ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه ۱ (دهم)** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱- آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۳ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون شمارهٔ ۳ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا یک آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲- آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۴ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۴ تا ۷ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید.

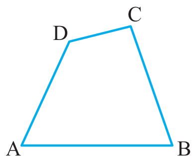
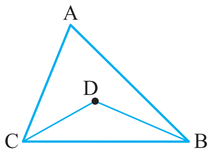
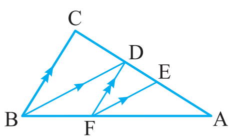
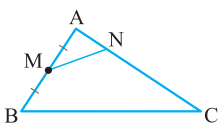
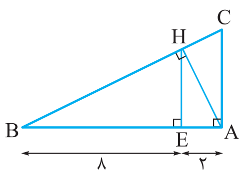
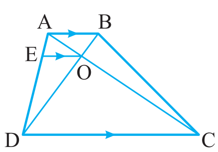
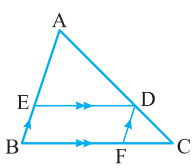
ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۸ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۵ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳- پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴- درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۱) نیاز دارید، تنها در ۸ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

فهرست

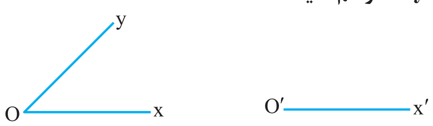
هندسه ۱	رشته: ریاضی فیزیک	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	
ردیف	آزمون شمارهٔ ۳		نوبت اول پایهٔ دهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

ردیف		نمره
۱	خط d و نقطهٔ A واقع بر آن داده شده است. شیوهٔ رسم خطی عمود بر خط d را که از نقطهٔ A می‌گذرد علاوه بر ترسیم، بیان کنید.	۱/۵
۲	پاره‌خط MN داده شده است. مربعی رسم کنید که پاره‌خط MN یکی از قطرهای آن باشد.	۱/۲۵
۳	قضیه: ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث، همرس هستند.	۱/۵
۴	قضیه: ثابت کنید اگر در مثلث ABC، ضلع AC از ضلع AB بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه زاویهٔ B از زاویهٔ C بزرگ‌تر است.	۱
۵	در چهارضلعی ABCD، ضلع AB بزرگ‌ترین ضلع و ضلع CD کوچک‌ترین ضلع است. ثابت کنید: $\hat{C} > \hat{A}$. 	۲
۶	نقطهٔ D نقطه‌ای دلخواه درون مثلث M است. ثابت کنید: $D > A$ 	۱/۲۵
۷	قضیه: ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس.	۱/۵
۸	در مثلث ABC، AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است و محل برخورد نیمسازهای زوایای AMB و AMC را با اضلاع AB و AC به ترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.	۱/۵
۹	در شکل مقابل پاره‌خط‌های موازی مشخص شده‌اند. ثابت کنید: الف) $\frac{AE}{ED} = \frac{AD}{CD}$ ب) $AD^2 = AE.AC$ 	۱/۵
۱۰	در شکل مقابل، نقطهٔ M وسط ضلع AB، $3AB = 2AC$ و $7AN = 2NC$ است. نسبت $\frac{MN}{BC}$ را بیابید. 	۱
۱۱	در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل $BE = 8$ و $AE = 2$ است. اندازهٔ ضلع AC را پیدا کنید. 	۱/۵
۱۲	اگر $x+1$ میانگین هندسی $x-1$ و $2x-1$ باشد، مقدار x را بیابید.	۰/۵
۱۳	در ذوزنقهٔ ABCD شکل مقابل، نقطهٔ O محل برخورد دو قطر و $AB \parallel CD \parallel EO$ است. اگر $\frac{S_{COD}}{S_{AOB}} = 9$ باشد، نسبت $\frac{AE}{ED}$ چه‌قدر است؟ 	۱/۵
۱۴	در شکل مقابل با توجه به پاره‌خط‌های موازی که مشخص شده‌اند، ثابت کنید: $\frac{BE}{AB} + \frac{BF}{BC} = 1$ 	۱/۲۵
۱۵	قضیهٔ فیثاغورس را با توجه به مفاهیم تشابه مثلث‌ها ثابت کنید.	۱/۲۵
	موفق باشید	جمع نمرات ۲۰

ردیف		نمره

فصل اول

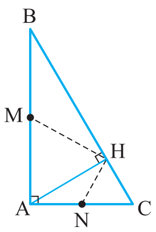
۱ زاویهٔ xOy و نیم‌خط $O'x'$ داده شده است. با استفاده از خط‌کش و پرگار زاویهٔ $x'O'y'$ را مساوی با زاویهٔ xOy رسم کنید. ۱/۵



۲ با استفاده از روش برهان خلف نشان دهید اگر مثلث دارای دو ارتفاع برابر باشد، متساوی‌الساقین است. ۱

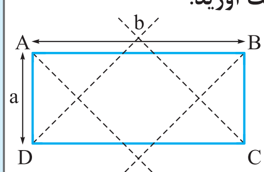
فصل دوم

۳ در شکل روبه‌رو، M و N وسط اضلاع زاویهٔ قائمه‌اند و H پای ارتفاع نظیر وتر است. ثابت کنید زاویهٔ MHN قائمه است. ۱/۵

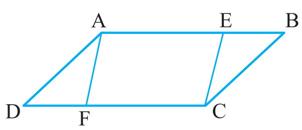


فصل سوم

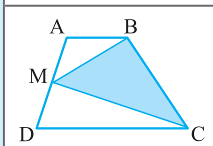
۴ اندازهٔ طول ضلع مربعی را که از برخورد نیمسازهای درونی یک مستطیل به اضلاع a و b ایجاد می‌شود، برحسب a و b به دست آورید. ۱/۵



۵ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ شکل زیر، نقاط E و F به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که $AE = ۲EB$ و $FC = ۳DF$ است. نسبت مساحت چهارضلعی $AECF$ را به مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به دست آورید. ۱



