درسنامه ۱

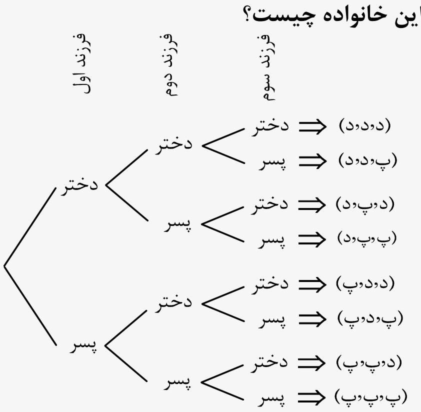
فضای نمونه‌ای و پیشامد

فضای نمونه‌ای: به مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن در رخ دادن یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای گفته می‌شود و آن را با S نشان می‌دهیم.

مثال ۱

خانواده‌ای دارای سه فرزند است. فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

☑ **پاسخ:** برای فرزند اول دو حالتِ «دختر یا پسر» و به همین ترتیب برای فرزند دوم دو حالت و برای فرزند سوم نیز دو حالت وجود دارد. پس:



S = {(د , د , د)،(پ , د , د)،(د , پ , د)،(پ , پ , د)،(د , د , پ)،(پ , د , پ)،(د , پ , پ)،(پ , پ , پ)}

نکته *فضای نمونه‌ای را به گونه‌ای می‌نویسیم که شانس وقوع اعضای آن با هم برابر باشند.*

مثال ۲

فضای نمونه‌ای برای خانواده‌ای با دو فرزند را بنویسید.

☑ **پاسخ:**

S = {(د , د)،(پ , د)،(د , پ)،(پ , پ)}

(پ , د)،(د , پ): دو حالت متفاوت

در فضای نمونه‌ای فرزندان این خانواده (پ، د)، (د، پ) دو حالت متفاوت از تولد فرزندان خانواده است و نمی‌توان فضای نمونه‌ای را به صورت روبه‌رو نوشت:
S = {(د , د)،(پ , د)،(پ , پ)}

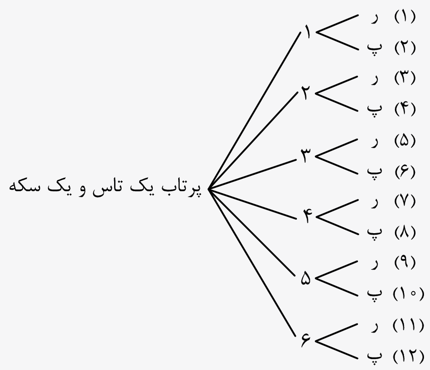
اصل شمارش (ضرب): اگر پدیده‌ی اول به n طریق و پدیده‌ی دوم به m طریق قابل انجام باشند، آن‌گاه در صورت امکان، این دو پدیده با هم به $n\times m$ طریق قابل انجام هستند.

مثال ۳

اگر یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی چند عضو دارد؟

☑ **پاسخ:**

تعداد حالات تاس: ۶ حالت (از ۱ تا ۶)
تعداد حالات سکه: ۲ حالت (پشت و رو)
$\Leftarrow n(S)=۶\times۲=۱۲$



نکته *اگر یک سکه را n بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن بنا به اصل ضرب برابر است با:*

$$n(S)=\underbrace{۲\times۲\times۲\times\ldots\times۲}_{n}=۲^n$$

نکته *اگر یک تاس را n بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن بنا به اصل ضرب برابر است با:*

$$n(S)=\underbrace{۶\times۶\times۶\times\ldots\times۶}_{n}=۶^n$$

مثال ۴

اگر دو تاس و سه سکه را با هم، پرتاب کنیم، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** وقتی دو تاس را پرتاب می‌کنیم، مانند آن است که یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم و وقتی سه سکه را پرتاب می‌کنیم، مانند آن است که یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. بنابراین داریم: $n(S)=۶^۲\times ۲^۳=۳۶\times ۸=۲۸۸$

پیشامد

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را پیشامد گویند. پیشامدها را معمولاً با حروف بزرگ A، B، C و... نشان می‌دهیم.

مثال ۵

پیشامد آن که در یک خانواده با سه فرزند، حداقل دو فرزند دختر باشد، را بنویسید.

