



● برای حل کردن یک مسئله باید مراحل زیر را طی کنیم:

- ۱ فهمیدن مسئله
- ۲ انتخاب راهبرد مناسب
- ۳ حل کردن مسئله با راهبرد انتخاب شده
- ۴ بازگشت به عقب و بررسی جواب به دست آمده برای اطمینان از این که جواب صحیح و منطقی باشد.

راهبردهای حل مسئله

الف) راهبرد رسم شکل: برخی از مسائل را می توان با رسم شکل مناسب، فهمید و حل نمود.

مثال علی نصف پولش را کتاب و نصف بقیه پول خود را دفتر خرید، سپس به مغازه شیرینی فروشی رفت و با نصف باقی مانده پولش برای برادر کوچکش شیرینی خرید و در راه بازگشت به خانه با نصف بقیه پولش یک ظرف ماست خرید. اگر برای او ۱۰۰۰ تومان باقی بماند، کل پول او چه قدر بوده است؟

ابتدا یک مستطیل را رسم می کنیم و مرحله به مرحله میزان پول هایی که علی خرج کرده است را روی آن مشخص می نماییم.

| | | |
|------|----------------|------|
| کتاب | دفتر | |
| | شیرینی | ماست |
| | باقی مانده پول | |

سپس مشخص می کنیم پول باقی مانده چه کسری از کل پول علی است.

| | | |
|------|----------------|------|
| | دفتر | |
| کتاب | شیرینی | ماست |
| | باقی مانده پول | |

$$\text{کل} = \frac{1}{16} = \text{پول باقی مانده} \Rightarrow$$

در مرحله‌ی بعد با جدول نسبت و تناسب می‌توانیم به جواب مسئله برسیم؟

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1000 \\ \hline 16 & ? \\ \hline \end{array} \Rightarrow ? = 16000$$

کل پول اولیه‌ی علی $16000 = ?$

ب الگوسازی (تفکر نظام‌دار): در برخی از مسائل ما مجبوریم تمام حالت‌های ممکن را بنویسیم، پس باید حالت‌ها با نظم و الگوی خاصی

نوشته شود تا حالتی از قلم نیفتد.

مثال یک جهانگرد می‌خواهد از سه شهر شیراز، اصفهان و تبریز بازدید کند. به چند حالت مختلف می‌تواند این کار را انجام دهد؟

| شهر اول | شهر دوم | شهر سوم |
|---------|---------|---------|
| شیراز | تبریز | اصفهان |
| شیراز | اصفهان | تبریز |
| تبریز | شیراز | اصفهان |
| تبریز | اصفهان | شیراز |
| اصفهان | تبریز | شیراز |
| اصفهان | شیراز | تبریز |

6 حالت مختلف \Rightarrow

حذف حالت‌های نامطلوب: برای بعضی از مسائل، همدی حالت‌های ممکن را در نظر می‌گیریم (الگوسازی) و سپس با توجه به شرایط

مسئله، حالت‌های نامطلوب و غیرقابل قبول را حذف می‌کنیم تا به جواب‌های موردنظر برسیم.

مثال اعداد دورقمی را که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند و مجموع ارقامشان زوج نیست، مشخص کنید.

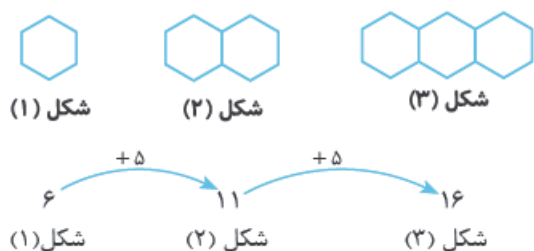
| عدد | مجموع ارقام |
|-----|-------------------------|
| ۱۵ | $1+5=6$ → حالت نامطلوب |
| ۳۰ | $3+0=3$ → جواب: ۳۰, ۴۵ |
| ۴۵ | $4+5=9$ → جواب: ۳۰, ۴۵ |
| ۶۰ | $6+0=6$ → حالت نامطلوب |
| ۷۵ | $7+5=12$ → حالت نامطلوب |

اعدادی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند، همان مضارب عدد ۱۵ هستند و با توجه به جدول، اعداد موردنظر از این قرارند:

راهبرد الگویابی: در بعضی از مسائل بین اعداد یا اشکال، رابطه و الگوی منظمی وجود دارد و با پیدا کردن و کشف این الگو می‌توانیم

عدد یا شکل بعدی را مشخص کنیم.

