فصل اول

عبارت‌های جبری

چند اتحاد جبری و کاربردها

اتحاد

یک تساوی است که به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی متغیرها برقرار است؛ به طور مثال تساوی $x(x+1)=x^2+x$ یک اتحاد است، زیرا هر عدد دلخواهی به جای x قرار دهیم، تساوی برقرار است. تساوی $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ نیز یک اتحاد است زیرا هر عدد دلخواهی را به جای x و y جای‌گذاری کنیم، تساوی برقرار است. در حالی که تساوی $x-1=0$ یک اتحاد نیست؛ زیرا فقط به ازای $x=1$ برقرار می‌شود.

برخی از اتحادهای معروف که سال گذشته فرا گرفتیم، عبارت‌اند از:

۱ اتحاد مربع مجموع دو جمله:

$$(\underbrace{a}_{\text{جمله‌ی اول}}+\underbrace{b}_{\text{جمله‌ی دوم}})^2=\underbrace{a^2}_{\text{مربع جمله‌ی اول}}+\underbrace{2ab}_{\substack{\text{دو برابر حاصل ضرب}\\ \text{جمله‌ی اول در جمله‌ی دوم}}}+\underbrace{b^2}_{\text{مربع جمله‌ی دوم}}$$

در این‌جا داریم: $a=2x$ و $b=1$. در اتحاد جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(2x+1)^2=(2x)^2+2(2x)(1)+(1)^2=4x^2+4x+1$$

۲ اتحاد مربع تفاضل دو جمله:

$$(a\ominus b)^2=a^2\ominus 2ab+b^2$$

مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که علامت جمله‌ی دوم آن منفی است.

در این‌جا داریم: $a=3t$ و $b=2z$

$$(3t-2z)^2=(3t)^2-2(3t)(2z)+(2z)^2=9t^2-12tz+4z^2$$

۳ اتحاد مزدوج:

$$(\underbrace{a}_{\text{جمله‌ی اول}}+\underbrace{b}_{\text{جمله‌ی دوم}})(\underbrace{a}_{\text{جمله‌ی اول}}-\underbrace{b}_{\text{جمله‌ی دوم}})=\underbrace{a^2}_{\text{مربع جمله‌ی اول}}-\underbrace{b^2}_{\text{مربع جمله‌ی دوم}}$$

در این‌جا داریم: $a=2x$ و $b=3$

$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-(3)^2=4x^2-9$$

۴ اتحاد جمله‌مشترک:

جملات غیرمشترک

$$(x+a)(x+b)=\underbrace{x^2}_{\text{مربع جمله‌ی مشترک}}+\underbrace{(a+b)x}_{\substack{\text{حاصل ضرب جمله‌ی مشترک در}\\ \text{مجموع جملات غیرمشترک}}}+\underbrace{ab}_{\substack{\text{حاصل ضرب}\\ \text{جملات غیرمشترک}}}$$

جمله‌ی مشترک بین دو پرانتز

در این‌جا $a=2$ و $b=3$ است.

$$(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times 3=x^2+5x+6$$

دو اتحاد مهم و پرکاربرد دیگر نیز به اتحادهای قبلی اضافه می‌شود.

۵ اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(\underbrace{a}_{\text{جمله‌ی اول}}+\underbrace{b}_{\text{جمله‌ی دوم}})^3=\underbrace{a^3}_{\text{مکعب جمله‌ی اول}}+\underbrace{3a^2b}_{\substack{\text{سه برابر حاصل ضرب}\\ \text{مربع جمله‌ی اول در جمله‌ی دوم}}}+\underbrace{3ab^2}_{\substack{\text{سه برابر حاصل ضرب}\\ \text{جمله‌ی اول در مربع جمله‌ی دوم}}}+\underbrace{b^3}_{\text{مکعب جمله‌ی دوم}}$$

در این‌جا $a=x$ و $b=2$ است.

$$(x+2)^3=x^3+3x^2(2)+3x(2)^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$$

در این‌جا $a=2y$ و $b=1$ است.

$$(2y+1)^3=(2y)^3+3(2y)^2(1)+3(2y)(1)^2+1^3=8y^3+12y^2+6y+1$$

۶ اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که منفی‌بودن جمله‌ی دوم باعث می‌شود علامت جملات در طرف راست اتحاد یکی‌درمیان مثبت و منفی شود.

در این‌جا $a = x$ و $b = \sqrt{3}$ است.

$$(x-\sqrt{3})^3 = x^3 - 3x^2(\sqrt{3}) + 3x(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$$

در این‌جا $a = x$ و $b = \frac{1}{2}$ است.

$$(x-\frac{1}{2})^3 = x^3 - 3x^2(\frac{1}{2}) + 3x(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$$

سؤالات

۱ تساوی‌هایی که اتحاد هستند را با علامت ✓ و تساوی‌هایی که اتحاد نیستند را با علامت ✗ مشخص کنید.