☑ **پاسخ:** فضای نمونه‌ای: $S=\{$(پ , پ , پ)،(د , پ , پ)،(پ , د , پ)،(پ , پ , د)،(د , د , پ)،(د , پ , د)،(پ , د , د)،(د , د , د)$\}$

$\Rightarrow$ پیشامد $A=\{$(پ , د , د)،(د , پ , د)،(د , د , پ)،(د , د , د)$\}$

پیشامد حتمی: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و A پیشامدی باشد که $A=S$، آن‌گاه A را پیشامد حتمی گویند.

پیشامد غیرممکن (نشدنی): در هر آزمایش تصادفی، اگر پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را پیشامد غیرممکن می‌گوییم و با نماد $\varnothing$ نشان می‌دهیم.

یادآوری انتخاب k عضو از یک مجموعه‌ی n عضوی را ترکیب k عضوی از n عضو گوییم و تعداد حالات آن برابر است با:

$$\boxed{C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

توجه در ترکیب اشیاء، ترتیب کنار هم قرار گرفتن اشیاء حائز اهمیت نیست.

مثال ۶

جعبه‌ای شامل ۳ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سفید است. از این جعبه ۴ مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوبست تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این پیشامد.

☑ **پاسخ:** در این‌جا تعداد کل مهره‌های داخل جعبه ۷ مهره است. می‌خواهیم $k=۴$ عضو از آن‌ها انتخاب کنیم و ترتیب در انتخاب مهره‌ها اهمیت ندارد، بنابراین:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای: $n(S)=\binom{۷}{۴}=\frac{۷!}{۴!(۷-۴)!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times۳!}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱}=۳۵$

۱- یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن سکه «رو» یا تاس عدد ۳ بیاید.

ج) پیشامد B که در آن سکه «پشت» و تاس عدد ۳ بیاید.

۲- هر یک از اعداد طبیعی بازه‌ی (۲۰,۳۰) را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یکی را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت، زوج باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مضرب ۵ باشد.

۳- دو تاس را با هم می‌اندازیم. مطلوب است:

الف) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده ۷ باشد.

ب) پیشامد B که در آن هر دو عدد رو شده زوج باشند.

ج) پیشامد C که در آن مجموع اعداد رو شده کم‌تر از ۷ باشد.

۴- یک سکه‌ی سالم را ۳ بار به هوا می‌اندازیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن سکه حداقل یک بار «پشت» بیاید.

ج) پیشامد B که در آن سکه فقط دو بار «رو» بیاید.

۵- سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر «پشت» بیاید، آن‌گاه تاس را می‌اندازیم و اگر «رو» بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک بار سکه «پشت» بیاید، عناصر این پیشامد را بنویسید.

ج) اگر B پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو بار سکه «رو» بیاید، عناصر این پیشامد را بنویسید.

درسنامه ۲

احتمال و انواع پیشامدها

تعریف احتمال

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال A را که با $P(A)$ نشان می‌دهیم، بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}}$$

مثال ۷

مادری دارای ۳ فرزند است. مطلوب است احتمال آن که: (هماهنگ کشوری- دی ۸۶)

الف) حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد. **ب) دو فرزند آخر پسر باشد.**

☑ **پاسخ:** چون خانواده دارای ۳ فرزند است و تعداد حالات ممکن برای هر فرزند، ۲ (دختر یا پسر) است، داریم: $n(S)=۲^۳=۸$

الف) «حداکثر یک پسر» یعنی یا تمام فرزندان دختر باشند یا فقط یکی از آن‌ها پسر باشد. داریم:

$$A=\{(\text{د},\text{د},\text{د}),(\text{پ},\text{د},\text{د}),(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{پ})\}\Rightarrow n(A)=۴$$

$$\Rightarrow P(\text{حداکثر یک پسر})=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

ب) دو فرزند آخر پسر باشد، پس فرزند اول می‌تواند دختر یا پسر باشد:

$$B=\{(\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ})\}$$

$$\Rightarrow P(\text{دو فرزند آخر پسر})=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

نکته *احتمال هر پیشامد مانند A، عددی بین صفر و یک است:* $\boxed{۰\le P(A)\le ۱}$

احتمال پیشامد حتمی (قطعی)، برابر ۱ است: $\boxed{P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱}$

احتمال پیشامد غیرممکن (نشدنی)، برابر صفر است: $\boxed{P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰}$

ترکیب پیشامدها

۱. متمم یک پیشامد:

اگر A یک پیشامد باشد، متمم آن وقتی حاصل می‌شود که A رخ ندهد. متمم یک پیشامد مانند A را با نماد A^C یا A' نمایش می‌دهند و داریم: احتمال رخ دادن متمم پیشامد A: $P(A')=۱-P(A)$

مثال ۸

در پرتاب دو مکعب، احتمال این که اعداد رو شده مساوی نباشند را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** چون تعداد اعضای پیشامد A بسیار زیاد است، از متمم پیشامد A استفاده می‌کنیم: A: اعداد رو شده مساوی نباشند.