۶ در ذوزنقهٔ $ABCD$ وسط ساق AD را M می‌نامیم. ثابت کنید مساحت مثلث BMC نصف مساحت ذوزنقه است. ۱/۵



۷ مثلثی را به اضلاع ۵، ۵ و ۶ در نظر بگیرید. نقطهٔ M را به دلخواه روی ضلع بزرگ این مثلث انتخاب می‌کنیم. مجموع فاصله‌های نقطهٔ M تا دو ضلع دیگر این مثلث چه‌قدر است؟ ۱/۵

۸ ثابت کنید میانه‌های هر مثلث همرس‌اند. ۱/۵

۹ در یک شکل شبکه‌ای با مساحت $\frac{۸۱}{۲}$، تعداد نقاط درونی ۲۱ می‌باشد. نسبت تعداد نقاط مرزی به نقاط درونی را پیدا کنید. ۱

۱۰ عکس قضیهٔ تالس را در مثلث بیان و ثابت کنید. ۲

فصل چهارم

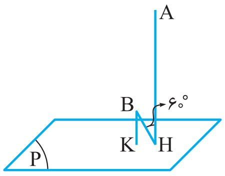
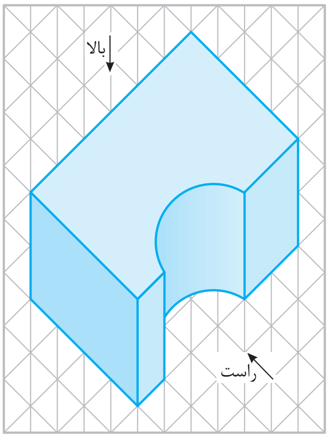
۱۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. ۱/۵

الف) در فضا دو خط موازی با خط سوم، با یکدیگر موازی‌اند.

ب) اگر خط d بر صفحهٔ P عمود باشد، یک و تنها یک صفحه وجود دارد که شامل d و عمود بر صفحهٔ P است.

پ) اگر خط d و صفحهٔ P هر دو بر صفحهٔ R عمود باشند، آن‌گاه d با P موازی است.

۱۲ شعاع قاعدهٔ استوانه‌ای قائم $۱۰\ cm$ و فاصلهٔ دو مرکز قاعده‌ها از یکدیگر $۱۵\ cm$ است. صفحهٔ P موازی با OO' و به فاصلهٔ $۶\ cm$ از O و O' این استوانه را قطع می‌کند. مساحت مقطع این صفحه با استوانه را به دست آورید. ۱/۵

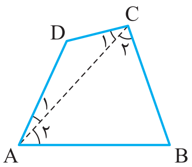
هندسه ۱	رشته: ریاضی فیزیک	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	
ردیف	آزمون شمارهٔ ۵	نوبت دوم پایهٔ دهم دورهٔ متوسطهٔ دوم		نمره
۱۳	در شکل زیر، AH و BK بر صفحهٔ P عمودند. اگر $B\hat{H}A = 60^\circ$ ، $AH = 8$ و $BK = 2$ باشد، طول پاره‌خط HK را به دست آورید. 			۱
۱۴	در شکل مقابل، تصویر از بالا و تصویر از راست را رسم کنید. 			۲
	موفق باشید		جمع نمرات	۲۰

$$\left.\begin{array}{l}\text{است BDC زاویهٔ خارجی مثلث } \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{C}\\ AB = AD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

(صفحهٔ ۲۲)

۵- قطر AC را رسم می‌کنیم.

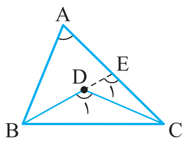


$$\left.\begin{array}{l}\text{کوچک‌ترین ضلع } DC \Rightarrow DC < AD \xrightarrow{\text{در مثلث ADC}} \hat{A}_1 < \hat{C}_1\\ \text{بزرگ‌ترین ضلع } AB \Rightarrow BC < AB \xrightarrow{\text{در مثلث ABC}} \hat{A}_2 < \hat{C}_2\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 < \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{A} < \hat{C}$$

(صفحهٔ ۲۳)

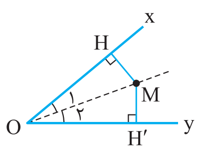
۶- BD را امتداد می‌دهیم تا AC را در E قطع کند.



$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویهٔ خارجی مثلث DEC است } \hat{D} \Rightarrow \hat{D} > \hat{E}_1\\ \text{زاویهٔ خارجی مثلث ABE است } \hat{E}_1 \Rightarrow \hat{E}_1 > \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}$$

(صفحهٔ ۲۷)

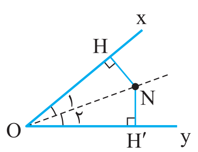
۷-



M روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد	فرض
$MH = MH'$	حکم

$$\left.\begin{array}{l}OM = OM\\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2\\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه}} OMH \cong OMH' \Rightarrow MH = MH'$$

اکنون عکس قضیه را ثابت می‌کنیم



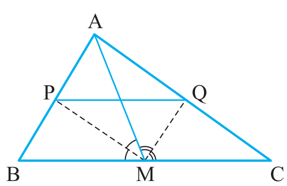
$NH = NH'$	فرض
N روی نیمساز قرار دارد	حکم

از N به O وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}ON = ON\\ NH = NH'\\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{NOH} \cong \overset{\Delta}{NOH'} \Rightarrow O_1 = O_2$$

(صفحهٔ ۱۲)

۸-

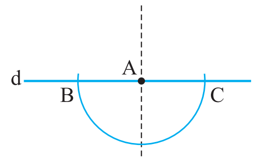


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMB}: \text{نیمساز است } MP \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AM}{MB}\\ \overset{\Delta}{AMC}: \text{نیمساز است } MQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AM}{MC}\\ \text{میانه } AM \Rightarrow BM = CM\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

(صفحهٔ ۴۵)

آزمون شمارهٔ ۳ (نوبت اول)

۱- ابتدا کمانی به مرکز A و شعاع دلخواه می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند. (C , B)، سپس عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم که همان خط مطلوب است.



