۱. مفهوم شهودی حد

مؤلف درسنامه و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

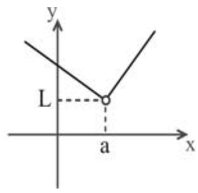
◆ حد و نمودار ◆

تعریف: فرض کنیم مجموعه‌ی D که زیر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، دامنه‌ی تابع f باشد. اگر مقدار $f(x)$ به عدد L میل کند، وقتی x (حداقل دریک بازه از D) به a میل کند، می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$. معنی آن این است که، فاصله‌ی $f(x)$ تا L از هر مقدار دل‌خواه کمتر شود.

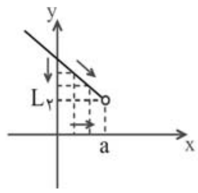
◆ حد چپ و راست تابع در یک نقطه ◆

۱) حد راست: اگر در تابع f، متغیر x (حداقل دریک بازه از دامنه‌ی f) با مقدارهای بزرگ‌تر از عدد a به a نزدیک شود، آنگاه $f(x)$ به عدد $L_۱$ نزدیک شود، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و مقدار آن $L_۱$ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_۱$ (شکل ۱).

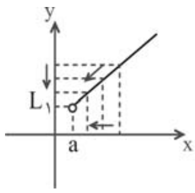
۲) حد چپ: اگر در تابع f، متغیر x (حداقل دریک بازه از دامنه‌ی f) با مقدارهای کوچک‌تر از عدد a به a نزدیک شود، آنگاه $f(x)$ به عدد $L_۲$ میل کند، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و مقدار آن $L_۲$ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_۲$ (شکل ۲).



شکل (۳)



شکل (۲)



شکل (۱)

توجه: طبق قرارداد کتاب درسی، وقتی از حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

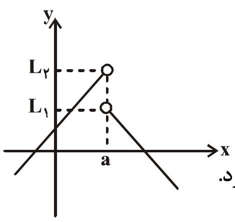
به عنوان تابع $f(x)=\sqrt{۴-x}$ در اطراف ۴ تعریف نشده است ولی در همسایگی چپ ۴ تعریف شده است، پس فقط $\lim_{x\to ۴^-}\sqrt{۴-x}$ معنی دارد.

قرارداد: اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim_{x\to a^+} f(x)$ خواهد بود. به طریق مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim_{x\to a^-} f(x)$ است.

به عنوان مثال $\lim_{x\to ۵^+}\sqrt{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\sqrt{x-۵}=۰$ و $\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{[x-۱]}=\frac{۱}{۰-۱}=-۱$ $=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{[x-۱]}$.

اگر حدهای چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن، همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است. (شکل ۳) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$

◆ حدودی که وجود ندارند ◆



با توجه به رفتار تابع، عموماً حد تابع در سه حالت زیر در نقطه‌ی a وجود ندارد

۱) حد چپ و راست در نقطه‌ی a، موجود ولی نابرابر باشند

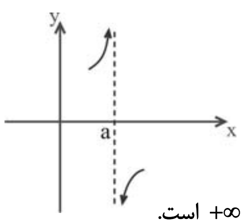
به عنوان مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ با رسم نمودار، $\lim_{x\to ۱^+}[x]=۱$ و $\lim_{x\to ۱^-}[x]=۰$، پس $\lim_{x\to ۱}[x]$ وجود ندارد.

همچنین در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\frac{|x|}{x}$ با رسم نمودار، $\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=۱$ و $\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=-۱$، پس $\lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

از طرفی در تابع علامت با ضابطه‌ی $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & , x>۰\\ ۰ & , x=۰\\ -۱ & , x<۰\end{cases}$ با رسم نمودار، $\lim_{x\to ۰^-}\operatorname{sgn}(x)=-۱$ و $\lim_{x\to ۰^+}\operatorname{sgn}(x)=۱$، پس $\lim_{x\to ۰}\operatorname{sgn}(x)$ وجود ندارد.

توجه: برای محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح، قدر مطلق و..... در یک نقطه، در صورت شناخت تابع می‌توانیم از رسم نمودار استفاده کنیم.

۲) حد تابع در نقطه‌ی a نامتناهی باشد.



اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی a رفتار بی‌کران داشته باشد، تابع در نقطه‌ی a حد ندارد.

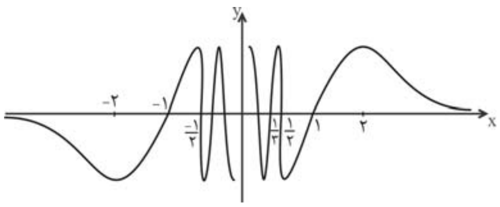
به عنوان مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$، از آن‌جایی که:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{x-۱}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{x-۱}=-\infty$$

پس این تابع در $x=۱$ حد ندارد. هم‌چنین تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در $x=۰$ حد ندارد ولی در این نقطه، دارای حد نامتناهی $+\infty$ است.

۳ تابع دارای نوسانات غیرمیرا در همسایگی نقطه‌ی a باشد

به عنوان مثال تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در همسایگی $x=0$ دارای نوسانات غیرمیراست، در این تابع، وقتی x از دو طرف به سمت صفر نزدیک می‌شود، موج سینوسی بین دو عدد $y=1$ و $y=-1$ متراکم می‌شود و تابع در $x=0$ حد ندارد.



توجه: توابع دیگری نیز وجود دارند که رفتار حدی نامعمولی دارند، یکی از این توابع که اغلب ذکر می‌شود تابع دیریکله نام دارد:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{، اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{، اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$$

این تابع در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱

۱۱۰- کدام بیان در مورد حد توابع درست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۲ با تغییر)

۱) اگر تابع f در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی a کران‌دار است.

۲) اگر تابعی کران‌دار در نقطه‌ی a حد چپ و راست داشته باشد، آنگاه در نقطه‌ی a حد دارد.

