

برنامہ پروردگار مہربان

کتاب نگار

پایہ دہم

ریاضی

حسین الفینی • میثم حمزہ لوئی • یوسف داستان



مہروماہ

مقدمه



سلام. سال تحصیلی شروع شد و دوباره درس و مخصوصاً درس شیرین ریاضی.



آقا اجازه! ما این درس شیرین رو تقدیم می‌کنیم به خودتون! بفرمائین!



باشه! حق با توه! می‌دونم ۹ سال بالا و پایین کردی که این درس باهات راه بیاد، اما ذره‌ای روی خوش بهت نشون نداده! دلیل هم زیاد داره که اینجا جای بحثش نیست.



با همهی این احوال، چند دقیقه به حرفمون گوش بده، ببین ما چی کار کردیم تا با این عزیز دل‌انگیز رابطه‌ت بهتر شه! مطمئن باش جواب می‌گیری.

آقا یعنی می‌شه در حد عالی ریاضی رو درک کرد یا حداقل اون ما رو درک کنه و کم‌تر سر به سرمون بزاره؟!



بله که می‌شه عزیزم. خوشبختانه ریاضی بچه خوبیه. اصول و قواعد بازیشو یاد بگیری عاشقش می‌شی!



آقا این یه بارم فقط به عشق خودت! گوش می‌دیم ببینیم چه معجزه‌ای قراره رخ بده!



احسنت! بریم سراغ اصل مطلب:



یکی از مشکلات اساتید محترم ریاضی اینه: کتابی که گام به گام با آموزش استاد حرکت کنه و یک‌جور کمک حال استاد باشه، تا الان نبوده. اکثراً کتاب‌ها با یک درسنامه، کل تیپ‌های سؤال رو تو اون مبحث خاص درس دادن و خیلی از دانش‌آموزا هم با حفظ کردن این تیپ‌ها جلو رفتن و بعداً وقتی این مباحث با هم ترکیب می‌شن، دانش‌آموز به دلیل عدم تسلط روی مفاهیم، به محض برخورد با این مسائل به پوچی می‌رسه! کلی هم بدو بیراهه به مؤلف، دبیر، فیثاغورس و... می‌ده و میره! اما معجزه‌های این کتاب اینه که:

۱ هر مفهوم رو گام به گام تو مسیر فعالیت‌های اساتید ریاضی دهم (البته در حد توانمون) جلو بردیم به طوری که اکثر نکات کتاب درسی و مفاهیم مهم رو خود دانش‌آموز به تدریج کشف و نتیجه‌گیری کنه، در نتیجه به طور قطع مفاهیم راحت‌تر تو ذهنش نقش می‌بندد!

۲ مورد بعدی که معمولاً دانش‌آموز رو اذیت می‌کنه، سؤالات یکنواخت و کسل‌کننده است که سعی کردیم تو این کتاب از تمرین‌های متنوعی (از جمله سؤال‌های دو گزینه‌ای، صحیح و غلط، وصل‌کردنی، جای خالی، مسئله‌ها و ...) استفاده کنیم تا حس یکنواختی رو از تمرین‌ها بگیریم.

۳ تلاش کردیم تمام مفاهیم، نکات و تمرین‌های کتاب درسی رو پوشش بدیم تا خیال اساتید محترم و دانش‌آموزان از هر حیث راحت باشه.

۴ تمام نکات و نتیجه‌گیری‌های مهم رو داخل کادرهای رنگی قرار دادیم تا دانش‌آموز بتونه در شب‌های امتحان، با مطالعه اون‌ها مرور سریعی رو مطالب داشته باشه.

از اونجایی که هیچ‌کاری بی‌عیب و نقص نمی‌شه، از شما دوستان و همراهان عزیز خواهش می‌کنیم که نظرات ارزشمند خودتون رو به نشانی الکترونیکی Info@Mehromah.ir ارسال و یا از طریق SMS به سامانه ۰۲۲۱۲۰۰۳۰۰۰ اعلام فرمایید. هم‌چنین برای ارتباط با مؤلفین کتاب می‌تونید پیغام خودتون رو به نشانی‌های زیر ارسال کنید.