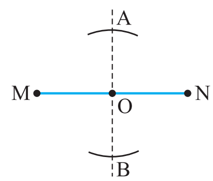
(صفحهٔ ۱۰)

۲- عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم می‌کنیم.

- به مرکز O وسط MN و شعاع $\frac{MN}{2}$ کمانی می‌زنیم تا خط عمودمنصف را در دو نقطه قطع کند. (A و B)

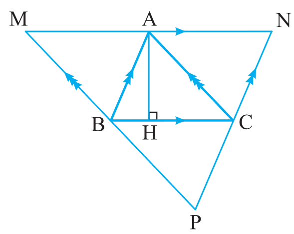
- نقاط به دست آمده را به نقاط M و N وصل می‌کنیم.

چهارضلعی حاصل مربع موردنظر است.



(صفحهٔ ۱۶)

۳- از هر رأس مثلث ABC خطی را موازی ضلع روبه‌رو به آن رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط M، N و P قطع کنند. ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم.

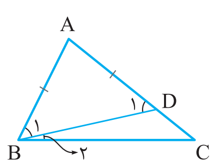


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{متوازی‌الاضلاع } ANCB \Rightarrow AN = BC\\ \text{متوازی‌الاضلاع } MACB \Rightarrow MA = BC\end{array}\right\} \Rightarrow MA = AN\\ AH \perp BC \text{ و } MN \parallel BC \Rightarrow AH \perp MN\end{array}\right\} \Rightarrow \text{خط AH عمودمنصف پاره‌خط MN است.}$$

به گونه‌ای مشابه ثابت می‌شود که ارتفاع‌های رأس‌های B و C نیز ثابت می‌شود که عمودمنصف پاره‌خط‌های MP و NP هستند، چون عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند. ارتفاع‌های مثلث ABC که عمودمنصف‌های اضلاع مثلث MNP هستند، نیز همرس می‌باشند.

(صفحهٔ ۲۰)

۴-



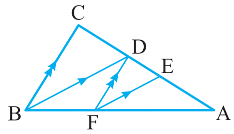
$AB < AC$	فرض
$B > C$	حکم

روی ضلع AC نقطهٔ D را طوری مشخص می‌کنیم که $AD = AB$ باشد، سپس از B به D وصل می‌کنیم.

۹- الف)

$$\left.\begin{array}{l} EF \parallel BD \Rightarrow \dfrac{AE}{ED}=\dfrac{AF}{FB} \\ DF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AF}{FB} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AE}{ED}=\dfrac{AD}{DC}$$

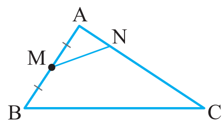
ب)



$$\left.\begin{array}{l} EF \parallel BD \Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AF}{AB} \\ DF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AF}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD^{۲}=AE\,.\,AC$$

(صفحهٔ ۳۷)

۱۰-



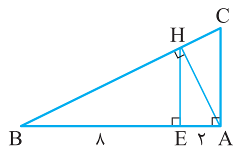
$$\frac{AN}{NC}=\frac{۲}{۷} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AN}{AN+NC}=\frac{۲}{۷+۲} \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{۲}{۹} \Rightarrow AN=\frac{۲}{۹}AC$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AN}{AB}=\dfrac{\frac{۲}{۹}AC}{\frac{۲}{۳}AC}=\dfrac{۱}{۳} \\ \dfrac{AM}{AC}=\dfrac{\frac{۱}{۲}AB}{\frac{۳}{۲}AB}=\dfrac{۱}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{AN}{AB}=\dfrac{AM}{AC} \\ \hat{A}=\hat{A} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{۱}{۳}$$

(صفحهٔ ۴۱)

۱۱-



$$\overset{\Delta}{AHB}: EH^{۲}=BE\times EA=۸\times ۲ \Rightarrow EH=۴$$

$$\frac{EH}{AC}=\frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{EH}{AC}=\frac{۸}{۸+۲} \Rightarrow \frac{۴}{AC}=\frac{۸}{۱۰} \Rightarrow AC=۵$$

(صفحهٔ ۳۷)

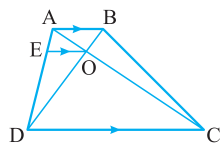
۱۲-

$$(x+۱)^{۲}=(x-۱)(۲x-۱) \Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=۲x^{۲}-x-۲x+۱$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۵x=۰ \Rightarrow x(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غیرقابل قبول} \\ x=۵ \end{cases}$$

(صفحهٔ ۳۳)

۱۳-

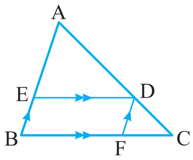


$$AOB \sim COD \Rightarrow \frac{S_{COD}}{S_{AOB}}=\left(\frac{CO}{AO}\right)^{۲} \Rightarrow \left(\frac{CO}{AO}\right)^{۲}=۹ \Rightarrow \frac{CO}{AO}=۳$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{ED}=\frac{AO}{CO}=\frac{۱}{۳}$$

(صفحهٔ ۴۷)

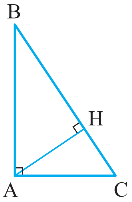
۱۴-



$$\left.\begin{array}{l} ED \parallel BC \Rightarrow \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CD}{AC} \\ DF \parallel AB \Rightarrow \dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AD}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BE}{AB}+\frac{BF}{BC}=\frac{CD+AD}{AC}=\frac{AC}{AC}=۱$$

(صفحهٔ ۳۶)

۱۵-



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}=\hat{B} \\ \hat{H}=\hat{A}=۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} ABH \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}=\hat{C} \\ \hat{H}=\hat{A}=۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} ACH \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^{۲}$$

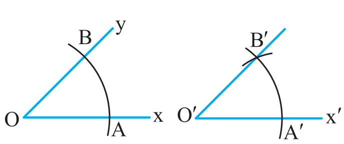
$$\xrightarrow{+} \frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{BC^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{BC^{۲}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=۱ \Rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$$

(صفحهٔ ۴۱)

آزمون شمارهٔ ۵ (نوبت دوم)

۱-کمانی به مرکز O و شعاع دلخواه می‌زنیم و محل برخورد آن با نیم‌خط Ox و نیم‌خط Oy را به ترتیب A و B می‌نامیم.