۳) اگر مجموع دو تابع کراندار در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه هر دو تابع در نقطه‌ی a حد دارد.

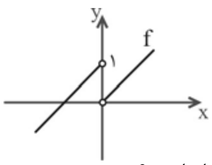
۴) اگر تابعی یکنوا در همسایگی محذوف a تغییر علامت دهد، آنگاه در نقطه‌ی a حد صفر دارد.

۱۱۱- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^3\sin\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ∞

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۱۱۲- شکل زیر نمودار تابع f است، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ برابر است با: (دیفرانسیل - صفحه‌ی ۵۷ - مشابه فعالیت)



۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۳
۴) وجود ندارد.

۱۱۳- مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\tan x.\cot x$، در آن‌ها حد ندارد، کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی-۸۷)

۱) ϕ ۲) $\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in Z\right\}$ ۳) $\{k\pi, k\in Z\}$ ۴) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$

۱۱۴- اگر $a\in R$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}([2x]+[-2x])$ برابر است با: (دیفرانسیل - صفحه‌ی ۶۸ - تمرین ۴)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۱۵- در تابع براکت $y=\left[\frac{1}{x}\right]$ وقتی $x\to\frac{-1}{10}$ حد چپ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی-۸۴)

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۱-

۱۱۶- حاصل $\lim\left[\frac{1}{\sin x}\right]$ وقتی $x\to\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟ (دیفرانسیل - صفحه‌ی ۶۸ - مشابه تمرین ۶)

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۱

۱۱۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x^2]$ در نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد، اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.) (دیفرانسیل - صفحه‌ی ۶۸ - مشابه تمرین ۴)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۱۸- حدهای $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3-x}$ به ترتیب.......... (دیفرانسیل - صفحه‌ی ۵۶)

۱) صفر - وجود ندارد ۲) وجود ندارد - صفر است ۳) صفر - صفر است ۴) وجود ندارد-وجود ندارد

۱۱۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{[x]}$ کدام است؟ (دیفرانسیل - صفحه‌ی ۶۸ - تمرین ۵)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۲. مفهوم ریاضی حد

◆ تعریف ریاضی حد ◆

تعریف ریاضی حد: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از R و $f:D\to R$ یک تابع باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست $a_n\neq a$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

■ مثال: به کمک تعریف ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$.

◄ حل: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+1$، برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq 2$ و همگرا به ۲، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}((a_n)^2+1)=2^2+1=5\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

◆ تعریف ریاضی حد چپ و راست ◆

۱) تعریف ریاضی حد راست: گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$، هرگاه به ازای هردنباله ازعضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n>a$ داشته باشیم، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

۲) تعریف ریاضی حد چپ: گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد چپ L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$، هرگاه به ازای هردنباله ازعضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n<a$ داشته باشیم، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

◆ اثبات عدم وجود حد با دنباله‌ها ◆

❖ *قضیه‌ی عکس: از قضیه‌ی فوق به صورت عکس نیز می‌توان استفاده کرد، اگر دو دنباله‌ی غیر ثابت $\{a_n\}$ و $\{a'_n\}$ همگرا به a باشند و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)\neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(a'_n)$، آنگاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.*

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۲

۱۲۰- اگر دنباله‌ی $a_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$ و تابع $f(x)=(x+1)[x]$ مفروض باشند آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی – ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۱- اگر $a_n=\dfrac{4n+1}{2n+1}$ و $f(x)=b+[2x]$ به ازای کدام مقدار b دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگراست؟ (سراسری ریاضی – ۸۵)

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) نشدنی

۱۲۲- اگر $a_n=\dfrac{n+1}{n}$ و $f(x)=\dfrac{2x+[-x]}{x^2-1}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی – ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) همگرا نیست.

۱۲۳- اگر $f(x)=\dfrac{[x]-3}{x-4}$ و $a_n=\dfrac{4n-3}{n+2}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۷)

۱) همگرا به ۱- ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

۱۲۴- در تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$، اگر دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به صفر باشد، انتخاب دنباله‌ی a_n با کدام جمله‌ی عمومی می‌تواند درست باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۳)

۱) $\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ ۲) $\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ ۳) $\dfrac{n^2+n}{n^2+1}$ ۴) $\dfrac{n+1}{2n}$

۱۲۵- اگر $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x)=\left|\left[\dfrac{x}{2}\right]\right|$ باشند، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۱۲۶- اگر $f(x)=[x]+\dfrac{|x|}{x}$ و $a_n=\sin(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟ (آزمون کانون ریاضی – ۹۱)

۱) همگرا به ۱ ۲) همگرا به ۱- ۳) همگرا به ۲- ۴) واگرا

۳. روش‌های محاسبه‌ی حد

◆ قضایای حد ◆

قضیه‌ی (۱): اگر دو تابع f و g روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲$، آن‌گاه:

$$(۱)\ \lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L_۱+L_۲ \qquad (۲)\ \lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=L_۱-L_۲$$

$$(۳)\ \lim_{x\to a}(f.g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=L_۱.L_۲ \qquad (۴)\ \lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}\ ,\ L_۲\neq ۰$$

توجه: اگر دامنه‌ی دو تابع برابر نباشد ممکن است قضایای بالا برقرار نباشند.

به عنوان مثال دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ در $x=۰$ دارای حد صفر هستند ولی با توجه به دامنه‌ها ($D_f=[۰,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,۰]$)، دامنه‌ی تابع $f+g$، مجموعه‌ی $\{۰\}$ خواهد بود و از حد در نقطه‌ی صفر برای آن نمی‌توان صحبت کرد.

۱ حد توابع چندجمله‌ای: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$.

۲ حد توابع گویا: اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه $Q(a)\neq ۰$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$.

۳ حد توابع گنگ: $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$ ، که در آن n عددی طبیعی است (اگر n زوج باشد، $c\geq ۰$).