الف) $x(x-2)+2 = x^2 - 2x + 2$

ب) $x^2(x^3+4) = x^5 + 4x^2$

پ) $x^2 - 1 = 0$

ت) $x^2 + 2x = -1$

ث) $(x-q)^2 = x^2 - 2qx + q^2$

ج) $x^2 - x = 0$

۲ هر یک از عبارت‌های زیر را به اتحاد مرتبط با خودش وصل کنید سپس جاهای خالی را کامل کنید.

اتحاد مربع مجموع دو جمله ● ● $(x+2)(x-2) = (\cdots\cdots)^2 - (\cdots\cdots)^2 = \cdots\cdots - \cdots\cdots$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله ● ● $(5x-1)^2 = (\cdots\cdots)^2 - 2(\cdots\cdots)(\cdots\cdots) + (1)^2 = \cdots\cdots - \cdots\cdots + 1$

اتحاد مزدوج ● ● $(x-1)^3 = (\cdots\cdots)^3 - 3(\cdots\cdots)^2(\cdots\cdots) + 3x(1)^2 - (1)^3 = \cdots\cdots - \cdots\cdots x^2 + \cdots\cdots x - 1$

اتحاد جمله‌مشترک ● ● $(y+5)^2 = y^2 + (\cdots\cdots)y(\cdots\cdots) + (\cdots\cdots)^2 = y^2 + \cdots\cdots y + \cdots\cdots$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله ● ● $(3y+2)^3 = (\cdots\cdots)^3 + 3(\cdots\cdots)^2(\cdots\cdots) + 3(3y)(\cdots\cdots)^2 + (2)^3 = \cdots\cdots y^3 + \cdots\cdots y^2 + \cdots\cdots y + 8$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله ● ● $(x+7)(x-4) = x^2 + (\cdots\cdots - \cdots\cdots)x + (\cdots\cdots) \times (\cdots\cdots) = x^2 + \cdots\cdots x - \cdots\cdots$

۳ به کمک اتحادهای «مکعب مجموع دو جمله» و «مکعب تفاضل دو جمله» تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(2a+3)^3 = (\cdots\cdots)^3 + 3(2a)^2(\cdots\cdots) + 3(\cdots\cdots)(\cdots\cdots)^2 + (3)^3 = \cdots\cdots a^3 + \cdots\cdots a^2 + \cdots\cdots a + \cdots\cdots$

ب) $(\frac{x}{2}-1)^3 = (\frac{x}{2})^3 - 3(\cdots\cdots)^2(\cdots\cdots) + 3(\cdots\cdots)(\cdots\cdots)^2 - (\cdots\cdots)^3 = \cdots\cdots x^3 - \cdots\cdots x^2 + \cdots\cdots x - \cdots\cdots$

پ) $(\cdots\cdots + \cdots\cdots)^3 = \frac{a^3}{8} + \cdots\cdots a^2 + \cdots\cdots a + 8$

ت) $(x-\sqrt{5})^3 = (\cdots\cdots)^3 - 3\sqrt{5}x^2 + \cdots\cdots x - 5\sqrt{5}$

۴ هر یک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادهای گفته‌شده ساده کنید.

الف) $$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{مزدوج}\ x^{(\cdots\cdots)}-1}(x^2+1)}_{\text{مزدوج}\ x^{(\cdots\cdots)}-1}(x^4+1)}_{\text{مزدوج}\ x^{(\cdots\cdots)}-1}$$

ب) $$\underbrace{\underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{مزدوج}\ x^{(\cdots\cdots)}-4}(x^2+7)}_{\text{جمله‌مشترک}\ x^{(\cdots\cdots)}+3x^{(\cdots\cdots)}-(\cdots\cdots)}$$

پ) $$\underbrace{\underbrace{(x-3)(x+3)}_{\text{مزدوج}\ x^{(\cdots\cdots)}-9}(x^2-9)}_{\text{مربع مجموع دو جمله}\ x^{(\cdots\cdots)}-18x^{(\cdots\cdots)}+(\cdots\cdots)}$$

ت) $$\underbrace{\underbrace{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}_{\text{مزدوج}\ x^{(\cdots\cdots)}-(\cdots\cdots)}(x^2-2)^2}_{\text{مکعب تفاضل دو جمله}\ x^6-(\cdots\cdots)x^4+(\cdots\cdots)x^2-(\cdots\cdots)}$$

۵ محاسبات عددی زیر را به کمک اتحادها انجام دهید.