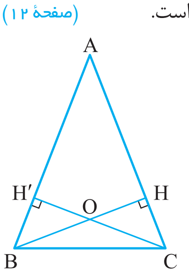
-کمانی به مرکز O' و شعاع OA می‌زنیم تا نیم‌خط $O'x'$ را در نقطهٔ A' قطع کند.

- دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ فاصلهٔ A تا B باز می‌کنیم و به مرکز A' کمانی می‌زنیم تا کمان رسم‌شده را در نقطهٔ B' قطع کند.

- O' را به B' وصل می‌کنیم. زاویهٔ $A'O'B'$ همان زاویهٔ مطلوب است. (صفحهٔ ۱۲)

۲- در مثلث ABC روبه‌رو دو ارتفاع BH و CH' برابر می‌باشند.

با توجه به رابطهٔ مساحت برای مثلث داریم:

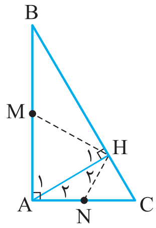


$$\frac{1}{2}BH.AC=\frac{1}{2}CH'.AB \Rightarrow \frac{BH}{CH'}=\frac{AB}{AC}$$

اگر مثلث متساوی‌الساقین نباشد (فرض خلف)، کسر سمت راست تناسب بالا، مخالف یک

خواهد شد و $\frac{BH}{CH'}$ هم مخالف یک می‌شود. درصورتی که کسر $\frac{BH}{CH'}$ بنا بر فرض برابر یک است. با توجه به این تناقض، فرض خلف باطل است و حکم؛ یعنی متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC ثابت می‌شود. (صفحهٔ ۲۵)

۳- با توجه به این‌که اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر برابر نصف وتر است، در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC داریم:

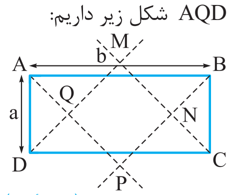


$$\left.\begin{array}{l} HM=\frac{AB}{۲}=AM \Rightarrow \hat{H}_۱=\hat{A}_۱ \\ HN=\frac{AC}{۲}=AN \Rightarrow \hat{H}_۲=\hat{A}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{H}_۱+\hat{H}_۲=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲ \Rightarrow M\hat{H}N=\hat{A}=۹۰^\circ$$

(صفحهٔ ۶۰)

۴- می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین، اندازهٔ وتر، $\sqrt{۲}$ برابر اندازهٔ هر یک از اضلاع قائمه است.

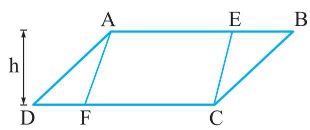
بنابراین در مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین DMC و AQD شکل زیر داریم:



$$\left.\begin{array}{l} DC=\sqrt{۲}\times MD \Rightarrow MD=\frac{b}{\sqrt{۲}} \\ AD=\sqrt{۲}\times QD \Rightarrow QD=\frac{a}{\sqrt{۲}} \end{array}\right\} \xrightarrow{-} MQ=\frac{b-a}{\sqrt{۲}}$$

(صفحهٔ ۶۳)

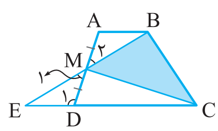
۵- اگر اندازه‌های اضلاع AB و DC از متوازی‌الاضلاع را برابر a و اندازهٔ ارتفاع نظیر این اضلاع را برابر h درنظر بگیریم، نسبت مساحت ذوزنقهٔ AECF به مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD عبارت است از:



$$\frac{S_{AECF}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}h(AE+FC)}{h.a}=\frac{\frac{۱}{۲}h(\frac{۲}{۳}a+\frac{۳}{۴}a)}{h.a}=\frac{۱}{۲}(\frac{۸+۹}{۱۲})=\frac{۱۷}{۲۴}$$

(صفحهٔ ۶۵)

۶- پاره‌خط BM را ادامه داده تا امتداد ضلع CD را در نقطهٔ E قطع کند.



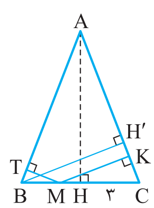
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB \parallel EC \\ \text{مورب } AD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\hat{D}_۱ \\ AM=MD \\ M_۱=M_۲ \text{ متقابل به رأس} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{MDE}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_{ABM}=S_{MDE} \Rightarrow S_{ABCD}=S_{BEC} \\ BM=ME \Rightarrow \text{میانهٔ مثلث } BCE \text{ است } CM \Rightarrow S_{BMC}=\frac{۱}{۲}S_{BEC} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{BMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

(صفحهٔ ۷۲)

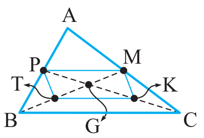
۷- می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین مانند M تا دو ضلع دیگر مثلث، برابر ارتفاع وارد بر ساق می‌باشد.



$$AH^۲+(۳)^۲=(۵)^۲ \Rightarrow AH=۴$$
$$AH\times BC=BH'\times AC \Rightarrow ۴\times ۶=BH'\times ۵$$
$$\Rightarrow BH'=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$
$$MK+MT=BH'=۴/۸$$

(صفحهٔ ۶۸)

۸- میانه‌های CP , BM را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ G قطع کنند. اگر وسط GB را T و وسط GC را K بگیریم، آن‌گاه:



$$\overset{\Delta}{GBC}: \text{پاره‌خط میانگین } TK \Rightarrow TK \parallel \text{ و } =\frac{۱}{۲}BC \quad (۱)$$
$$\overset{\Delta}{ABC}: \text{پاره‌خط میانگین } MP \Rightarrow PM \parallel \text{ و } =\frac{۱}{۲}BC \quad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow PM \parallel \text{ و } =TK \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } MPTK$$

