخ دهید.

الف) اگر θ زاویه‌ی حاده‌ی کم‌تر از 45° باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید. $A = \left| \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta} \right| - \left| \tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} \right|$

ب) اگر $0^\circ < \theta < 45^\circ$ باشد، حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید. $B = \sqrt{1 - 2\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta}}$

۱۹- اگر $\frac{2}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = 0$ باشد، آن‌گاه مقدار $\tan x + \frac{1}{\tan x}$ را به دست آورید.

۲۰- اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ و $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$

ب) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

ج) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

۲۱- به ازای چه مقداری از m عبارت $m(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin^6 x + \cos^6 x$ به x بستگی ندارد؟

۲۲- درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$۱) \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \alpha}$$

$$۲) (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۳) 1 - \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$۴) \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \alpha} + 1$$

$$۵) \frac{2}{1 + \sin x + \cos x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$۶) \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \tan^2 \beta}$$

$$۷) \sin^2 \alpha (1 + \cot^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha \quad ۸) \tan^2 a \sin^2 a = \tan^2 a - \sin^2 a$$

$$۹) \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

$$۱۰) (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)^2 = (1 + \sin \alpha)(2 + 2 \cos \alpha)$$

$$۱۱) \sin \theta \cos \theta (1 + \tan \theta) (1 + \cot \theta) = (\sin \theta + \cos \theta)^2$$

$$۱۲) \frac{1 + \tan x + \tan^2 x}{1 + \cot x + \cot^2 x} = \tan^2 x$$

Lined writing area with horizontal dashed lines.

نمونه آزمون نوبت اول

ردیف	سوالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) عدد $3 - 2\sqrt{2}$ دارای دو ریشهی چهارم می باشد. ب) اگر a, b و c سه جملهی متوالی یک دنبالهی هندسی باشند، آن گاه $b^2 = ac$. ج) اگر α زاویهی در ناحیهی سوم باشد، آن گاه $\cos \alpha \cdot \cot \alpha > 0$ می باشد. د) معادلهی $x^2 + mx - 1 = 0$ همواره دارای دو ریشهی حقیقی است.	۱
۲	جاهای خالی را پر کنید. الف) اگر α زاویهی در ناحیهی دوم و $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ، آن گاه $\tan \alpha$ برابر با است. ب) در دنبالهی حسابی $a_n = \frac{4n^2 + 5n + 1}{n + 1}$ ، قدرنسبت دنباله برابر با است. ج) نمودار سهمی $y = x^2 - 4x + 3$ ، محور x ها را در نقاط د) ریشههای ششم عدد $(\sqrt{2} - 2)^6$ عبارتاند از	۲
۳	فرض کنید $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعهی مرجع باشند و $A = \{3, 5, 7\}$ و $B = \{2, 5, 6\}$. مجموعهی زیر را مشخص کنید. $(A' - B)'$	۱
۴	در یک دنبالهی حسابی جملهی سوم برابر ۴ و جملهی پانزدهم ۳۲ - می باشد. جملهی عمومی این دنباله را مشخص کنید.	۱/۲۵
۵	به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جملهی اول از دنبالهی هندسی نزولی هستند. مجموع پنج جملهی اول این دنباله را به دست آورید.	۱/۵
۶	هواپیمایی می خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویهی ۴۵ درجه از زمین بلند می شود. وقتی به بالای انتهای باند می رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چه قدر است؟	۱
۷	با توجه به حدود داده شده برای α و عبارت داده شده برای نسبت مثلثاتی، حدود m را به دست آورید. $\cos 3\alpha = \frac{5 - 3m}{4}$: $-20 \leq \alpha \leq 20$	۱
۸	۸- اگر خط $(m+1)y - (m-2)x = 7$ با جهت مثبت محور طولها زاویهی 60° بسازد، مقدار m را به دست آورید.	۰/۷۵
۹	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $A = \frac{1 + \tan x + \tan^2 x}{1 + \cot x + \cot^2 x}$	۱/۲۵

ردیف	سوالات	بارم
۱۰	اگر $4\sin\theta - 3\cos\theta = 0$ ، با فرض حاده بودن θ ، حاصل $3\tan\theta + 5\sin\theta$ را بیابید.	۱
۱۱	حاصل عبارات زیر را بیابید. الف) $(\sqrt[6]{5})^{18} \times (\sqrt{-3})^{14}$ ب) $(\sqrt[3]{35\sqrt{81}})^6$	۱
۱۲	اگر عبارت $a^2\sqrt{a^5a\sqrt{a^3}}$ را به ازای $a > 0$ به صورت a^m در نظر بگیریم، آن گاه مقدار m را بیابید.	۱
۱۳	حاصل عبارات زیر را بیابید. الف) $(x^2 - 2)^3$ ب) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$	۱/۲۵
۱۴	حاصل عبارت زیر را بیابید. $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{x^3 - 8} + \frac{3}{x - 2}$	۱/۵
۱۵	عبارت زیر را گویا کنید. $A = \frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$	۱
۱۶	جواب‌های معادلات زیر را به روش خواسته شده بیابید. الف) $4x^2 - 4x - 8 = 0$ (روش مربع کامل) ب) $x^2 - \sqrt{2}x = 5 + \sqrt{2}x$ (روش فرمول کلی)	۱/۵
۱۷	نمودار سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ را رسم کنید. (۱ نمره)	۱
۲۰	پیروژ پاشید	