تابع مبحثیه که دانش‌آموزانِ تمام رشته‌ها باید یاد بگیرن. حتی وقتی وارد دانشگاه هم شدید باز هم تابع دست از سرتون برنمی‌داره.

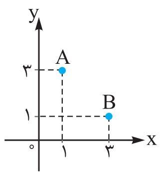
پس این فصل رو خیلی‌خیلی خوب و با دقت زیاد بخونین. پس از تابع با توابع خطی و توابع درجه۲ (سهمی‌ها) آشنا خواهید شد. در انتهای این فصل هم مسائل بهینه‌سازی رو می‌خونید. بهینه‌سازی یعنی حداکثر کردن مقدار یک عبارتِ جبری.

مفهوم زوج مرتب و رابطه

زوج مرتب

اگر دو عدد a و b با ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند زوج مرتب‌های (a,b) و (b,a) ایجاد می‌شوند. هر زوج مرتب در صفحه‌ی مختصات، نمایشگر یک نقطه‌ی منحصربه‌فرد است.

در زوج مرتب (a,b) عدد a طول و عدد b عرض نقطه است. *(به a عضو اول یا مؤلفه‌ی اول و به b عضو دوم یا مؤلفه‌ی دوم هم می‌گیم.)* در شکل مقابل دو نقطه‌ی $A(۱,۳)$ و $B(۳,۱)$ نمایش داده شده‌اند. واضح است که A و B بر هم منطبق نیستند. بنابراین $(۳,۱) \neq (۱,۳)$، پس در حالت کلی $(a,b) \neq (b,a)$



شرط مساوی بودن دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی با هم مساوی‌اند که: $a=c$ و $b=d$؛ یعنی باید عضوهای اول با هم و عضوهای دوم نیز با هم مساوی باشند.

مثال و جواب

مثال اگر دو زوج مرتب $(۴x-۲,۵y+۷)$ و $(۳x+۱,۸y-۳)$ با هم مساوی باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

جواب

تساوی عضوهای اول $\Rightarrow ۴x-۲=۳x+۱ \Rightarrow ۴x-۳x=۲+۱ \Rightarrow x=۳$

تساوی عضوهای دوم $\Rightarrow ۵y+۷=۸y-۳ \Rightarrow ۵y-۸y=-۷-۳ \Rightarrow -۳y=-۱۰ \Rightarrow y=\frac{۱۰}{۳}$

مفهوم رابطه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. هر مجموعه شامل زوج مرتب‌هایی به صورت (a,b) که در آن‌ها $a \in A$ و $b \in B$ باشد، یک رابطه از A به B می‌باشد $(A \to B)$؛ مثلاً اگر $A=\{۲,۳,۵,۷\}$ و $B=\{۵,۹,۱۲\}$ باشند، آن‌گاه $R=\{(۲,۱۲),(۷,۹),(۲,۵)\}$ رابطه‌ای از A به B است، زیرا عضوهای اول زوج مرتب‌ها از A و عضوهای دوم آن‌ها از B انتخاب شده‌اند.

روش‌های نمایش یک رابطه

① روش جدولی: در این روش، عضوهای مجموعه‌ی اول را در یک ردیف و عضوهای مربوط به آن‌ها از مجموعه‌ی دوم را در ردیف زیر آن می‌نویسیم. مثلاً فرض کنید بادکنکی در حال پُرشدن باشد. در ثانیه‌ی اول ۵ مترمکعب، در ثانیه‌ی دوم ۱۵ متر مکعب، در ثانیه‌ی سوم ۴۰ متر مکعب و در ثانیه‌ی چهارم ۷۰ متر مکعب هوا وارد آن می‌شود. رابطه‌ی بین زمان و مقدار هوای ورودی به صورت جدول مقابل است:

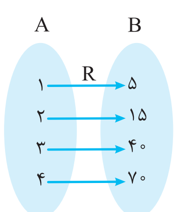
زمان (ثانیه)	۱	۲	۳	۴	$\Rightarrow A=\{۱,۲,۳,۴\}$
مقدار هوای ورودی (متر مکعب)	۵	۱۵	۴۰	۷۰	$\Rightarrow B=\{۵,۱۵,۴۰,۷۰\}$

با توجه به جدول بالا می‌توان چنین نوشت: $R: A \to B$ *(رابطه رو معمولاً با حرف R نشان می‌دیم.)*

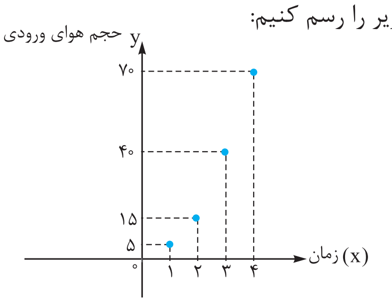
② روش استفاده از زوج مرتب‌ها: در مثال بالا می‌توانیم جدول را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بنویسیم که عضوهای اول این زوج‌ها زمان و عضوهای دوم آن‌ها مقدار هوای ورودی را نشان می‌دهند.

$R=\{(۱,۵),(۲,۱۵),(۳,۴۰),(۴,۷۰)\}$

③ روش استفاده از نمودار وِن (نمودار پیکانی): در این روش از هر عضو مجموعه‌ی اول، یک فلش (پیکان) خارج شده و به عضو مربوط به خود در مجموعه‌ی دوم وارد می‌شود. در مثال بادکنک خواهیم داشت:



④ روش استفاده از نمودار در صفحه‌ی مختصات: در این نوع نمایش، هر زوج مرتب را به عنوان یک نقطه‌ی دوبعدی تصور می‌کنیم که مؤلفه‌ی اول آن، طول نقطه و مؤلفه‌ی دوم آن، عرض نقطه می‌باشد. برای مثالِ بادکنک، می‌توانیم نمودار زیر را رسم کنیم:



⑤ روش نمایش ضابطه‌ای (نمایش جبری): فرض کنید رابطه‌ی R از A به B تعریف شده باشد. همچنین فرض کنید که $x \in A$ و $y \in B$. در این صورت ضابطه‌ی R فرمولی است که نشان می‌دهد هر x چگونه به y مربوط به خود تبدیل می‌شود. (*ضمناً به x متغیر مستقل و به y متغیر وابسته می‌گیم.*)

مثلاً فرض کنید رابطه‌ی R به صورت $\begin{cases} R:\{۱,۲,۳\} \to N \\ y = ۵x + ۶ \end{cases}$ تعریف شده باشد. ضابطه‌ی $y = ۵x + ۶$ نشان می‌دهد که هر x ابتدا در عدد ۵ ضرب و سپس با عدد ۶ جمع می‌شود تا y مربوط به آن به دست آید. حال به جای x در رابطه‌ی $y = ۵x + ۶$ اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار می‌دهیم تا مقادیر y نیز به دست آید:

$$y = ۵x + ۶ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۱} y = ۵(۱) + ۶ = ۱۱ \\ \xrightarrow{x=۲} y = ۵(۲) + ۶ = ۱۶ \\ \xrightarrow{x=۳} y = ۵(۳) + ۶ = ۲۱ \end{cases}$$

همین‌جا بگویم که به مجموعه‌ی xها دامنه و به مجموعه‌ی yهای به دست آمده، بُرد رابطه می‌گوییم، پس در این سؤال:

$\{۱,۲,۳\}$ = دامنه و $\{۱۱,۱۶,۲۱\}$ = بُرد

شاگرد: استاد مگه در متن سؤال گفته نشده $\mathbb{R}:\{۱,۲,۳\} \to N$ *؟ من فکر می‌کنم بُرد برابر با N میشه.*

دبیر: نه عزیزم. وقتی می‌نویسیم $A \to B$*، بُرد لزوماً برابر با B نیست. به B میگیم مجموعه‌ی هم‌دامنه. در اغلب موارد، بُرد زیرمجموعه‌ی B است. حالا در قسمت تابع، کامل می‌فهمی فرق این دوتارو.*

مثال و جواب

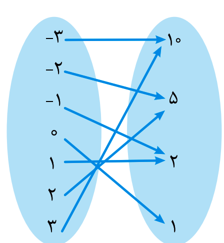
مثال برای رابطه‌ی $y = x^۲ + ۱$ که در آن $x \in A = \{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ می‌باشد، جدول، زوج مرتب‌ها، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را رسم کنید.

(*مشابه تمرین کتاب*)

جواب

$$y = x^۲ + ۱ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=-۳} y = (-۳)^۲ + ۱ = ۱۰ \\ \xrightarrow{x=-۲} y = (-۲)^۲ + ۱ = ۵ \\ \xrightarrow{x=-۱} y = (-۱)^۲ + ۱ = ۲ \\ \xrightarrow{x=۰} y = ۰^۲ + ۱ = ۱ \\ \xrightarrow{x=۱} y = ۱^۲ + ۱ = ۲ \\ \xrightarrow{x=۲} y = ۲^۲ + ۱ = ۵ \\ \xrightarrow{x=۳} y = ۳^۲ + ۱ = ۱۰ \end{cases}$$

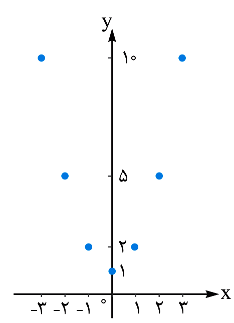
زوج مرتب‌ها $\Rightarrow R = \{(\overset{x}{-۳},\overset{y}{۱۰}),(-۲,۵),(-۱,۲),(۰,۱),(۱,۲),(۲,۵),(۳,۱۰)\}$



نمودار وِن (پیکانی)

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱۰	۵	۲	۱	۲	۵	۱۰

جدول



نمودار هندسی (مختصاتی)

سؤال‌های امتحانی

۱- در هر قسمت، متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید:

الف) $h(x)=۱۳-۸\sqrt{x-۱}$　　　ب) $f(t)=\frac{۳t-۴}{۵t}$

ج) بهره‌ی هوشی (IQ) دانش‌آموزان، یکی از عوامل مؤثر در پیشرفت تحصیلی آن‌هاست.

د) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن.

۲- اگر دو زوج مرتب $(۴,۲a-b)$ و $(a-۲b,۸)$ با هم برابر باشند، a و b را به دست آورید.

۳- رابطه‌ی R به صورت $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{N}\,,\,y=x+۳\}$ با فرض $x\le ۴$ تعریف شده است. رابطه‌ی R را به شکل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نمایش دهید.

۴- رابطه‌ی $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\,,\,|x|+|y|=۱\}$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بنویسید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۵- رابطه‌ی R به هر عضو از مجموعه‌ی $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\,,\,۱۶\le x\le ۱۸\}$ مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را نسبت می‌دهد. زوج مرتب‌های مربوط به این رابطه را مشخص کنید.

مفهوم تابع

الان که مفهوم رابطه را به خوبی یاد گرفتید به سراغ تابع می‌ریم. تابع در واقع نوع خاصی از رابطه است.

تعریف تابع

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

در درس‌نامه دیدید که ۵ روش برای نمایش رابطه وجود داشت. چون تابع هم نوعی رابطه است، پس این ۵ روش برای نمایش تابع هم استفاده می‌شوند.