مثال مشخص کنید شکل بعدی الگوی زیر چند پاره‌خط دارد؟



تعداد پاره‌خط‌ها در شکل‌ها به ترتیب زیر است:

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، از هر شکل به شکل بعدی ۵ پاره‌خط اضافه می‌شود، پس می‌توان گفت در شکل چهارم خواهیم داشت:

$$16 + 5 = 21 = \text{تعداد پاره‌خط}$$

راهبرد حدس و آزمایش: در بعضی از مسائل که رسیدن به جواب با محاسبات یا نوشتن همهی حالتها، طولانی و پیچیده است، با استفاده از حدسهای منطقی و منظم و امتحان کردن آنها می‌توانیم به جواب مطلوب برسیم.

مثال: دو زاویه متمم هستند و یکی چهار برابر دیگری است. آنها را مشخص کنید.

| زاویه ۱ | زاویه ۲ | مجموع |
|---------|---------|-------|
| ۱۰ | ۴۰ | ۵۰ |
| ۲۰ | ۸۰ | ۱۰۰ |
| ۱۵ | ۶۰ | ۷۵ |
| ۱۸ | ۷۲ | ۹۰ |

جواب →

راهبرد زیر مسئله: برای راحت‌تر حل شدن بعضی از مسائل پیچیده، باید آنها را به زیرمسئله‌های ساده‌تر تقسیم کرده و سپس مسئله را حل کنیم.

مثال: یک میوه‌فروش ۳۰ کیلوگرم سیب به قیمت هر کیلوگرم ۱۰۰۰ تومان، ۴۰ کیلوگرم پرتقال به قیمت هر کیلوگرم ۱۲۰۰ تومان و ۷۰ کیلوگرم پیاز به قیمت هر کیلوگرم ۵۰۰ تومان خریداری می‌کند و سیب‌ها را به قیمت هر کیلوگرم ۱۲۰۰ تومان، پرتقال‌ها را به قیمت هر کیلوگرم ۱۵۰۰ تومان و پیازها را به قیمت هر کیلوگرم ۸۰۰ تومان می‌فروشد. سود او را محاسبه کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{قیمت تمام شده برای خرید را محاسبه می‌کنیم:} \\ \text{کل قیمت سیب: } 30 \times 1000 = 30000 \\ \text{کل قیمت پرتقال: } 40 \times 1200 = 48000 \\ \text{کل قیمت پیاز: } 500 \times 70 = 35000 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع خرید}} 30000 + 48000 + 35000 = 113000$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{سپس قیمت کل فروش را محاسبه می‌کنیم:} \\ \text{سیب: } 30 \times 1200 = 36000 \\ \text{پرتقال: } 40 \times 1500 = 60000 \\ \text{پیاز: } 70 \times 800 = 56000 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع فروش}} 36000 + 60000 + 56000 = 152000$$

$$152000 - 113000 = 39000$$

و در آخر سود را محاسبه می‌کنیم:

راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر: برای حل کردن برخی از مسائل می‌توانیم ابتدا مسئله‌ای ساده‌تر و مرتبط با آن را حل کرده و سپس با توجه به آن، مسئله‌ی اصلی را حل کنیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{مخرج آخرین کسر = مخرج جواب} \\ \text{یک واحد کم‌تر از مخرج آخرین کسر = صورت جواب} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جواب} = \frac{1023}{1024}$$

راهبرد روش‌های نمادین: در این روش، روابط ریاضی داده‌شده در مسئله را می‌نویسیم و به جای قسمت‌های مجهول و مورد سؤال، از یک نماد ریاضی استفاده می‌کنیم و سپس با استفاده از حدس و آزمایش و یا روابط جبری که در فصل‌های آینده مطالعه می‌کنیم، قسمت مجهول را به دست می‌آوریم.