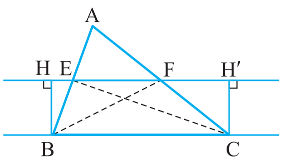
پس G وسط PK است و چون K وسط GC است، پس $\frac{GP}{GC}=\frac{۱}{۲}$ به دلیل مشابه $\frac{GM}{BG}=\frac{۱}{۲}$، یعنی نقطهٔ برخورد دو میانه، آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. اگر نقطهٔ برخورد میانهٔ نظیر رأس A و BM در G' متقاطع باشند، به همین ترتیب ثابت می‌شود $\frac{G'M}{BG'}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه G و G' بر هم منطبق هستند؛ یعنی سه میانه در یک نقطه هم‌رس هستند. (صفحهٔ ۶۷)

۹- $S=\frac{b}{۲}+i-۱ \Rightarrow \frac{۸۱}{۲}=\frac{b}{۲}+۲۱-۱ \Rightarrow \frac{b}{۲}=\frac{۸۱}{۲}-۲۰=\frac{۴۱}{۲} \Rightarrow b=۴۱$

(صفحهٔ ۷۰)

۱۰- عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع از مثلث را طوری قطع کند که روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناظرِ متناسب ایجاد کند، آن خط موازی ضلع سوم است.

فرض	$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$
حکم	$EF \parallel BC$



پاره‌خط‌های BF و CE را رسم کرده و از B و C عمودهای BH و CH' را بر امتداد EF وارد می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}=\frac{AE}{EB} \\ \frac{S_{AEF}}{S_{CEF}}=\frac{AF}{FC} \\ \text{بنا بر فرض}: \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}=\frac{S_{AEF}}{S_{CEF}} \Rightarrow S_{BEF}=S_{CEF}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}BH.EF=\frac{۱}{۲}CH'.EF \Rightarrow BH=CH' \Rightarrow EF \parallel BC$$

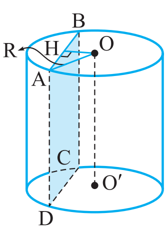
(صفحهٔ ۳۶)

۱۱- الف) درست (صفحهٔ ۷۹)

ب) نادرست (صفحهٔ ۸۳)

پ) درست (صفحهٔ ۸۳)

۱۲- مقطع صفحهٔ P با استوانه، مستطیل ABCD است. اگر OH بر AB عمود باشد، چون $OA=OB$، پس H وسط AB است، درنتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

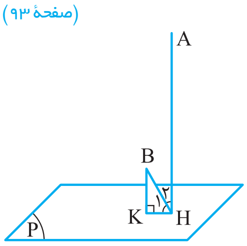


$$AH^۲=R^۲-OH^۲=۱۰^۲-۶^۲=۶۴ \Rightarrow AH=۸ \Rightarrow AB=۲AH=۱۶$$

از طرفی $AD=BC=۱۵$، پس: $S_{ABCD}=۱۶\times ۱۵=۲۴۰$

(صفحهٔ ۹۳)

۱۳- چون BK بر صفحهٔ P عمود است، پس بر KH نیز عمود می‌باشد و چون AH بر P عمود است، پس $AHK=۹۰^\circ$ و چون بنا بر صورت مسئله $B\hat{H}A=۶۰^\circ$ در نتیجه $\hat{H}_۱=۳۰^\circ$.

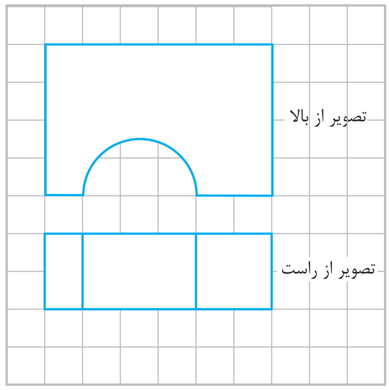


در مثلث قائم‌الزاویهٔ BKH یک زاویه 30° است، پس $BK = \frac{1}{2}BH$ و درنتیجه $BH = 4$ ، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BKH داریم:

$$KH^2 = BH^2 - BK^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$$

(صفحهٔ ۸۳)

۱۴-



(صفحهٔ ۹۰)

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

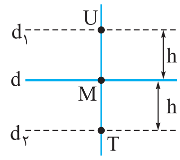
فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

چند نکته در ترسیمات هندسی

۱ چون اغلب از دایره برای ترسیم استفاده می‌شود لازم دیدم بدون این که وارد مبحث مکان‌های هندسی شویم، تعریفی از آن ارائه دهیم.

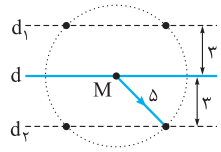
دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که آن نقاط از یک نقطهٔ ثابت به فاصله‌ای ثابت باشند؛ آن نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و آن فاصلهٔ ثابت را شعاع دایره می‌نامند.

۲ مجموعه نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت مانند d به فاصلهٔ ثابت h باشند، روی دو خط موازی با d هستند. برای رسم این دو خط، از نقطهٔ دلخواه M روی خط d عمودی بر آن رسم می‌کنیم و در دو طرف نقطهٔ M پاره‌خط‌های MU و MT را به اندازهٔ h جدا می‌کنیم و از نقطه‌های U و T دو خط بر پاره‌خط UT عمود می‌کنیم تا خط‌های d_1 و d_2 به دست آیند؛ این دو خط با d موازی‌اند و هر نقطه از این دو خط، فاصله‌اش از d برابر h می‌باشد.



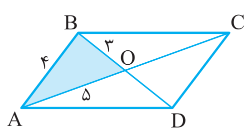
مثال: خط d و نقطهٔ M روی آن را در نظر بگیرید. نقطه‌ای پیدا کنید که از خط d به فاصلهٔ ۳ و از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۵ باشد.

پاسخ: نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دو خط موازی با آن قرار دارند و در شکل، این دو خط با d_1 و d_2 نمایش داده شده‌اند. نقاطی که از M به فاصلهٔ ۵ هستند روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۵ قرار دارند. نقاط برخورد دو خط d_1 و d_2 با این دایره، همان نقاط موردنظر می‌باشند. مشاهده می‌کنید که مسئله دارای چهار جواب است.