در کل کتاب همیشه فرض می‌کنیم x متغیر مستقل $(x\in A)$ و y متغیر وابسته $(y\in B)$ است. یعنی با تغییر x، مقدار y هم تغییر می‌کند. (y به x وابسته است.)

تشخیص تابع در حالت‌های مختلف

① تشخیص تابع از روی جدول: یک رابطه که به صورت جدول داده شده، وقتی تابع است که اعداد ردیف بالای جدول *(مؤلفه‌های اول یا همون x ها)* مختلف باشند یا این‌که اگر بعضی از آن‌ها با هم مساوی بودند، اعداد ردیف پایین مربوط به آن‌ها *(مؤلفه‌های دوم یا همون y ها)* نیز با هم مساوی باشند. به طور خلاصه: باید برای هر x فقط یک y وجود داشته باشد.

به عنوان مثال تابع بودن یا نبودن روابط زیر را با هم بررسی می‌کنیم:

مثال

x	-۲	۰	۴	۵
y	۹	$\frac{۱}{۳}$	$\sqrt{۲}$	-۶

$\Rightarrow$ تابع است، چون x ها همگی متفاوت‌اند.

مثال

x	$(\sqrt{۳})^{۰}$	-۶	۵	۱
y	۲	۳	۹	۱۲

$\xrightarrow[\text{جوابش ۱ می‌شود.}]{\text{هر عدد به توان صفر}}$ تابع نیست چون در ردیف بالا دو تا ۱ وجود دارد ولی y آن‌ها مساوی نیست.

مثال

x	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۵	-۱	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
y	$\frac{۲}{۷}$	۰	۲	$\frac{۲}{۷}$

اگر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ را گویا کنیم، جوابش $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌شود، زیرا $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\longrightarrow$ تابع است چون در ردیف بالا دو تا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ داریم ولی y آن‌ها مساوی است.

② تشخیص تابع از روی زوج مرتب‌ها: اگر رابطه‌ای مثل R به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، در صورتی R یک تابع است که تمام عضوهای اول(x ها) مختلف باشند یا اگر دو یا چند زوج مرتب، عضوهای اولشان مساوی بود، عضوهای دومشان هم مساوی باشند. (دقیقاً مانند جدول‌ها) مثلاً رابطه‌ی $f=\{(۵,۶),(۷,۸),(۹,۱۰)\}$ تابع است، چون عضوهای اول، همگی مختلف‌اند ولی رابطه‌ی $g=\{(۳^{-۲},۵),(۶,۲),(\frac{۱}{۹},۱)\}$ تابع نیست، زیرا $\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳^{۲}}=۳^{-۲}$. پس دوتا $\frac{۱}{۹}$ به عنوان عضوهای اول مشاهده می‌کنیم ولی عضوهای دومشان مساوی نیست. *(گفتیم اگر عضوهای اول مساوی باشن، عضوهای دوم هم باید مساوی باشن.)*

مثال و جواب

مثال اگر مجموعه‌ی $f=\{(۱,a+b),(۲,a-b),(۱,۳),(۲,۵)\}$ مُعرف یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

جواب

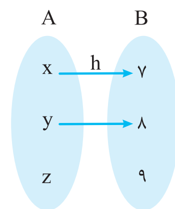
$$\begin{aligned}(۱,a+b)=(۱,۳) &\Rightarrow a+b=۳\\(۲,a-b)=(۲,۵) &\Rightarrow a-b=۵\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases}a+\cancel{b}=۳\\a-\cancel{b}=۵\end{cases}$$

$$۲a=۸ \Rightarrow a=۴$$

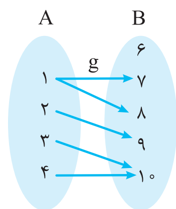
$$a+b=۳ \xrightarrow{a=۴} ۴+b=۳ \Rightarrow b=۳-۴=-۱$$

③ تشخیص تابع از روی نمودار وِن: نمودار وِن یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه‌ی A دقیقاً یک فلش (پیکان) خارج شود؛ یعنی اگر از یک عضو A پیکانی خارج نشود یا بیشتر از یک پیکان خارج شود، تابع نخواهیم داشت.

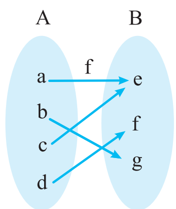
به نمودارهای زیر توجه کنید:



مثال تابع نیست؛ چون از z فلشی خارج نشده.



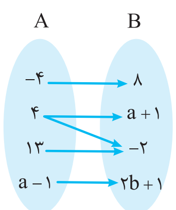
مثال تابع نیست؛ چون از عدد ۱ دو فلش خارج شده. (*اِشکالی نداره که به ۶ فلشی وارد نشده*)



مثال تابع است؛ چون از هر عضو A یک فلش خارج شده.

مثال و جواب

مثال اگر نمودار وِن مقابل بیانگر تابع باشد، $(a+b)$ را به دست آورید.



جواب از عدد ۴ دو فلش خارج شده، پس برای این‌که تابع داشته باشیم مقدار انتهای فلش‌های مربوط به ۴ باید با هم مساوی باشند:

$a+۱=-۲ \Rightarrow a=-۳$

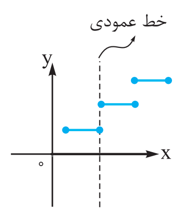
حال به ازای $a=-۳$ حاصل $(a-۱)$ برابر با -۴ می‌شود. چون -۴ در مجموعه‌ی A دو بار تکرار شده، لذا مؤلفه‌های دوم مربوط به -۴ها باید با هم مساوی شوند:

$۲b+۱=۸ \Rightarrow ۲b=۷ \Rightarrow b=\frac{۷}{۲}$

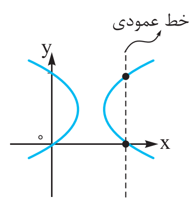
④ تشخیص تابع از روی نمودار هندسی (مختصاتی): نمودار یک رابطه وقتی تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها (*فور محور y ها رو هم حساب می‌کنیم.*) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. (*یعنی یا قطع نکنه یا در یک نقطه قطع کنه.*)

دقت کنید که منظور از نقطه در این تعریف، نقطه‌ی توپُر است. نه توخالی.

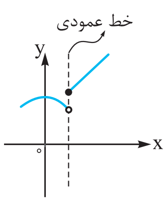
به نمودارهای زیر دقت کنید.



تابع نیست.

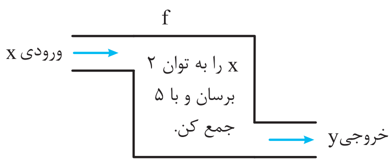


تابع نیست.



تابع است.

۵ تشخیص تابع از روی ضابطه (فرمول جبری): بسیاری از توابع را می‌توانیم مانند یک کامپیوتر یا ماشین فرض کنیم که روی ورودی x از دامنه، یک سری عملیات جبری انجام داده و خروجی y از بُرد را به ما تحویل می‌دهد. مثلاً در شکل زیر، هر عددی که وارد سیستم تابع f شود، ماشین f آن را به توان ۲ رسانده و با ۵ جمع می‌کند. یعنی ضابطه‌ی تابع f به صورت $y=x^{۲}+۵$ می‌باشد. البته به جای y می‌توان از $f(x)$ هم استفاده کرده و بنویسیم: $f(x)=x^{۲}+۵$



مثلاً اگر عدد ۴ ورودی f باشد، خروجی f برابر است با: $y=۴^{۲}+۵=۲۱$ یا می‌توان چنین نوشت: $f(۴)=۲۱$، یعنی مقدار تابع f به ازای $x=۴$ برابر ۲۱ است.

مثال و جواب

مثال با فرض $f(x)=x^{۲}-۶x+۱$، حاصل عبارت‌های $f(h)$ و $f(h-۱)$ و سپس $\frac{f(h-۱)-f(h)}{۷-۲h}$ را به دست آورید.

جواب $f(h)$ یعنی در تابع f به جای xها باید h بگذاریم و $f(h-۱)$ یعنی به جای xها باید $(h-۱)$ قرار دهیم:

$$f(h)=h^{۲}-۶h+۱$$

$$f(h-۱)=(h-۱)^{۲}-۶(h-۱)+۱=h^{۲}-۲h+۱-۶h+۶+۱=h^{۲}-۸h+۸$$

$$\frac{f(h-۱)-f(h)}{۷-۲h}=\frac{(h^{۲}-۸h+۸)-(h^{۲}-۶h+۱)}{۷-۲h}=\frac{-۲h+۷}{-۲h+۷}=۱$$

مثال و جواب

مثال قسمتی از تابع f به صورت جدول مقابل است. برای f یک ضابطه برحسب x بنویسید. سپس به کمک ضابطه‌ای که پیدا می‌شود، مقادیر $f(۵)$، $f(-۱۰)$ و $f(f(۰))$ را به دست آورید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
f(x) یا y	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱

جواب باید ببینیم در هر ستون جدول، x چگونه به y تبدیل شده است. با کمی دقت *(و البته کمی هوش)* می‌فهمیم که در هر ستون اگر عدد بالایی (x) را در ۴ ضرب کرده و سپس با ۵ جمع کنیم، به عدد پایینی (y) می‌رسیم پس فرمول یا ضابطه‌ی تابع برابر است با: $f(x)=۴x+۵$

$$f(۵)=۴(۵)+۵=۲۵\ ,\ f(-۱۰)=۴(-۱۰)+۵=-۳۵$$

$$f(۰)=۴(۰)+۵=۵\ \Rightarrow\ f(\underbrace{f(۰)}_{۵})=f(۵)=۲۵$$

شاگرد: استاد اگه ذهنی نتونستیم بگیم x چه جوری به y تبدیل می‌شه چی؟

دبیر: اگه در جدول داده‌شده، xها با یک مقدار ثابت و yها هم با یک مقدار ثابت زیاد یا کم بشن، می‌فهمیم با یک تابع خطی به شکل $y=ax+b$ سروکار داریم. در این مثال در ردیف بالا می‌بینی که xها دارن یکی‌یکی زیاد می‌شن و در ردیف پایین yها دارن ۴تا ۴تا زیاد می‌شن. پس یک خط داریم. حالا دو نقطه‌ی دلخواه از جدول رو انتخاب کرده و در رابطه‌ی $y=ax+b$ قرار می‌دیم تا a و b به دست بیان:

$$y=ax+b\quad \begin{cases} A\left|\begin{matrix}۰\to x\\ ۵\to y\end{matrix}\right. \longrightarrow a\times ۰+b=۵\Rightarrow b=۵\\[2ex] B\left|\begin{matrix}۱\to x\\ ۹\to y\end{matrix}\right. \longrightarrow a\times ۱+b=۹\Rightarrow a+۵=۹\Rightarrow a=۴\end{cases}$$

پس معادله‌ی (ضابطه‌ی) تابع به شکل $y=۴x+۵$ خواهد بود. البته این روش فقط برای توابع خطی قابل اجراست.

