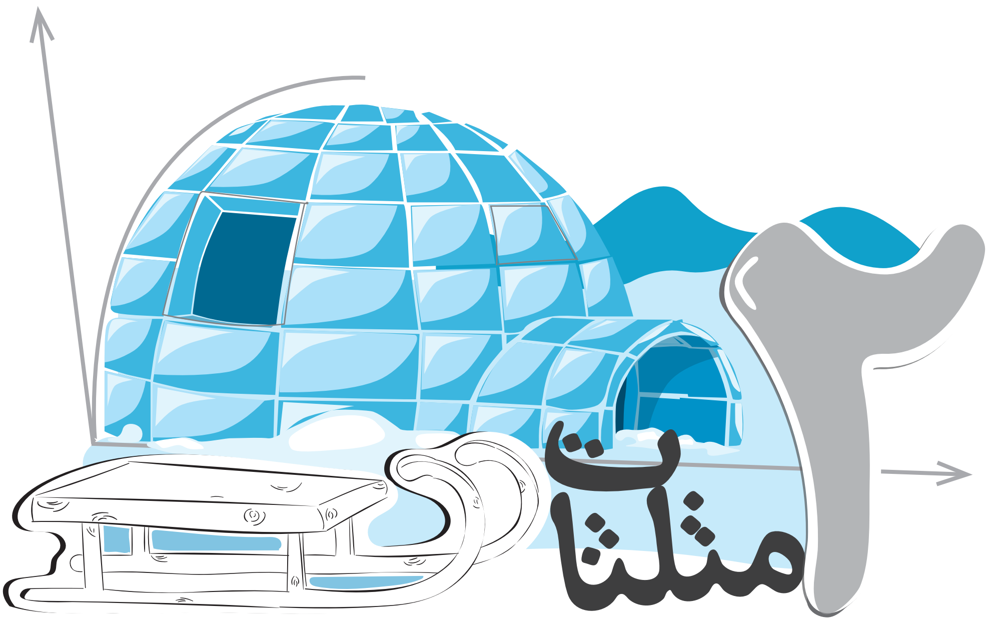


درس یکم: نسبت‌های مثلثاتی

در این درس یاد می‌گیرید:

① تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث به چه صورتی است؟

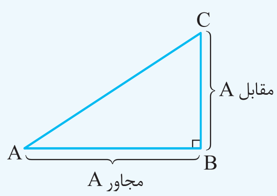
② نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف چه‌قدر است؟

③ چگونه می‌توان فاصله‌ی بین نقطه‌ها و مساحت مثلث‌ها را با نسبت‌های مثلثاتی به دست آورد؟

مثلثات ترکیبی از دو کلمه‌ی یونانی به معنی مثلث و اندازه‌گیری است. موضوع این شاخه از ریاضیات، بررسی رابطه‌ای بین زاویه‌ها و ضلع‌های یک مثلث است. یکی از کاربردهای این علم، اندازه‌گیری فاصله به صورت غیرمستقیم (*بدون مترکردن!*) است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

پله‌ی اول: تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را در نظر بگیرید. ضلع BC را ضلع مقابل به زاویه‌ی $\hat{A}$، ضلع AB را ضلع مجاور به زاویه‌ی $\hat{A}$ و ضلع AC را وتر مثلث می‌نامیم. نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی حاده‌ی A، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

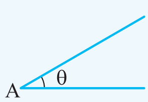


$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل به } A}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \qquad \cos A = \frac{\text{ضلع مجاور به } A}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل به } A}{\text{ضلع مجاور به } A} = \frac{BC}{AB} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\text{ضلع مجاور به } A}{\text{ضلع مقابل به } A} = \frac{AB}{BC}$$

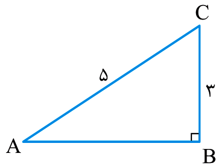
همان‌گونه که دیدید، نسبت کتانژانت زاویه‌ی A، معکوس نسبت تانژانت زاویه‌ی A است.

معمولاً زاویه‌ها را با حروف یونانی α، θ و ... نمایش می‌دهیم، مثلاً در شکل مقابل می‌نویسیم $\sin\theta$ یا $\cos\theta$.



مثل جواب

مثال در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های C و A را به دست آورید.



جواب برای به دست آوردن برخی از نسبت‌ها، نیاز به طول ضلع AB داریم؛

بنابراین بهتر است ابتدا با قضیه‌ی فیثاغورس آن را به دست آوریم:
$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow AB^۲+۹=۲۵ \Rightarrow AB=۴$$

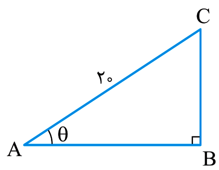
$$\begin{cases}\sin A=\dfrac{\text{مقابل به A}}{\text{وتر}}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{۳}{۵} \\ \tan A=\dfrac{\text{مقابل به A}}{\text{مجاور به A}}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{۳}{۴}\end{cases} \qquad \cos A=\dfrac{\text{مجاور به A}}{\text{وتر}}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{۴}{۵} \qquad \cot A=\dfrac{۱}{\tan A}=\dfrac{\text{مجاور به A}}{\text{مقابل به A}}=\dfrac{۴}{۳}$$

$$\begin{cases}\sin C=\dfrac{\text{مقابل به C}}{\text{وتر}}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{۴}{۵} \\ \tan C=\dfrac{\text{مقابل به C}}{\text{مجاور به C}}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{۴}{۳}\end{cases} \qquad \cos C=\dfrac{\text{مجاور به C}}{\text{وتر}}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{۳}{۵} \qquad \cot C=\dfrac{۱}{\tan C}=\dfrac{\text{مجاور به C}}{\text{مقابل به C}}=\dfrac{۳}{۴}$$

مورد داشتیم نوشته $\sin=\frac{۳}{۵}$ یا $\cos=\frac{۴}{۵}$.

