جامع
ریاضی تجربی

وحید انصاری

اگر آوازت زیبا و دلنشین باشد، حتی اگر وسط بیابان باشی، کسی را خواهی یافت که به آوازت گوش فرا دهد.
«جبران خلیل جبران»

پیشگفتار مؤلف:

یزدان پاک را سپاس که دانش، توانایی و فرصت گردآوری این کتاب را به بنده اعطا نمود و دشواری‌های راه را هموار گرداند. بی‌شک بی‌یاری بی‌دریغ او، این مهم به انجام نمی‌رسید.

آنکه می‌گفت: «چشم‌ها را باید شست» حق می‌گفت؛ آری، «جور دیگر باید دید». لباس‌های تازه می‌خواهند نگاه‌های کهنه. «شناسنامه‌های تازه می‌خواهند کلمات».

دانش‌آموز عزیز بیایید دست در دست هم تمامی واژه‌ها را دوباره معنا کنیم؛ همه را دوباره بشناسیم و «از نو تازه شویم». بیایید ایمان بیاوریم به جملهٔ «چرخ بر هم زنم ار غیر مرادم گردد».

سخن نخست:

با توجه به زمان محدود داوطلبان و نیاز مبرم آنها به کتاب جامعی که در عین اختصار دربرگیرندهٔ مطالب مورد نیاز برای آزمون ورودی دانشگاه باشد، بر آن شدم که با تألیف این کتاب گامی در جهت بهبود کیفیت آموزشی بردارم. اینجانب با تمام توان سعی نموده‌ام که بیان درس، خلاصه و ساده و همچنین پاسخ‌های تشریحی پرسش‌ها، مطابق با روش‌های ترجیحی شما دانش‌آموزان عزیز باشد که پشتوانهٔ آن، سال‌ها تدریس در مدارس و آموزشگاه‌های علمی سراسر ایران است. همچنین در اکثر موارد سعی شده همراه با راه‌حل‌های عمومی از راه‌کارهای تستی برای تفهیم بهتر و زمان‌بندی کوتاه‌تر جهت تست‌زنی استفاده شود.

ساختار کتاب:

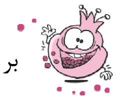
هر فصل در این کتاب به چهار بخش: گام اول (پیشینهٔ کنکوری)، گام دوم (فرمول‌های لازم)، گام سوم (خلاصهٔ درس با نمونه سؤال) و گام چهارم (آزمون پایانی) تقسیم شده است که در هر بخش مطالب زیر ارائه گردیده:

۱- گام اول (پیشینهٔ کنکوری): در این بخش دانش‌آموزان آگاه می‌شوند که در ۱۰ سال اخیر از فصل یاد شده، چه تعداد سؤال در کنکور سراسری داخل و خارج مطرح شده است.

۲- گام دوم (فرمول‌های لازم): با توجه به اینکه مطالب ریاضی همواره پیوسته و نیازمند اطلاعاتی از فصل‌های گذشته می‌باشد، در این بخش فرمول‌هایی که مورد نیاز است به اختصار بیان شده و جهت تفهیم بهتر نمونه سؤالاتی از آنها حل شده است.

۳- گام سوم (خلاصهٔ درس با نمونه سؤال): در این بخش مطالب و نکات درسی در چند خط به طور خلاصه با زبان ساده بیان شده و پس از هر مطلب نمونه پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور و تألیفی جهت روشن شدن آن حل شده است. از ویژگی‌های این بخش می‌توان به دسته‌بندی مطالب و نکات تستی به همراه پرسش‌های آنها اشاره کرد.

۴- گام چهارم (آزمون پایانی): در پایان هر فصل تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای همراه با پاسخ‌های تشریحی جهت ارزیابی دانش‌آموزان مطرح شده است. $\frac{1}{4}$ این پرسش‌ها ساده ( )، $\frac{1}{2}$ آنها متوسط ( ) و $\frac{1}{4}$ آنها دشوار ( ) می‌باشند.



بر همگان آشکار است که صدها دانهٔ انار با نظم و ترتیب خاصی در یک مجموعهٔ کوچک کنار هم قرار گرفته‌اند، از این رو با الهام گرفتن از این ویژگی نمایه‌های کتاب به شکل انار طراحی شده است.

ویژگی‌های کتاب:

۱- درسنامهٔ جامع و کوتاه.

۲- ریزطبقه‌بندی مطالب درسی و بیان نکات تستی و کنکوری.

۳- بررسی تست‌های کنکور سال‌های اخیر و امسال.

۴- پاسخ‌نامهٔ کاملا تشریحی برای تمامی تست‌ها با بیان ساده و کوتاه.