۴ حد توابع مثلثاتی: برای محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$(۱)\ \lim_{x\to x_۰}\sin x=\sin x_۰ \qquad (۲)\ \lim_{x\to x_۰}\cos x=\cos x_۰ \qquad (۳)\ \lim_{x\to x_۰\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}}\tan x=\tan x_۰ \qquad (۴)\ \lim_{x\to x_۰\neq k\pi}\cot x=\cot x_۰$$

◆ روش‌های محاسبه‌ی بعضی از حدود ◆

الف ـ انتقال حد به نقطه‌ی صفر: برای محاسبه‌ی حد بعضی از توابع به ویژه توابع شامل جزء صحیح در یک نقطه، می‌توانیم از انتقال حد به نقطه‌ی صفر، استفاده کنیم:

$$\triangleright\ \lim_{x\to a}f(x)=L \xrightarrow[h\to ۰]{x-a=h} \lim_{h\to ۰}f(a+h)=L$$

بنابراین:

$$(۱)\ \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}f(a+\varepsilon) \qquad (۲)\ \lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}f(a-\varepsilon)$$

■ مثال: حد چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[-۵x+۰/۳]$ در نقطه‌ی $x=\frac{۲}{۳}$ را بیابید.

◀ حل: وقتی $x\to\frac{۲}{۳}^-$ به مفهوم $x=\frac{۲}{۳}-\varepsilon$ است که در آن $\varepsilon\to ۰^+$، پس خواهیم داشت:

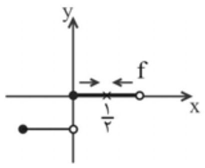
$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}^-}[-۵x+۰/۳]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[-۵(\frac{۲}{۳}-\varepsilon)+۰/۳\right]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[\frac{-۱۰}{۳}+۵\varepsilon+۰/۳\right]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[\frac{-۹۱}{۳۰}+۵\varepsilon\right]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[-۳\underbrace{-\frac{۱}{۳۰}+۵\varepsilon}_{<۰}\right]=-۴$$

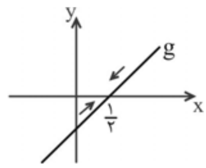
ب ـ یک روش غیر رسمی در محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح: برای محاسبه‌ی سریع‌تر حد توابع شامل جزء صحیح در یک نقطه می‌توانیم از نقاط به اندازه‌ی کافی نزدیک به نقطه استفاده کنیم، به عنوان مثال در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]$، می‌توانیم از عدد $۰/۹۹$ استفاده کنیم، اما برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x+۰/۰۰۱]$ اگر از عدد $۰/۹۹$ استفاده کنیم جواب غلط صفر را به‌دست می‌آوریم در حالیکه حاصل این حد ۱ است. یک روش غیر رسمی ولی مرسوم، در محاسبه‌ی حد راست (حد چپ) تابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ی a، قرار می‌دهیم $(a^-)a^+$. به مثال زیر توجه کنید:

$$(۱)\ \lim_{x\to ۱^-}[۳x]=[۳(۱^-)]=[۳^-]=۲ \qquad (۲)\ \lim_{x\to ۱^+}[۳x]=[۳(۱^+)]=[۳^+]=۳$$

توجه: جاگذاری نمادهای $(a^-)a^+$ به جای $(x\to a^-)x\to a^+$ علمی نیست ولی برای درک بهتر قابل توجیه‌اند.

پ ـ صورت‌های شبیه مبهم: به‌طور غیر رسمی وقتی یک تابع مانند f، در یک بازه‌ی باز، شامل عدد a (به‌جز احتمالاً خود a) تابع ثابت صفر گردد، آنگاه مقدار تابع *«صفر مطلق»* خواهد بود.





به‌عنوان مثال در تابع $f(x)=[x]$، مقدار تابع در بازه‌ی $(۰\ ,\ ۱]$، صفر می‌شود و بر روی محور xها قرار می‌گیرد. اما در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x-\frac{۱}{۲}$، تابع در هر بازه‌ی شامل عدد $\frac{۱}{۲}$، با مقادیری کم‌تر یا بیش‌تر از صفر ، به صفر نزدیک می‌شود و به‌طور غیر رسمی آن را *«صفر حدی»* می‌نامیم.

با معرفی «صفر مطلق» و «صفر حدی» می‌توانیم در مورد وجود نداشتن حد بعضی توابع کسری، بدون محاسبه‌ی دامنه نظر دهیم.

☑ نکته‌ی (۱): در محاسبه‌ی حد توابع کسری وقتی در مخرج کسر صفر مطلق ظاهر شود، حد معنا ندارد و نمی‌توان از حد تابع در آن نقطه صحبت کرد.

$\dfrac{\text{عدد یا صفر مطلق یا صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} =$ معنا ندارد.

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x-3}{[x]}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{[x]}$، معنا ندارند.

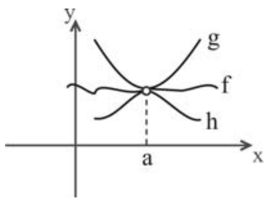
☑ نکته‌ی (۲): درحد توابع کسری $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$ و $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد}} = 0$، به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[x]}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[x]}{x+2} = 0$.

◆ قضیه‌ی فشردگی ◆

این قضیه راجع به رفتار حدی تابعی است که بین دو تابع دیگر، که هر دو در یک نقطه داده شده حد مساوی دارند، برقراراست.

قضیه *هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (جز احتمالاً در خود a)* $h(x) \le f(x) \le g(x)$ *و نیز* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ *آن‌گاه:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



■ مثال: نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

◂ حل: از آنجایی‌که $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$، برای مقدارهای مثبت x داریم $-x \le x\sin\dfrac{1}{x} \le x$ و برای مقدارهای منفی x، $x \le x\sin\dfrac{1}{x} \le -x$، حد توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در $x=0$ برابر صفر است، پس $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ است.