بچه‌های عزیز الان می‌خواهیم به یک سؤال مهم پاسخ دهیم. آیا هر رابطه یا فرمولی که y را برحسب x بیان کند، تابع است؟ جواب منفی است. گفتیم که اگر به ازای هر x از دامنه فقط و فقط یک y پیدا شود، تابع خواهیم داشت. اثبات تابع‌بودن یک معادله‌ی جبری در کتاب درسی مطرح نشده و ما هم با آن کاری نداریم. شما فقط در همین حد بدانید که اگر y توان زوج داشته باشد یا y داخل قدرمطلق باشد و یا علامت‌های ± همزمان وجود داشتند، معمولاً تابع نخواهیم داشت.

(می‌گم معمولاً چون یه استثناءهایی وجود داره که از شما نمی‌خوان) حال تابع بودن یا نبودن روابط زیر را با هم بررسی می‌کنیم:

مثال $x^{۳}+y^{۵}=۱۲\ \Rightarrow$ تابع است، چون y توان فرد دارد.

مثال $|y|-۲x=۸\ \Rightarrow$ تابع نیست، چون y داخل قدرمطلق است.

مثال $y=\pm\sqrt{x}+۶\ \Rightarrow$ تابع نیست، چون ± باهم آمده‌اند.

مثال $y^{۲}=۳x-۷\ \Rightarrow$ تابع نیست، چون y توان زوج دارد.

شاگرد: استاد حالا می‌شه بگین چرا وقتی y توان زوج داشته باشه یا داخل قدرمطلق باشه یا ± هم‌زمان وجود داشته باشن، تابع نداریم؟

دبیر: چون در این حالت‌ها، x هایی وجود دارن که به ازای اون‌ها ۲ مقدار برای y پیدا می‌شه. به رابطه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۵$ دقت کن. اگه مثلاً به x عدد ۱ رو نسبت بریم، خواهیم داشت: $۱^۲ + y^۲ = ۵ \Rightarrow y^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} y = \pm ۲$

چون دو مقدار برای y به دست اومد، پس تابع نداریم و یا در رابطه‌ی $|y| - ۳x = ۱۰$ اگه به x مثلاً صفر بریم، خواهیم داشت: $|y| = ۱۰ \Rightarrow y = \pm ۱۰$.

باز هم دو مقدار برای y به دست اومد، پس تابع نداریم. (در حل معادله‌ی $|y| = ۱۰$ دقت کنید که هر وقت متغیر از قدر مطلق خارج می‌شه به عدد سمت راست، علامت‌های ± می‌دیم).

فقط دقت کنید که در ریاضی، معادلاتی شبیه $y^۲ = -۴ , |y| = -۴$ جواب ندارند، پس همیشه به x طوری عدد بدین که عددهای سمت راست مثبت بشن. مثلاً در رابطه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۵$ که بررسی کردیم نمی‌توانیم به x عدد ۴ رو بریم چون که: $۴^۲ + y^۲ = ۵ \Rightarrow y^۲ = -۱۱$

نوشتن ضابطه‌ی یک تابع به صورت کامل: اگر f یک تابع برحسب x باشد که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شده باشد، برای مشخص‌کردن ضابطه‌ی f به طور کامل چنین می‌نویسیم: $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$. همان‌طور که در درس‌نامه هم گفتیم A دامنه و B هم‌دامنه است. قبلاً هم گفتیم که معمولاً بُرد تابع زیرمجموعه‌ی B است و لزوماً بُرد با B مساوی نیست. ضمناً دامنه‌ی f را با D_f و برد f را با R_f نمایش می‌دهیم.

مثال و جواب

مثال با فرض آن‌که $\begin{cases} f: A \to \mathbb{R} \\ f(x) = ۲x^۲ + ۳ \end{cases}$ و $A = \{-۱, \sqrt{۲}, ۰\}$ باشد، بُرد تابع f را به دست آورید. (مشابه فعالیت کتاب)

جواب

$$f(x) = ۲x^۲ + ۳ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=-۱} f(-۱) = ۲(-۱)^۲ + ۳ = ۵ \\ \xrightarrow{x=\sqrt{۲}} f(\sqrt{۲}) = ۲(\sqrt{۲})^۲ + ۳ = ۷ \\ \xrightarrow{x=۰} f(۰) = ۲(۰)^۲ + ۳ = ۳ \end{cases}$$

پس در این مثال $D_f = \{-۱, \sqrt{۲}, ۰\}$ و $R_f = \{۳, ۵, ۷\}$ می‌باشد. الان به وضوح معلوم است که بُرد f با $\mathbb{R}$ (هم‌دامنه) مساوی نیست.

محاسبه‌ی مقدار تابع در یک نقطه و محاسبه‌ی دامنه و برد تابع در حالت‌های مختلف

حالت (۱): اگر تابع f به صورت جدول باشد، در هر ستون جدول، مقدار تابع به ازای عدد بالایی (x) برابر با عدد پایین همان ستون (y) است. مثلاً در جدول مقابل:

$$f: \begin{array}{c|ccc} x & -۵ & ۰ & ۴ \\ \hline y & ۱۱ & ۳ & -۲ \end{array} \Rightarrow f(-۵) = ۱۱ \ , \ f(۰) = ۳ \ , \ f(۴) = -۲$$

ضمناً در این مثال دامنه و برد عبارت‌اند از:

دامنه $\underbrace{D_f = \{-۵, ۰, ۴\}}$ ← اعداد ردیف بالا

برد $R_f = \{۱۱, ۳, -۲\}$ ← اعداد ردیف پایین

حالت (۲): اگر تابع f به صورت زوج مرتب باشد، در هر زوج، مقدار تابع به ازای مؤلفه‌ی اول (x) برابر با مؤلفه‌ی دوم همان زوج مرتب (y) است. مثلاً:

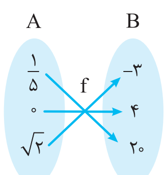
$$f = \{(۳,۶), (۰,۹), (۶,۱۲)\} \Rightarrow f(۳) = ۶ , f(۰) = ۹ , f(۶) = ۱۲ \text{ و } f(\underbrace{f(۳)}_{۶}) = f(۶) = ۱۲$$

ضمناً در این مثال دامنه و برد عبارت‌اند از:

دامنه (عضوهای اول): $D_f = \{۰, ۳, ۶\}$

برد (عضوهای دوم): $R_f = \{۶, ۹, ۱۲\}$

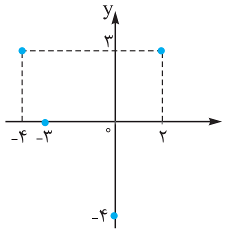
حالت (۳): اگر f به صورت نمودار وِن بیان شود، در هر فلش (پیکان) مقدار تابع به ازای عدد ابتدای فلش (x) برابر است با عدد انتهای فلش (y). مثلاً:



$$\Rightarrow f(\tfrac{۱}{۵}) = ۲۰ \ , \ f(۰) = ۴ \ , \ f(\sqrt{۲}) = -۳$$

(ابتدای فلش‌ها) دامنه $D_f = \{\frac{۱}{۵}, ۰, \sqrt{۲}\}$ (انتهای فلش‌ها) بُرد $R_f = \{-۳, ۴, ۲۰\}$

حالت (۴): اگر f به صورت نمودار، داده شده باشد، در هر نقطه از نمودار، مقدار تابع به ازای طول آن نقطه (x) برابر عرض همان نقطه (y) است.
به عنوان مثال در شکل مقابل که مربوط به تابع f است خواهیم داشت:

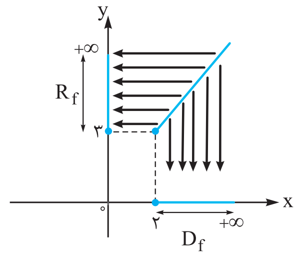


$\Rightarrow f(۲)=۳\,,\,f(-۳)=۰\,,\,f(-۴)=۳\,,\,f(۰)=-۴$

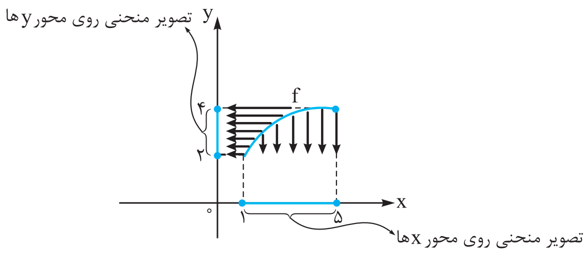
دامنه (طول نقاط) $D_f=\{۲,۰,-۳,-۴\}$ بُرد (عرض نقاط) $R_f=\{-۴,۰,۳\}$

شاگرد: حالا اگر نمودار به صورت خط یا منحنی باشه، دامنه و برد چه جوری به دست میاد استاد؟

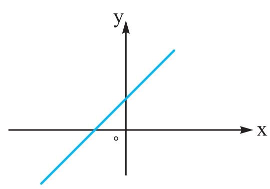
دبیر: اون‌وقت تصویر نقاط، روی محور x ها دامنه و تصویر نقاط، روی محور y ها برد تابع خواهد بود. به مثال‌های زیر خوب نگاه کن تا مفهوم تصویرکردن رو متوجه بشی:



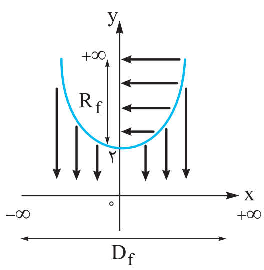
دامنه $D_f: x\geq ۲$ بُرد $R_f: y\geq ۳$



دامنه $D_f: ۱\leq x\leq ۵$ بُرد $R_f: ۲\leq y\leq ۴$



$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$ (دامنه و بُرد خط‌های مایل همیشه $\mathbb{R}$ هستند.)



$\begin{cases} D_f: -\infty < x < +\infty \text{ یا } \mathbb{R} \\ R_f: y\geq ۲ \end{cases}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی

حالت (۵): تعیین دامنه و برد در حالتی که ضابطه‌ی (معادله‌ی جبری) آن داده شده است را قبلاً آموزش داده‌ایم.

۶- کدام مورد زیر، مُعرف یک تابع نیست؟ (در هر قسمت از راست به چپ، عبارت‌ها به ترتیب مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها هستند.)

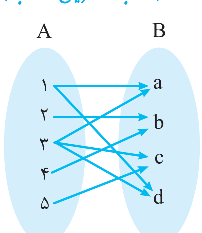
۱) رابطه‌ی بین شعاع دایره و محیط آن

۲) رابطه‌ی بین یک فرد و قد او در زمانی خاص

۳) رابطه‌ی بین یک عدد طبیعی و مضرب‌های آن

۴) رابطه‌ی بین اعداد اول و مربعات آن‌ها

۷- در نمودار وِن مقابل، با حذف چند فلش، یک تابع ایجاد می‌شود؟ (مشابه تمرین کتاب)



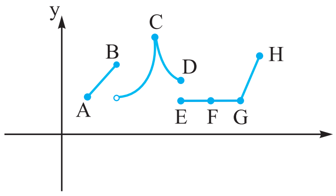
۸- درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف) با توجه به فرمول $BMI = \dfrac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مربع قد برحسب متر}}$ (شاخص توده‌ی بدنی)، وزن و قد متغیرهای وابسته و BMI متغیر مستقل است.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، سه غذای مورد علاقه‌ی او را نسبت می‌دهد، تابع است.