میثم حمزه‌لوی - حسین اسفینی - یوسف داستان

meisam.hz@gmail.com | hossein.esfini@gmail.com | yousefdastan@gmail.com

فهرست

۵



مجموعه، الگو و دنباله

۳۷



مثال‌ها

۵۹



توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

۷۹



معادلات و نامعادلات

آزمون نیمسال اول ۱۰۶

۱۰۹



تابع

۱۳۷



ترکیب‌ها

۱۵۵

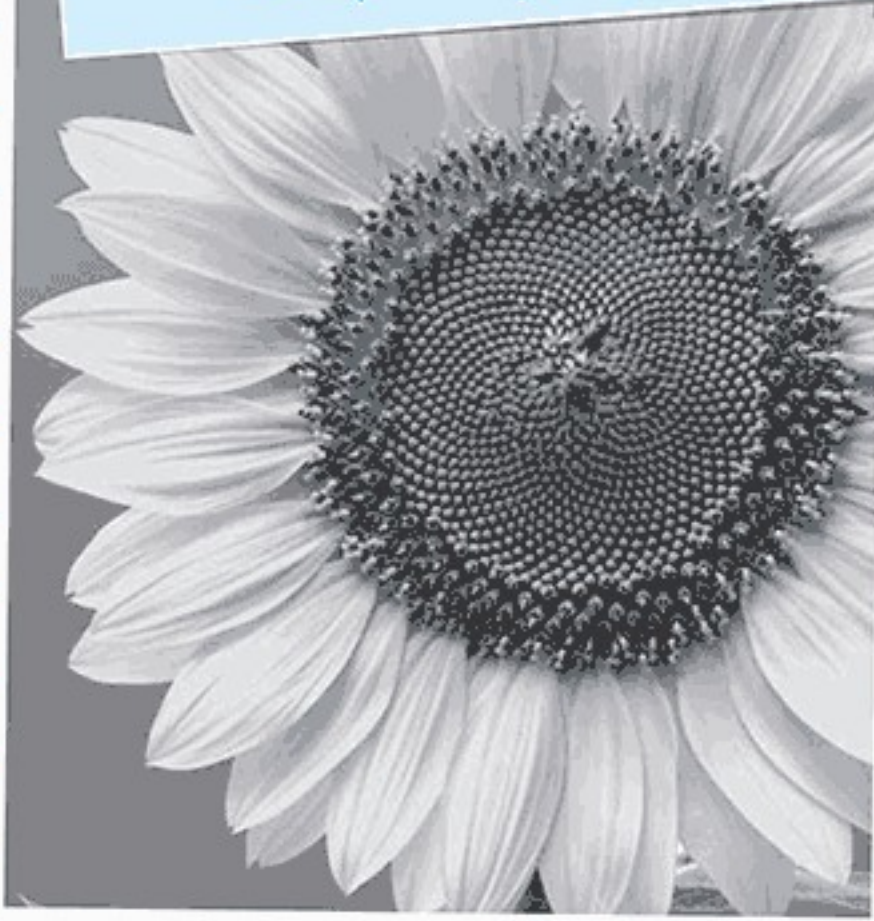


آمار و احتمال

آزمون جامع ۱۷۴



مجموعه، الگو و دنباله



آنچه در این فصل خواهید دید:

- ۱ مجموعه اعداد
- ۲ بازه‌ها
- ۳ مجموعه‌های منتهای و نامنتهای
- ۴ مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه
- ۵ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه
- ۶ الگوهای خطی و غیرخطی
- ۷ تعریف دنباله
- ۸ دنباله‌های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

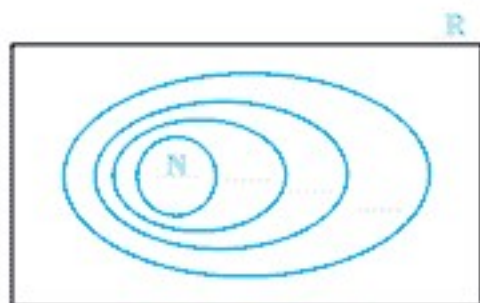
مجموعه‌های اعداد

نمایش مجموعه	نماد	توضیح	مجموعه‌ی اعداد	
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	\mathbb{N}	کلیدهای عددی که برای شمارش به کار می‌روند، مجموعه‌ی اعداد طبیعی را تشکیل می‌دهند.	طبیعی	۱
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$	\mathbb{W}	اگر به مجموعه‌ی اعداد طبیعی، عضو صفر هم اضافه شود، مجموعه‌ی اعداد حسابی به دست می‌آید.	حسابی	۲
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	\mathbb{Z}	حالا اگر به مجموعه‌ی اعداد حسابی، عضو قرینه‌ی هر عدد هم اضافه شود، مجموعه‌ی اعداد صحیح حاصل می‌شود.	صحیح	۳
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$	\mathbb{Q}	هر عددی که بتوان آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت، عضو این مجموعه است. برای مثال عدد $\frac{2}{7}$ از تقسیم عدد صحیح ۲ بر عدد صحیح ۷ حاصل می‌شود و عدد -2 از نسبت $\frac{-2}{1}$.	گویا	۴
مثال: $\pi, \sqrt{2}$	\mathbb{Q}' یا \mathbb{Q}^c	اما اعدادی وجود دارند که نمی‌توانیم آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح بنویسیم، این اعداد مجموعه‌ی اعداد گنگ را ایجاد می‌کنند.	گنگ	۵
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	اجتماع مجموعه‌ی اعداد گویا و گنگ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی را به وجود می‌آورند.	حقیقی	۶

الف مجموعه‌های \mathbb{Q} ، \mathbb{W} و \mathbb{N} را در جاهای خالی بنویسید. (علامت زیرمجموعه است.)