☑ نکته: با توجه به قضیه‌ی فشردگی می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$.

قضیه‌ی کران‌داری: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *و تابع g در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد، آن‌گاه* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$ *است.*

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\dfrac{1}{x} = 0$، زیرا $\sin\dfrac{1}{x}$ در همسایگی محذوف صفر کران‌دار است و $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ پس $\lim\limits_{x\to 0} \sin x . \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۳

۱۲۷- اگر $f(x) = \begin{cases} ax-1 & x<1 \\ x^2+2a & x\ge 1 \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$، مقدار a کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۶)**

۱) ۴-　۲) ۳-　۳) ۲-　۴) ۱-

۱۲۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x\ge -1 \\ 2x+1 & x<-1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟ **(سراسری تجربی - ۸۰)**

۱) $\{0\}$　۲) $\{2\}$　۳) ϕ　۴) R

۱۲۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x>0 \\ -\sqrt{1+x} & x\le 0 \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۹)**

۱) ۱-　۲) ۱　۳) صفر　۴) موجود نیست.

تیپ ۴

۱۳۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ **(سراسری تجربی - ۸۷)**

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۱-　۴) صفر

۱۳۱- حاصل‌ضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + \operatorname{sgn} x$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)**

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۱-　۴) ۲-

۱۳۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} (x+1)\left[\dfrac{1}{x+1}\right]$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است) **(سراسری ریاضی- ۸۱)**

۱) ۱-　۲) صفر　۳) $\frac{1}{2}$　۴) ۱

۱۳۳– حد عبارت $x\left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام حالت متناهی نیست؟ **(سراسری ریاضی – ۹۳)**

۱) $x\to ۰^-$ ۲) $x\to ۰^+$ ۳) $x\to -\infty$ ۴) $x\to +\infty$

۱۳۴– حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۳)**

۱) ۱- ۲) حد ندارد. ۳) صفر ۴) ۱

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۱۳۵– اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد، آن‌گاه: **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۸۵ – تمرین ۲)**

۱) باید هر دو تابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.
۲) تفاضل دو تابع f و g در $x=a$ حد دارد.
۳) ممکن است هر دو تابع در $x=a$ حد نداشته باشند.
۴) حاصل‌ضرب آنها در $x=a$ حد دارد.

۱۳۶– در تابع جزء صحیح $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۳}\right]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x\to ۶$ کدام است؟ **(آزاد غیرپزشکی – ۸۲)**

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۳۷– مجموع حد چپ و راست تابع $y=(x^۲+۱)[x^۲-۲]$ در $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟ **(آزاد پزشکی – ۸۲)**

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

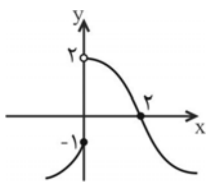
۱۳۸– تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x^۲+ax+b)[x]$ در تمام نقاط بازه‌ی $(۱,۴)$ حد دارد. زوج مرتب (a,b) کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی – ۹۱)**

۱) $(-۴,۳)$ ۲) $(۴,۳)$ ۳) $(۵,۶)$ ۴) $(-۵,۶)$

۱۳۹– اگر $a\in R$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]$ برابر است با: **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۸۶ – تمرین ۱۱)**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۱۴۰– نمودار تابع f مطابق شکل زیر است حد راست تابع fof در نقطه به طول ۲ چه قدر است؟ **(دیفرانسیل – صفحه‌های ۷۲ تا ۸۶)**



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲

۱۴۱– اگر $f(x)=x\left[\frac{۱}{x}\right]$ و $g(x)=[x]$ آنگاه برای تابع $(gof)(x)$ در $x=۰$ کدام درست است؟ **(دیفرانسیل – نتیجه‌ی گیری مثال – صفحه‌ی ۸۱)**

۱) حد چپ و راست موجود و برابر
۲) حد چپ و راست وجود ندارد
۳) حد چپ و راست موجود ولی نابرابر
۴) فقط معین است.

۱۴۲– اگر $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲+ax+b)\left[\frac{۱}{x-۲}\right]=۳$ آنگاه زوج مرتب $(a\,,\,b)$ کدام است؟ **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۸۱)**

۱) $(۱\,,\,۲)$ ۲) $(۲\,,\,۱)$ ۳) $(-۲\,,\,-۱)$ ۴) $(-۱\,,\,-۲)$

۱۴۳– اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ آنگاه برای تابع fog در $x=۰$ کدام گزینه درست است؟ **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۶۸ – تمرین ۶)**

۱) حد چپ و راست موجود نابرابرند.
۲) حد چپ و راست موجود و برابرند.
۳) حد چپ وجود دارد ولی حد راست وجود ندارد.
۴) حد راست وجود دارد ولی حد چپ وجود ندارد.

۱۴۴– تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-۲ & , \quad x\le -۳\\ -۲x & , \quad x>-۳\end{cases}$ مفروض است، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+}f(-x)$ کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی – ۸۸)**

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱-

۱۴۵– فرض کنید $f(x)=\text{sgn}(x^۲-۳x+۴)$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x-۲)$ $(a\in R)$ کدام است؟ **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۸۱)**

۱) صفر ۲) ۱- ۳) وجود ندارد ۴) ۱

۱۴۶– اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^۲-ax)\sin\frac{۱}{x-۱}$ در $x=۱$ حد داشته باشد، a کدام است؟ **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۷۷)**

۱) وجود ندارد. ۲) هر مقدار دلخواه ۳) صفر ۴) ۱

۱۴۷– تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x+a & , \quad x \ \text{گویا}\\ ۳x+۱ & , \quad x \ \text{گنگ}\end{cases}$ در $x=\frac{۱}{۲}$ حد دارد، a کدام است؟ **(دیفرانسیل – صفحه‌ی ۸۷ – تمرین ۱۷)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ فصل دوم

پاسخ تشریحی: فرهاد حامی

راهبرد حل تیپ (۱)

وقتی از حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع در همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

تذکر: حد راست تابع در $x=a$ زمانی قابل محاسبه است که تابع در بازه‌ی $(a\ ,\ x)$ تعریف شده باشد و حد چپ تابع در $x=a$ زمانی قابل محاسبه است که تابع در بازه‌ی $(x\ ,\ a)$ تعریف شده باشد.