مثال اگر از ۷ برابر سن رضا ۱۱ واحد کم کنیم، حاصل برابر با ۴ واحد بیشتر از ۲ برابر سن او می‌شود. سن رضا را مشخص کنید.

$$4 + \text{سن رضا} \times 2 = 11 - \text{سن رضا} \times 7$$

غلط $24 = 59 \Rightarrow 70 - 11 = 20 + 4 \Rightarrow 70 - 11 = 20 + 4 \Rightarrow 59 = 24$

غلط $14 = 24 \Rightarrow 35 - 11 = 10 + 4 \Rightarrow 35 - 11 = 10 + 4 \Rightarrow 24 = 14$

صحیح $10 = 10 \Rightarrow 21 - 11 = 6 + 4 \Rightarrow 21 - 11 = 6 + 4 \Rightarrow 10 = 10$

سوالات فصل اول

راهنمای حل مسئله

۱ به پرسش‌های زیر پاسخ صحیح دهید.

۱ داخل یک اتاق مستطیل‌شکل به ابعاد ۵ و ۴ متر، فرش‌پهن شده است. اگر هر ضلع فرش با دیوار روبه‌رویش یک متر فاصله داشته باشد، مساحت فرش چه قدر است؟

۲ توپی را از ارتفاع ۸۱ متری رها می‌کنیم. در صورتی که توپ پس از هر برخورد با زمین به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی‌اش بالا رود، تا برخورد چهارم با زمین، چه مسافتی را طی می‌کند؟

۳ یک خرس قطبی هر روز ۵ متر از یک تپه یخی به ارتفاع ۲۰ متر بالا می‌رود و شب‌ها هنگام استراحت سه متر به پایین لیز می‌خورد. او پس از چند روز به بالای تپه می‌رسد؟

۴ یک میوه‌فروش نصف میوه‌هایش را تا ساعت ۱۲ ظهر به فروش می‌رساند، ثلث بقیه‌ی میوه‌ها را تا ساعت ۸ شب به فروش می‌رساند و ربع باقی‌مانده‌ی میوه‌ها را به علت خراب‌شدن دور می‌ریزد. اگر در آخر روز ۶۰ کیلو میوه برای او باقی بماند، کل میوه‌های او چه قدر بوده است؟

۵ رضا سرما می‌خورد و به پزشک مراجعه می‌کند. دکتر به او ۱۸ قرص می‌دهد و از او می‌خواهد هر ۸ ساعت یک قرص میل کند. رضا پس از چند روز قرص‌هایش را تمام می‌کند؟

۶ حاصل جمع دو عدد طبیعی ۱۶ است. آن‌ها را طوری مشخص کنید که حاصل ضربشان حداکثر باشد؟

۷ حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۲۴ است. آن‌ها را طوری مشخص کنید که حاصل جمعشان حداکثر باشد؟

۸ سهراب ۶۰۰۰ تومان پول دارد و می‌خواهد با همه‌ی پول خود بستنی و شکلات بخرد. اگر قیمت هر بستنی ۵۰۰ تومان و قیمت هر شکلات ۱۰۰۰ تومان باشد، سهراب چند انتخاب مختلف برای خرید دارد؟

۹ با سکه‌های ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی به چند طریق می‌توان ۳۵۰ تومان را پرداخت کرد؟

۱۰ با ارقام ۴، ۶ و ۷ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که بر ۲ بخش‌پذیر باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

۱۱ چند عدد دورقمی داریم که بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۸ بخش‌پذیر نباشند؟

۱۲ آقای کاظمی سه فرزند دارد که هیچ‌کدام دوقلو نیستند. اگر مجموع سن آن‌ها ۱۲ و حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ باشد، سن فرزندان او را به دست آورید.

۱۳ مثلی داریم که اندازه‌ی دو ضلع آن ۵ و ۴ است. اندازه‌ی ضلع سوم آن چه اعدادی می‌توانند باشند؟ (مجموع دو ضلع همواره از ضلع سوم باید بزرگ‌تر باشد).

۱۴ سه عدد بعدی دنباله‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) ۴, ۹, ۱۴, ۱۹, ..., ..., ...

(ب) ۷, ۱۴, ۲۸, ..., ..., ...

(پ) ۱۵, ۱۸, ۲۲, ۲۷, ..., ..., ...

(ت) ۵۱۲, ۲۵۶, ۱۲۸, ..., ..., ...