ب با توجه به جواب فوق، این مجموعه‌ها را در نمودار ون زیر، مانند نمونه، مشخص کنید.



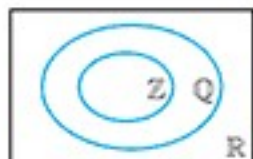


۲ در قسمت‌های زیر، مجموعه‌های داده‌شده را در صورت امکان روی نمودار ون مشخص کنید و یک عضو دلخواه (در صورت وجود) از آن‌ها را بنویسید.

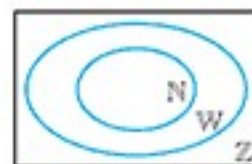
ب مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی



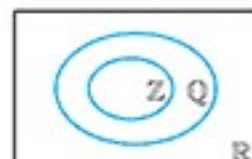
ت مجموعه $Z - Q$



الف مجموعه $W - N$



پ مجموعه $Q - Z$



۳ الف مجموعه $R - Q$ چه نام دارد؟ آن را روی نمودار مقابل هاشور بزنید.

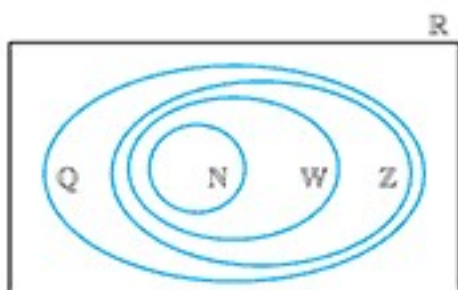
ب دو عضو دلخواه از مجموعه $R - Q$ را بنویسید.

پ با توجه به نمودار فوق، جاهای خالی زیر را پر کنید.

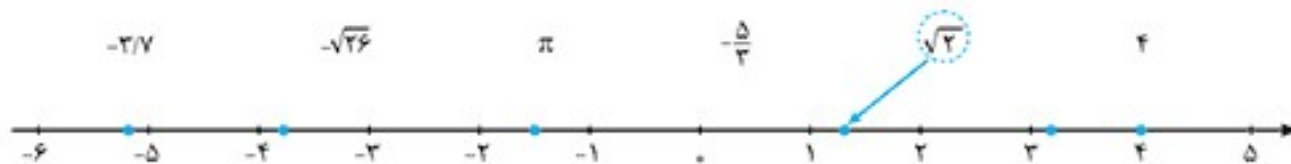
$Q \cap (R - Q) = \dots$

$Q \cup (R - Q) = \dots$

۴ اعداد $4, \sqrt{5}, \frac{\pi}{3}, -1, \frac{-4}{3}$ و 0 را بر روی شکل و در محل مناسب بنویسید.



۵ با توجه به نقاط مشخص‌شده روی محور، جای هر کدام از اعداد زیر را به کمک فلش مشخص کنید (مانند نمونه). کدام یک از این شش عدد، گنگ هستند؟ زیر آن‌ها خط بکشید.



۶ عبارات درست را با علامت ✓ و عبارات نادرست را با علامت ✗ مشخص کنید.

الف $-\sqrt{24} \in Q$

ب $-\frac{7}{8} \notin Z$

پ $-5 \in Z$

ت $\sqrt{25} \in Q'$

ث $N \cap W = N$

ج $N - W = \emptyset$

چ $N \cap Q' = N$

ح $Z \cup Q = Q$

خ $Q \cap [(Z - N) \cap W] = \{0\}$

بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص باشند را بازه یا فاصله می‌گوییم. مانند بازه بسته $[-2, 1]$ یا بازه باز $(-2, 1)$ یا بازه نیم‌باز $[-2, 1)$ یا $(-2, 1]$. به نمایش هندسی آنها دقت کنید:



جدول زیر را کامل کنید.

بازه	نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
$(-2, 1)$	باز	$\{x \in \mathbb{R} -2 < x < 1\}$	
$[-1, 3]$	بسته	
.....	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} -4 \leq x < -1\}$	
.....	نیم‌باز	
$(-2, 1) \cup \{1\}$	

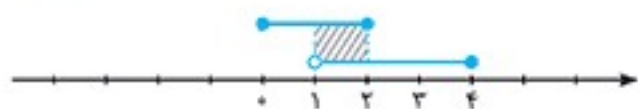
عبارات درست را با علامت ✓ و عبارات نادرست را با علامت ✗ مشخص کنید.

- | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|---|--------------------------|
| الف $1 \in [\frac{4}{5}, 3)$ | <input type="checkbox"/> | ب $2 \in (2, 3]$ | <input type="checkbox"/> | پ $2 \in \{2, 3\}$ | <input type="checkbox"/> |
| ت $\frac{5}{2} \in \{2, 3\}$ | <input type="checkbox"/> | ث $[1, 4) = (1, 4]$ | <input type="checkbox"/> | ج $(-2, 2] \subseteq [-2, 2)$ | <input type="checkbox"/> |
| چ $(-2, 2) \subseteq [-2, 2]$ | <input type="checkbox"/> | ح $[-2, 2] \subseteq (-2, 2)$ | <input type="checkbox"/> | خ $\{4, 3\} \subseteq [0, 5]$ | <input type="checkbox"/> |
| د $[0, 5] \subseteq \{0, 5\}$ | <input type="checkbox"/> | ذ $\sqrt{5} \in (-1, 4) \cap [2, 5)$ | <input type="checkbox"/> | ر $(-1, 0) \cap (2, 8) \subseteq \{-1, 1\}$ | <input type="checkbox"/> |

مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 4\}$ ، $B = [0, 2]$ و $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 6\}$ مفروض‌اند، مجموعه‌های زیر را مطابق

نمونه به‌دست آورده و مشخص کنید کدام‌یک از آن‌ها بیانگر یک بازه هستند؟

الف $A \cap B = (1, 2]$



ب $A \cup C = \dots\dots\dots$



پ $B - A =$



ت $(A \cup C) - B =$



ث $(C - A) \cup B =$



ج $(B - A) \cup (C - A) =$



برای نوشتن مجموعه‌هایی مانند $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ یا $B = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$ به شکل یک بازه، به ترتیب از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم و آن‌ها را در قالب بازه به ترتیب با نماد $A = (2, +\infty)$ و $B = (-\infty, 2)$ نمایش می‌دهیم که بازه باز محسوب می‌شوند.

تذکره: $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

۱۰ جدول زیر را کامل کنید.

بازه	نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
$[2, +\infty)$	نیم باز	
.....	$\{x \in \mathbb{R} x \leq 2\}$	
.....	
$(-\infty, 2] - \{2\}$	

۱۱ هر یک از اعداد ستون سمت چپ عضو یکی از مجموعه‌های سمت راست است. هر عدد را به مجموعه نظیر آن وصل کنید.

2π	$(-2, 6) - (-2, 1)$
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3})$
$-\frac{13}{4}$	$(1, +\infty)$
$5/0.2 \times 1.5^0$	$(-\frac{1}{6}, \frac{3}{4})$
$\frac{3}{5}$	$(-4, -2)$

۱۲ مجموعه‌های زیر را روی محور نشان داده و سپس آن‌ها را به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

مجموعه‌ها	نمایش روی محور	نمایش به صورت اجتماع بازه‌ها
$\mathbb{R} - \{1\}$		$(-\infty, 1) \cup$
$\mathbb{R} - \{1, 2\}$	



مجموعه‌هایی مانند A که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌های می‌نامیم و مجموعه‌هایی مانند B را که نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان نمود، مجموعه‌های می‌نامیم.

تذکر: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد.

۱۶ مجموعه‌هایی که نامتناهی هستند را با علامت ✓ مشخص کنید.

الف مجموعه دانش‌آموزان تمام مدارس شهر تهران

ب مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

پ مجموعه تمام دایره‌هایی که مرکز آن‌ها مبدأ مختصات است.

ت مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک طوطی

۱۷ مجموعه‌هایی که متناهی هستند را با علامت ✓ مشخص کنید.

- | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | الف \mathbb{Z} | <input type="checkbox"/> | ب $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ |
| <input type="checkbox"/> | پ $\mathbb{Z} - \mathbb{Q}$ | <input type="checkbox"/> | ت $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ |
| <input type="checkbox"/> | ث مجموعه اعداد اول زوج | <input type="checkbox"/> | ج $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ |
| <input type="checkbox"/> | چ $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ | <input type="checkbox"/> | ح مجموعه اعداد اعشاری بین $-1, \sqrt{5}$ |
| <input type="checkbox"/> | خ مجموعه اعداد صحیح 50 رقمی | <input type="checkbox"/> | د $\{x \in \mathbb{W} \mid x < 6/0.2 \times 10^{22}\}$ |
| <input type="checkbox"/> | ذ مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد 84 | <input type="checkbox"/> | ر مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد 20 |
| <input type="checkbox"/> | ز مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک | | |

۱۸ بازه $(-1, 6)$ را در نظر بگیرید.