۱۱۰- گزینه‌ی «۱»

اگر تابعی در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه حداقل در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی a کران‌دار است.

۱۱۱- گزینه‌ی «۴»

ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{۲\sin^۲ x}{x^۳\sin\frac{۱}{۲x}}$ را می‌یابیم:

$$D_f=R-\left\{x : x^۳\sin\frac{۱}{۲x}=۰\right\}$$

پس باید معادله‌ی $x^۳\sin\frac{۱}{۲x}=۰$ را حل کنیم:

$$x^۳\sin\frac{۱}{۲x}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ ق ق}\\ \sin\frac{۱}{۲x}=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲x}=k\pi\end{cases}$$

پس $x=\frac{۱}{۲k\pi}$، لذا: $D_f=R-\left\{x : x=\frac{۱}{۲k\pi}\ ,\ k\in Z\right\}$

یعنی تابع در نقاط

$$\frac{-۱}{۲\pi}\ ,\ \frac{-۱}{۴\pi}\ ,\ \frac{-۱}{۶\pi}\ ,\ \dots\ ,\ ۰\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{۶\pi}\ ,\ \frac{۱}{۴\pi}\ ,\ \frac{۱}{۲\pi}$$

تعریف نمی‌شود، بنابراین می‌بینیم که هرچه به سمت صفر نزدیک می‌شویم، تابع در بی‌شمار نقطه تعریف نمی‌شود. پس هیچ همسایگی محذوف عدد صفر یافت نمی‌شود، که این شرط لازم موجود بودن حد تابع در $x=۰$ است.

$$\lim_{x\to۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x^۳\sin\frac{۱}{۲x}}\quad \text{معنی ندارد}$$

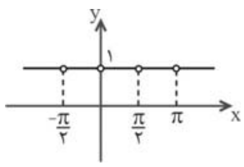
۱۱۲- گزینه‌ی «۱»

از آنجایی که تابع f در همسایگی صفر همواره مثبت است، پس:

$$\lim_{x\to۰}\frac{|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)}{f(x)}=۱$$

۱۱۳- گزینه‌ی «۱»

از آنجایی که $x\neq\frac{k\pi}{۲}$، $\tan x.\cot x=۱$، پس نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



$y=۱\ ,\ x\neq\frac{k\pi}{۲}$

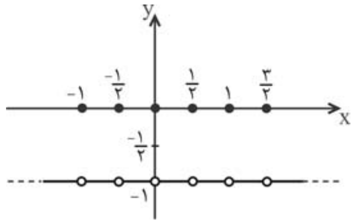
این تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی حد دارد و حد آن ۱ است.

۱۱۴- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم:

$$y=[۲x]+[-۲x]=\begin{cases}۰\ ,\ x=\frac{k}{۲}\\ -۱\ ,\ x\neq\frac{k}{۲}\end{cases}\qquad(k\in Z)$$

بنابراین با رسم نمودار تابع، دیده می‌شود که در هر نقطه‌ی دلخواهی حد تابع ۱- است. توجه کنید که حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد.

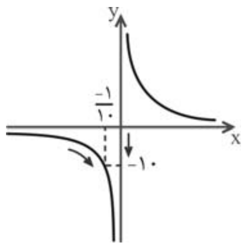


پس: $\lim_{x\to a}([۲x]+[-۲x])=-۱$

۱۱۵- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: از روش ترسیم استفاده می‌کنیم:

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ در زیر رسم شده است، در نقطه‌ی $x=\frac{-۱}{۱۰}$ وقتی x از سمت چپ به $\frac{-۱}{۱۰}$ میل می‌کند، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-۱۰) به (-۱۰) نزدیک می‌شود، لذا:



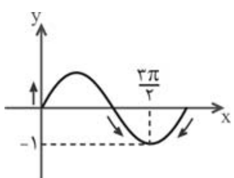
$$\lim_{x\to\left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-}\left[\frac{۱}{x}\right]=[(-۱۰)^+]=-۱۰$$

راه حل دوم: وقتی $x\to\left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-$، یعنی $x<\frac{-۱}{۱۰}$ پس $\frac{۱}{x}>-۱۰$، لذا:

$$\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱۰$$

۱۱۶- گزینه‌ی «۲»

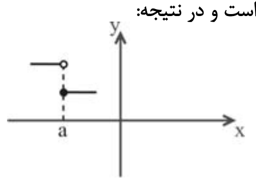
با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=\frac{۳\pi}{۲}$، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-۱) به (-۱) نزدیک می‌شود، لذا:



$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\left[\frac{۱}{\sin x}\right]=\left[\frac{۱}{(-۱)^+}\right]=[-۱/\dots]=-۲$$

۱۱۷- گزینه‌ی «۴»

راه حل اول: با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[f(x)]$، اگر تابع در نقطه‌ی a حد نداشته باشد، آنگاه قدر مطلق اختلاف حد چپ و راست در این نقطه ۱ است، از آنجایی که تابع $y=x^۲$ به ازای x های منفی، نزولی است پس حد چپ از حد راست بزرگتر است و در نتیجه:



$$\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)=-۱$$

راه حل دوم: اگر a عددی منفی باشد، به‌طوری که $a^۲\in N$، در این صورت تابع $f(x)=[x^۲]$ در $x=a$ حد ندارد (چرا؟) و داریم:

$$x\to a^+\Rightarrow x^۲\to (a^۲)^-$$
$$x\to a^-\Rightarrow x^۲\to (a^۲)^+$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)=[(a^۲)^-]-[(a^۲)^+]$$
$$=(a^۲-۱)-a^۲=-۱$$