مثال: متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول‌های دو قطر آن ۶ و ۱۰ سانتی‌متر و طول یکی از اضلاع آن ۴ سانتی‌متر باشد.

پاسخ: اگر فرض کنیم متوازی‌الاضلاع شکل زیر، جواب مسئله باشد، با توجه به آن‌که می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، آن‌گاه $AO = ۵$ ، $BO = ۳$ و $AB = ۴$ ، پس طول سه ضلع مثلث ABO معلوم‌اند و در نتیجه قابل رسم است (رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است را می‌دانیم و در این مسئله نیازی به بیان چگونگی رسم آن نیست). پس از رسم این مثلث، AO را از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به دست آید و BO را نیز از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D پدید آید. چهارضلعی ABCD، متوازی‌الاضلاع موردنظر می‌باشد.

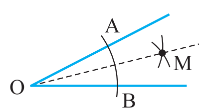


ویژگی نیمساز یک زاویه

نیمساز هر زاویه، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز یک زاویه

برای رسم نیمساز یک زاویه، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه باز می‌کنیم و به مرکز رأس زاویه قوسی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازه‌ای دلخواه ولی بیشتر از نصف AB باز می‌کنیم و دو قوس به مرکزهای A و B می‌زنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. OM نیمساز زاویه است.

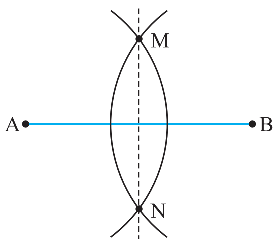


ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط

عمودمنصف هر پاره‌خط، مجموعه نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله هستند و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

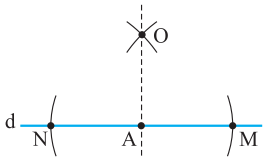
برای رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط باز کرده و به مرکزهای A و B دو قوس می‌زنیم تا یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع کنند. امتداد MN عمودمنصف AB است.



رسم خطی عمود بر یک خط از نقطهٔ A روی آن

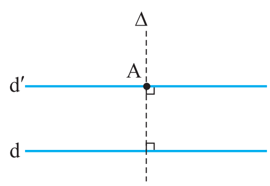
فرض کنیم A روی خط d باشد و بخواهیم از آن عمودی بر d رسم کنیم. برای این منظور به مرکز A و شعاع دلخواه قوسی می‌زنیم تا d را در M و N قطع کند، سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط MN باز می‌کنیم و به مرکزهای M و N دو قوس می‌زنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. امتداد OA بر d عمود است.

اگر نقطهٔ A بیرون خط d باشد، روش کار به همین صورت است.



رسم خطی موازی با یک خط از نقطهٔ A بیرون آن

فرض کنیم A بیرون خط d باشد و بخواهیم از A خطی موازی با d رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از A عمودی بر d رسم می‌کنیم (روش این عمل را در بالا توضیح دادیم.) و آن را Δ می‌نامیم، سپس از A عمودی بر Δ رسم می‌کنیم (مانند روش فوق) و آن را d' می‌نامیم. d' با d موازی است.



استدلال و انواع آن

استدلال بر دو نوع است:

۱- استدلال استقرایی: حدس درستی یک حکم کلی براساس صحت آن گزاره در چند حالت محدود را استدلال استقرایی نامند.

۲- استدلال استنتاجی: اثبات درستی یک حکم، براساس نتیجه‌گیری از تعاریف، اصول، قضایا و گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامند.

باید بدانیم که تنها استدلال استنتاجی، استدلالی قابل‌قبول است؛ در واقع عالی‌ترین نوع استدلال، استدلال استنتاجی است.

نقاط همرسی اجزای فرعی مثلث

۱ در هر مثلث، سه نیمساز زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرس‌اند. این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد.

۲ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث، در یک نقطه همرس هستند. این نقطه می‌تواند درون مثلث یا روی یکی از اضلاع و یا بیرون مثلث باشد و مرکز دایره‌ای است که از هر سه رأس آن می‌گذرد. اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، این نقطه درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه وسط وتر است و اگر یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث واقع است.

۳) سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. نقطهٔ همرسی سه ارتفاع می‌تواند درون، روی یک رأس یا بیرون مثلث باشد. اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، این نقطه درون مثلث واقع است و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه منطبق بر رأس زاویهٔ قائمه است و اگر یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

۴) سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. این نقطه همیشه درون مثلث واقع است و مرکز ثقل مثلث (گرانیگاه) نامیده می‌شود. هر سه میانهٔ مثلث، آن را به شش مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند.

منطق ریاضی

گزارهٔ ساده: هر جملهٔ خبری را یک گزاره می‌نامند؛ به عنوان مثال «علی بزرگ‌تر از محمد است.» حاوی یک خبر است، پس یک گزاره است. اما عبارتی مانند «چه هوای سردی!» حاوی خبر نیست، بلکه جمله‌ای تعجبی است، پس گزاره نیست. یا عبارت‌هایی مانند «به مدرسه می‌روی؟» یا «برو کتابم را بیار!» جمله‌های خبری نیستند (اولی سؤالی و دومی امری است).

ارزش گزاره: هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد، گزاره‌ای که درست باشد را با T و گزاره‌ای که نادرست باشد را با F نمایش می‌دهیم. اگر گزاره‌ای مانند P درست باشد، آن را با نماد $P \equiv T$ و اگر نادرست باشد، آن را با نماد $P \equiv F$ نمایش می‌دهیم.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت روبه‌رو می‌خوانیم: چنین نیست که p

ارزش نقیض هر گزاره، عکس ارزش گزارهٔ اصلی است.

جدول ارزشی مقابل را ملاحظه کنید.

p	$\sim p$
T	F
F	T

برهان خلف (برهان غیرمستقیم): برای اثبات یک حکم به برهان خلف، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خلف).