A': اعداد رو شده مساوی باشند. $\Rightarrow A'=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),\dots,(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A')=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

۲. اشتراک دو پیشامد:

اگر A و B دو پیشامد باشند، $A\cap B$ هنگامی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A **و** B با هم رخ دهند. $A\cap B$

۳. اجتماع دو پیشامد:

اگر A و B دو پیشامد باشند، $A\cup B$ هنگامی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A **یا** B رخ دهند. $A\cup B$

نکته: اگر A و B دو پیشامد باشند، داریم: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

پیشامدهای ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد باشند که نتوانند با هم رخ دهند ($A\cap B=\varnothing$)، در این صورت می‌گوییم A و B ناسازگار هستند.

نکته: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار ($A\cap B=\varnothing$) باشند، داریم: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

مثال ۹

سؤال‌های یک امتحان برحسب دشواری و آسانی یا تستی و تشریحی، مطابق جدول مقابل است. اگر سؤالی به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن که آسان یا تستی باشد، چه‌قدر است؟

سطح / نوع سوال	آسان	دشوار
تستی	۳	۷
تشریحی	۴	۱۱

☑ **پاسخ:** پیشامد B ← آسان بودن ، پیشامد A ← تستی بودن

چون سؤال انتخابی باید آسان یا تستی باشد از اجتماع دو مجموعه استفاده می‌کنیم.

$$n(A)=۳+۷=۱۰ \quad , \quad n(B)=۳+۴=۷ \quad , \quad \underbrace{n(S)}_{\text{تعداد کل سؤالات}}=۳+۷+۴+۱۱=۲۵$$

پیشامد $A\cap B$ ← سؤالات آسان و تستی

$$P(A\cap B)=\frac{۳}{۲۵}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۱۰}{۲۵}+\frac{۷}{۲۵}-\frac{۳}{۲۵}=\frac{۱۴}{۲۵}$$

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد.

در مورد دو پیشامد مستقل A و B داریم: $\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$

نکته: *اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه زوج پیشامدهای A و B' ، A' و B ، A' و B' نیز مستقل هستند.*

نکته: *دو پیشامد وقتی مستقل هستند که با داشتن یکی از آن‌ها، نتوانیم دیگری را پیش‌بینی کنیم.*

مثال ۱۰

مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن که دو فرزند اول پسر باشند، چه‌قدر است؟ (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۷)

☑ **پاسخ:** چون جنسیت هر فرزند بر جنسیت فرزند بعدی تأثیری ندارد، پیشامدها مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(\text{دو فرزند اول پسر})=P(\text{فرزند اول پسر و فرزند دوم پسر})=P(\text{فرزند اول پسر})\times P(\text{فرزند دوم پسر})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۱

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{۱}{۲}$ و $P(B)=\frac{۱}{۴}$، آن‌گاه $P(A'\cup B')$ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

چون A و B دو پیشامد مستقل هستند، طبق نکته‌ی ذکر شده، دو پیشامد A' و B' نیز مستقل هستند و داریم:

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')\xrightarrow[\text{مستقل‌اند}]{\text{پیشامدها}}P(A')+P(B')-P(A').P(B')$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}-(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴})=\frac{۴+۶-۳}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۶- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که:

الف) عدد تاس زوج و سکه «رو» بیاید. **ب) عدد تاس فرد یا سکه «رو» بیاید.**

۷- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید. (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۴)

الف) مطلوبست احتمال آن که این خانواده ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشد.

ب) مطلوبست احتمال آن که تعداد پسرها بیش‌تر از تعداد دخترها باشد.

