

فصل دوم

مثلثات

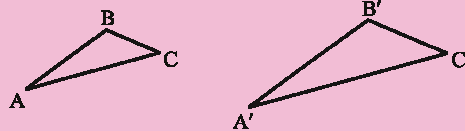
درس اول - نسبت‌های مثلثاتی

تشابه مثلث‌ها: اگر زاویه‌های نظیر دو مثلث با هم برابر باشند و اضلاع نظیر آن‌ها با هم متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه هستند. نسبت اضلاع نظیر در دو شکل متشابه را نسبت تشابه گویند. در شکل زیر، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

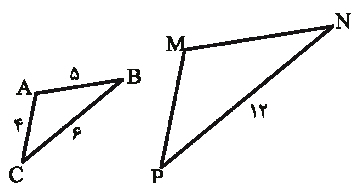
$$\hat{A} = \hat{A}' \quad , \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad , \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



▼ **مثال ۱)** طول اضلاع مثلث ABC ، 4 cm ، 5 cm و 6 cm بوده و مثلث MNP با آن متشابه است. اگر طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث MNP برابر 12 cm باشد، محیط و بقیه اضلاع مثلث MNP را بیابید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس صفحه‌ی ۳۰ - بایلسر-موسی‌پن‌مهر ۸۸)

📌 **پاسخ:** مثلث‌های متشابه ABC و MNP را مطابق شکل زیر فرض می‌کنیم و نسبت تشابه را برای اضلاع متناظر آن‌ها می‌نویسیم.



$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

$$\Rightarrow \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{MN}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{MP}{4} = \frac{MN}{5} \Rightarrow \begin{cases} MP = 8\text{ cm} \\ MN = 10\text{ cm} \end{cases}$$

$$\triangle MNP \text{ محیط} = NP + MP + MN = 12 + 8 + 10 = 30\text{ cm}$$



-۱۷ گزینیهی «۳»

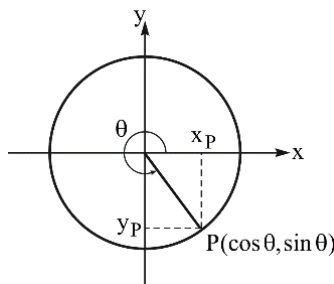
طبق روابط توانی و با استفاده از رابطه‌ی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم:

$$\lambda^{\sin^2 x} + \lambda^{\cos^2 x} = \lambda^{\sin^2 x} + \lambda^{1-\sin^2 x} = 3 \Rightarrow \lambda^{\sin^2 x} + \frac{\lambda}{\lambda^{\sin^2 x}} = 3 \Rightarrow (\lambda^{\sin^2 x})^2 + \lambda = 3 \cdot (\lambda^{\sin^2 x}) \xrightarrow{y = \lambda^{\sin^2 x}}$$

$$y^2 - 3 \cdot y + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} (y-3) = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \lambda^{\sin^2 x} = 3 \Rightarrow 3^{\sin^2 x} = 3 \\ (y-2\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{\lambda} \Rightarrow \lambda^{\sin^2 x} = 2\sqrt{\lambda} \Rightarrow 3^{\sin^2 x} = 3^{\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^{\sin^2 x} = 3 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \\ 3^{\sin^2 x} = 3 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

-۱۸ گزینیهی «۴»

مطابق دایره مثلثاتی زیر $x_P = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ است، داریم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

چون انتهای کمان θ در ربع چهارم است، پس $\sin \theta < 0$ است یعنی $\sin \theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

-۱۹ گزینیهی «۲»

با استفاده از رابطه‌ی $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ داریم:

$$1 + \cot^2 40^\circ = \frac{1}{\sin^2 40^\circ} \xrightarrow{\text{جایگزینی در رابطه‌ی A}} A = \tan 40^\circ (1 - (1 + \cot^2 40^\circ)) \Rightarrow A = \tan 40^\circ (-\cot^2 40^\circ)$$

$$\xrightarrow{\cot 40^\circ = \frac{1}{\tan 40^\circ}} A = \tan 40^\circ \times \left(\frac{-1}{\tan^2 40^\circ}\right) = -\frac{1}{\tan 40^\circ}$$

-۲۰ گزینیهی «۲»

با استفاده از رابطه‌ی $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ داریم:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$$

با جایگزینی در رابطه A داریم:

$$A = \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right) \sin^2 \theta = \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta\right) = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$$