الف	سه عدد گویا در این بازه نام ببرید.	سه عدد گنگ در این بازه نام ببرید.
ب	به نظر شما چه تعداد عدد گویا در این بازه وجود دارد؟	چه تعداد عدد گنگ در این بازه وجود دارد؟
پ	مجموعه اعداد گویا در این بازه متناهی است یا نامتناهی؟	مجموعه اعداد گنگ در این بازه متناهی است یا نامتناهی؟
ت	مجموعه اعداد گویا متناهی است یا نامتناهی؟	مجموعه اعداد گنگ متناهی است یا نامتناهی؟

۱۹ فرض کنید A مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد 3 باشد.

الف A را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب A متناهی است یا نامتناهی؟



پ یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید.

ت یک مجموعه‌ای بنویسید که A زیرمجموعه آن باشد.

ث دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به طوری که $C \subseteq D$ باشد.

۲۰ در هر قسمت دو مجموعه نامتناهی (در صورت وجود) مانند A و B طوری مثال بزنید که:

الف $A \cap B$ متناهی باشد.

ب $A \cap B = \emptyset$ باشد.

پ $A \cap B$ نامتناهی باشد.

ت $A \cup B$ نامتناهی باشد.

ث $A \cup B$ متناهی باشد.

ج $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک‌عضوی باشد.

۲۱ جاهای خالی را با کلمات «متناهی» و «نامتناهی» پر کنید.

الف اگر مجموعه‌های A و B متناهی باشند، آن‌گاه $A \cup B$ مجموعه‌ای و $A \cap B$ مجموعه‌ای است.

ب اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، آن‌گاه $A \cup B$ مجموعه‌ای و $A \cap B$ مجموعه‌ای است.

پ اگر A و B نامتناهی باشند، آن‌گاه $A \cup B$ مجموعه‌ای و $A \cap B$ می‌تواند یا باشد.

ت اگر $A \cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B و $A \cup B$ می‌توانند یا باشند.

ث اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B و $A \cup B$ است.

ج اگر $A \cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B و $A \cap B$ است.

چ اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه حداقل یکی از مجموعه‌های A یا B و $A \cap B$ می‌تواند یا باشد.

۲۲ فرض کنید $A \subseteq B$ باشد، عبارات درست را با علامت ✓ و عبارات نادرست را با علامت ✗ مشخص کنید.

الف اگر A متناهی باشد، B متناهی است.

ب اگر A نامتناهی باشد، B نامتناهی است.

پ اگر B متناهی باشد، A متناهی است.

ت اگر B نامتناهی باشد، A نامتناهی است.



درس دوم: متمم یک مجموعه

- مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی: مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع گویند و آن را با U نمایش می‌دهند.
- متمم مجموعه A : هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند. بنابراین $A \cap A' = \emptyset$ است.

۲۳ اگر مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم و $A = \{1, 2, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ باشد، آن‌گاه اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

- الف $A' = \dots$ ب $B' = \dots$
 پ $A \cup B' = \dots$ ت $B' \cap A' = \dots$

۲۴ ابتدا اعضای مجموعه‌های زیر را نوشته و سپس با توجه به مجموعه مرجع بیان شده، متمم آن‌ها را به دست آورید.

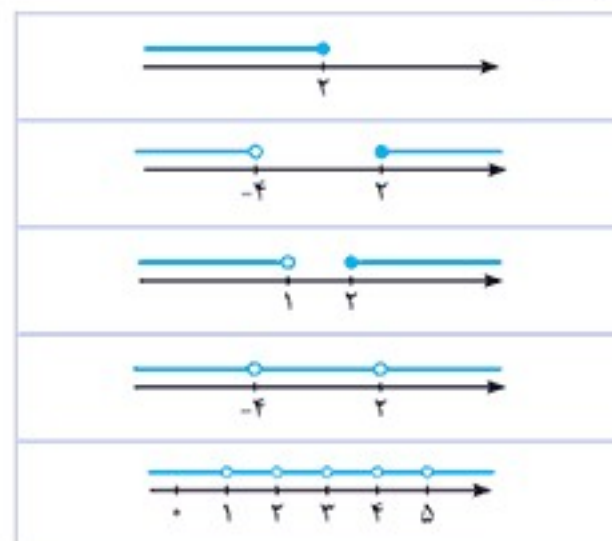
مجموعه	مجموعه مرجع	اعضای مجموعه	متمم مجموعه
$A = \{x -2 < x \leq 2\}$	\mathbb{Z}	$-1, 0, 1, 2$	$\dots, -3, -2, 3, 4, 5, \dots$
$B = \{x \frac{1}{3} \leq x < 5\}$	\mathbb{N}	\dots	\dots
$C = \{x x < \frac{7}{2}\}$	\mathbb{Z}	\dots	\dots

۲۵ اگر U مجموعه مرجع باشد، آن‌گاه جاهای خالی را پر کنید.