ج) در تابع $g(t) = |۳t + ۲|$ به t متغیر وابسته و به $g(t)$ متغیر مستقل می‌گوییم.

۹- کدام نقطه حذف شود تا شکل مقابل، به یک تابع تبدیل شود؟



۱) B　　۲) C

۳) D　　۴) F

۱۰- اگر بُرد تابع $f(x) = x^۲ + ۴$ برابر $\{۵,۱۳\}$ باشد، دامنه‌ی آن را به دست آورید.

۱۱- بُرد تابع $f(x) = |x^۲ - ۳x|$ با دامنه‌ی $\{-۱,۰,۱\}$ را به دست آورید.

۱۲- با فرض آن‌که $f(x) = |x^۲ - ۵x|$ و $g = \{(۱,۳),(۴,۲),(۰,-۴),(۲,۷)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $f(۱) + g(۱)$　　ب) $f(g(۰))$　　ج) $g(f(۰))$

۱۳- در تابع $f(x) = ۲x^۲ - ۴mx + ۸$، مقدار m را طوری بیابید که زوج مرتب $(-۱,-۲)$ عضوی از این تابع باشد.

۱۴- ضابطه‌ی تابع $y = f(x)$ مربوط به جدول زیر را نوشته و سپس با توجه به آن مقادیر زیر را محاسبه کنید.

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۵	۷	۹	۱۱	۱۳

الف) $f(x-۳)$　　ب) $f(۱+a)$

۱۵- الف) در رابطه‌ی مقابل، در جاهای خالی طوری عدد بگذارید که f تابع باشد.

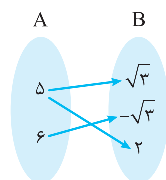
$f = \{(۳,۶),(\frac{\sqrt{۲}}{۲},۵),(\sqrt{۹},...),(\frac{۱}{\sqrt{۲}},...)\}$

ب) در رابطه‌ی مقابل، در جاهای خالی طوری عدد بگذارید که g تابع نشود.

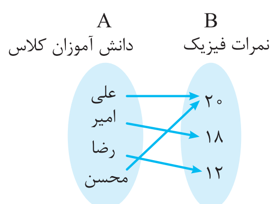
$g = \{(۱,\frac{۵}{۶}),(۳,۷),(...,۸),(...,...)\}$

۱۶- تابع بودن یا نبودن روابط، نمودارها و جدول‌های زیر را بررسی کنید.

الف)



ب)



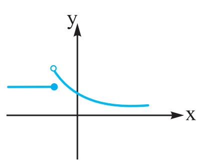
ج) $f = \{(۴^۰,۲),(۲,۵^{-۲}),(۱,۲),(۲,\frac{۱}{۲۵})\}$

د)

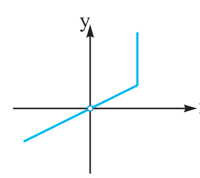
x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۲	۳	۴	۵	۶

هـ) رابطه‌ای که به هر فرد، شماره‌ی ملی او را نسبت می‌دهد

و)



ز)



ح) $y = \dfrac{۱}{|x|+۲}$

ط) $|y| = ۱۰x - ۳$

ی) $x^۴ + y^۲ = ۱۰$

۱۷- برای هر یک از توابع زیر، یک ضابطه‌ی مناسب بنویسید.

الف) $f = \{(۲,۲۱),(۳,۳۱),(۴,۴۱),(۵,۵۱)\}$

ب) $g = \{(۱,۱),(-۲,۴),(۳,۹),(-۴,۱۶)\}$

ج) h:

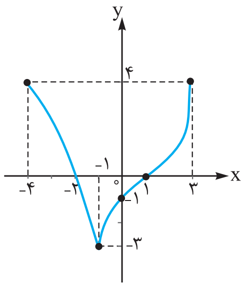
x	۰	۱	۲	۳
y	۵	۶	۹	۱۴

۱۸- اگر $f(x)=|-x-۵|$ و $g(x)=\sqrt{-۱-۲x}$ باشند، حاصل $\frac{f(۴)}{g(-۵)}$ را به دست آورید.

۱۹- اگر $f(x)=۴x+۳$ باشد، حاصل $\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{۳h}$ را به دست آورید.

۲۰- با فرض آن‌که $f=\{(-۱,۵),(۲,-۱),(۳,۴),(۴,۷)\}$ و $g=\{(۵,۳),(۳,۰),(۰,-۲),(-۲,۸)\}$ باشد، حاصل $\frac{۲f(۴)-[g(۰)]^۲}{\frac{۱}{۴}f(g(۵))}$ را به دست آورید. (مخصوص علاقه‌مندان)

۲۱- با توجه به شکل تابع $f(x)$ که داده شده، حاصل $\frac{f(-۱)+\sqrt{f(۳)}}{[f(۰)]^۳-۴f(-۲)}$ را به دست آورید. (مخصوص علاقه‌مندان)



۲۲- ماشین (تابع) مقابل را در نظر بگیرید. مقادیر خروجی این ماشین را به دست آورید.

$\boxed{x=-۲,۲}\xrightarrow{\text{ورودی}}\boxed{y=|x^۲-۱۰x|}\xrightarrow{\text{خروجی}}\boxed{?}$

۲۳- اگر $f(x)=|x-۲|$ و $f(\square)=|x-۳|$ باشد، آن‌گاه $\square$ برابر با کدام عبارت زیر است؟ (مخصوص علاقه‌مندان)

۱) $x+۲$ ۲) $x-۱$ ۳) $۱-x$ ۴) $-x+۲$

۲۴- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۱۰}$ باشد، حاصل $f(۳+۲\sqrt{۶})$ را به دست آورید.

۲۵- اگر $f(x)=\frac{-۲x^۲+۵x}{x-۲}$ باشد، حاصل $f(۱-\sqrt{۲})$ را محاسبه کنید.

۲۶- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲+bx-۲$ با شرط $f(۱)=-۳$ و $f(۳)=۷$، مقادیر a و b را به دست آورید.

۲۷- جدول

x	۳	۲	−۲	۳	a	۵
y	$a^۲$	۱	a	a+۲	۴	۳

مربوط به یک تابع است. a را به دست آورید. (x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.)

۲۸- فرض کنید $f=\{(۴,۸),(k-۱,m),(۲m-۳,۲k)\}$ و $D_f=\{۳,۴,۵\}$ در این صورت بُرد این تابع را به دست آورید. (مخصوص علاقه‌مندان)

۲۹- اگر $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲+|x|$ باشد، حاصل $f(۲-\sqrt{۵})$ را به دست آورید. (مخصوص علاقه‌مندان)

۳۰- اگر رابطه‌ی f تابع باشد، مقدار $m+n$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب)

$f=\{(۳,m+۲),(۳,-۴),(m,n+۷),(-۶,۴)\}$

۳۱- در هر قسمت، بُرد تابع را به دست آورید. (مشابه فعالیت کتاب)

الف) $\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=x^۳-۵\end{cases}$ $A=\{۰,۱,-۱,\sqrt[۳]{۶}\}$

ب) $\begin{cases}f=A\to B\\ f(x)=\sqrt{۳x-۳}+۴\end{cases}$ $A=\{۱,۲,۴\}$

ج) $\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۴}\end{cases}$ $A=\{-۶,۰,\frac{۱}{۲},\sqrt{۳}\}$

د) $\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=۰\end{cases}$ $A=\mathbb{R}$

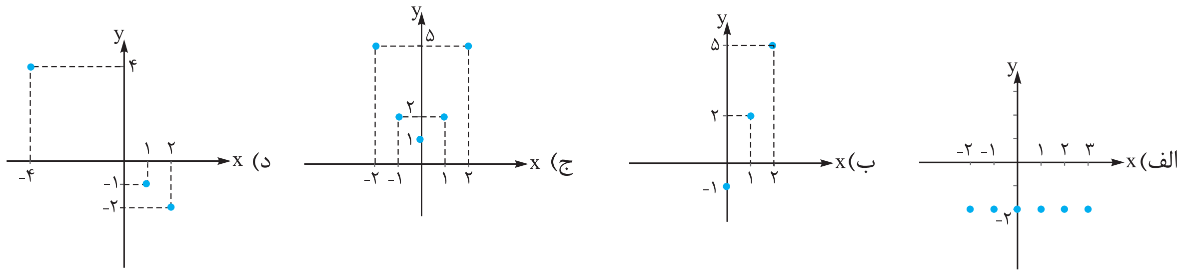
هـ) $\begin{cases}f=A\to B\\ f(x)=-x\end{cases}$ $A=\mathbb{W}\to$ مجموعه اعداد حسابی

و) $\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=|x|\end{cases}$ $A=\mathbb{Z}\to$ مجموعه اعداد صحیح

۳۲- اگر دامنه و برد تابع f را با D_f و R_f نمایش دهیم، جاهای خالی را پُر کنید.

$\begin{cases}f:D_f\to R_f\\ f(x)=۳x-۲\end{cases}$ $D_f=\{۱,۲,۳,\dots,\dots\}$
$R_f=\{\dots,\dots,\dots,۵,۱۰\}$

۳۳- برای هر یک از توابع زیر دامنه و برد را مشخص کرده و در صورت امکان ضابطه‌ی هر تابع را بنویسید. *(مشابه کار در کلاس کتاب)*



۳۴- تابع f به هر عدد حقیقی، سه برابر مکعب همان عدد، منهای ۶ را نسبت می‌دهد. ضابطه‌ی کامل تابع f را نوشته سپس $f(1)$ و $f(f(0))$ را محاسبه کنید. *(مشابه تمرین کتاب)*

۳۵- تابع f به هر عدد حقیقی، معکوس همان عدد و تابع g به هر عدد حقیقی، نصف مربع همان عدد به اضافه‌ی ۱ را نسبت می‌دهد. ضابطه‌های f و g را نوشته و به کمک آن‌ها حاصل $g(4)+f(-\frac{1}{4})$ را محاسبه کنید. *(مشابه تمرین کتاب)*

۳۶- با رسم نمودار روابط زیر، تابع بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی کنید: *(مشابه تمرین کتاب)*

ج) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ f(x)=3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f:\{1,13,22\}\to\mathbb{R} \\ y^2=x+3 \end{cases}$ الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=2x-4 \end{cases}$

۳۷- اگر $f(x)=x^2-3x$ باشد، معادله‌ی $f(x-2)=f(x)$ را حل کنید.

۳۸- اگر $g(x)=-x^2-3x+1$ باشد آن‌گاه:

الف) $g(5)$ و $g(x+5)$ را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که: $g(x+5)\neq g(x)+g(5)$

۳۹- ماشین (تابع) مقابل را در نظر بگیرید. مقادیر ورودی این ماشین را به دست آورید.

$$\boxed{?}\xrightarrow{\text{ورودی}}\boxed{f(x)=(x-1)^2}\xrightarrow{\text{خروجی}}\boxed{4,9}$$

۴۰- اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، حاصل $f(-\frac{1}{x})$ را به دست آورده و درستی یا نادرستی رابطه‌ی $f(x).f(-\frac{1}{x})=-1$ را بررسی کنید.