۵- بیان تست‌های آموزشی به ترتیب از ساده به دشوار.

۶- آزمون طبقه‌بندی شده در انتهای هر فصل.

قدردانی:

بدین ترتیب مراتب سپاسگزاری خود را از جناب آقای یحیی دهقانی مدیرعامل محترم، جناب آقای هادی عزیززاده معاونت محترم تألیف و جناب آقای خدایار مبین مدیر واحد حروف‌چینی و گرافیک به دلیل همکاری صمیمانه‌شان اعلام می‌دارم.

بسیار خرسندم تا مراتب امتنان خود را از سرکار خانم حمیده نوروزی بابت حروفچینی و صفحه‌آرایی، سرکار خانم مینا غلام‌احمدی جهت ترسیم شکل‌ها، سرکار خانم رضیه صفریان جهت طراحی جلد کتاب و جناب آقای بهنام فرمانی که در ویرایش کتاب اینجانب را صادقانه یاری نموده‌اند ابراز دارم.

وظیفهٔ خود می‌دانم از برادر بزرگوارم جناب آقای امیرهوشنگ انصاری تشکر ویژه‌ای داشته باشم که همواره با پیشنهادها و راهنمایی‌های خود، در امر تدریس و تألیف کمک شایانی به اینجانب نموده است.

تماس با ما:

با توجه به حساسیت در صحت مطالب ارائه شده، همه‌گونه تلاشی در جهت درستی متن و پاسخ‌های داده صورت گرفته است. باز هم، چنان که بر همگان آشکار است، اشتباه تألیفی و چاپی در نخستین ویرایش، اجتناب‌ناپذیر است. بدین سبب از شما خوانندهٔ گرامی خواهشمندم هرگونه پیشنهاد و انتقاد سازندهٔ خود را از طریق آدرس ایمیل زیر با اینجانب در میان بگذارید.

E-mail: vahidansari.science@gmail.com

وحید انصاری

آذر ۱۳۹۶

فهرست

عنوان صفحه

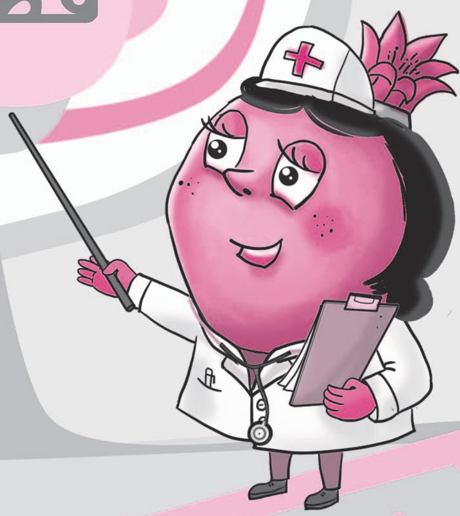
عنوان | صفحه

عنوان صفحه

عنوان	صفحه

ترکیبیات

فصل ۱



فصل اول: ترکیبیات در یک نگاه

گام اول . پیشینهٔ کنکوری

کنکور سراسری	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	مجموع در ۱۰ سال
تعداد سؤالات کنکور داخل	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۹
تعداد سؤالات کنکور خارج	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۹

دانش‌آموزان عزیز دقت داشته باشید، فصل ترکیبیات علاوه بر اینکه می‌تواند به طور مستقیم سؤال داشته باشد، پیش‌نیاز فصل احتمالی است که حداقل ۲ سؤال در کنکور سراسری را شامل می‌شود.

گام دوم . فرمول‌های لازم

۱ $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$

۲ $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! = \ldots$

۳ $0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad 2! = 2 \quad , \quad 3! = 6 \quad , \quad 4! = 24 \quad , \quad 5! = 120 \quad , \quad 6! = 720 \quad , \quad \ldots$

۴ $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$

۵ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad , \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

۶ $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2!} \quad , \quad \binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad , \quad \binom{n}{4} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

تست: اگر $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$ باشد، در این صورت حاصل $\dfrac{(3n)!}{(n+3)!}$ کدام است؟

۱) ۲۵۲ ۲) ۱۲ ۳) ۵۰۴ ۴) ۶

جواب:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow n(n+1) = 6 \Rightarrow n = 2$$

$$\frac{(3n)!}{(n+3)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \times 5!}{5!} = 6$$

تست: اگر $\dfrac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2} = 720 \times 42 \times 120$ باشد، آنگاه مقدار $\binom{n}{2}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۶۹ ۳) ۷۸ ۴) ۱۵۶

جواب:

$$\frac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-2)(n-1)} = (n-3)! \Rightarrow (n-3)! = \underbrace{720}_{10 \times 9 \times 8} \times \underbrace{42}_{7 \times 6} \times \underbrace{120}_{5!} = 10!$$

$$(n-3)! = 10! \Rightarrow n = 13$$

$$\binom{n}{2} = \binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2!} = 13 \times 6 = 78$$

تست: اگر حاصل $\prod_{i=1}^{6}(2i)$ برابر $k \times 5!$ باشد، مقدار $\binom{k}{3}$ چند است؟ ($\prod$ نماد ضرب است.)