۲) نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته‌شده یا فرض اولیه در تناقض است (رسیدن به تناقض).

۳) با نادرست‌بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم موردنظر درست است.

مثال در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، اگر $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A}'$، آن‌گاه ثابت کنید $BC \neq B'C'$.

پاسخ می‌خواهیم ثابت کنیم $BC \neq B'C'$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم $BC = B'C'$ باشد (فرض خلف)، در این صورت دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هر سه ضلعشان برابر است، پس همنهشت هستند و در نتیجه باید اجزای متناظر آن‌ها برابر باشند، از جمله باید $\angle A = \angle A'$ باشد که خلاف فرض است و در نتیجه فرض خلف باطل است و در نتیجه $BC \neq B'C'$.

عکس یک قضیه: اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای را که حاصل می‌شود، عکس قضیه می‌نامند. عکس قضیه می‌تواند حکمی درست یا نادرست باشد. چنان‌چه عکس قضیه‌ای درست باشد، آن را قضیهٔ دوشرطی می‌نامند.

مثال قضیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

«اگر دو زاویه قائمه باشند، آن‌گاه آن دو زاویه برابرند.» عکس این قضیه را بیان کنید. آیا عکس این قضیه درست است؟ چرا؟

پاسخ فرض این قضیه، قائمه‌بودن دو زاویه و حکم آن، برابری دو زاویه است، پس برای بیان عکس قضیه باید جای فرض و حکم را عوض کنیم، بنابراین عکس این قضیه به صورت زیر است:

«اگر دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه آن دو زاویه قائمه هستند.»

به روشنی معلوم می‌شود که این حکم درست نیست، زیرا اگر دو زاویه ۳۸ درجه باشند، هر چند برابرند ولی مطمئناً قائمه نیستند.

نامساوی در مثلث

۱) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

۲) اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر است.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گویند.

برای ردکردن یک حکم، کافی است مثالی ارائه دهیم که نشان دهد آن حکم درست نیست، ولی برای اثبات یک حکم کلی، یک یا حتی بی‌شمار مثال نیز کفایت نمی‌کند.

مثال کم «مربع عددهای حقیقی، همیشه عددی مثبت است.» را در نظر بگیرید. با ارائهٔ مثالی نقض، نشان دهید این حکم درست نیست.

پاسخ عدد صفر یک مثال نقض برای این حکم است، زیرا $۰^۲ = ۰ \not> ۰$.

فصل ۲: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

تعریف نسبت: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $b \neq ۰$، آن‌گاه کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت بین a و b می‌نامند.

تعریف تناسب: اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، گوییم این دو کسر متناسب‌اند و با نماد $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نمایش می‌دهیم.

ویژگی‌های تناسب: در زیر، چند ویژگی از تناسب ارائه شده است:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow$

۱) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ویژگی تعویض جای وسطین

۲) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ویژگی معکوس تناسب

۳) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ ویژگی ترکیب (تفضیل) در صورت

۴) $\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$ ویژگی ترکیب (تفضیل) در مخرج

یک ویژگی بسیار مهم دیگر در تناسب به صورت زیر است:

اگر $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$ که در آن b_i ها همگی ناصفرند، آن‌گاه $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = k$

که در آن باید $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq ۰$ باشد.

به عنوان مثال اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.

واسطهٔ هندسی: در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$، b را واسطهٔ هندسی بین a و c نامند و داریم $b^۲ = ac$.

مثال اگر $\frac{x}{y} = \frac{۱}{۳}$، به کمک ویژگی‌های تناسب، مشخص کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست‌اند. نام ویژگی را ذکر کنید:

الف) $y = ۳x$

ب) $\frac{x+y}{y} = \frac{۴}{۳}$

پ) $\frac{y-x}{y} = \frac{۲}{۳}$

ت) $\frac{x+۱}{y+۳} = \frac{۱}{۳}$

ث) $\frac{x-۱}{y-۳} = \frac{۱}{۳}$

ج) $۳x = \frac{۱}{y}$

پاسخ

الف) درست است (ویژگی طرفین‌وسطین)

ب) درست است (ویژگی ترکیب در صورت)

پ) درست است (ویژگی تفضیل در صورت)

ت) درست است (ویژگی مهم)

ث) درست است (ویژگی مهم)

ج) نادرست است، زیرا از آن نتیجه می‌شود $۳xy = ۱$، نه $۳x = y$.

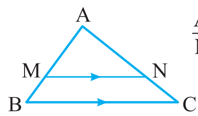
مثال واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۱۲ و ۳ سانتی‌متر، چه‌قدر است؟

پاسخ اگر واسطهٔ هندسی بین ۱۲ و ۳ را x بگیریم، آن‌گاه $x^۲ = ۱۲ \times ۳ = ۳۶$ و در نتیجه $x = \pm ۶$. توجه داشته باشیم که طول پاره‌خط نمی‌تواند منفی باشد، پس $x = ۶\ cm$.

قضیهٔ تالس و نتایج آن

قضیهٔ تالس: اگر خطی با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یکی از این دو ضلع پدید می‌آورد برابر است با نسبت پاره‌خط‌های نظیری که روی ضلع دیگر پدید می‌آورد.

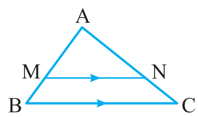
به بیان دیگر، اگر در شکل زیر، $MN \parallel BC$، آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$



نتایجی از قضیهٔ تالس

در قضیهٔ تالس، نسبت دو جزء را نظیر هم قرار دادیم، شاید لازم باشد نسبت جزء به کل یا کل به جزء را بین پاره‌خط‌ها بنویسیم. اگر در قضیهٔ تالس، ترکیب در صورت یا ترکیب در مخرج کنیم، این روابط به دست می‌آیند. در ادامه، این نتایج بیان شده‌اند:

اگر در مثلث ABC، MN موازی BC باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ تالس و ویژگی‌های تناسب، خواهیم داشت:



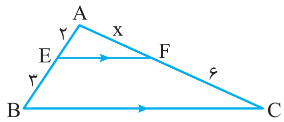
۱) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ۲) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}$

۳) $\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{NC}$ ۴) $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{NC}=\frac{AM}{AN}$

تعمیم قضیهٔ تالس

اگر در مثلث ABC، MN موازی BC باشد، آن‌گاه خواهیم داشت $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، این رابطه به رابطهٔ **جزء به کل** مشهور است.