- الف $\emptyset' = \dots$ ب $U' = \dots$ پ $A \cap A' = \dots$ ت $A \cup A' = \dots$
 ث $A - A' = \dots$ ج $U' \cup A = \dots$ چ $U - A' = \dots$ ح $U - (U - A) = \dots$

۲۶ اگر \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، متمم هر کدام از مجموعه‌های ستون سمت چپ را به نمایش هندسی آن در ستون سمت راست وصل کنید.

$[-4, 2)$
$\{-4, 2\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
$(2, +\infty)$
$[-2, 2) \cap (1, 3)$



جاهای خالی را پر کنید. ۲۷

مجموعه مرجع	مجموعه A	مجموعه A'
N	مجموعه اعداد زوج
Z	مجموعه اعداد صحیح منفی
.....	Q	Q'
W	∅
W	N
N	{x x > 4}
تمام استان های کشور	مجموعه استان های غیر ساحلی

۲۸ N را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف مجموعه ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

.....

ب مجموعه ای نامتناهی مانند B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

.....

پ مجموعه ای متناهی مانند C مثال بزنید و C' را بیابید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

.....

۲۹ اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه ای نامتناهی باشد، آن گاه کدام مجموعه، حتماً نامتناهی است؟

$A \cap B$

B'

۳۰ اگر C و D زیرمجموعه هایی از اعداد طبیعی و D نامتناهی و C متناهی باشند، کدام مجموعه حتماً متناهی است؟

$C \cup D'$

$C \cap D'$

۳۱ فرض کنید Z، مجموعه مرجع باشد؛

الف دو مجموعه دلخواه متناهی مانند A و B بنویسید، به طوری که $A \subseteq B$ باشد.

.....

ب مجموعه های A' و B' را مشخص کنید. به نظر شما $A' \subseteq B'$ است یا $B' \subseteq A'$ ؟

.....

اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه

پ اگر $A \subseteq B$ باشد، با توجه به نتیجه حاصل یا به کمک نمودار ون، جاهای خالی زیر را پر کنید.

۱ $A' \cap B' =$

۲ $A' \cup B' =$

۳۲ فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$. جاهای خالی را پر کرده و نتایج حاصل در هر قسمت را به عنوان فرمول به خاطر بسپارید.

الف

A'	$(A')'$	A
.....

\Rightarrow فرمول: $(A')' = \dots\dots\dots$

ب

A'	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
.....

\Rightarrow فرمول: $(A \cup B)' = \dots\dots\dots$

ج

A'	B'	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
.....

\Rightarrow فرمول: $(A \cap B)' = \dots\dots\dots$

د

$A - B$	$A \cap B'$
.....

\Rightarrow فرمول: $A - B = \dots\dots\dots$

ث به نظر شما مجموعه $A - B$ با چه مجموعه‌ای برابر است؟

تعداد اعضای متمم یک مجموعه

۳۳ در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، $n(A)$ تعداد اعضای آن مجموعه است. حال فرض کنید، مجموعه مرجع برابر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 2\}$ باشد، با پیدا کردن مجموعه A' جدول زیر را پر کنید.

A'	$n(A)$	$n(U)$	$n(A')$
.....

تعداد اعضای مجموعه مرجع چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(A')$ دارد؟

تعداد اعضای متمم یک مجموعه متناهی را می‌توان از فرمول یافت.

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه $(n(A \cup B))$

۳۴ دو مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ را به دست آورید.

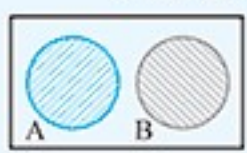
ب جاهای خالی را پر کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
.....

پ تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ ، چه رابطه‌ای با تعداد اعضای مجموعه‌های A و B دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

ت به نظر شما فرمول فوق تحت چه شرایطی برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

به هر دو مجموعه دلخواه A و B که فاقد عضو مشترک هستند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گویند.



ث ابتدا مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ را به دست آورده و سپس تعداد اعضای آن‌ها را بنویسید.