۴۱- اگر $f(x)=x^2-4x+1$ باشد، حاصل $f(x+3)-f(3)$ کدام است؟

۱) x^2+2x ۲) x^2-x ۳) x^2-2x ۴) $-x^2+x$

۴۲- اگر $f(x)=x^2-3x+2$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(x+2)-f(x-2)$ کدام است؟

۱) $4(2x-1)$ ۲) $4(2x-3)$ ۳) $4(x-2)$ ۴) $4(x+2)$

۴۳- برای هر تابع، چند ضابطه‌ی مختلف پیشنهاد شده، ضابطه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۳	۹	۲۷	۸۱

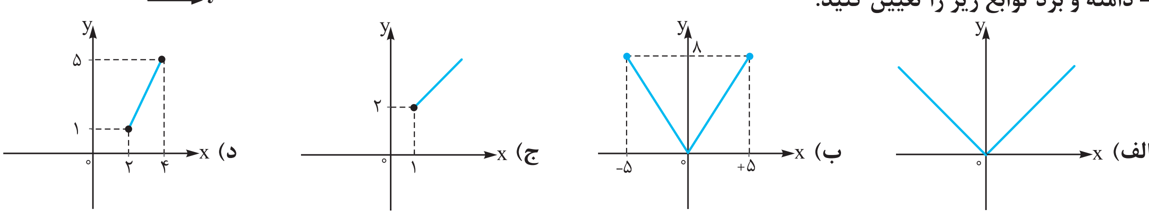
$y=x^2+1$ ، $y=3^x-1$ ، $y=3^x$

ب)

x	۲	۴	۶	۱۰
y	۲	۱۲	۳۰	۹۰

$y=x^2-2$ ، $y=x^2-x$ ، $y=2x+2$

۴۴- دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.



۴۵- اگر $f(x)=(2-x)|x|+x+\sqrt{2}$ باشد، مقدار $f(1-\sqrt{2})$ را به دست آورید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۴۶- اگر $f=\{(m^2-4,5),(m^2-4,m^2-11),(8+m,2)\}$ یک تابع باشد، مقدار m را به دست آورید.

۴۷- مقادیر m و n را طوری به دست آورید که در جدول زیر y تابعی از x باشد. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

x	۷	۶	۷	−۳	۶
y	3^{m-n}	25^{m+1}	81^{m+2n}	16^{m+2n}	5^{n-m}

تعریف تابع خطی

هر تابع که بتوان آن را به شکل $f(x)=y=ax+b$ نشان داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود $(a,b\in\mathbb{R})$. ضمناً اگر $a\neq ۰$ باشد، دامنه و برد این توابع برابر $\mathbb{R}$ است.

می‌دانید که در خط $y=ax+b$، عدد a شیب و عدد b عرض از مبدأ خط است. مثلاً در خط $y=-\frac{۳}{۲}x+\sqrt{۳}$، شیب برابر $-\frac{۳}{۲}$ و عرض از مبدأ برابر $\sqrt{۳}$ است.

مثال و جواب

مثال در مستطیل‌هایی که طول آن‌ها ۸ واحد بیشتر از عرض آن‌هاست، ضابطه‌ی محیط و مساحت را برحسب عرض آن‌ها نوشته و بررسی کنید کدام ضابطه، یک تابع خطی است؟ *(مشابه کار در کلاس کتاب)*

جواب اگر طول و عرض را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، آن‌گاه: $x=y+۸$.

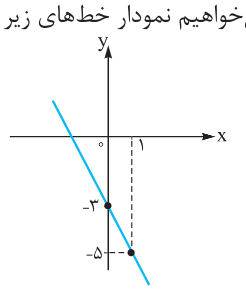
این رابطه، یک تابع خطی است چون توان y برابر ۱ است. $\Rightarrow$ $\text{محیط مستطیل}=(x+y)\times ۲=(y+۸+y)\times ۲=(۲y+۸)\times ۲=۴y+۱۶$

این رابطه، تابع خطی نیست چون توان y ۲ هم دارد. $\Rightarrow$ $\text{مساحت مستطیل}=x.y=(y+۸).y=y^{۲}+۸y$

رسم نمودار خط

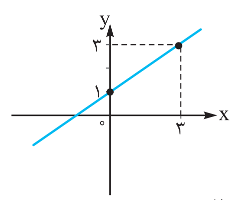
برای رسم نمودار یک خط کافی است به x دو مقدار دلخواه نسبت داده و y مربوط به این دو x را پیدا کنیم. به این ترتیب ۲ نقطه از خط به دست می‌آید که با وصل‌کردن آن‌ها به هم و امتداددادن از دو طرف، نمودار خط به دست می‌آید. البته قبل از این‌که به x عدد بدهیم، بهتر است خط را به شکل استاندارد خود یعنی $y=ax+b$ تبدیل کنیم. (y *باید در سمت چپ، تنها باشه.)*

به عنوان مثال می‌خواهیم نمودار خط‌های زیر را رسم کنیم:



مثال $y=-۲x-۳ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۰} y=-۲(۰)-۳=-۳ \Rightarrow A(۰,-۳) \\ \xrightarrow{x=۱} y=-۲(۱)-۳=-۵ \Rightarrow B(۱,-۵) \end{cases}$

چون در $y=-۲x-۳$ مخرجی وجود نداشت، به x صفر و یک دادیم.



مثال $y=\frac{۲}{۳}x+۱ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۰} y=\frac{۲}{۳}(۰)+۱=۰+۱=۱ \Rightarrow A(۰,۱) \\ \xrightarrow{x=۳} y=\frac{۲}{\cancel{۳}}(\cancel{۳})+۱=۳ \Rightarrow B(۳,۳) \end{cases}$

چون در $y=\frac{۲}{۳}x+۱$ مخرجِ ۳ وجود داشت، به x صفر و ۳ دادیم.

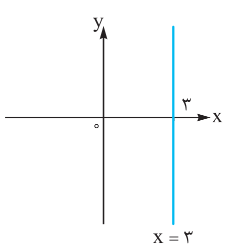
مثال $\frac{۲y-۳}{۵}=x+۱ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲y-۳=۵x+۵ \Rightarrow ۲y=۵x+۵+۳$

شاگرد: من نفهمیدم شما به x چه‌جوری عدد دادین؟ یعنی هر عددی که دوست داشته باشیم می‌تونیم بریم؟

دبیر: شما به x هر عددی که دوست داری بده ولی بهتره یه بار به x صفر بدی و یه بار دیگه عددی بدی که مخرج رو از بین ببره. الان توی مثال (۳) چون $\frac{۵}{۲}x$ وجود داره به x عدد ۲ دادیم تا ۲ها با هم بپرن.

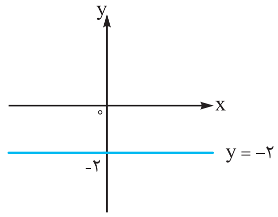
خط‌های خاص

هر معادله که به شکل $x=k$ باشد $(k\in\mathbb{R})$ یک رابطه‌ی خطی است ولی تابع نیست؛ زیرا یک خط عمودی (موازی محور عرض‌ها) را نشان می‌دهد. دامنه‌ی این‌گونه معادلات مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{k\}$ و بُرد آن‌ها $\mathbb{R}$ است مانند رابطه‌ی $x=۳$ که نمودارش به صورت زیر است:



$\Rightarrow D_f=\{۳\}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$

همچنین هر معادله که به شکل $y=k$ باشد $(k\in\mathbb{R})$ یک تابع خطی است که نمودار آن خطی موازی محور طول‌هاست. دامنه‌ی این‌گونه معادلات $\mathbb{R}$ و بُرد آن‌ها مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{k\}$ است، مانند خط $y=-۲$ که نمودارش به صورت زیر است:



$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\{-۲\}$$

فرمول شیب خط و معادله‌ی خط

اگر دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از یک خط را داشته باشیم شیب این خط از رابطه‌ی $m=\dfrac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ به دست می‌آید. ضمناً معادله‌ی این خط برابر است با: $y-y_۱=m(x-x_۱)$ یا $y-y_۲=m(x-x_۲)$

مثال و جواب

مثال **معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A(۳,۴)$ و $B(۵,-۲)$ بگذرد، سپس نمودار آن را رسم کنید.**

(مشابه تمرین کتاب)

جواب

$$A\left|\begin{matrix}۳\to x_۱\\ ۴\to y_۱\end{matrix}\right.\ ,\ B\left|\begin{matrix}۵\to x_۲\\ -۲\to y_۲\end{matrix}\right.\ \Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۲-۴}{۵-۳}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\xrightarrow[m=-۳]{A\left|\begin{smallmatrix}۳\to x_۱\\ ۴\to y_۱\end{smallmatrix}\right.}y-۴=-۳(x-۳)\Rightarrow y-۴=-۳x+۹\Rightarrow y=-۳x+۱۳\ \text{معادله‌ی خط}$$

مثال و جواب

مثال **در تابع خطی f داریم: $f(۰)=۱$ و $f(-۲)=۴$. مقادیر $f(۸)$ و $f(f(۰))$ را محاسبه کنید، سپس مقدار $\dfrac{|f(۸)|\times\sqrt{f(۰)}}{۲f(f(۰))}$ را به دست آورید.**

(مشابه تمرین کتاب)

جواب

$$\begin{cases}f(۰)=۱ & \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\to x_۱\\ ۱\to y_۱\end{matrix}\right.\\ f(-۲)=۴ & \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۲\to x_۲\\ ۴\to y_۱\end{matrix}\right.\end{cases}\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-۱}{-۲-۰}=\frac{-۳}{۲}$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\xrightarrow[m=-\frac{۳}{۲}]{A\left|\begin{smallmatrix}۰\to x_۱\\ ۱\to y_۱\end{smallmatrix}\right.}y-۱=\frac{-۳}{۲}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{-۳}{۲}x+۱$$

$$f(x)=y=\frac{-۳}{۲}x+۱\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x=۸}f(۸)=\frac{-۳}{۲}(۸)+۱=-۱۲+۱=-۱۱\\ \xrightarrow{x=۰}f(۰)=\frac{-۳}{۲}(۰)+۱=۱\Rightarrow f(\overbrace{f(۰)}^{۱})=f(۱)=\frac{-۳}{۲}(۱)+۱=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{|f(۸)|\times\sqrt{f(۰)}}{۲f(f(۰))}=\frac{|-۱۱|\times\sqrt{۱}}{۲(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۱۱\times۱}{-۱}=-۱۱$$

کاربرد تابع خطی در حل مسائل

بسیاری از متغیرها به صورت خطی به هم وابسته هستند. مثلاً وقتی یک گلوله را از بالای ساختمان رها می‌کنیم، سرعت گلوله در هر لحظه، از رابطه‌ی خطی $V=-۱۰t$ به دست می‌آید. (V سرعت و t زمان است.) در حل مسائل این بخش، همیشه به دنبال دو نقطه مثل $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ هستیم. سپس شیب خط و معادله‌ی خط را به کمک نقاط A و B می‌نویسیم. ضمناً همیشه بهتر است برای حل راحت‌تر، از نام‌های x و y به جای اسم‌های داده‌شده در متن سؤال استفاده کنیم.