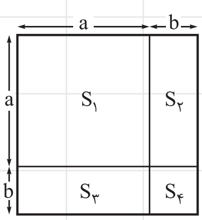
الف) $98^2=(100-2)^2=(\cdots\cdots)^2-2(\cdots\cdots)(\cdots\cdots)+2^2=\cdots\cdots$

ب) $1001^2=(\cdots\cdots+\cdots\cdots)^2=(\cdots\cdots)^2+2(\cdots\cdots)(\cdots\cdots)+(\cdots\cdots)^2=\cdots\cdots$

پ) $105\times 97=(100+\cdots\cdots)(100-\cdots\cdots)=(100)^2+(\cdots\cdots)\times 100-(\cdots\cdots)=\cdots\cdots+\cdots\cdots-\cdots\cdots=\cdots\cdots$

ت) $11^3=(10+1)^3=10^3+3(\cdots\cdots)^2(\cdots\cdots)+3(\cdots\cdots)(1)^2+1^3=\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots=\cdots\cdots$

۶ مربع زیر را در نظر گرفته، ضلع آن را به دو قسمت به طول‌های b و a تقسیم کنید. مساحت مربع را برابر S در نظر بگیرید.



الف) با توجه به این‌که مساحت مربع برابر مجذور اندازه‌ی ضلعش می‌باشد، حاصل S را بیابید.

ب) این بار مساحت مربع (S) را به کمک جمع‌زدن مساحت بخش‌های داخلی آن بیابید.

پ) حاصل S را از بخش‌های الف و ب با یکدیگر برابر قرار داده و به کمک آن اتحاد مربع مجموع دو جمله را نتیجه بگیرید.

ساده‌کردن $(a+b)^n$

تا این‌جا با جملات حاصل از ساده‌کردن عبارت‌های $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ آشنا شدیم. حال می‌خواهیم با نحوه‌ی محاسبه‌ی جملات حاصل از ساده‌کردن توان‌های بزرگ‌تر $a+b$ مانند $(a+b)^4$، $(a+b)^5$ و ... آشنا شویم. برای محاسبه‌ی جملات حاصل از ساده‌کردن عبارت $(a+b)^n$ در حالت کلی (با فرض این‌که n یک عدد حسابی باشد) باید به نکات زیر توجه کنیم:

۱) تعداد جملات حاصل از ساده‌کردن عبارت $(a+b)^n$ برابر $n+1$ خواهد بود.

تعداد جملات حاصل از ساده‌کردن $(a+b)^3$ برابر ۴ می‌باشد.

۲) در صورتی که جملات حاصل را نسبت به توان‌های a به صورت صعودی مرتب کنیم، اولین جمله a^n و آخرین جمله b^n خواهد بود.

اولین جمله‌ی حاصل از ساده‌کردن عبارت $(a+b)^3$ برابر a^3 و آخرین جمله برابر b^3 می‌باشد.

۳) در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل یک واحد از توان a کم شده و به توان b یک واحد اضافه می‌شود.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

۴) برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن عبارت $(a+b)^n$ از مثلث زیر که به «مثلث خیام» معروف است، کمک می‌گیریم.

```
            ۱
          ۱   ۱
        ۱   ۲   ۱
      ۱   ۳   ۳   ۱
    ۱   ۴   ۶   ۴   ۱
  ۱   ۵   ۱۰  ۱۰  ۵   ۱
۱   ۶   ۱۵  ۲۰  ۱۵  ۶   ۱
            ⋮
```

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مثلث خیام، مثلثی به رأس ۱ است که مجموع هر دو عدد مجاور عدد پایین را تولید می‌کند. برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن $(a+b)^n$ کافی است به سطر $(n+1)$اُم مثلث رجوع کنیم.

ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن $(a+b)^3$ در سطر چهارم مثلث خیام موجود است: $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن $(a+b)^n$ به جای مثلث خیام می‌توان از رابطه‌ی زیر نیز استفاده کرد:

$$\text{ضریب هر جمله} = \frac{\text{توان } a \text{ در جمله‌ی قبل} \times \text{ضریب جمله‌ی قبل}}{\text{تعداد جملات قبل}}$$

به طور مثال به نحوه‌ی ساده‌کردن $(a+b)^4$ توجه کنید:

با توجه به نکات گفته‌شده تعداد جملات حاصل برابر ۵ خواهد بود که اولین آن‌ها a^4 و آخرین آن‌ها b^4 است و در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل یک واحد از توان a کم شده، یک واحد به توان b افزوده می‌شود، پس شکل کلی جملات حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$(a+b)^4 = a^4 + (\cdots\cdots)a^3b + (\cdots\cdots)a^2b^2 + (\cdots\cdots)ab^3 + b^4$$

اگر ضرایب را با توجه به رابطه‌ی بالا حساب کنیم، داریم:

$$(a+b)^4 = a^4 + \overset{4}{\frac{1\times4}{1}}a^3b + \overset{6}{\frac{4\times3}{2}}a^2b^2 + \overset{4}{\frac{6\times2}{3}}ab^3 + \overset{1}{\frac{4\times1}{4}}b^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن $(a+b)^4$ همان اعداد سطر پنجم مثلث خیام هستند.