۱۱۸- گزینه‌ی «۳»

در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x-۱}$، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_f=[۱,+\infty)$ است، پس حد راست در $x=۱$ وجود دارد:

$$\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}=\sqrt{۱-۱}=۰$$

در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\sqrt{۳-x}$، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_g=(-\infty,۳]$ است، پس حد چپ در $x=۳$ وجود دارد و از حد راست در $x=۳$ نمی‌توان صحبت کرد، لذا:

$$\lim_{x\to ۳}\sqrt{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۳-x}=۰$$

۱۱۹- گزینه‌ی «۳»

ابتدا دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{[x]}$ را می‌یابیم:

$$[x]=۰\Rightarrow ۰\le x<۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$$

با توجه به دامنه‌ی تابع فقط همسایگی چپ $x=۰$ وجود دارد، لذا:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{[x]}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{[x]}=\frac{۰}{-۱}=۰$$

راهبرد حل تیپ (۲)

برای اثبات عدم وجود حد به وسیله دنباله، درتوابعی که حد چپ و راست نابرابر دارند،باید دو دنباله را به گونه ای انتخاب کنیم که یکی همواره با مقادیر کمتر از نقطه به آن میل کند (دنباله صعودی اکید باشد) و دیگری همواره با مقادیر بیشتر از نقطه به آن میل کند (دنباله نزولی اکید باشد).

در دنباله ی $\{a_n\}$ که همگرا به L است، برای تشخیص این که با مقادیر بیشتر به L میل می‌کند یا کمتر، کافی است علامت عبارت a_n-L را در بی‌نهایت تعیین کنیم:

(a_n-L) → >۰ (یعنی با مقادیر بیش‌تر از L نزدیک می‌شود)
(a_n-L) → <۰ (یعنی با مقادیر کم‌تر از L نزدیک می‌شود)

۱۲۰- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲n+۱}{n+۲}=۲$$

برای این‌که ببینیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا بیشتر، کافیست $a_n-۲$ را تشکیل دهیم:

$$(a_n-۲)=\left(\frac{۲n+۱}{n+۲}-۲\right)=\frac{-۳}{n+۲}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\frac{-۳}{n+۲}$ مقداری منفی است پس $a_n-۲<۰$ و درنتیجه $a_n<۲$، بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ میل می‌کند.

پس:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{a_n\to ۲^-} f(a_n)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+۱)[x]=(۲+۱)[۲^-]=۳$$

۱۲۱- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴n+۱}{۲n+۱}=۲$$

برای این‌که ببینیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا بیشتر، کافیست $a_n-۲$ را تشکیل دهیم:

$$(a_n-۲)=\left(\frac{۴n+۱}{۲n+۱}-۲\right)=\frac{-۱}{۲n+۱}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\frac{-۱}{۲n+۱}$ مقداری منفی است پس $a_n-۲<۰$ و درنتیجه $a_n<۲$، بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود.

پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{a_n\to ۲^-} f(a_n)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(b+[۲x])=b+[۲(۲^-)]$$
$$=b+[۴^-]=b+۳=۱\Rightarrow b=-۲$$

۱۲۲- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n}=۱$$

از آن‌جایی‌که $a_n=۱+\frac{۱}{n}$، پس a_n با مقادیر بیش‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، لذا:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{a_n\to ۱^+} f(a_n)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x+[-x]}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x+[-(۱^+)]}{x^۲-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{x+۱}=۱$$

۱۲۳- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n-۳}{n+۲}=۴$$

باید ببینیم که a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود یا بیشتر، بنابراین کافی است علامت $(a_n-۴)$ را بیابیم:

$$(a_n-۴)=\left(\frac{۴n-۳}{n+۲}-۴\right)=\frac{-۱۱}{n+۲}$$

بنابراین a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود. اما:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{a_n\to 4^-} f(a_n)=\lim_{x\to 4^-} f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{[x]-3}{x-4}=\frac{3-3}{4^- -4}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

پس دنباله‌ی $f(a_n)$ همگرا به صفر است.

۱۲۴- گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$1-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$$

از آنجایی که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=0$، پس باید دنباله‌ای را در نظر بگیریم که با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگرا باشد یا با مقادیر بیشتر از (۱−) به (۱−) همگرا باشد، با توجه به گزینه‌ها سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳)، همگرا به (۱) و گزینه‌ی (۴) همگرا به $\frac{1}{2}$ است، پس سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳) را باید بررسی کنیم.

در گزینه‌ی (۱):

$$a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}=1-\frac{2}{n^2+1}$$

این دنباله با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگرا می‌شود و جواب است.

۱۲۵- گزینه‌ی «۴»

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}, & n\ \text{زوج}\\[2mm] \dfrac{-1}{2n}, & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left|\left[\frac{a_n}{2}\right]\right|$$

$$\text{زوج}\ n:\ \lim_{n\to\infty}\left|\left[\frac{\frac{1}{2n}}{2}\right]\right|=\left|[0^+]\right|=0$$

$$\text{فرد}\ n:\ \lim_{n\to\infty}\left|\left[\frac{\frac{-1}{2n}}{2}\right]\right|=\left|[0^-]\right|=|-1|=1$$

بنابراین دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

۱۲۶- گزینه‌ی «۳»

اگر $x>0$ باشد، آنگاه $x>\sin x$ است. بنابراین با توجه به این‌که $\frac{1}{n}>0$ است داریم: $\frac{1}{n}>\sin\frac{1}{n}\Rightarrow \sin(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}<0\Rightarrow a_n<0$

با توجه به این که دنباله‌ی a_n همگرا به صفر است و از مقادیر کم‌تر به عدد صفر نزدیک می‌شود. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left([x]+\frac{|x|}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left([x]+\frac{-x}{x}\right)=-1-1=-2$$

راهبرد حل تیپ (۳)

به بخش «محاسبه‌ی حد توابع و قضایای حد» در درس توجه کنید.