مثال و جواب

مثال **با افزایش ارتفاع از سطح زمین، دمای هوا کاهش می‌یابد. اگر دمای هوا در سطح زمین ۲۰ درجه‌ی سانتی‌گراد و دمای هوا در ارتفاع ۱ کیلومتری ۱۰ درجه‌ی سانتی‌گراد باشد و فرض کنیم رابطه‌ی بین دما (T) و ارتفاع (h) خطی باشد، رابطه‌ی خطی آن‌ها کدام است؟**

۱) $T=۱۰h-۲۰$ ۲) $T=-۱۰h+۲۰$ ۳) $T=۱۰h+۲۰$ ۴) $T=-۱۰h-۲۰$

جواب ما برای راحتی کار به جای h و T از نام‌های x و y استفاده می‌کنیم. (*مهم نیست کدوم رو x بگیریم کدوم رو y ولی چون موضوعِ اصلی، دماست، بهتره T رو y بگیریم*). سطح زمین را مبدأ ارتفاع در نظر می‌گیریم، یعنی $h=۰$ یا $x=۰$ لذا دو نقطه به صورت $A(۰,۲۰)$ و $B(۱,۱۰)$ خواهیم داشت:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱۰-۲۰}{۱-۰}=\frac{-۱۰}{۱}=-۱۰$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۲۰=-۱۰(x-۰)\Rightarrow y=-۱۰x+۲۰$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا x همان h و y همان T است، لذا می‌توان چنین نوشت که: $T=-۱۰h+۲۰$.

شاگرد: ببخشید چرا مثلاً در نقطه‌ی $A(۰,۲۰)$ طولش رو صفر و عرضش رو ۲۰ انتخاب کردین؟ نمی‌شه بنویسیم $A(۲۰,۰)$؟ از کجا بفهمیم اول کدومو بنویسیم؟

پاسخ: شما اگر جابه‌جا هم بزاری عیب نداره ولی در گزینه‌ها T برحسب h بیان شده، پس در نقاط A و B ارتفاع‌ها را به عنوان طول و دماها را به عنوان عرض در نظر گرفتیم.

مثال و جواب

مثال **یک آژانس املاک ۵۰ آپارتمان در اختیار دارد. وقتی اجاره‌ی هر واحد ۴۰۰ هزارتومان در ماه باشد، همه‌ی آپارتمان‌ها پُر می‌شوند ولی وقتی اجاره ۵۰۰ هزار تومان می‌شود، تعداد آپارتمان‌های اجاره‌شده ۴۰ تا خواهد بود. اگر رابطه‌ی بین اجاره‌ی ماهانه (p) برحسب هزار تومان و تعداد آپارتمان‌ها (x) خطی باشد، معادله‌ی خطی آن کدام است؟**

۱) $p=-۱۰x-۹۰۰$ ۲) $p=۱۰x-۹۰۰$ ۳) $p=-۱۰x+۹۰۰$ ۴) $P=۱۰x+۹۰۰$

جواب بهتر است به جای متغیر p از y استفاده کنیم. چون موضوع اصلی، اجاره است. حال دو نقطه‌ی A و B را به صورت $A(۵۰,۴۰۰)$ و $B(۴۰,۵۰۰)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵۰۰-۴۰۰}{۴۰-۵۰}=\frac{۱۰۰}{-۱۰}=-۱۰$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۴۰۰=-۱۰(x-۵۰)\Rightarrow y-۴۰۰=-۱۰x+۵۰۰\Rightarrow y=-۱۰x+۹۰۰$$ یا $$p=-۱۰x+۹۰۰$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است. بچه‌های عزیز چون در گزینه‌ها p برحسب x بیان شده، لذا در نقاط $A(۵۰,۴۰۰)$ و $B(۴۰,۵۰۰)$ ملاحظه می‌کنید که ابتدا تعداد آپارتمان‌ها (x) و سپس قیمت اجاره (p) را به عنوان طول و عرض نقاط نوشته‌ایم.

۴۸- کدام‌یک از ضابطه‌های زیر، نشان‌دهنده‌ی یک تابع خطی است؟

الف) $(y-x)^۲-(y+x)^۲=۱$ ب) $y=\sqrt{x}+۳x^۲-۱$ ج) $\frac{y-۳}{۵}=\frac{x-۱}{۶}$

۴۹- نمودار خطوط زیر را رسم کنید و بگویید هر خط از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می‌کند؟

الف) $۲y=۴x-۸$ ب) $\frac{x+y}{۲}=\frac{x-y+۲}{۴}$

ج) $x+۳=۰$ د) $y-۲=۰$

۵۰- خط به معادله‌ی $y=mx+(m-۲)$ به ازای هر عدد منفیِ m از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۵۱- مقادیر m و n را چنان بیابید که در تابع $f(x)=mx+n$ روابط $f(-۱)=-۱$ و $f(۲)=۶$ برقرار باشند. *(مشابه تمرین کتاب)*

۵۲- اگر $f(x)$ تابعی خطی برحسب x و $f(۰)=۴$ و $f(-۲)=۸$ باشد، شیب خط $f(x)$ را به دست آورده و معادله‌ی آن را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید. *(مشابه کار در کلاس کتاب)*

۵۳- یک کارخانه‌ی تولید لوله‌های آبیاری در هر ساعت ۰/۴ کیلومتر لوله تولید می‌کند. اگر متراژی که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند را برحسب متر با $f(x)$ نمایش دهیم، اولاً ضابطه‌ی $f(x)$ را بنویسید. ثانیاً پس از ۱۰ ساعت چند کیلومتر لوله تولید می‌شود؟ ثالثاً نمودار $f(x)$ را رسم کنید. *(مشابه فعالیت کتاب)*

۵۴- طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده، ۱۰ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود. ضابطه‌ی تابع خطی f (طول فنر) برحسب وزن جسم (x) را بنویسید. سپس مقادیر $f(۴)$ و $f(h-۱)$ را به دست آورده و نمودار تابع f را رسم کنید. *(مشابه فعالیت کتاب)*

۵۵- جدول زیر، رابطه‌ی خطی بین عمق و دمای سنگ‌های درون زمین را نشان می‌دهد. *(مشابه کار در کلاس کتاب)*

x عمق برحسب کیلومتر	۳	۵
y یا $f(x)$ دما برحسب سانتی‌گراد	۸۰	۱۴۰

الف) ضابطه $f(x)$ را تشکیل دهید.

ب) در چه عمقی دما به ۳۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌رسد؟

ج) در عمق ۱۰ کیلومتر، دما چه‌قدر خواهد بود؟

۵۶- نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(۱)=۱۰$ می‌باشد. در این صورت اختلاف $f(۰/۲)$ و $f(-۰/۲)$ را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب)*

۵۷- نمودار تابع خطی f را طوری رسم کنید که دامنه‌ی آن برابر $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰\le x\le ۵\}$ و بُرد آن برابر $R_f=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\le y\le ۶\}$ باشد و از نقطه‌ی $A(۳,۴)$ بگذرد. *(مشابه تمرین کتاب)*

۵۸- رابطه‌ی بین دما برحسب سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) به صورت $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$ است. دمای یک جسم ۳۰ درجه‌ی سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چه‌قدر افزایش داشته است؟ *(مشابه تمرین کتاب)*

۵۹- یک شرکت برای تولید x کالا دارای تابع هزینه‌ی $C(x)=۲۰۰+۱۰x$ می‌باشد و هر کالا را ۶۰ تومان می‌فروشد: *(مشابه تمرین کتاب)*

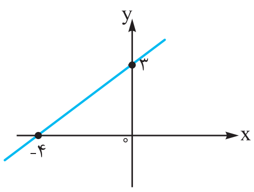
الف) تابع سود را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) حداقل چه تعداد کالا باید به فروش برسد تا سوددهی آغاز شود؟

۶۰- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۴,۴)$ گذشته و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

۶۱- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱,۲)$ گذشته و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع کند.

۶۲- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، $f(۲)$ را به دست آورید.



۶۳- یک شرکت نقاشی ساختمان، قیمتی که برای رنگ‌آمیزی x متر مربع از دیوار ساختمان در یک روز دریافت می‌کند، برابر با $(۲x-۱۰۰۰۰۰)$ تومان می‌باشد. ضمناً هزینه‌های جانبی مثل رفت‌وآمد، روزانه ۱۵۰۰۰ تومان می‌باشد و برای هر متر مربع ۱۰۰ تومان هزینه‌ی رنگ وجود دارد. *(مشابه فعالیت کتاب)*

الف) قیمت دریافتی شرکت برای رنگ‌آمیزی ۲۰۰ مترمربع در یک روز چه‌قدر است؟

ب) هزینه‌ی شرکت برای رنگ‌آمیزی ۲۰۰ متر مربع در یک روز چه‌قدر است؟

ج) سود شرکت به ازای رنگ‌آمیزی ۲۰۰ متر مربع در یک روز چه‌قدر است؟

د) جدول روبه‌رو را کامل کنید و نمودار سود برحسب x را رسم کنید.

x متراژ رنگ شده در یک روز	۱۰	۲۰	۱۰۰	۸۰۰
$P(x)$ سود				

هـ) نقاطی که پایین محور x ها هستند چه چیزی را نشان می‌دهند؟ آیا هر چه متراژ بیشتری رنگ شود، شرکت سود بیشتری کسب می‌کند؟

۶۴- سودی که از تولید x کالا توسط یک کارخانه به دست می‌آید، از معادله‌ی $y=-۳۰۰+۱۰x$ محاسبه می‌شود. (y سود برحسب میلیون تومان است):

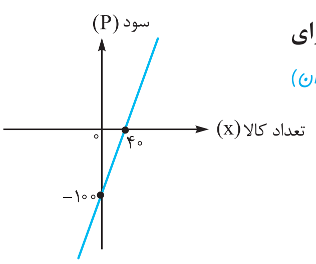
الف) نمودار خط $y=-۳۰۰+۱۰x$ را با فرض $x\ge ۰$ رسم کنید.