برای محاسبه‌ی $(a-b)^n$ کافی است علامت جملات حاصل از $(a+b)^n$ را یکی‌درمیان مثبت و منفی کنیم.

داریم: $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

با توجه به اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ درمی‌یابیم که مجموع ضرایب جملات حاصل برابر $4 = 1+2+1$ است. اما جالب این‌جاست که مجموع ضرایب جملات حاصل از $(a+b)^n$ در حالت کلی برابر 2^n بوده و برای این منظور نیازی به ساده‌کردن $(a+b)^n$ نیست.

مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن $(a+b)^{10}$ برابر 2^{10} می‌باشد.

حاصل هر یک از اعداد 11^1، 11^2، 11^3 و 11^4 به ترتیب برابر اعداد سطرهای دوم، سوم، چهارم و پنجم مثلث خیام هستند:

(سطر دوم مثلث خیام) $11^1 = 11$

(سطر سوم مثلث خیام) $11^2 = 121$

(سطر چهارم مثلث خیام) $11^3 = 1331$

(سطر پنجم مثلث خیام) $11^4 = 14641$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

اتحادهای «مجموع مکعبات دو جمله» و «تفاضل مکعبات دو جمله» از دیگر اتحادهای مهم و پرکاربردی هستند که در این‌جا مطرح می‌شوند:

اتحاد مجموع مکعبات دو جمله:

$$\underbrace{(a}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{b)}_{\text{جمله‌ی دوم}} \Big(\underbrace{a^2}_{\text{مربع جمله‌ی اول}} - \underbrace{ab}_{\text{حاصل‌ضرب جمله‌ی اول در جمله‌ی دوم}} + \underbrace{b^2}_{\text{مربع جمله‌ی دوم}} \Big) = \underbrace{a^3}_{\text{مکعب جمله‌ی اول}} + \underbrace{b^3}_{\text{مکعب جمله‌ی دوم}}$$

اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله: مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که یک تغییر جزئی در علامت‌هایش ایجاد شده است:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله به دلیل داشتن یک پرانتز بزرگ در یک پرانتز کوچک به اتحادهای «**چاق و لاغر**» نیز معروف‌اند.

این اتحادها کاربرد زیادی در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری دارند. به نمونه‌ای از تجزیه‌ی عبارت‌های جبری به کمک این اتحادها توجه کنید:

$$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

سؤالات

۷ **مثلث خیام را کامل کرده سپس هر یک از عبارت‌های داده‌شده را ساده کنید.**

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ .... ۱۵ ۶ ۱
۱ .... ۲۱ ۷ ۱
۱ .... ۲۸ ۸ ۱

$$(a+b)^5 = a^5 + (\cdots\cdots)a^4b + (\cdots\cdots)a^3b^2 + (\cdots\cdots)a^2b^3 + (\cdots\cdots)ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^6 = a^6 - (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) - 20a^3b^3 + (\cdots\cdots) - (\cdots\cdots) + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) + b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) - (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) - (\cdots\cdots) + (\cdots\cdots) - 8ab^7 + b^8$$

۸ مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن عبارت‌های $(a+b)^۵$ و $(a+b)^۶$ به ترتیب برابر .... و .... است.

۹ درست یا غلط بودن هر یک از جملات زیر را با علامت‌های ✓ یا ✗ مشخص کنید:

الف) برای محاسبه‌ی حاصل $۱۱^۵$ کافی است اعداد سطر ششم مثلث خیام را از چپ به راست کنار هم بنویسیم. ☐

ب) مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن $(a-b)^۴$ برابر ۱۶ است. ☐

۱۰ هر یک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادهای «مجموع مکعبات دو جمله» و «تفاضل مکعبات دو جمله» تجزیه کنید:

الف) $a^۳-۱=(a-\cdots\cdots)(a^۲+\cdots\cdots+۱)$

ب) $a^۳+۸=(a+\cdots\cdots)(a^۲-\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

پ) $۸a^۳+۲۷=(۲a+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-۶a+\cdots\cdots)$

ت) $a^۳-\frac{۱}{۲۷}=(a-\cdots\cdots)(a^۲+\cdots\cdots+\frac{۱}{۹})$

ث) $a^۶+\frac{۱}{۲۷}=(a^۲)^۳+(\frac{۱}{۳})^۳=(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(a^۴-\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

ج) $۱۲۵-y^۶=(\cdots\cdots)^۳-(\cdots\cdots)^۳=(\cdots\cdots-\cdots\cdots)(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

۱۱ عبارت $x^۶-۱$ را به کمک روش‌های الف و ب تجزیه کنید.