۱) ۲۲۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۱۱۰ ۴) ۳۷۰

جواب:

$$\prod_{i=1}^{6}(2i)=2\times4\times6\times8\times10\times12=2(1\times2\times3\times4\times5\times6)=2\times6!=2\times6\times5!=12\times5!\Rightarrow k=12$$

$$\binom{k}{3}=\binom{12}{3}=\frac{12\times11\times10}{3!}=\frac{12\times11\times10}{6}=2\times11\times10=220$$

گام سوم. خلاصهٔ درس با نمونه سؤال

اصل جمع: اگر برای انجام کاری بتوان از دو روش استفاده کرد، به طوری که روش اول با m حالت و روش دوم با n حالت انجام پذیرد و **نتوان همزمان این دو روش را به کار گرفت**، آنگاه این کار با روش اول **یا** روش دوم صورت می‌پذیرد. در این صورت تعداد حالاتی که می‌توان این کار را انجام داد برابر است با: $m+n$

اصل ضرب: اگر برای انجام کاری **لازم باشد از دو مرحلهٔ متوالی عبور کنیم**، به طوری که مرحلهٔ اول با m روش و مرحلهٔ دوم با n روش انجام پذیرد، آنگاه انجام این کار با انجام مرحلهٔ اول **و** مرحلهٔ دوم صورت می‌پذیرد. در این صورت تعداد حالاتی که می‌توان این کار را انجام داد برابر است با: $m\times n$

تذکر: اگر انجام یک آزمایش به پایان رسید و آن را با روش دیگری امتحان کردیم باید حالت‌های به دست آمده را با هم جمع کنیم اما اگر در حین انجام آزمایش باشیم به طوری که هنوز به پایان نرسیده است باید حالت‌های آن را در هم ضرب کنیم.

مثال: با ارقام ۹ , ۶ , ۴ , ۳ , ۱ , ۰ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت به طوری که:

الف) فرد باشد (تکرار مجاز است).
ب) زوج باشد (تکرار مجاز است).
ج) فرد غیرتکراری باشد.
د) زوج غیرتکراری باشد.
هـ) فرد غیرتکراری بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد.

جواب:

الف) $\boxed{5}\times\boxed{6}\times\boxed{6}\times\underbrace{\boxed{3}}_{\{1,3,9\}}=5\times6\times6\times3=540$

ب) $\boxed{5}\times\boxed{6}\times\boxed{6}\times\underbrace{\boxed{3}}_{\{0,4,6\}}=5\times6\times6\times3=540$

ج) $\boxed{4}\times\boxed{4}\times\boxed{3}\times\underbrace{\boxed{3}}_{\{1,3,9\}}=4\times4\times3\times3=144$

د) $\begin{cases}\boxed{5}\times\boxed{4}\times\boxed{3}\times\underbrace{\boxed{1}}_{\{0\}}=5\times4\times3\times1=60\\ \boxed{4}\times\boxed{4}\times\boxed{3}\times\underbrace{\boxed{2}}_{\{4,6\}}=4\times4\times3\times2=96\end{cases}\xrightarrow{+}156$

هـ)
$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\boxed{۳}}_{\{۴,۶,۹\}}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\{۱,۳\}}=۳\times۴\times۳\times۲=۷۲ \\ \underbrace{\boxed{۲}}_{\{۴,۶\}}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{\{۹\}}=۲\times۴\times۳\times۱=۲۴ \end{array}\right. \xrightarrow{+} ۹۶$$

تست: چند عدد سه رقمی با ارقام ۲ , ۳ , ۴ , ۰ , ۵ می‌توان بدون تکرار ارقام نوشت؟ *(تجربی داخل ۸۱)*

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

جواب:

چون صفر نمی‌تواند در رقم سمت چپ قرار گیرد، پس برای این رقم چهار حالت وجود دارد؛ اما صفر در رقم‌های دیگر مـی‌توانـد استفاده شود. بنابراین:
$$\boxed{۴}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۴\times۴\times۳=۴۸$$

تست: با ارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ چند عدد سه رقمی غیرتکراری مضرب ۵ می‌توان نوشت به طـوری کـه کوچکتر از ۳۰۰ باشند؟

۱) ۳۲ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۶

جواب:

در این اعداد رقم صدگان باید از میان اعداد $\{۱,۲\}$ انتخاب شود، از طرفی اعدادی مضرب ۵ می‌باشند که رقم یکان آنها ۰ یا ۵ است. پس:
$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\{۱,۲\}}\times\boxed{۴}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\{۰,۵\}}=۲\times۴\times۲=۱۶$$

تست: با ارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ چند عدد سه رقمی زوج بزرگتر از ۳۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۴

جواب:

در این سوال تکرار ارقام مجاز است. پس:
$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\{۳,۴,۵\}}\times\boxed{۶}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\{۰,۲,۴\}}=۳\times۶\times۳=۵۴$$

در حالت‌های فوق عدد ۳۰۰ نیز محاسبه شده است در صورتی که اعداد بزرگ‌تر از ۳۰۰ مورد نظر است. پس تعـداد ایـن اعـداد $۵۴-۱=۵۳$ می‌باشد.

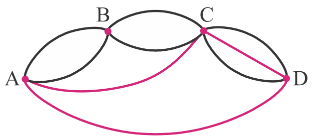
تست: چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد که بزرگتر از ۳۰۰۰ است وجود دارد؟ *(تجربی داخل ۹۰)*

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

جواب:

ارقام این عدد باید از میان ارقام فرد $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ انتخاب شوند پس تعداد آنها برابر است با:
$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\{۳,۵,۷,۹\}}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}=۴\times۴\times۳\times۲=۷۲$$

تست: با توجه به نقشهٔ راه بین شهرهای A , B , C , D به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفـت و سپس به شهر A برگشت؟



۱) ۲۵۶ ۲) ۱۲۸

۳) ۲۲۵ ۴) ۲۸۹

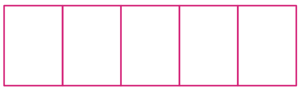
جواب:

تعداد مسیرهای رفت عبارتند از:

$$\begin{cases} A\to B\to C\to D : ۲\times۲\times۳=۱۲ \\ A\to C\to D : ۱\times۳=۳ \\ A\to D : ۱ \end{cases} \xrightarrow{+} ۱۲+۳+۱=۱۶$$

۱۶ مسیر رفت و ۱۶ مسیر برگشت وجود دارد پس تعداد مسیرهای مورد نظر برابر $۲۵۶ = ۱۶\times۱۶$ می‌باشد.

تست: به کمک چهار رنگ قرمز، آبی، زردو سبز خانه‌های زیر را رنگ می‌کنیم، در چند حالت خانه‌های مجاور همرنگ نمی‌باشند؟



۱) ۱۰۸ ۲) ۲۴۳

۳) ۱۷۲۸ ۴) ۳۲۴

جواب:

اگر از خانهٔ سمت چپ شروع به رنگ کردن کنیم برای این خانه چهار رنگ می‌توان در نظر گرفت، برای خانـهٔ بعـدی فقـط یـک رنگ را نمی‌توان انتخاب کرد (رنگ اول) و به همین ترتیب برای خانه‌های بعدی فقط رنگ خانهٔ قبلی را نمی‌توان در نظر گرفت.

تعداد حالت‌ها $= ۴\times۳\times۳\times۳\times۳ = ۳۲۴$

جایگشت n تایی n شیء:

تعداد حالاتی که می‌توان n شیء متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار داد برابر است با: $n(n-۱)(n-۲)\dots(۳)(۲)(۱) = n!$

تذکر: تعداد حالت‌های قرار دادن n شیء متمایز در n جایگاه با تعداد حالت‌های جابه‌جایی n شیء متمایز در کنار هم برابر است.

مثال: سه دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و چهار دانش‌آموز رشتهٔ تجربی در کنار هم نشسته‌اند، در چند حالت ممکن است:

الف) **دانش‌آموزان هر جایی که می‌خواهند بنشینند.**

ب) **دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی در کنار هم بنشینند.**

ج) **دانش‌آموزان هم‌رشته‌ای در کنار هم بنشینند.**

د) **دانش‌آموزان بر اساس رشته یک در میان بنشینند.** (هیچ دو دانش‌آموز تجربی یا هیچ دو دانش‌آموز ریاضی کنار هم ننشینند.)