۸- دو مهره را متوالیاً و بدون جای‌گذاری از جعبه‌ای که شامل ۶ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است، خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سیاه باشد. (هماهنگ کشوری- دی ۷۸)

۹- از یک جعبه که شامل ۲ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی قرمز است، ۲ مهره به تصادف و پشت سر هم خارج می‌کنیم. حساب کنید احتمال آن که:
الف) مهره‌ی اول آبی و مهره‌ی دوم قرمز باشد. **ب) حداقل یک مهره آبی باشد.** (هماهنگ کشوری- دی ۸۲)

۱۰- هرگاه خانواده‌ای ۴ فرزند داشته باشد، احتمال این که حداقل یک پسر در این خانواده وجود داشته باشد، چه‌قدر است؟

۱۱- خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است. احتمال آن که این خانواده حداکثر ۴ پسر داشته باشد، کدام است؟

۱۲- اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی باشند، مطلوبست احتمال آن که RH خون فردی منفی نباشد.
فرض مسأله: می‌دانیم برای آن‌که فردی دارای RH منفی باشد، لازم است که دو ژن منفی داشته باشد و هر یک از این ژن‌ها را از والدین خود به ارث می‌برد. (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۷- شماره‌ی ۱)

۱۳- می‌دانیم احتمال RH منفی ۰/۱۶ است. احتمال آن که در خانواده‌ای اولین فرزند با RH منفی، فرزند سوم خانواده باشد، چه‌قدر است؟ (هماهنگ کشوری- اسفند ۷۸)

۱۴- اگر $P(A)=\frac{3}{4}$ و $P(B)=\frac{5}{6}$، چرا A و B نمی‌توانند دو پیشامد ناسازگار باشند؟

درسنامه ۳

احتمال شرطی

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای هم‌شانس S باشند، وقتی $P(B)>0$، احتمال وقوع پیشامد A به شرط این که پیشامد B رخ داده باشد را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$
به شرط

به همین ترتیب می‌توانیم احتمال وقوع پیشامد B به شرط آن که پیشامد A رخ داده باشد را از فرمول $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ محاسبه کنیم.

مثال ۱۲

خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم فرزندان اول و دوم پسر هستند. احتمال آن که دو فرزند دیگر خانواده دختر باشند را تعیین کنید.

☑ **پاسخ:** پیشامد پسر بودن دو فرزند اول را با B و پیشامد دختر بودن دو فرزند بعدی را با A نشان می‌دهیم. بنابراین می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم و داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$P(A\cap B)$ یعنی در خانواده‌ای با ۴ فرزند، دو فرزند اول پسر و دو فرزند دوم دختر باشند. با دانستن استقلال جنسیت فرزندان داریم:

$$P(A\cap B)=P((\text{پ},\text{پ},\text{د},\text{د}))=P(\text{پ})P(\text{پ})P(\text{د})P(\text{د})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$P(B)$ یعنی احتمال آن که فرزندان اول و دوم پسر باشند. بنابراین:

$$P(B)=P(\text{پ})P(\text{پ})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

نکته *از دستور احتمال شرطی، برای محاسبه‌ی $P(A\cap B)$ نیز استفاده می‌شود:*

$$\boxed{\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(B)P(A|B)\\P(A\cap B)&=P(A)P(B|A)\end{aligned}}$$

مثال ۱۳

اگر $P(A)=\frac{1}{10}$، $P(B)=\frac{3}{10}$ و $P(B|A)=\frac{4}{10}$ باشد، $P(A\cup B)$ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow\frac{4}{10}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{10}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{100}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}-\frac{4}{100}=\frac{10+30-4}{100}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}$$

فصل ۱ پاسخ پرسش‌های

۱ **الف)** S = {(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)}

ب) یا باید سکه «رو» بیاید یعنی پیشامدهای (۶,ر),(۵,ر),(۴,ر),(۳,ر),(۲,ر),(۱,ر) یا این که تاس عدد ۳ بیاید یعنی یکی از پیشامدهای (۳,پ) و (۳,ر) پس داریم:

A = {(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,۳)}

ج) باید هم سکه «پشت» و هم تاس عدد ۳ آمده باشد. بنابراین:

B = {(پ,۳)}

---

۲ **الف)** $S=\{21,22,23,24,25,26,27,28,29\}$

ب) $A=\{22,24,26,28\}$

ج) $B=\{25\}$

---

۳ **الف)** $A=\{\underbrace{(1,6),(6,1)}_{\text{دو حالت متفاوت}},(3,4),(4,3),(2,5),(5,2)\}$