$A - B = \dots \Rightarrow n(A - B) = \dots$ $B - A = \dots \Rightarrow n(B - A) = \dots$

ج با توجه به قسمت‌های (ب) و (ث) بگویید آیا برای دو مجموعه جدا از هم A و B می‌توان فرمول زیر را نتیجه گرفت؟

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A)$

۳۵ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند و $n(A) = 6$ و $n(A \cup B) = 20$ باشد، آن‌گاه $n(B - A)$ کدام است؟

۳۶ اگر $n(U) = 40$ و دو مجموعه A و B جدا از هم باشند و داشته باشیم $n(A') + n(B') = 45$ ، مقدار $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

۳۷ فرض کنید A و B دو مجموعه مجزا باشند، در این صورت:

الف اگر $n(A \cup B) = 60$ ، $n(A) = 3n(B)$ باشد، آن‌گاه $n(A)$ و $n(B)$ را به دست آورید.

ب اگر $n(A \cup B) = 2n(B) = 4n(A) - 8$ باشد، آن‌گاه $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(A \cup B)$ را بیابید.

۳۸ اگر $n(A \cup B) = 10$ ، $n(A) = 3$ و $n(B) = 9$ باشد، آیا A و B دو مجموعه مجزا هستند؟ چرا؟

۳۹ اگر A و B دو مجموعه مجزا باشند، عبارات درست را با علامت ✓ و عبارات نادرست را با علامت ✗ مشخص کنید.

- الف $n(A \cap B) = 0$
- ب $n(A) + n(B) = n(A \cap B)$
- پ $n(A - B) = n(A)$
- ت $n(A' \cup B) = n(A')$



۴۰ اگر مجموعه‌های A و B ، به ترتیب مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۸ باشند، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف مجموعه‌های A ، B ، $A \cap B$ و $A \cup B$ را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

$A =$

$B =$

$A \cap B =$

$A \cup B =$

ب جاهای خالی را پر کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
.....

پ چرا رابطه $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این سؤال برقرار نمی‌باشد؟

ت از $n(A) + n(B)$ باید چه عددی را کم کنیم تا به $n(A \cup B)$ برسیم؟ این عدد در جدول، تعداد اعضای کدام مجموعه است؟

ث با توجه به قسمت (ت) فرمولی برای $n(A \cup B)$ حدس بزنید.

$$n(A \cup B) = \dots + \dots - \dots$$

ج از نظر مفهومی و به کمک نمودار ون بیان کنید چرا باید $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم تا $n(A \cup B)$ به دست آید؟

چ با توجه به مجموعه‌های A و B جدول زیر را پر کنید.

B	$A \cap B$	$B - A$
.....
$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(B - A)$
.....

ح با توجه به جدول فوق آیا رابطه زیر درست است؟ برای درک بهتر آن از نمودار ون کمک بگیرید.

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B - A) = n(B) - \dots, \quad n(A - B) = \dots - \dots$$



۴۷ در یک کلاس ۳۰ نفری، تعداد ۱۰ نفر عضو تیم والیبال و ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال هستند. هم‌چنین ۵ نفر عضو هر دو تیم فوتبال و والیبال هستند. حال به سؤالات زیر پاسخ دهید (برای فهم بهتر از نمودار ون کمک بگیرید).

(راهنمایی در نمودار ون ابتدا مقدار قسمت $A \cap B$ را تعیین کنید.)

الف چند نفر عضو تیم والیبال نیستند؟

ب چند نفر فقط عضو تیم والیبال اند؟

پ چند نفر فقط عضو تیم فوتبال اند؟

ت چند نفر دست کم عضو یکی از دو تیم فوتبال یا والیبال هستند؟ (عضو تیم فوتبال یا والیبال)

ث چند نفر دقیقاً عضو یکی از دو تیم فوتبال و والیبال هستند؟

ج چند نفر عضو هیچ کدام از دو تیم نیستند؟

چ چند نفر حداکثر عضو یکی از دو تیم فوتبال و والیبال هستند؟ (راهنمایی باید نفراتی را حساب کنید که عضو هیچ دو تیمی نیستند یا فقط عضو یک تیم هستند.)

ح چند نفر فقط عضو تیم والیبال اند یا عضو هیچ کدام از دو تیم نیستند؟

۴۸ از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم شطرنج و ۱۳ نفر عضو تیم شنا می‌باشند. با فرض آن که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد:

الف چند نفر، عضو هر دو تیم شطرنج و شنا هستند؟

ب چند نفر، عضو تیم شطرنج اند ولی عضو تیم شنا نیستند؟

پ چند نفر فقط عضو تیم شنا یا فقط عضو تیم شطرنج هستند؟

۴۹ تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفر است که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر ۴۵ نفر از مسافریں نه تاجر باشند و نه برای اولین بار سفر کرده باشند، آن‌گاه:

الف چند نفر تاجر نیستند؟

ب چند نفر تاجر هستند یا برای اولین بار سفر کرده‌اند؟



پ چند نفر از این تاجرین، برای اولین بار سفر کرده‌اند؟ (هم تاجرند و هم برای اولین بار سفر کرده‌اند).