الف) $x^۶-۱\xrightarrow{\text{مزدوج}}=\underbrace{(\cdots\cdots-۱)}_{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}}\underbrace{(\cdots\cdots+۱)}_{\text{مجموع مکعبات دو جمله}}=(x-۱)(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)(x+۱)(\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

ب) $x^۶-۱=(\cdots\cdots)^۳-(\cdots\cdots)^۳\xrightarrow{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}}=(\underbrace{x^۲-۱}_{\text{مزدوج}})(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)=(x-۱)(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

هر دو روش برای تجزیه قابل قبول است ولی توجه کنید که به کمک روش الف موفق شدیم عبارت داده‌شده را به عبارت‌های ساده‌تری تجزیه کنیم.

۱۲ عبارت $y^۶-۶۴$ را به کمک روش‌های الف و ب تجزیه کنید. کدام روش $y^۶-۶۴$ را به عبارت‌های ساده‌تری تجزیه می‌کند؟

الف) $y^۶-۶۴\xrightarrow{\text{مزدوج}}=\underbrace{(\cdots\cdots-۸)}_{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}}\underbrace{(\cdots\cdots+۸)}_{\text{مجموع مکعبات دو جمله}}=(y-۲)(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)(y+۲)(\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

ب) $y^۶-۶۴=(\cdots\cdots)^۳-(\cdots\cdots)^۳\xrightarrow{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}}=(y^۲-۴)(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)=(y-۲)(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots)$

می‌توان تجزیه به روش ب را بیشتر از این نیز ادامه داد تا به سادگی نتیجه‌ی روش الف برسد اما به دلیل پیچیده‌شدن، تجزیه توصیه نمی‌شود و تأکید می‌شود که تجزیه تا همین مرحله نیز کافی است.

عبارت‌های گویا

قبل از تعریف **عبارت‌های گویا** یکی دو اصطلاح از سال گذشته را یادآوری می‌کنیم.

یک‌جمله‌ای: حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در یک یا چند متغیر با توان حسابی $(\ldots,۲,۱,۰)$ را یک‌جمله‌ای می‌نامیم. با توجه به تعریف، عبارت‌های روبه‌رو یک‌جمله‌ای محسوب می‌شوند: $\sqrt{۲}\,,\,-\frac{۳}{۴}x^۲y^۳\,,\,۵x^{۱۰}\,,\,\sqrt{۷}xyz^۳$

در حالی که عبارت‌های روبه‌رو یک‌جمله‌ای نیستند: $\frac{۲}{x}\,,\,۵^x\,,\,۳\sqrt{xy}\,,\,|x|\,,\,\sqrt[۳]{x}y\,,\,۲x^۲+۳x$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در تعریف یک‌جمله‌ای محدودیتی در مورد ضریب عددی وجود ندارد. یعنی ضریب عددی هر عددی از جمله گویا یا غیرگویا، مثبت یا منفی و ... می‌تواند باشد. نکته‌ای که باید به آن توجه شود، این است که توان **حروف** باید حسابی باشد.

چندجمله‌ای: به جمع جبری چند یک‌جمله‌ای غیرمتشابه (یعنی چند یک‌جمله‌ای که بخش حرفی‌شان یکسان نباشد) چندجمله‌ای می‌گوییم.

$۲x^۲+۳x$ دوجمله‌ای و $x^۵-x^۲+۱$ سه‌جمله‌ای است.

عبارت گویا

عبارتی جبری است که بتوان آن را به صورت کسری نمایش داد که صورت و مخرج آن یک یا چندجمله‌ای باشد.

عبارت‌های روبه‌رو عبارت گویا محسوب می‌شوند: $\frac{x^۳-۳x^۲+۱}{۲x-۱}\,,\,\frac{۱}{۲}\,,\,x^{۱۰}-۴x+۶\,,\,\frac{۱}{۲x^۲+۳}$

در حالی که عبارت‌های زیر عبارت گویا محسوب نمی‌شوند:

$$\frac{\sqrt{x}}{۱+x}\,,\,\frac{۲^x}{x^۲+۱}\,,\,\frac{\sqrt{x+y}}{y^۲}\,,\,\frac{|x|}{۲x^{-۲}}$$

یک عبارت کسری تنها در صورتی از نظر ریاضی تعریف شده است که مخرج آن مخالف صفر باشد؛ به طور مثال عبارت $\frac{x+۱}{x-۲}$ به ازای $x=۲$ تعریف نشده است. زیرا $x=۲$ موجب صفرشدن مخرج کسر می‌شود. عبارت $\frac{۲x}{\underbrace{x^۲+۲x}_{x(x+۲)}}$ نیز به ازای $x=۰$ و $x=-۲$ تعریف نشده است.