ب) $B=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

ج) $C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$

---

۴ **الف)** اگر پشت آمدن سکه را با «پ» و رو آمدن سکه را با «ر» نشان دهیم، داریم:

S = {(پ,ر,ر),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ),(ر,ر,ر)}

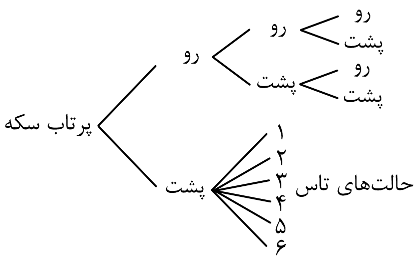
ب) حداقل یک بار «پشت» بیاید یعنی سکه یک بار، دو بار یا سه بار «پشت» بیاید. داریم:

A = {(پ,ر,ر),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ)}

ج) B = {(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر)}

---

۵ **الف)**



S = {(ر,ر,ر),(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(ر,پ,پ),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)}

ب) A = {(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)}

ج) B = {(ر,ر,پ),(ر,پ,ر)}

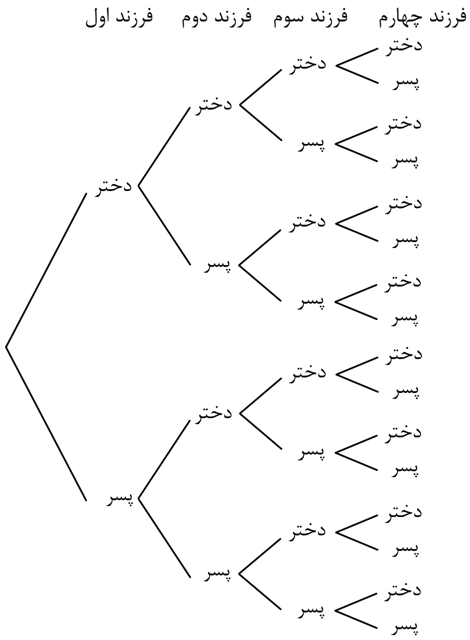
---

۶ S = {(۱,پ),(۲,پ),(۳,پ),(۴,پ),(۵,پ),(۶,پ),(۱,ر),(۲,ر),(۳,ر),(۴,ر),(۵,ر),(۶,ر)} $\Rightarrow n(S)=2\times 6=12$

الف) A = {(۲,ر),(۴,ر),(۶,ر)} $\Rightarrow P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

ب) B = {(۱,پ),(۱,ر),(۳,پ),(۳,ر),(۵,پ),(۵,ر),(۲,ر),(۴,ر),(۶,ر)} $\Rightarrow P(B)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

۷



$n(S) = ۲^۴ = ۱۶$

الف) $n(A) = ۶ \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{۶}{۱۶} = \dfrac{۳}{۸}$

ب) $n(B) = ۵ \Rightarrow P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{۵}{۱۶}$

۸

$$\begin{cases} n(S) = \binom{۱۴}{۱}\binom{۱۳}{۱} = ۱۸۲ \\ n(A) = \binom{۶}{۱}\binom{۸}{۱} = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow P(A) = \dfrac{۴۸}{۱۸۲} = \dfrac{۲۴}{۹۱}$$

۹

الف)
$$\begin{matrix} n(S) = \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱} = ۵ \times ۴ = ۲۰ \\ n(A) = \binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱} = ۲ \times ۳ = ۶ \end{matrix} \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{۶}{۲۰} = \dfrac{۳}{۱۰}$$

ب) در این‌جا ترتیب انتخاب مهره‌ی آبی مهم نیست و برای حداقل یک مهره آبی داریم:

$n(B) =$ (هر دو مهره آبی **یا** یک مهره آبی و یک مهره قرمز)

$= \binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱} + \binom{۲}{۲} = ۶ + ۱ = ۷ \Rightarrow P(B) = \dfrac{۷}{۲۰}$

۱۰

روش اول: P (حداقل یک پسر) $= ۱ - P$ (هیچ کدام پسر نباشند.) $= ۱ - P$ (هر ۴ فرزند دختر باشند.) $= ۱ - \dfrac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴} = ۱ - \dfrac{۱}{۱۶} = \dfrac{۱۵}{۱۶}$