ت چند نفر فقط تاجرند؟

ث چند نفر فقط تاجرند یا فقط برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

ج چند نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند و تاجر نیستند؟

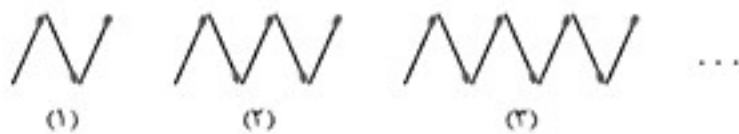
۵۰ در یک محفل دوستانه ۴۰ نفر حضور دارند که تعداد ۲۰ نفر آن‌ها گردنبند و ۱۵ نفر آن‌ها دستبند دارند. اگر تعداد افرادی که فقط گردنبند دارند، ۵ نفر باشد، آن‌گاه چند نفر نه دستبند دارند و نه گردنبند؟

۵۱ در یک شرکت ۳۴ نفره، ۴ نفر فقط وام خرید ماشین و ۲۰ نفر فقط وام خرید مسکن گرفته‌اند. اگر تعداد افرادی که وام خرید مسکن گرفته‌اند، سه برابر تعداد افرادی باشد که وام خرید ماشین گرفته‌اند، آن‌گاه چند نفر فقط یک وام گرفته‌اند؟

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

۵۲ با کمک چوب کبریت، الگوی مقابل ساخته شده است:

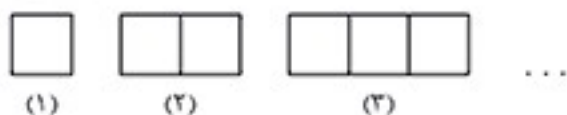


الف برای محاسبه تعداد چوب کبریت‌ها در هر شکل، الگو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. جاهای خالی را پر کنید:

			...		
$a_1 = 1(2) + 1$	$a_2 = 2(2) + 1$	$a_3 = \dots (2) + \dots$	$a_4 = \dots + \dots$	$a_8 = \dots + \dots$	$a_{20} = \dots + \dots$

ب اگر الگو را به صورت زیر در نظر بگیریم، جاهای خالی را پر کنید:

			...		
$a_1 = 2 + 1$	$a_2 = 3 + 2$	$a_3 = 4 + 3$	$a_4 = \dots + \dots$	$a_8 = \dots + \dots$	$a_{20} = \dots + \dots$



۵۳ در الگوی مقابل تعداد پاره‌خطها در هر جمله مدنظر است:

الف برای به دست آوردن مقدار هر جمله الگو، شکل الگو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. جاهای خالی را پر کنید.

□	□□	□□□		
$a_1 = 1(2) + 1$	$a_2 = 2(2) + 1$	$a_3 = \dots (\dots) + \dots$	$a_4 = \dots + \dots$	$a_n = \dots + \dots$

ب اگر الگوی زیر در نظر گرفته شود، جاهای خالی را پر کنید:

□	□□	□□□		
$a_1 = 1(2) + 2$	$a_2 = 2(2) + 3$	$a_3 = \dots (\dots) + \dots$	$a_4 = \dots + \dots$	$a_n = \dots + \dots$

پ هر یک از جمله‌های عمومی (a_n) به دست آمده در قسمت‌های (الف) و (ب) را ساده کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۸۲ پاره‌خط است؟

ث آیا شکلی در الگوی بالا وجود دارد که ۶۲ پاره‌خط داشته باشد؟

ج با کمک جمله عمومی، چهار جمله اول دنباله را بیابید و اختلاف هر دو جمله متوالی را محاسبه کنید.

$a_1 = 2(1) + 1 = 3$ $a_2 = \dots$ $a_3 = \dots$ $a_4 = \dots$

اختلاف هر دو جمله متوالی: $a_2 - a_1 = \dots$ $a_3 - a_2 = \dots$ $a_4 - a_3 = \dots$

الگوی خطی: الگوهایی که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی، همواره عددی ثابت است را الگوی خطی می‌گویند. در حالت کلی الگوهایی که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است را الگوی خطی می‌نامند که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. در این الگوها اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ضریب n یعنی a است.

۵۴ جمله عمومی یک الگو به صورت $a_n = 2n - 2$ است.

الف آیا این الگو خطی است؟

ب با توجه به جمله عمومی، جدول زیر را تکمیل کنید:

n	۱	۲	۳	۴
a_n	$2(1) - 2 = 0$
(n, a_n)	(۱, ۰)