هرگاه بخواهیم دو طرف یک تساوی و یا صورت و مخرج یک کسر را بر عبارتی تقسیم کنیم، حتماً باید شرط کنیم که آن عبارت مخالف صفر باشد؛ به طور مثال عبارت $\frac{۲ax}{۳a}$ را به شرط $a\neq ۰$ می‌توان به صورت $\frac{۲x}{۳}$ ساده کرد. هم‌چنین در عبارت $\frac{(x+۲)(x+۳)}{۲(x+۲)}$ در صورتی که $x\neq -۲$ باشد، می‌توان عبارت $x+۲$ را از صورت و مخرج حذف نموده و آن را به شکل $\frac{x+۳}{۲}$ نوشت. توجه‌نکردن به این موضوع می‌تواند باعث اشتباه در محاسبات شود. در زیر نمونه‌ای از یک نتیجه‌گیری غلط در اثر عدم توجه به این موضوع را مشاهده می‌کنید:

$$x=۵ \xrightarrow{\text{دو طرف را در x ضرب می‌کنیم}} x^۲=۵x \xrightarrow{\text{از دو طرف ۲۵ واحد کم می‌کنیم}} x^۲-۲۵=۵x-۲۵$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{(x−۵ برابر صفر است و ما}\\ \text{اجازه‌ی تقسیم بر آن را نداریم)}}]{\text{دو طرف را بر x−۵ تقسیم می‌کنیم}} \frac{\overbrace{x^۲-۲۵}^{(x+۵)(x-۵)}}{x-۵}=\frac{\overbrace{۵x-۲۵}^{۵(x-۵)}}{x-۵} \xrightarrow[\substack{\text{(فقط می‌توان یک عبارت مخالف}\\ \text{صفر را از صورت و مخرج ساده کرد)}}]{\text{x−۵ را از صورت و مخرج کسرها خط می‌زنیم}} x+۵=۵$$

نتیجه‌ی غلط: $\left(\xrightarrow{x=۵} ۱۰=۵\right)$

تنها وقتی می‌توان عبارتی مشترک را از صورت و مخرج یک کسر حذف نمود که آن عبارت مشترک در صورت و مخرج **ضرب** شده باشد؛ به طور مثال می‌توان در عبارت $\frac{y(x+۴)}{x+۴}$ با شرط $x\neq -۴$ از صورت و مخرج $x+۴$ را حذف نمود و آن را برابر y نوشت. این در حالی است که

نمی‌توان عبارت $\frac{y+x+4}{x+4}$ را به صورت بالا ساده کرد. به بیان دیگر، ساده‌سازی عبارت $\frac{y+x+4}{x+4}$ به y کاملاً غلط است.

جمع و تفریق عبارت‌های گویا برای جمع و تفریق دو عدد کسری مانند $\frac{1}{12}$ و $\frac{1}{18}$ باید ابتدا مخرج‌مشترک گرفت. از آن‌جایی که تجزیه‌ی اعداد ۱۲ و ۱۸ به صورت $3\times 2^2=12$ و $3^2\times 2=18$ است، لذا (ک.م.م) آن‌ها برابر $36=3^2\times 2^2$ خواهد بود. حال اگر به جای دو عدد کسری، دو عبارت جبری گویا داشته باشیم، برای محاسبه‌ی مخرج‌مشترک باید ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تا جایی که ممکن است تجزیه کنیم، سپس «حاصل‌ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک» را به عنوان مخرج‌مشترک بنویسیم؛ به طور مثال چنان‌چه مخرج یک کسر $(x-1)(x+1)$ و مخرج دیگری $(x+1)^2$ باشد، مخرج‌مشترک $\underbrace{(x-1)}_{\text{غیرمشترک}}\underbrace{(x+1)^2}_{\text{مشترک با توان بزرگ‌تر}}$ خواهد بود. عبارت حاصل را اصطلاحاً «مضرب‌مشترک با کوچک‌ترین توان» می‌نامیم.

حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید. $\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-1}$

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تجزیه می‌کنیم: $x^2-x=x(x-1)\ ,\ x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x-1$ مشترک بین دو عبارت و x و $x+1$ غیرمشترک هستند. لذا داریم: مخرج‌مشترک: $\underbrace{(x-1)}_{\text{مشترک}}\underbrace{(x+1)x}_{\text{غیرمشترک}}$

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1\times(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{1(x)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x+1+x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

چون مخرج در $(x+1)$ ضرب می‌شود صورت نیز در آن ضرب می‌شود

چون مخرج در x ضرب می‌شود صورت نیز در آن ضرب می‌شود

سؤالات

۱ تمام گزاره‌های زیر غلط هستند. آن‌ها را با استدلال مناسب اصلاح کنید.

الف) عبارت x^3+5 گویا نیست، زیرا عبارت گویا حتماً باید کسری باشد. ✗

استدلال: عبارت x^3+5 گویاست و می‌توان آن را به شکل کسر ______ نوشت.

ب) عبارت $\frac{2x-\sqrt{5}}{\sqrt{3}x^2+6}$ یک عبارت غیرگویاست؛ زیرا اعداد گنگ $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ در آن به کار رفته است. ✗

استدلال: عبارت بالا یک عبارت گویا محسوب می‌شود؛ زیرا شرط لازم برای گویابودن عبارت و به بیان دیگر یک‌جمله‌ای یا چندجمله‌ای بودن صورت و مخرج عبارت این است که ______ زیر رادیکال نباشند.