روش دوم: پیشامد «حداقل یک پسر» یعنی انتخاب «یک پسر و سه دختر یا دو پسر و دو دختر یا سه پسر و یک دختر یا چهار پسر»، پس:

P (حداقل یک پسر) $= \dfrac{\binom{۴}{۱}}{۲^۴} + \dfrac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} + \dfrac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴} + \dfrac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴} = \dfrac{۴}{۱۶} + \dfrac{۶}{۱۶} + \dfrac{۴}{۱۶} + \dfrac{۱}{۱۶} = \dfrac{۱۵}{۱۶}$

۱۱

به جای آن‌که احتمال «حداکثر ۴ پسر» را محاسبه کنیم، می‌توانیم احتمال متمم این پیشامد، یعنی احتمال «۵ پسر یا ۶ پسر» برای این خانواده را محاسبه کنیم و حاصل را از یک کم کنیم.

P (حداکثر ۴ پسر) $= ۱ - P$ (۵ پسر یا ۶ پسر) ، $n(S) = ۲^۶ = ۶۴$

P (۶ پسر) $= \dfrac{\binom{۶}{۶}}{۶۴} = \dfrac{۱}{۶۴}$ ، P (۵ پسر) $= \dfrac{\binom{۶}{۵}}{۶۴} = \dfrac{۶}{۶۴}$

$\Rightarrow P$ (حداکثر ۴ پسر) $= ۱ - (\dfrac{۶}{۶۴} + \dfrac{۱}{۶۴}) = \dfrac{۵۷}{۶۴}$

۱۲ توجه داشته باشید که ژن پدر و مادر مستقل از هم هستند، پس داریم:

$$P(\text{منفی } RH) = P(\text{هر دو ژن منفی}) = P(\text{ژن منفی مادر}).P(\text{ژن منفی پدر}) = (۰/۴)(۰/۴) = ۰/۱۶$$

$$P(\text{مثبت } RH) = ۱ - P(\text{منفی } RH) = ۱ - ۰/۱۶ = ۰/۸۴$$

۱۳

$$P(\text{منفی } RH) = ۰/۱۶ \quad ، \quad P(\text{مثبت } RH) = ۱ - ۰/۱۶ = ۰/۸۴$$

$$P(\text{سومین فرزند منفی } RH) = P(\text{اولی مثبت } RH).P(\text{دومی مثبت } RH).P(\text{سومی منفی } RH) = (۱-۰/۱۶)(۱-۰/۱۶)(۰/۱۶) = ۰/۱۱۲۸$$

---

۱۴ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم $P(A\cap B)=۰$، بنابراین:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۶} = \frac{۱۹}{۱۲} > ۱$$

مقدار احتمال بزرگ‌تر از یک، غیرممکن است (زیرا $۰ \le P(A) \le ۱$)، پس A و B نمی‌توانند ناسازگار باشند.

۱۵

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۶}} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۸} = \frac{۹+۶-۲}{۳۶} = \frac{۱۳}{۳۶}$$

۱۶

$$P(A) = \frac{۲}{۳}P(B) \quad ، \quad P(B|A) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \xrightarrow[P(A\cap B)=P(A)P(B)]{\text{A و B مستقل}} \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۳}P(B) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = \frac{۲+۳-۱}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۱۷

$$n(\text{زن}) = ۹۰$$
$$n(\text{مرد}) = ۱۰۵$$
$$n(\text{کارمند}) = ۱۹۵$$

		جنسیت	
		مرد	زن
تحصیلات	دانشگاهی	۱۵	۱۰
	کم‌تر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی} | \text{مرد}) = \frac{P(\text{تحصیلات دانشگاهی} \cap \text{مرد})}{P(\text{مرد})} = \frac{\frac{۱۵}{\cancel{۱۹۵}}}{\frac{۱۰۵}{\cancel{۱۹۵}}} = \frac{۱۵}{۱۰۵} = \frac{۱}{۷}$$

۱۸

$$P(\text{داشتن تحصیلات}) = P(\text{زن}).P(\text{تحصیلات}|\text{زن}) + P(\text{مرد}).P(\text{تحصیلات}|\text{مرد}) = ۰/۴۵ \times ۰/۰۸ + ۰/۵۵ \times ۰/۱۰ = ۰/۰۹۱$$

$۰/۰۹۱ \times ۱۰۰ = ۹/۱٪ \Rightarrow$ ۹/۱ درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.