هـ) **اول و آخر صف دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بنشیند.**

جواب:

الف) $۷!$

ب) چون دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی در کنار هم می‌نشینند پس آنها را در یک بسته قرار می‌دهیم تا یک شـیء حسـاب شـود. از طرفی دانش‌آموزان درون بسته می‌توانند با یکدیگر جابه‌جا شوند. پس:

$\boxed{T_1\ T_2\ T_3\ T_4}\ R_1\ R_2\ R_3 \Rightarrow 4!\times 4!$

ج) $\boxed{T_1\ T_2\ T_3\ T_4}\ \boxed{R_1\ R_2\ R_3} \Rightarrow 2!\times 4!\times 3!$

د) تعداد دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی یکی از تعداد دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی بیشتر است پس فقط در یک حالت بـه صـورت زیـر یک در میان می‌باشند:

$\boxed{T\ R\ T\ R\ T\ R\ T} \Rightarrow 4!\times 3!$

هـ) در اول صف ۳ دانش‌آموز ریاضی و در آخر صف ۲ دانش‌آموز ریاضی می‌تواند قرار بگیرد و بقیـهٔ دانـش‌آمـوزان بـین ایـن دو دانش‌آموز می‌توانند جابه‌جا شوند بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$\boxed{\text{۳ حالت}}\times\boxed{5!}\times\boxed{\text{۲ حالت}} = 3\times 5!\times 2 = 6\times 5! = 6!$

تست: ارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فـرد کنـار هـم باشـند. تعداد پنج‌رقمی‌های حاصل کدام است؟ *(تجربی داخل ۸۲)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

جواب:

$\boxed{1,3,5}\ ,2,4 \Rightarrow 3!\times 3! = 6\times 6 = 36$

تست: سه کتاب ریاضی، سه کتاب آمار و چهار کتاب زیست غیریکسان را در کنار هم قرار داده‌یم. در چنـد حالت اول ردیف دو کتاب زیست و آخر ردیف نیز دو کتاب زیست قرار می‌گیرد به طوری که کتاب‌های ریاضی و آمار یک در میان باشند؟

۱) $4!\times 4!$ ۲) $4!\times 4!\times 3!$ ۳) $4!\times 4!\times 2!$ ۴) $4!\times 4!\times 3!$

جواب:

$\boxed{ز}\times\boxed{ز}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{ر آ ر آ ر آ}\\ \text{آ ر آ ر آ ر}\end{array}}\times\boxed{ز}\times\boxed{ز} \Rightarrow 4\times 3\times(2\times 3!\times 3!)\times 2\times 1 = 4!\times 4!\times 3!$

تست: با ارقام ۹ , ۷ , ۵ , ۳ , ۱ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به شرطی که رقم صدگان بزرگتر از رقـم دهگان و رقم دهگان بزرگتر از رقم یکان باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۸

جواب:

با ۵ رقم داده شده می‌توان به تعداد $5\times 4\times 3$ عدد سه رقمی نوشت، اما با شرط داده شده از $3!$ حالتی که بـرای جابـه‌جـایی ارقام یکان و دهگان و صدگان وجود دارد تنها یک حالت قابل قبول است. پس:

$$\text{تعداد اعداد سه رقمی} = \frac{5\times 4\times 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

تست: ۶ نفر به نام‌های A , B , C , D , E , F در جلسه‌ای پشت سر هم سخنرانی می‌کنند. تعداد حالت‌هایی که شخص D بعد از شخص A سخنرانی می‌کند، چند برابر تعداد حالت‌هایی است که شخص D پشت سر شخص A سخنرانی می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

جواب:

D بعد از A :
$$\left\{\begin{array}{l} A\,,D\,,\square\,,\square\,,\square\,,\square \\ A\,,\square\,,D\,,\square\,,\square\,,\square \\ \square\,,A\,,\square\,,\square\,,D\,,\square \\ \vdots \end{array}\right. \Rightarrow \frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

D پشت سر شخص A : $\boxed{A\ D}\ \square\ \square\ \square\ \square \Rightarrow ۵!=۱۲۰$

$$\Rightarrow \frac{۳۶۰}{۱۲۰}=۳$$

جایگشت با تکرار:

فرض کنید در میان n شیء، اشیاء تکراری وجود دارد به طوری که $n_۱$ شیء از نوع اول، $n_۲$ شیء از نوع دوم و ... و n_k شیء از نوع آخر می‌باشد. در این صورت تعداد حالاتی که می‌توان این n شیء را در یک ردیف در کنار هم قرار داد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\ldots\times n_k!}$$

مثال: با حروف کلمهٔ «$statistic$» یک کلمهٔ ۹ حرفی ساخته‌ایم. مطلوب است تعداد حالت‌هایی که:

الف) شرط خاصی برای قرار گرفتن حروف نداشته باشیم.

ب) حروف s اول و آخر این کلمه باشد.

ج) حروف تکراری در کنار حروف مشابه خود باشند.

د) حروف تکراری t و i یک در میان باشند.