توجه: تابع‌های دو ضابطه‌ای به شکل $f(x)=\begin{cases}h(x), & x>a\\ g(x), & x<a\end{cases}$ زمانی در $x=a$ حد دارند که در a حد چپ و راست آن‌ها موجود و برابر باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to a^+}h(x)=\lim\limits_{x\to a^-}g(x)$.

۱۲۷- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+2a)=1+2a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-1)=a-1$$

پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$$

$$(1+2a)-(a-1)=-1\Rightarrow a=-3$$

۱۲۸- گزینه‌ی «۳»

برای آن‌که تابع f در نقطه‌ی $x=-1$ حد داشته باشد باید:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$$

پس:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(x+a)^2=(a-1)^2$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x+1)=-1$$

لذا باید:

$$(a-1)^2=-1$$

از آن‌جایی‌که معادله‌ی بالا جواب حقیقی برای a ندارد، پس مجموعه مقادیر a، تهی است.

۱۲۹- گزینه‌ی «۲»

اگر $0<x<-1$ باشد، $x^3>x$ است، بنابراین با فرض $x^3-x=t$، وقتی $x\to 0^-$، $t\to 0^+$ لذا:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^3-x)=\lim_{t\to 0^+} f(t)$$

بنابراین برای محاسبه‌ی حد باید از ضابطه‌ی بالا استفاده کنیم:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-x}=1$$

راهبرد حل تیپ (۴)

الف- در محاسبات حد توابع شامل جزء صحیح به نکات زیر توجه کنید:

(۱) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}[\varepsilon]=0$ و $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}[-\varepsilon]=-1$

(۲) $[0^+]=0$ و $[0^-]=-1$ (تعریف غیر رسمی)

(۳) $[(0^-)^n]=[0^-]=-1$ (n عددی فرد و مثبت)

(۴) $[n(0^-)]=[0^-]=-1$ (n عددی مثبت)

ب- در محاسبه‌ی حد توابع جزء صحیح دقت کنید که:

$\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$ و $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد غیر صفر}}=0$

۱۳۰- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^+]=۲(۲+a)$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^-]=a+۲$$

اما:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)-\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳$$

$$\Rightarrow ۲(۲+a)-(۲+a)=۳ \Rightarrow a+۲=۳ \Rightarrow a=۱$$

۱۳۱- گزینه‌ی «۴»

به‌طور غیر رسمی وقتی $x\to ۰^+$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم ۰^+، به طریق مشابه وقتی $x\to ۰^-$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم ۰^-.

حد راست : $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[۰^+]+\operatorname{sgn}(۰^+)=۰+۱=۱$$

حد چپ : $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[۰^-]+\operatorname{sgn}(۰^-)=-۱-۱=-۲$$

حاصلضرب حد چپ و راست $=(۱)(-۲)=-۲$

۱۳۲- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۱^-}(x+۱)\left[\frac{۱}{x+۱}\right]=۲\times\left[\frac{۱}{۲}\right]=۲\times ۰=۰$$

۱۳۳- گزینه‌ی «۳»

بررسی گزینه‌ی (۱):

$$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]<\frac{۱}{x}\xrightarrow[\text{(منفی است } x)]{\times x}۱<x\left[\frac{۱}{x}\right]<۱-x$$

$$\lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

طبق قضیه‌ی فشردگی حد چپ در صفر موجود است.

بررسی گزینه‌ی (۲):

$$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]<\frac{۱}{x}\xrightarrow[\text{(مثبت است } x)]{\times x}۱-x<x\left[\frac{۱}{x}\right]<۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

طبق قضیه‌ی فشردگی حد راست در صفر موجود است.

بررسی گزینه‌ی (۳):

$$\lim_{x\to -\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right]=-\infty\times(-۱)=+\infty$$

بررسی گزینه‌ی (۴):

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\frac{۱}{x}\right]}{\frac{۱}{x}}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

۱۳۴- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم $\lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$، پس حد چپ و راست آن در $x=۰$ نیز برابر ۱ است، در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰^+}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to ۰^-}(-x)\left[\frac{۱}{x}\right]=-\lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱$$

بنابراین تابع در $x=۰$ حد ندارد.

۱۳۵- گزینه‌ی «۳»

دو تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & , x>۰\\ ۱ & , x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & , x>۰\\ -۱ & , x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد ندارند ولی مجموع آنها در $x=۰$ حد دارد، بنابراین گزینه‌ی ۱ حذف می‌شود، از طرفی:

$$(f-g)(x)=\begin{cases}-۱-۱ & , x>۰\\ ۱-(-۱) & , x<۰\end{cases}=\begin{cases}-۲ & , x>۰\\ ۲ & , x<۰\end{cases}$$

تابع تفاضل در صفر حد ندارد و گزینه‌ی ۲ نیز حذف می‌شود.

از طرفی اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & , x>۰\\ ۵ & , x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & , x>۰\\ -۳ & , x<۰\end{cases}$، آن‌گاه $f+g$ در $x=۰$ حد دارد ولی:

$$f.g(x)=\begin{cases}-۳ & , x>۰\\ -۱۵ & , x<۰\end{cases}$$

که در $x=۰$ حد ندارد و گزینه‌ی (۴) نیز حذف می‌شود، بنابراین گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۳۶- گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to ۶^+}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۳}\right]\right)=\left(\left[\frac{۶^+}{۲}\right]+\left[\frac{۶^+}{۳}\right]\right)$$

$$=[۳^+]+[۲^+]=۳+۲=۵$$

$$\lim_{x\to ۶^-}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۳}\right]\right)=\left(\left[\frac{۶^-}{۲}\right]+\left[\frac{۶^-}{۳}\right]\right)$$

$$=[۳^-]+[۲^-]=۲+۱=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۶^+} f(x)+\lim_{x\to ۶^-} f(x)=۵+۳=۸$$

۱۳۷- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}^+}(x^۲+۱)[x^۲-۲]=(۲+۱)[۲^+-۲]=۳[۰^+]=۳\times ۰=۰$$

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}^-}(x^۲+۱)[x^۲-۲]=(۲+۱)[۲^--۲]$$

$$=۳[۰^-]=۳\times(-۱)=-۳$$

پس مجموع حد چپ و راست ۳- است.