پاسخ سوالات فصل اول

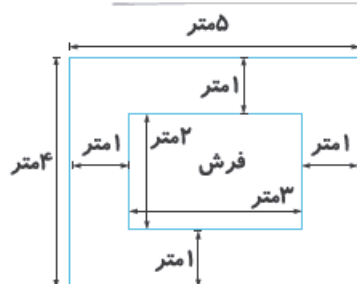
راهبردهای حل مسئله

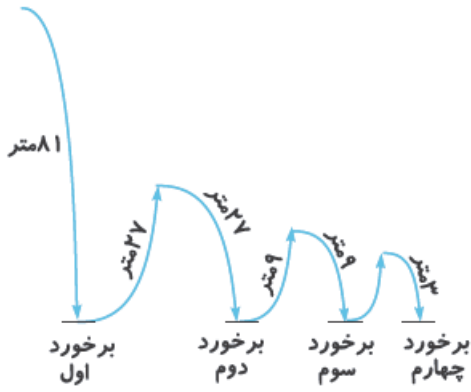
پاسخ ۱

۱

همان طور که می بینیم طول و عرض فرش به ترتیب ۳ و ۲ متر خواهد بود.

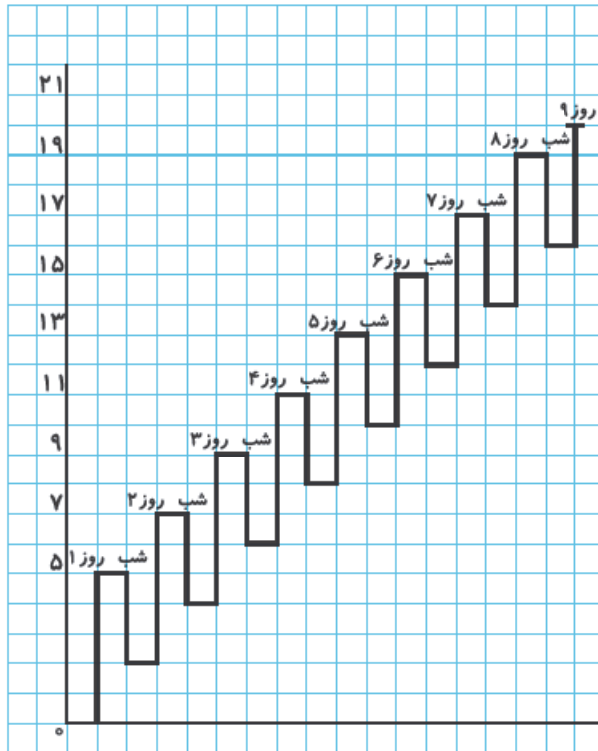
$$\text{مترمربع } 6 = 3 \times 2 = \text{مساحت فرش}$$





$$81 + 27 + 27 + 9 + 9 + 3 + 3 = 159 \text{ متر}$$

$\uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$



⇒ پس از ۹ روز به بالای تپه می‌رسد.

| | |
|----------|---------|
| | تا ۸ شب |
| تا ۲ ظهر | باقی |
| | مانده |

$$\Rightarrow \begin{matrix} \times 60 \\ \begin{matrix} 1 & 60 \\ 4 & ? \end{matrix} \\ \times 60 \end{matrix} \Rightarrow ? = 240 \text{ کیلوگرم}$$

$$\text{باقی مانده‌ی میوه‌ها} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$



$\frac{5}{3}$ روز طول می‌کشد که قرص‌های او تمام شود (۵ روز و ۱۶ ساعت).

| عدد اول | عدد دوم | حاصل ضرب |
|---------|---------|----------|
| ۱ | ۱۵ | ۱۵ |
| ۲ | ۱۴ | ۲۸ |
| ۳ | ۱۳ | ۳۹ |
| ۴ | ۱۲ | ۴۸ |
| ۵ | ۱۱ | ۵۵ |
| ۶ | ۱۰ | ۶۰ |
| ۷ | ۹ | ۶۳ |
| ۸ | ۸ | ۶۴ |

وقتی دو عدد کم‌ترین فاصله را دارند حاصل ضرب حداکثر است.

| عدد اول | عدد دوم | حاصل جمع |
|---------|---------|----------|
| ۱ | ۲۴ | ۲۵ |
| ۲ | ۱۲ | ۱۴ |
| ۳ | ۸ | ۱۱ |
| ۴ | ۶ | ۱۰ |