ب) محل برخورد نمودار خط با محور x ها چه موضوعی را نشان می‌دهد؟

ج) به ازای تولید ۵۰۰ کالا مقدار سود چه‌قدر است؟

د) اگر سود ۲۴۰ میلیون تومان باشد، چه تعداد کالا تولید شده است؟

۶۵- نمودار سود و زیان یک شرکت برحسب کالاهای فروخته‌شده به صورت مقابل است. این شرکت برای دستیابی به سودی بیشتر از ۶۰۰ میلیون تومان، حداقل باید چه تعداد کالا به فروش برساند؟ *(مخصوص علاقه‌مندان)*



۱) ۲۷۸

۲) ۲۷۹

۳) ۲۸۰

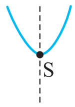
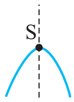
۴) ۲۸۱

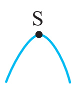
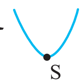
۶۶- به ازای چه مقدار از k شیب خطی که از نقاط $A(k+۱,۲k-۳)$ و $B(۳k+۴,۴k-۱)$ می‌گذرد، برابر $\frac{۱}{۳}$ است؟ *(مخصوص علاقه‌مندان)*

توابع درجه‌دوم

توابع درجه‌دوم
- رسم نمودار سهمی
- ماکزیمم‌کردن عبارت‌های درجه‌دوم

آشنایی با سهمی

هر تابع که به شکل $y = ax^{۲} + bx + c$ باشد $(a \neq ۰)$، یک تابع درجه‌دوم یا سهمی نام دارد. نمودار هر سهمی به شکل  یا  می‌باشد. به نقطه‌ی S در هر دو نمودار، رأس سهمی می‌گوییم. ضمناً خط‌چین رسم‌شده در این دو شکل، محور تقارن سهمی است. یعنی اگر سهمی را روی این خط، تا کنیم، دو قسمت سهمی دقیقاً روی هم قرار می‌گیرند. در هر دو شکل، طول رأس سهمی برابر $x = \frac{-b}{۲a}$ است. برای یافتن عرض S هم کافی است در تابع سهمی به جای x ها عدد به دست آمده از فرمول $x = \frac{-b}{۲a}$ را قرار دهیم. (ضمناً معادله‌ی محور تقارن هم $x = \frac{-b}{۲a}$ است.)

در تابع $y = ax^{۲} + bx + c$ اگر ضریب $x^{۲}$ یعنی عدد a منفی باشد، سهمی ماکزیمم دارد؛ یعنی نمودار آن به شکل  خواهد بود. در این حالت عرض S از عرض بقیه‌ی نقاط سهمی بیشتر است. هم‌چنین اگر ضریب $x^{۲}$ یعنی عدد a مثبت باشد، سهمی مینیمم دارد؛ یعنی نمودار آن به شکل  خواهد بود. در این حالت عرض S از عرض بقیه‌ی نقاط سهمی کم‌تر است.

مثال و جواب

مثال مختصات رأس سهمی‌های زیر را به دست آورده و بگویید هر سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟

الف) $y = x^{۲} - ۴x - ۳$ **ب)** $y = -۲x^{۲} + ۵$ **ج)** $y = -(x-۳)^{۲} + ۱$

جواب

الف) $\underbrace{۱}_{a}x^{۲} \underbrace{-۴}_{b}x - ۳ \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲(۱)} = \frac{۴}{۲} = ۲$ طول رأس (محور تقارن)

حال در تابع سهمی به جای x ها عدد ۲ را قرار می‌دهیم تا عرض رأس هم پیدا شود:

$y = x^{۲} - ۴x - ۳ \xrightarrow{(x=۲)} y = ۲^{۲} - ۴(۲) - ۳ = ۴ - ۸ - ۳ = -۷$ عرض رأس

پس مختصات رأس سهمی به صورت $S(۲,-۷)$ می‌باشد. ضمناً سهمی مینیمم دارد، چون ضریب $x^{۲}$ مثبت است.

ب) $y = \underbrace{-۲}_{a}x^{۲} + \underbrace{۵}_{c} \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۰}{۲(-۲)} = ۰$ طول رأس (محور تقارن)

دقت کنید که تابع سهمی، جمله‌ی شامل x را ندارد، پس $b = ۰$ است. حال برای یافتن عرض رأس کافی است در تابع سهمی به جای x عدد صفر را قرار دهیم:

$y = -۲x^{۲} + ۵ \xrightarrow{x=۰} y = -۲(۰)^{۲} + ۵ = ۰ + ۵ = ۵$ عرض رأس

پس مختصات رأس سهمی به صورت $S(۰,۵)$ است و ضمناً سهمی ماکزیمم دارد، چون ضریب $x^{۲}$ منفی است.

ج) $y = -\underbrace{(x-۳)^{۲}}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} + ۱ \Rightarrow y = -(x^{۲} - ۶x + ۹) + ۱ = -x^{۲} + ۶x - ۹ + ۱ = -x^{۲} + ۶x - ۸$

ضمناً سهمی ماکزیمم دارد، چون ضریب $x^{۲}$ منفی است.

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲(-۱)} = ۳ \xrightarrow{\text{در تابع}} y = -\underbrace{(۳-۳)^{۲}}_{۰} + ۱ = ۱ \Rightarrow S(۳,۱)$ رأس

شاگرد: استاد $x = ۳$ رو باید توی رابطه‌ی $y = -(x-۳)^{۲} + ۱$ قرار بدیم یا $y = -x^{۲} + ۶x - ۸$؟

دبیر: فرقی نداره ولی ما $x = ۳$ رو توی $y = -(x-۳)^{۲} + ۱$ قرار دادیم.

رسم نمودار سهمی

برای این کار ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم، سپس جدولی رسم می‌کنیم و طول و عرض رأس را در ستون وسط جدول، زیر هم می‌نویسیم. حال ۱ واحد کم‌تر و ۱ واحد بیشتر از طول رأس را در دو طرف آن قرار می‌دهیم و عرض این دو نقطه را نیز با جای‌گذاری در تابع به دست می‌آوریم. *(همیشه این دو عرض با هم مساوین، پس کافیه یکی از اون‌ها رو به دست بیاریم.)* سپس با توجه به این‌که سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم، این نقاط را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم.

مثال و جواب

مثال نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^2 + 2x - 3$ **ب)** $y = 4 - x^2$ **ج)** $y = \frac{-1}{2}(x+2)^2 + 5$ **د)** $y = x^2$

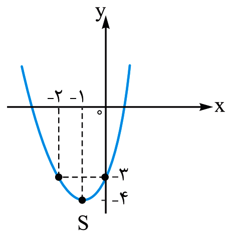
جواب

الف) $y = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1 \xrightarrow{\text{در تابع سهمی قرار می‌دهیم.}} y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4 \Rightarrow S\begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ مختصات رأس

	−۱		+۱
x	−۲	−۱	۰
y	−۳	−۴	−۳

رأس را وسط جدول قرار می‌دهیم.

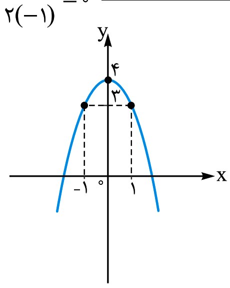
ضمناً سهمی مینیمم دارد چون $a=1>0$ است.



ب) $y = 4 - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} = 0 \xrightarrow{\text{در تابع سهمی}} y = -0^2 + 4 = 4 \Rightarrow S\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}$ مختصات رأس

	−۱		+۱
x	−۱	۰	۱
y	۳	۴	۳

سهمی ماکزیمم دارد چون $a=-1<0$ است.

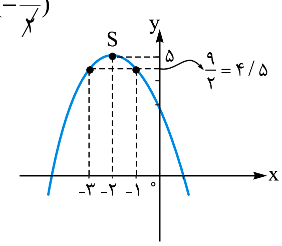


ج) $y = -\frac{1}{2}\underbrace{(x+2)^2}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} + 5 = \frac{-1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 5 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 + 5 \Rightarrow S\begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$ مختصات رأس

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{\cancel{2}(-\frac{1}{\cancel{2}})} = -2 \xrightarrow{\text{در تابع سهمی}} y = -\frac{1}{2}\underbrace{(-2+2)^2}_{0} + 5 = 5$

	−۱		+۱
x	−۳	−۲	−۱
y	$\frac{9}{2}$	۵	$\frac{9}{2}$

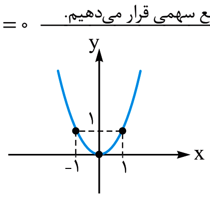
سهمی ماکزیمم دارد چون ضریب x^2 منفی است.



د) $y = x^2 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} = 0 \xrightarrow{\text{در تابع سهمی قرار می‌دهیم.}} y = 0^2 = 0 \Rightarrow S\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ مختصات رأس

	−۱		+۱
x	−۱	۰	+۱
y	۱	۰	۱

سهمی مینیمم دارد چون $a>0$ است.



ماکزیمم کردن عبارت‌های درجه‌دوم (بهینه‌سازی)

در فصل (۲) گفتیم که در تابع سود که معمولاً سهمی است، اگر تعداد کالاها برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ باشد شرکت بیشترین سود را کسب خواهد کرد. پس الان دیگر نمی‌خواهیم در مورد مسائل سود صحبت کنیم. (به انتهای فصل (۲) مراجعه کنید.)

در بعضی از سؤالات رابطه‌ای داده می‌شود که شامل ۲ متغیر است (رابطه‌ی فرعی) سپس از ما خواسته می‌شود این ۲ متغیر را طوری پیدا کنیم که عبارتی شامل ضرب آن‌ها (رابطه‌ی اصلی) ماکزیمم شود. در این‌گونه مسائل که به بهینه‌سازی معروف‌اند، ابتدا از رابطه‌ی فرعی، یکی از متغیرها را به دلخواه انتخاب کرده برحسب متغیر دیگر به دست می‌آوریم، سپس در عبارت اصلی، به جای این متغیر، مقدارش را جای‌گذاری کرده تا به یک تابع درجه‌دوم (سهمی) برسیم، سپس از فرمول ($\frac{-b}{2a}=$ متغیر) استفاده می‌کنیم تا یکی از متغیرها پیدا شود *(ننوشتم* $x=\frac{-b}{2a}$ *چون ممکنه به جای x هر اسم دیگه‌ای هم مطرح بشه.)* با جای‌گذاری جواب در رابطه‌ی فرعی، متغیر دیگر هم پیدا می‌شود.

مثال و جواب

مثال اگر $x+2y=12$ باشد، مقادیر x و y را طوری بیابید که عبارت $5xy$ ماکزیمم شود. (دارای بیشترین مقدار شود.)

(مشابه تمرین کتاب)

جواب رابطه‌ی $x+2y=12$ رابطه‌ی فرعی ماست. ولی عبارت $5xy$ عبارت اصلی است، چون می‌خواهیم ماکزیمم شود. از رابطه‌ی فرعی یکی از متغیرها را برحسب دیگری پیدا می‌کنیم *(در رابطه‌ی فرعی* $x+2y=12$ *، متغیر x ضریب ۱ داره پس بهتره x رو برحسب y بدست بیاوریم):*

$x+2y=12 \Rightarrow \boxed{x=-2y+12}$

$\text{عبارت اصلی}=5xy=5(-2y+12).y=(-10y+60)y=-10y^2+60y$

می‌بینیم که به یک سهمی رسیده‌ایم *(چون توان ۲ وجود داره.)* ولی چون y مشاهده می‌کنیم، به جای $x=\frac{-b}{2a}$ باید بنویسیم: $y=\frac{-b}{2a}$ (مثلاً اگه در یک سؤال به $-5z^2+8z$ رسیدیم، به جای $x=\frac{-b}{2a}$ باید بنویسیم $z=\frac{-b}{2a}$؛ چون متغیر z است.)