پ) عبارت $\sqrt{x^2}$ گویاست، زیرا حاصل $\sqrt{x^2}$ برابر x می‌باشد. ✗

استدلال: عبارت $\sqrt{x^2}$ گویا نیست زیرا حاصل $\sqrt{x^2}$ برابر x نیست بلکه برابر ______ است.

ت) هیچ‌یک از اعداد ۲ و $\sqrt{5}$ یک عبارت گویا محسوب نمی‌شوند. ✗

استدلال: هر عدد ______ چه گویا چه گنگ یک عبارت گویا محسوب می‌شود.

۲ هر یک از عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{2t+1}{2t-1}$

ب) $\frac{x^2+3}{x}$

پ $\frac{x^{۲}+۷x}{(x-۱)(x-۲)}$

ت $\frac{\sqrt{۲}x^{۲}+۱}{x^{۲}+x}$

ث $\frac{۲x-۴}{x^{۲}-۱۶}$

ج $\frac{۲x-۴}{x^{۲}+۱۶}$

چ $\frac{x+\sqrt{۵}y}{۹y^{۲}-x^{۲}}$

ح $\frac{x^{۳}-۴}{x^{۲}+۲x+۱}$

۳ برای تشخیص این‌که هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند، جاهای خالی را پر کنید.

الف $\frac{۲x-۴}{x^{۲}+۸x+۱۵}$

باید ابتدا مخرج را به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه کنیم، سپس باید به دنبال دو عدد بگردیم که جمعشان برابر ۸ و ضربشان برابر ــــ شود؛ یعنی ۳ و ــــ ، پس شکل تجزیه‌شده‌ی مخرج به صورت $(x+۳)(x+\cdots\cdots)$ خواهد بود و از این‌جا نتیجه می‌گیریم که به ازای $x=-۳$ و $x=\cdots\cdots$ تعریف‌نشده خواهد بود.

ب $\frac{x^{۲}+۵}{x^{۲}+۳x-۱۰}$

برای تجزیه‌ی $x^{۲}+۳x-۱۰$ به کمک اتحاد جمله‌مشترک به دنبال دو عدد می‌گردیم که جمعشان برابر ــــ و ضربشان ۱۰− باشد؛ یعنی ــــ و ۲−، پس تجزیه‌ی آن به صورت $(x-۲)(x+\cdots\cdots)$ بوده و در نتیجه کسر داده‌شده به ازای $x=۲$ و $x=\cdots\cdots$ تعریف‌نشده خواهد بود.

پ $\frac{x^{۲}-x+۱}{۴x^{۲}+۱۶x+۱۵}$

اگر مخرج را به صورت $(۲x)^{۲}+۸(۲x)+۱۵$ بنویسیم، درمی‌یابیم که برای تجزیه‌ی آن باید از اتحاد جمله‌مشترک استفاده کنیم. پس باید به دنبال دو عدد بگردیم که جمعشان برابر ۸ و ضربشان ــــ است؛ یعنی ۳ و ــــ پس شکل تجزیه‌شده‌ی مخرج به صورت $(۲x+۳)(۲x+\cdots\cdots)$ خواهد بود. مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$(۲x+۳)(۲x+\cdots\cdots)=۰ \Rightarrow \underbrace{۲x=-۳}_{x=\frac{-۳}{۲}} \text{ یا } \underbrace{۲x=\cdots\cdots}_{x=\cdots\cdots}$$

ت $\frac{۲x+۵x^{۲}}{۹x^{۲}-۱۸x+۸}$

$$۹x^{۲}-۱۸x+۸=(۳x)^{۲}-(\cdots\cdots)\times ۳x+۸=(۳x-\cdots\cdots)(۳x-\cdots\cdots)=۰ \Rightarrow \underbrace{۳x=\cdots\cdots}_{x=\cdots\cdots} \text{ یا } \underbrace{۳x=\cdots\cdots}_{x=\cdots\cdots} \Rightarrow x=\cdots\cdots \text{ یا } x=\cdots\cdots$$

ث $\frac{x^{۲}+۵x+۱۲}{x^{۷}-۸۱x^{۳}}$

$x^۷ - ۸۱x^۳ = x^۳(\cdots\cdots - \cdots\cdots) = x^۳(\cdots\cdots - \cdots\cdots)(x^۲ + ۹) = x^۳(\cdots\cdots - ۳)(\cdots\cdots + \cdots\cdots)(x^۲ + ۹) = ۰$

$\Rightarrow$ $x = \cdots\cdots$ یا $x = \cdots\cdots$ یا $x = \cdots\cdots$

ج) $\dfrac{b^۳c^۴ + ab^۳c^۲}{a^۲b^۲c^۳ - a^۲b^۳c^۲}$

$a^۲b^۲c^۳ - a^۲b^۳c^۲ = a^۲b^۲c^۲(c - \cdots\cdots) = ۰ \Rightarrow a = ۰$ یا $b = ۰$ یا $\cdots\cdots = ۰$ یا $\cdots\cdots = \cdots\cdots$

۴) صحیح یا غلط بودن هر یک از گزاره‌های زیر را با علامت‌های ✓ و ✗ مشخص کنید.