وقتی دو عدد بیشترین فاصله را دارند حاصل جمع حداکثر است.

| بستنی | شکلات | جمع مبلغ |
|-------|-------|----------|
| ۱۲ | ۰ | ۶۰۰۰ |
| ۱۰ | ۱ | ۶۰۰۰ |
| ۸ | ۲ | ۶۰۰۰ |
| ۶ | ۳ | ۶۰۰۰ |
| ۴ | ۴ | ۶۰۰۰ |
| ۲ | ۵ | ۶۰۰۰ |
| ۰ | ۶ | ۶۰۰۰ |

هفت حالت ممکن:

| تعداد سکه‌ی ۵۰ تومانی | تعداد سکه‌ی ۱۰۰ تومانی | تعداد سکه‌ی ۲۰۰ تومانی | جمع |
|-----------------------|------------------------|------------------------|-----|
| ۷ | ۰ | ۰ | ۳۵۰ |
| ۵ | ۱ | ۰ | ۳۵۰ |
| ۳ | ۲ | ۰ | ۳۵۰ |
| ۳ | ۰ | ۱ | ۳۵۰ |
| ۱ | ۳ | ۰ | ۳۵۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۳۵۰ |

شش حالت مختلف:

چهار عدد می‌توان نوشت:

| | رقم سوم (یکان) | رقم دوم (دهگان) | رقم اول (صدگان) |
|---------------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| کل اعدادی که می‌توان نوشت | ۷ | ۶ | ۴ |
| | ۶ | ۷ | ۴ |
| | ۷ | ۴ | ۶ |
| | ۴ | ۷ | ۶ |
| | ۶ | ۴ | ۷ |
| | ۴ | ۶ | ۷ |

حالت نامطلوب
جواب
حالت نامطلوب
جواب
جواب
جواب

اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و ۴ مضارب ۱۲ هستند.

| مضارب ۱۲ | بخش‌پذیری بر ۸ |
|----------|----------------|
| ۱۲ | مطلوب |
| ۲۴ | نامطلوب |
| ۳۶ | مطلوب |
| ۴۸ | نامطلوب |
| ۶۰ | مطلوب |
| ۷۲ | نامطلوب |
| ۸۴ | مطلوب |
| ۹۶ | نامطلوب |

۴ عدد: پاسخ

| فرزند اول | فرزند دوم | فرزند سوم | حاصل جمع | حاصل ضرب |
|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| ۱ | ۲ | ۹ | ۱۲ | ۱۸ |
| ۱ | ۳ | ۸ | ۱۲ | ۲۴ |
| ۱ | ۴ | ۷ | ۱۲ | ۲۸ |
| ۱ | ۵ | ۶ | ۱۲ | ۳۰ |
| ۲ | ۳ | ۷ | ۱۲ | ۴۲ |
| ۲ | ۴ | ۶ | ۱۲ | ۴۸ |
| ۳ | ۴ | ۵ | ۱۲ | ۶۰ |

حالت مطلوب

۱۳

| ضلع سوم | ضلع دوم | ضلع اول |
|---------|---------|---------|
| ۱ | ۵ | ۴ |
| ۲ | ۵ | ۴ |
| ۳ | ۵ | ۴ |
| ۴ | ۵ | ۴ |
| ۵ | ۵ | ۴ |
| ۶ | ۵ | ۴ |
| ۷ | ۵ | ۴ |
| ۸ | ۵ | ۴ |
| ۹ | ۵ | ۴ |

→ (باید از ضلع دیگر بزرگتر باشد $۵ = ۴ + ۱$) نامطلوب

۷ حالت می‌توان داشت

} (حاصل $۴ + ۵$ از ۹ کوچکتر نیست) ← نامطلوب ⇒

۱۴

الف) $۴, ۹, ۱۴, ۱۹, ۲۴, ۲۹, ۳۴$

ب) $۷, ۱۴, ۲۸, ۵۶, ۱۱۲, ۲۲۴$

پ) $۱۵, ۱۸, ۲۲, ۲۷, ۳۳, ۴۰, ۴۸$

ت) $۵۱۲, ۲۵۶, ۱۲۸, ۶۴, ۳۲, ۱۶$