جواب:

الف) در این ۹ حرف، دو حرف s، سه حرف t و دو حرف i تکراری است. پس: $\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۲!}$

ب) اگر دو حرف s برای اول و آخر کلمه انتخاب شوند شش حرف دیگر بین آنها جابه‌جا می‌شوند. پس: $\frac{۶!}{۳!\times ۲!}$

ج) $\boxed{s\ s}\ \boxed{t\ t\ t}\ \boxed{i\ i}\ a\ c \Rightarrow ۵!$

د) $\boxed{t\,,i\,,t\,,i\,,t}\ s\ s\ a\ c \Rightarrow \frac{۵!}{۲!}\times ۳!\times ۲!=۵!\times ۳!=۶!$

تست: تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «$SYSTEM$» به طوری که Sها کنار هم نباشند کدام است؟

(تجربی داخل ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

جواب:

تعداد حالت‌هایی که Sها کنار هم باشند − تعداد کل حالات = تعداد حالات مطلوب

$$=\frac{۶!}{۲!}-۵!=۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$$

تست: با ارقام عدد ۳۰۰۰۳۵ چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

جواب:

رقم سمت چپ صفر نمی‌تواند باشد پس این رقم باید از میان اعداد $\{۳,۵\}$ انتخاب شود. که در این دو حالت تعداد اعداد شش رقمی برابر می‌شوند با:

$$\begin{cases}\underbrace{\boxed{۱}}_{\{۳\}}\times\underbrace{\boxed{}\times\ldots\times\boxed{}}_{\{۰,۰,۰,۳,۵\}}=۱\times\frac{۵!}{۳!}=۲۰\\[2ex] \underbrace{\boxed{۱}}_{\{۵\}}\times\underbrace{\boxed{}\times\ldots\times\boxed{}}_{\{۰,۰,۰,۳,۳\}}=۱\times\frac{۵!}{۲!\times۳!}=۱۰\end{cases}\xrightarrow{+}۲۰+۱۰=۳۰$$

تست: چند عدد چهاررقمی با ارقام ۳ , ۳ , ۳ , ۲ , ۲ , ۲ می‌توان نوشت؟ *(تجربی خارج ۸۵)*

۱) ۲۴ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۴

جواب:

چهاررقمی با سه تکرار: $\begin{cases}۲,۲,۲,۳\Rightarrow\frac{۴!}{۳!}=۴\\ ۳,۳,۳,۲\Rightarrow\frac{۴!}{۳!}=۴\end{cases}\xrightarrow{+}۸$

چهاررقمی با دو تکرار دوتایی: $۲,۲,۳,۳\Rightarrow\frac{۴!}{۲!\times۲!}=۶$

بنابراین تعداد اعداد چهاررقمی خواسته شده برابر $۸+۶=۱۴$ است.

قضیهٔ افراز:

تعداد حالت‌هایی که می‌توان n شیء را به گروه‌هایی با تعداد $n_۱$، $n_۲$ و ... و n_k شیء تقسیم کرد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\ldots\times n_k!}$$

تست: به چند طریق می‌توان با ۹ نفر سه گروه ۲، ۳ و ۴ نفره تشکیل داد؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) ۱۰۵ ۴) ۲۵۲۰

جواب:

$$\frac{۹!}{۴!\times۳!\times۲!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۲\times۶\times۴!}=۹\times۴\times۷\times۵=۱۲۶۰$$

جایگشت دایره‌ای (اختیاری):

تعداد حالت‌هایی که ممکن است n شیء متمایز در یک مسیر دایره‌ای‌شکل یا به عبارتی دور هم قرار گیرند برابر است با:

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

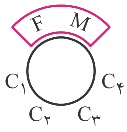
مثال: پدر و مادر و ۴ فرزند دور یک میز می‌نشینند، در چند حالت:

الف) پدر و مادر کنار هم می‌نشینند. **ب) بین پدر و مادر فرزند کوچکتر می‌نشیند.**

ج) بین پدر و مادر یک فرزند می‌نشیند. **د) پدر و مادر روبروی هم می‌نشینند.**

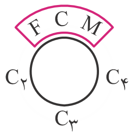
جواب:

الف) در این حالت پدر و مادر یک بسته فرض می‌شوند به طوری که می‌توانند با یکدیگر جابه‌جا شوند. پس:



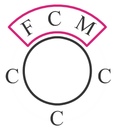
$$\Rightarrow (۵-۱)!\times ۲!=۴!\times ۲!=۴۸$$