$\text{عبارت اصلی}=\underset{a}{-10}y^2+\underset{b}{60}y \Rightarrow y=\frac{-b}{2a}=\frac{-60}{2(-10)}=\frac{60}{20}=3$

$x=-2y+12 \xrightarrow{y=3} x=-2(3)+12=6$

شاگرد: حالا استاد اگه گفته شه بیشترین مقدار $5xy$ *چه‌قدره، باید چیکار کنیم؟*

دبیر: کاری نداره. کافیه x و y ای رو که پیدا کردیم در $5xy$ *قرار بدیم:* $\text{بیشترین مقدار}=5\times6\times3=90$ $5xy$

مثال و جواب

مثال در مستطیل‌هایی با محیط ۷۲ مترمربع، بیشترین مقدار مساحت چه‌قدر است؟

جواب اگر طول و عرض مستطیل‌ها را x و y فرض کنیم خواهیم داشت:

$\text{محیط مستطیل‌ها}=72 \Rightarrow (x+y)\times\cancel{2}=\overset{36}{\cancel{72}} \Rightarrow x+y=36 \Rightarrow y=-x+36$ (رابطه‌ی فرعی)

$\text{مساحت مستطیل‌ها}=x.y=x(-x+36)=-x^2+36x \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-36}{2(-1)}=18$ طول مستطیل

$y=-x+36=-18+36=18$ عرض مستطیل

$\text{بیشترین مقدار}\ xy=18\times18=324$ (ماکزیمم مساحت مستطیل‌ها)

مثال و جواب

مثال در یک شرکت اگر تابع درآمد به صورت $y=\frac{-1}{2}x^2+20x$ و تابع هزینه به صورت $y=10x+40$ باشد، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(مشابه تمرین کتاب)

الف) تابع سود را تشکیل دهید.

ب) به ازای تولید چه تعداد کالا، سود شرکت ماکزیمم خواهد شد؟ (به حداکثر مقدار خود می‌رسد.)

ج) مقدار سود ماکزیمم را محاسبه کنید.

جواب مشابه این سؤال را در انتهای فصل (۲) هم حل کرده‌ایم. ولی چون مسائل سود مهم هستند، در این فصل هم، دوباره چند سؤال از آن‌ها در تمرینات داده‌ایم تا کاملاً مسلط شوید.

الف) $\text{تابع سود}=\text{تابع درآمد}-\text{تابع هزینه}=(-\frac{1}{2}x^2+20x)-(10x+40)=-\frac{1}{2}x^2+10x-40$

ب) تعداد کالاهایی که سود را ماکزیمم می‌کنند. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-10}{\cancel{2}(-\frac{1}{\cancel{2}})}=10$

ج) $\text{سود}=-\frac{1}{2}x^2+10x-40 \xrightarrow{x=10} \text{سود ماکزیمم}=(-\frac{1}{\cancel{2}}\times\overset{5}{\cancel{10}}\times10)+(10\times10)-40=10$

سؤال‌های امتحانی

۶۷- اگر داشته باشیم $۲x+y=۴۰$، بیشترین مقدار (ماکزیمم) حاصل‌ضرب x و y را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب)*

۶۸- اگر عدد حقیقی x بین دو عدد ۰ و ۳ تغییر کند، بیشترین مقدار اختلاف ۳ برابر آن عدد با مربعش را به دست آورید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۶۹- بیشترین مقدار تفاضل مربع عددی از خود آن عدد کدام است؟ *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۷۰- بین قاعده (a) و ارتفاع (h) مثلثی رابطه‌ی $a+۲h=۲۰$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت مثلث چه‌قدر است؟ (ماکزیمم مساحت چه‌قدر است؟)

۷۱- نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید. *(مشابه تمرین کتاب)*

الف) $y=x^۲-۴x$ ب) $y=-۲(x-۱)^۲+۳$ ج) $y=\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲-۱$

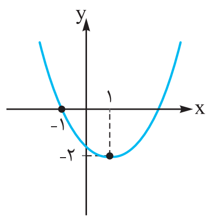
د) $y=۵-۳x^۲$ هـ) $y=x^۲+۳$

۷۲- بیشترین مساحت مستطیلی که می‌توان به کمک یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه از سه طرف محصور نمود، چند متر مربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نداریم.)

۷۳- اگر نقطه‌ی S به طول ۱ رأس سهمی $y=(x-m)^۲-۴$ باشد، مقدار m را به دست آورید. سپس مقدار مینیمم تابع را به دست آورید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۷۴- نقطه‌ی $S(-۱,-۴)$ رأس سهمی $y=۳x^۲+ax+b$ است. مقادیر a و b را به دست آورید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۷۵- معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟



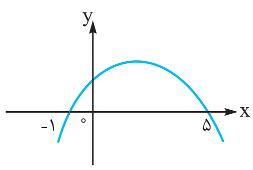
۱) $y=x^۲-x-۳$

۲) $y=۲x^۲+x-۱$

۳) $y=\frac{-۱}{۲}x^۲+x+\frac{۳}{۲}$

۴) $y=\frac{۱}{۲}x^۲-x-\frac{۳}{۲}$

۷۶- معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=x^۲-۳x+۵$ ۲) $y=x^۲-۴x+۵$

۳) $y=-x^۲+۴x+۵$ ۴) $y=-x^۲-۴x+۵$

۷۷- اگر خط $x=\frac{۳}{۲}$ محور تقارن سهمی $y=(k+۱)x^۲-۴kx-۲$ باشد، مقدار k را به دست آورید.

۷۸- عرض رأس (کم‌ترین مقدار) سهمی $y=۲x^۲-۸x+m$ برابر ۵- است. m را به دست آورید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۷۹- اگر تابع $y=(۱-m)x^۲+(m^۲-۶)x+۱$ در نقطه‌ای به طول (-۱) دارای ماکزیمم باشد، مقدار m را به دست آورید. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

۸۰- اگر طول رأس نمودار $y=-x^۲-kx+۳$ برابر (-۱) باشد، ماکزیمم این تابع (بیشترین مقدار تابع) چه‌قدر است؟

۸۱- محور عرض‌ها محور تقارن کدام سهمی زیر است؟

۱) $y=x^۲-۶x+۲$ ۲) $y=۳+۸x-x^۲$ ۳) $y=-۵x^۲+۳$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x$

۸۲- نمودار تابع $y=-۳(x-۲)^۲+۲$ از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند؟

۱) هر چهار ناحیه ۲) اول، دوم، سوم ۳) دوم، سوم، چهارم ۴) اول، سوم، چهارم

۸۳- در یک کارخانه نوعی لامپ تولید می‌شود و هر لامپ به قیمت ۳۰۰ تومان به فروش می‌رود. اگر کارخانه هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و معادله‌ی هزینه‌ی آن $C(x)=x^۲+۲۰۰x+۳۰$ باشد: *(مشابه تمرین کتاب)*

الف) معادله‌ی سود روزانه‌ی این کارخانه را بنویسید.

ب) این کارخانه چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را به دست آورد؟

ج) بیشترین مقدار سود روزانه چه‌قدر است؟

۸۴- محیط مستطیلی ۴۰ متر است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع را با x و مساحت را با S نمایش دهیم، ابتدا تابع مساحت را برحسب x به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود؟

(مشابه تمرین کتاب)

۸۵- تابع درآمد و هزینه‌ی هفتگی شرکتی به صورت مقابل است: $R(x) = ۲۱x - x^۲ \ , C(x) = ۲۰ + x$

الف) معادله‌ی (تابع) سود را تشکیل دهید.

ب) چند واحد کالا تولید شود تا بیشترین سود عاید شرکت شود؟

ج) ماکزیمم سود شرکت چه‌قدر است؟

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) x متغیر مستقل و $h(x)$ متغیر وابسته است.

ب) t متغیر مستقل و $f(t)$ متغیر وابسته است.

ج) پیشرفت تحصیلی وابسته به بهره‌ی هوشی است، پس پیشرفت تحصیلی متغیر وابسته و بهره‌ی هوشی متغیر مستقل است.

د) مساحت مثلث به ارتفاع و قاعده‌ی آن وابسته است، پس مساحت مثلث، متغیر وابسته و قاعده و ارتفاع، متغیرهای مستقل هستند.

۲- باید عضوهای اول زوج مرتب‌ها با هم و عضوهای دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$\times(-۲)\begin{cases} a - ۲b = ۴ \\ ۲a - b = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-۲a} + ۴b = -۸ \\ \cancel{۲a} - b = ۸ \end{cases}$$

$$۳b = ۰ \Rightarrow b = ۰ \Rightarrow a - ۲b = ۴ \Rightarrow a - ۲(۰) = ۴ \Rightarrow a = ۴$$

۳- چون $x \le ۴$ و $x \in \mathbb{N}$ لذا: $x \in \{۱,۲,۳,۴\}$، حال این اعداد را به جای x در ضابطه‌ی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$y = x + ۳ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۱} y = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow (۱,۴) \\ \xrightarrow{x=۲} y = ۲ + ۳ = ۵ \Rightarrow (۲,۵) \\ \xrightarrow{x=۳} y = ۳ + ۳ = ۶ \Rightarrow (۳,۶) \\ \xrightarrow{x=۴} y = ۴ + ۳ = ۷ \Rightarrow (۴,۷) \end{cases} \Rightarrow R = \{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶),(۴,۷)\}$$

۴- باید x و y مربوط به هر زوج مرتب را طوری از مجموعه‌ی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ انتخاب کنیم که در رابطه‌ی $|x| + |y| = ۱$ صدق کنند. لذا خواهیم داشت:

$$|\underset{x}{۰}| + |\underset{y}{-۱}| = ۱ \Rightarrow (۰,-۱) \qquad |\underset{x}{۰}| + |\underset{y}{۱}| = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$$

$$|\underset{x}{-۱}| + |\underset{y}{۰}| = ۱ \Rightarrow (-۱,۰) \qquad |\underset{x}{۱}| + |\underset{y}{۰}| = ۱ \Rightarrow (۱,۰)$$

$$\Rightarrow R = \{(۰,۱),(۱,۰),(-۱,۰),(۰,-۱)\}$$

۵- با توجه به شرط $۱۶ \le x \le ۱۸$ باید مقسوم‌علیه‌های مثبت اعداد ۱۶، ۱۷ و ۱۸ را تعیین کنیم:

مقسوم‌علیه‌های ۱۶ $= ۱,۲,۴,۸,۱۶ \Rightarrow$ زوج مرتب‌ها $= (۱۶,۱),(۱۶,۲),(۱۶,۴),(۱۶,۸),(۱۶,۱۶)$

مقسوم‌علیه‌های ۱۷ $= ۱,۱۷ \Rightarrow$ زوج مرتب‌ها $= (۱۷,۱),(۱۷,۱۷)$

مقسوم‌علیه‌های ۱۸ $= ۱,۲,۳,۶,۹,۱۸ \Rightarrow$ زوج مرتب‌ها $= (۱۸,۱),(۱۸,۲),(۱۸,۳),(۱۸,۶),(۱۸,۹),(۱۸,۱۸)$

$$\Rightarrow R = \{(۱۶,۱),(۱۶,۲),(۱۶,۴),(۱۶,۸),(۱۶,۱۶),(۱۷,۱),(۱۷,۱۷),(۱۸,۱),(۱۸,۲),(۱۸,۳),(۱۸,۶),(۱۸,۹),(۱۸,۱۸)\}$$