مثال: **در شکل زیر، با فرض $EF \parallel BC$، مقدار x چه‌قدر است؟**



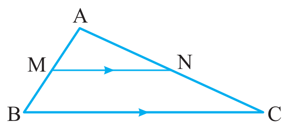
پاسخ: چون $EF \parallel BC$، با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{x}{۶} \Rightarrow x=۴$

عکس قضیهٔ تالس

اگر در مثلث ABC، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$، آن‌گاه نتیجه می‌شود پاره‌خط MN با ضلع BC موازی است.

به بیان دیگر $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$



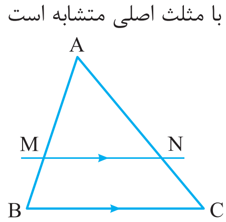
تشابه

تعریف دو چندضلعی متشابه: دو چندضلعی را متشابه نامند هرگاه زاویه‌های نظیر در آن دو چندضلعی، برابر و ضلع‌های نظیر، متناسب باشند، در حالتی خاص، دو مثلث نیز وقتی متشابه‌اند که زاویه‌های نظیر در آن دو مثلث، برابر و ضلع‌های نظیر، متناسب باشند.

قضیهٔ اساسی تشابه در مثلث

اگر خط راستی موازی یک ضلع مثلث رسم شود تا دو ضلع دیگر (یا امتداد آن دو ضلع) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است

پس در شکل مقابل $ABC \sim AMN$



حالت‌های سه‌گانهٔ تشابه دو مثلث

دو مثلث در سه حالت زیر با هم متشابه‌اند:

۱) اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. (زز)

۲) اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این دو زاویه در دو مثلث متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. (ض‌زض)

۳) هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. (ض‌ض‌ض)

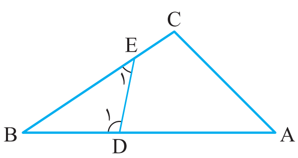
تعریف نسبت تشابه: در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع نظیر را نسبت تشابه می‌نامند و معمولاً با k نمایش می‌دهند.

چگونه نسبت‌های دو مثلث متشابه را بنویسیم؟ اگر دو مثلث متشابه باشند و بخواهیم نسبت تشابه آن‌ها را تشکیل دهیم، سه‌تا کسر مانند $\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$ بنا می‌کنیم و در صورت هر یک از این کسرها، سه ضلع یکی از مثلث‌ها را می‌نویسیم. در هر یک از کسرها، زاویهٔ مقابل به ضلعی را که در صورت کسر نوشته شده است مشخص کرده و زاویه‌ای از مثلث دوم که با این زاویه برابر است پیدا می‌کنیم و ضلعی را که روبه‌روی آن قرار دارد در مخرج آن کسر می‌نویسیم.

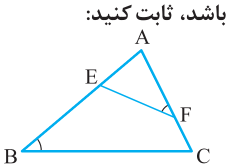
به عنوان مثال اگر در شکل زیر، $\angle C=\angle D_1$ باشد، آن‌گاه دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند، زیرا هر دو مثلث در زاویهٔ B مشترک هستند و $\angle C=\angle D_1$ است، پس این دو مثلث، دو زاویهٔ برابر دارند در نتیجه متشابه‌اند. روشن است که $\angle A=\angle E_1$. برای این‌که نسبت تشابه دو مثلث را تشکیل دهیم، ابتدا سه کسر رسم می‌کنیم و در صورت آن‌ها سه ضلع مثلث ABC را می‌نویسیم؛ یعنی $\frac{AB}{\ }=\frac{AC}{\ }=\frac{BC}{\ }$.

با توجه به شکل، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع AB از مثلث ABC، زاویهٔ C است و زاویهٔ مساوی با این زاویه در مثلث BDE، زاویهٔ D_1 است و ضلع روبه‌رو به این زاویه در مثلث BDE، ضلع BE است، پس در مخرج کسر اول باید BE قرار گیرد؛ یعنی $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{\ }=\frac{BC}{\ }$.

زاویهٔ مقابل به AC از مثلث ABC، زاویهٔ B است و زاویهٔ مساوی با این زاویه در مثلث BDE، همان زاویهٔ B است و ضلع روبه‌رو به این زاویه در مثلث BDE، ضلع DE است، پس در مخرج کسر دوم باید DE قرار گیرد؛ یعنی $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{\ }$. با همین روش، متوجه می‌شویم در مخرج کسر سوم باید BD قرار گیرد، پس $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{BD}$.



مثال: **در شکل زیر با فرض این‌که $\angle AFE=\angle ABC$ باشد، ثابت کنید:**



$$BC\times AE=EF\times AC$$

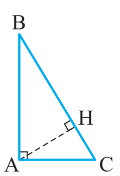
پاسخ: دو مثلث AFE و ABC متشابه‌اند، زیرا زاویهٔ A در هر دو مشترک و بنا به فرض $\angle AFE=\angle ABC$، پس داریم:

$\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow BC\times AE=EF\times AC$

ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه

۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر، برابر است با مجموع مربعات دو ضلع زاویهٔ قائمه.

۲) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی بین دو قطعه‌ای است که ارتفاع روی وتر جدا می‌کند. در شکل مقابل داریم:



$$AH^{۲}=BH\times CH$$

۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویهٔ قائمه، واسطهٔ هندسی بین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر است. در شکل فوق داریم: $AB^{۲}=BH\times BC\ ,\ AC^{۲}=CH\times BC$

۴) در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل‌ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه برابر با حاصل‌ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است. در شکل قبل داریم: $AH\times BC=AB\times AC$