۱۳۸- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم تابع $y=[x]$ در نقاط به طول‌های صحیح حد ندارد. بنابراین برای آن‌که تابع $f(x)=(x^۲+ax+b)[x]$، در بازه‌ی باز $(۱,۴)$ حد داشته باشد باید در هر نقطه‌ی صحیح در این بازه، یعنی ۲ و ۳ حد داشته باشد، این موضوع زمانی ممکن است که $x=۲$ و $x=۳$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ باشند.

$$\Rightarrow f(x)=(x-2)(x-3)[x]=(x^2-5x+6)[x]$$

در نتیجه $a=-5$ و $b=6$، بنابراین:

$$(a,b)=(-5,6)$$

۱۳۹- گزینه‌ی «۳»

$$\left[\frac{4x^2+3}{x^2+1}\right]=\left[\frac{4(x^2+1)-1}{x^2+1}\right]=\left[4-\frac{1}{x^2+1}\right]=4+\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]$$

در هر نقطه‌ی $a\in R$، $x^2+1\ge 1$ و $\frac{1}{x^2+1}\le 1$ و در نتیجه $-1\le\frac{-1}{x^2+1}<0$ است پس $\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]=-1$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{4x^2+3}{x^2+1}\right]=4-1=3$$

بنابراین تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی دارای حد ۳ است.

۱۴۰- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to2^+}(fof)(x)=\lim_{x\to2^+}f(f(x))$$

وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، لذا:

$$x\to2^+\Rightarrow f(x)\to0^-$$

با جاگذاری در رابطه داریم:

$$\lim_{x\to2^+}f(f(x))=\lim_{f(x)\to0^-}f(f(x))$$

با انتخاب $f(x)=t$ داریم:

$$=\lim_{t\to0^-}f(t)=\lim_{x\to0^-}f(x)=-1$$

۱۴۱- گزینه‌ی «۳»

با توجه به اثبات تست قبل، وقتی $x\to0^+$، آنگاه $f(x)\to1^-$، پس:

$$\lim_{x\to0^+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to1^-}g(f(x))=\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}[x]=0$$

به طریق مشابه:

$$\lim_{x\to0^-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to1^+}g(f(x))=\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}[x]=1$$

پس حد چپ و راست در $x=0$ موجود و نابرابرند.

۱۴۲- گزینه‌ی «۴»

از آن‌جایی‌که حد تابع عدد حقیقی شده است و مخرج به ازای $x=2$، صفر می‌شود، در صورتی‌که عبارت درجه‌ی دوم x^2+ax+b به ازای $x=2$، غیرصفر باشد، حد تابع بی‌نهایت خواهد شد. پس عبارت درجه‌ی دوم باید شامل یک عامل $(x-2)$ باشد. بنابراین عبارت به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to2}(x+k)(x-2)\left[\frac{1}{x-2}\right]=3$$

اما $\lim_{x\to2}(x-2)\left[\frac{1}{x-2}\right]=1$، پس:

$$\lim_{x\to2}(x+k)=3\Rightarrow2+k=3\Rightarrow k=1$$

لذا عبارت درجه دوم به صورت زیر است:

$$(x-2)(x+1)=x^2-x-2$$

لذا $b=-2$ و $a=-1$ بنابراین: $(a,b)=(-1,-2)$

۱۴۳- گزینه‌ی «۲»

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

باید $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ را بررسی کنیم، از آنجایی که برای هر $0<|x|<\frac{\pi}{2}$، $\sin x<x$ (به دایره‌ی مثلثاتی توجه کنید)، لذا $0<\frac{\sin x}{x}<1$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=0$$

بنابراین حد چپ و راست در $x=0$ موجود و برابرند.

۱۴۴- گزینه‌ی «۴»

با انتخاب $t=-x$ وقتی $x\to3^+$، آنگاه $t\to(-3)^-$ زیرا:

$$x>3\to-x<-3$$

لذا:

$$\lim_{x\to3^+}f(-x)=\lim_{t\to(-3)^-}f(t)$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to3^+}f(-x)=\lim_{x\to(-3)^-}f(x)=\lim_{x\to(-3)^-}(3x-2)=3(-3)-2=-11$$

۱۴۵- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم:

$$sgn(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$$

اما عبارت درجه‌ی دوم x^2-3x+4 همواره مثبت است زیرا در آن، ضریب x^2 مثبت و $\Delta=9-16<0$، پس:

$$sgn(\underbrace{x^2-3x+4}_{>0})=1$$

پس تابع f تابع ثابت $f(x)=1$ است و در هر نقطه‌ی دلخواهی دارای حد ۱ است، توجه کنید که انتقال افقی بر روی حد آن اثری ندارد.

۱۴۶- گزینه‌ی «۴»

از آنجایی که $\sin\frac{1}{x-1}$ در $x=1$ حد ندارد ولی کراندار است، لذا برای آنکه تابع f در $x=1$ حد داشته باشد، باید عامل x^2-ax به ازای $x=1$ صفر شود، لذا:

$$x^2-ax\overset{x=1}{=\!=}0\Rightarrow1-a=0\Rightarrow a=1$$

۱۴۷- گزینه‌ی «۲»

باید در $\frac{1}{2}$ ضابطه‌ی بالا و پایین برابر باشند:

$$x+a=3x+1\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+a=\frac{3}{2}+1\Rightarrow a=2$$