ب)



$$\Rightarrow (۴-۱)!\times ۲!=۳!\times ۲!=۱۲$$

ج) چون مشخص نمی‌باشد کدام فرزند بین پدر و مادر است پس هر ۴ فرزند می‌توانند بین آنها قرار بگیرند:



$$\Rightarrow (۴-۱)!\times ۲!\times \binom{۴}{۱}=۳!\times ۲!\times ۴=۴۸$$

د) زمانی که پدر و مادر روبروی هم می‌نشینند، در حقیقت یک جسم محسوب می‌شوند. یعنی، اگر پدر برای نشستن می‌تواند ۶ صندلی را انتخاب کند، مادر به اجبار باید صندلی روبروی پدر را انتخاب کند (۱ حالت) و ۴ فرزند دیگر می‌توانند بر روی ۴ صندلی به $۴!$ روش بنشینند. پس تعداد حالات ممکن برابر است با: $۶\times ۱\times ۴!=۶\times ۲۴=۱۴۴$

تست: ۵ نفر در جلسه‌ای دور یک میز جمع می‌شوند. در چند حالت ۲ نفر از آنها که با هم مشکل دارند کنار هم نمی‌نشینند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

جواب:

حالت‌های مطلوب = تعداد کل حالات − تعداد حالت‌هایی که دو نفر کنار هم نشسته‌اند

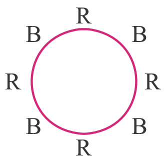
$$=(۵-۱)!-(۴-۱)!\times ۲!=۴!-۳!\times ۲!=۲۴-۱۲=۱۲$$

تست: ۴ مهرهٔ قرمز غیریکسان و ۴ مهرهٔ آبی غیریکسان مفروضند. اگر این مهره‌ها را دور هم قرار دهیم، در چند حالت هیچ ۲ مهرهٔ قرمزی کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

۱) $۳!\times ۴!$ ۲) $۳!\times ۳!$ ۳) $۴!\times ۴!$ ۴) $\frac{۸!}{۲!\times ۲!\times ۲!\times ۲!}$

جواب:

اگر مهره‌های قرمز را کنار هم قرار دهیم تعداد حالات ممکن $(4-1)!=3!$ خواهد بود. برای اینکه هیچ دو مهرهٔ قرمزی کنار هم نباشند باید مهره‌های آبی میان مهره‌های قرمز قرار گیرند. در این صورت ۴ مهرهٔ آبی در ۴ فضای خالی بین آنها قرار می‌گیرد که تعداد حالات آنها برابر $4!$ می‌باشد.



$$\Rightarrow (4-1)!\times 4!=3!\times 4!$$

ترکیب:

تعداد حالاتی که می‌توان از میان n شیء متمایز، k شیء را انتخاب کرد به طوری که جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت نداشته باشد برابر است با:

$$C_k^n=C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n$$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی در یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

نکته: روابط زیر را به خاطر بسپارید:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

رابطهٔ پاسکال : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

مثال: **از میان ۳ پرستار و ۴ دکتر به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای شرکت در سمیناری انتخاب کرد به‌طوری‌که:**

الف) هر ۷ نفر می‌توانند انتخاب شوند.

ب) ۲ دکتر و یک پرستار انتخاب شود.

ج) حداقل ۲ دکتر انتخاب شود.

د) دکتر خاصی در این گروه باشد.

جواب:

الف) $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\times 4!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4!}{6\times 4!}=35$

ب) $\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}=\frac{4\times 3}{2}\times 3=18$

ج) $\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}\binom{3}{0}=18+4\times 1=22$

د) چون دکتر مشخصی در این گروه می‌باشد پس برای آن شخص انتخابی نداریم. بنابراین باید دو نفر دیگر گروه را از میان ۶ نفر باقیمانده انتخاب کنیم:

$$\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$$

مثال: مجموعهٔ $\{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه:

الف) چند زیرمجموعهٔ ۲ عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

ج) چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که شامل a است؟

د) چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که شامل a بوده ولی شامل b نباشد؟

جواب:

الف) $\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$

ب) $\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۳!}=۲۰$

ج) زیرمجموعهٔ ۳ عضوی شامل a، باید به غیر از a دو عضو دیگر داشته باشد که این دو عضو از ۵ عضو غیر a انتخاب می‌شود. پس تعداد آنها برابر است با: $\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰$

د) در این قسمت دو عضو غیر a باید از ۴ عضو غیر b و a انتخاب شود. پس: $\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$

تست: از میان ۵ مهرهٔ آبی متمایز، ۴ مهرهٔ قرمز متمایز و ۳ مهرهٔ سبز متمایز به چند طریق می‌توان ۲ مهره را انتخاب کرد به طوری که هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۷ ۳) ۲۷ ۴) ۶۶