الف) عبارت $\dfrac{x}{x(x-۲)}$ به ازای $x = ۰$ و $x = ۲$ تعریف نشده است. ☐

ب) از آن‌جایی که در عبارت $\dfrac{x}{x(x-۲)}$ جمله‌ی x از صورت و مخرج ساده می‌شود، پس این عبارت فقط به ازای $x = ۲$ تعریف نشده است. ☐

۵) کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{x^۲ - ۴}{x^۲ + ۴x + ۴}$

ب) $\dfrac{x^۲ - ۴}{x^۳ + ۸}$

پ) $\dfrac{۲۵x^۲ - ۲۵x - ۶}{۲۵x^۲ - ۱}$

ت) $\dfrac{x^۳ - ۲۷}{x^۲ - x - ۶}$

ث) $\dfrac{x^۲ + ۱۰x + ۲۵}{x^۳ + ۱۵x^۲ + ۷۵x + ۱۲۵}$

ج) $\dfrac{x^۳ - ۱}{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱}$

چ) $\dfrac{۴x^۲ - ۴۹}{۴x^۲ + ۸x - ۲۱}$

ح) $\dfrac{۹x^۲ - ۴}{۲۷x^۳ - ۸}$

خ $\dfrac{x^2+9x-22}{x^3-6x^2+12x-8}$

د $\dfrac{2x^3(x^2-1)^2-x(x^2-1)^3}{x^5+x^3}$

۶ در هر یک از قسمت‌های زیر «مضرب‌مشترک با کوچک‌ترین توان» را بیابید.

الف $x^4+10x^3+21x^2\ ,\ x^3+6x^2-7x$

ب $x^3-y^3\ ,x^2-y^2$

پ $x^4-y^4\ ,x^2+y^2$

ت $x^3+3\sqrt{3}x^2+9x+3\sqrt{3}\ ,x^2-3$

۷ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف $\dfrac{2}{\underbrace{x^3+x^2}_{(\cdots\cdots)(\cdots\cdots+\cdots\cdots)}}+\dfrac{x}{\underbrace{x^3-x^2}_{(\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)}}=\dfrac{2(\cdots\cdots-\cdots\cdots)+x(\cdots\cdots+\cdots\cdots)}{x^2(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)}=\dfrac{x^2+\cdots\cdots x-\cdots\cdots}{x^2(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)}$

ب $\dfrac{x+2}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}}-\dfrac{x-1}{\underbrace{x^2-2x}_{x(\cdots\cdots-\cdots\cdots)}}=\dfrac{(x+2)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)-(x-1)(\cdots\cdots+\cdots\cdots)}{x(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)}=\dfrac{\cdots\cdots}{x(\cdots\cdots+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)}$

پ $\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3x+4}{x+1}$

ت $\dfrac{x^2-3}{x+5}+2x+10$

۸ در محاسبات زیر صحیح یا غلط بودن هر مرحله را با علامت‌های ✓ یا ✗ مشخص کنید.

$$x=3 \longrightarrow x^2=3x \longrightarrow x^2-9=3x-9 \longrightarrow \frac{\overbrace{x^2-9}^{(x-3)(x+3)}}{x-3}=\frac{\overbrace{3x-9}^{3(x-3)}}{x-3} \longrightarrow x+3=3 \xrightarrow[x=3]{} 6=3$$

۹ حاصل عبارت $(\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x^2-4x+4})(x^3-6x^2+12x-8)$ کدام است؟ (کنکور ۹۴)

۱) $2x-4$ ۲) $2x-2$ ۳) $2x-1$ ۴) $2x$

۱۰ خلاصه‌شده‌ی $(1-\frac{1}{x-2})\times(x+\frac{2}{x-3})$ کدام است؟ (کنکور ۹۲)

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) $x+2$ ۴) $2x+1$

۱۱ خلاصه‌شده‌ی عبارت $(x+\frac{5x-2}{x-4})(1-\frac{6}{x+2})$ کدام است؟ (کنکور ۹۰)

۱) $x-2$ ۲) $x-1$ ۳) $x+1$ ۴) $x+2$

۱۲ خلاصه‌شده‌ی عبارت $(1-\frac{1}{x+2})\div(x-5+\frac{6}{x+2})$ کدام است؟ (کنکور ۸۹)

۱) $x+3$ ۲) $x-3$ ۳) $x-4$ ۴) $x-6$