جواب:

$$\underbrace{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}_{\text{قرمز آبی}}+\underbrace{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}}_{\text{سبز آبی}}+\underbrace{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}_{\text{سبز قرمز}}=۵\times ۴+۵\times ۳+۴\times ۳=۲۰+۱۵+۱۲=۴۷$$

تست: به چند طریق می‌توان به ۷ پرسش از ۱۰ پرسش پاسخ داد به طوری که از ۴ پرسش اول حداقل ۳ پرسش پاسخ داده شود؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۵ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

جواب:

$$\binom{۴}{۳}\binom{۶}{۴}+\binom{۴}{۴}\binom{۶}{۳}=۴\times ۱۵+۱\times ۲۰=۸۰$$

تست: از هریک از مدارس A ، B ، C ، D ، E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو غیرهم‌مدرسه‌ای باشند، انتخاب کرد؟ *(تجربی داخل ۹۲)*

۱) ۴۵ ۲) ۳۵ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

جواب:

ابتدا باید سه مدرسه را انتخاب کرد و سپس از هر مدرسه یک نفر را برگزید تا افراد انتخاب شده دوبه‌دو غیرهم‌مدرسه‌ای باشند:

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴\times۴\times۴=۶۴۰$$

تست: چهار پزشک و سه جراح کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. در چند حالت حداقل دو جراح در کنار هم می‌باشند؟

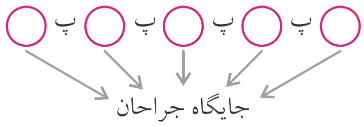
۱) $۵!\times۵$ ۲) $۵!\times۶$ ۳) $۶!\times۵$ ۴) $۶!\times۶$

جواب:

تعداد حالت‌هایی که هیچ دو جراحی کنار هم نباشند − تعداد کل حالات = تعداد حالاتی که حداقل دو جراح در کنار هم هستند

تعداد حالات مطلوب $=۷!-۴!\times\binom{۵}{۳}\times۳!=۷!-۴!\times۱۰\times۳!=۷!-۶!\times۳=۶!(۷-۲)=۶!\times۵$

در حالتی که هیچ دو جراح کنار هم نیستند باید این جراح‌ها در فضای اطراف پزشکان مانند شکل زیر قرار بگیرند:



تست: در یک خانواده که دارای ۶ فرزند است، در چند حالت فرزند آخر چهارمین پسر خانواده است؟

۱) $\binom{۵}{۲}$ ۲) $\binom{۶}{۴}$ ۳) $\binom{۵}{۴}$ ۴) $\binom{۶}{۳}$

جواب:

با توجه به اینکه فرزند آخر خانواده پسر است، از ۵ فرزند قبل باید ۳ فرزند پسر باشد تا با فرزند آخر چهارمین پسر را تشکیل دهند. بنابراین تعداد این حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

تست: با ارقام ۴ , ۴ , ۳ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟ *(تجربی داخل ۸۲)*

۱) $۳\times۵!$ ۲) $\frac{۹}{۲}\times۵!$ ۳) $۴\times۵!$ ۴) $\frac{۵}{۲}\times۶!$

جواب:

ارقام غیرتکراری فوق به صورت $\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌باشند پس عدد پنج رقمی غیرتکراری با آنها نمی‌توان ساخت. بنابراین باید به دنبال اعداد پنج رقمی تکراری باشیم که انواع آن عبارتند از:

$$\text{با دو تکرار}:\begin{cases}۱,۱,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc\\ ۳,۳,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc\\ ۴,۴,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc\end{cases}\Rightarrow ۳\times\binom{۳}{۳}\times\frac{۵!}{۲!}=۳\times\frac{۵!}{۲!}$$

با دو تکرار دوتایی : $\begin{cases} ۱,۱,۳,۳,\bigcirc \\ ۱,۱,۴,۴,\bigcirc \\ ۳,۳,۴,۴,\bigcirc \end{cases} \Rightarrow ۳\times\binom{۲}{۱}\times\frac{۵!}{۲!\times ۲!}=۳\times\frac{۵!}{۲!}$

تعداد اعداد $=۳\times\frac{۵!}{۲!}+۳\times\frac{۵!}{۲!}=۳\left(\frac{۵!}{۲!}+\frac{۵!}{۲!}\right)=۳\times ۵!$

تست: از میان ۸ نفر به چند طریق می‌توان یک گروه حداقل ۳ نفره انتخاب کرد؟

۱) ۵۱۱ ۲) ۲۲۰ ۳) ۵۱۲ ۴) ۲۱۹

جواب:

گروه حداقل ۳ نفره $=\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۴}+\ldots+\binom{۸}{۸}=۲^۸-\binom{۸}{۰}-\binom{۸}{۱}-\binom{۸}{۲}=۲۵۶-۱-۸-۲۸=۲۱۹$