ببین نسبت‌های مثلثاتی به خودی خود معنی ندارن. نسبت‌های مثلثاتی در کنار یه زاویه مثل A، معنی پیدا می‌کنن. به عبارت دیگه $\sin=\frac{۳}{۵}$ معنی نداره! سینوس کدوم زاویه $\frac{۳}{۵}$ می‌شه؟ تو عبارت sinA نمی‌تونی sin و A رو جدا کنی و اون‌ها در کنار هم، معنی پیدا می‌کنن.

مثال طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۰ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های حاده‌ی آن $\frac{۳}{۵}$ است. محیط مثلث را به دست آورید.



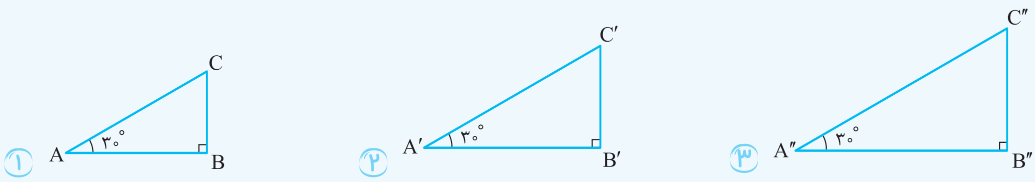
جواب در این فصل هر جا لازم شد، یک شکل بکشید. یک مثلث قائم‌الزاویه با وتری به طول ۲۰، رسم کرده و θ را زاویه‌ای می‌گیریم که $\sin\theta=\frac{۳}{۵}$ باشد. حالا:
$$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{BC}{۲۰} \Rightarrow BC=۱۲$$

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع AB را نیز به دست آوریم:
$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow AB^۲+۱۲^۲=۲۰^۲ \Rightarrow AB^۲=۲۵۶ \Rightarrow AB=۱۶$$

بنابراین محیط مثلث می‌شود:
$$\text{محیط مثلث}=AB+BC+AC=۱۶+۱۲+۲۰=۴۸$$

پله‌ی دوم: ثابت‌ماندن نسبت‌های مثلثاتی برای دو زاویه‌ی برابر

ممکن است بگویید، نوشتن نسبت‌ها در مثلث، چه فایده‌ای دارد، چون وقتی مثلث‌ها تغییر کنند، نسبت‌ها هم عوض می‌شوند! برای پاسخ، چند مثلث قائم‌الزاویه‌ی مختلف که همه‌ی آن‌ها یک زاویه‌ی ۳۰° دارند، رسم می‌کنیم:



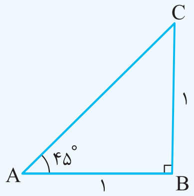
$$\sin ۳۰^\circ=\frac{BC}{AC} \qquad \sin ۳۰^\circ=\frac{B'C'}{A'C'} \qquad \sin ۳۰^\circ=\frac{B''C''}{A''C''}$$

نسبت سینوس زاویه‌ی A را در هر ۳ مثلث نوشته‌ایم. می‌خواهیم نشان دهیم، درست است که سه مثلث متفاوت‌اند (همنهشت نیستند)، ولی نسبت‌های نوشته‌شده با هم برابر می‌شوند؛ به عبارت دیگر $\sin ۳۰^\circ$ همواره برابر یک عدد ثابت است و این‌که از کدام مثلث برای به دست آوردن آن استفاده کنید، مهم نیست. مثلث‌های ۱ و ۲ طبق حالت دو زاویه، با هم متشابه‌اند:

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A'} \\ \hat{B}=\hat{B'}\end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C' \xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}} \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$$

می‌بینید که نسبت‌ها یکسان شدند. برای سایر نسبت‌های مثلثاتی هم همین اتفاق می‌افتد؛ بنابراین اگر نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را داشته باشیم، می‌توانیم از آن‌ها در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای استفاده کنیم.

پله‌ی سوم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

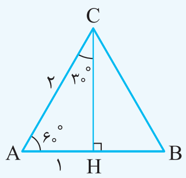


① می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۴۵° را حساب کنیم. در پله‌ی قبل نشان دادیم، این‌که چه مثلثی برای به دست آوردن نسبت‌های این زاویه بکشیم اهمیتی ندارد، فقط کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویه‌ی آن ۴۵° باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های قائمه‌ی آن ۱ است، رسم می‌کنیم. چون مثلث متساوی‌الساقین است، $\hat{A}=\hat{C}=۴۵^\circ$ خواهد بود. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس $AC=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید. حالا نسبت‌های زاویه‌ی ۴۵° را به دست می‌آوریم:

$$\cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \sin ۴۵^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{\tan ۴۵^\circ}=۱ \qquad \tan ۴۵^\circ=\frac{BC}{AB}=۱$$

نسبت‌های زاویه‌ی ۴۵° به دست آمد، آن‌ها را به خوبی به خاطر بسپارید.



② به عنوان قدم بعدی، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به دست می‌آوریم. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ رسم می‌کنیم. همه‌ی زاویه‌ها برابر ۶۰° است. از زاویه $\hat{C}$، بر خط AB، عمود می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شود *(چون نسبت‌هارو تو مثلث قائم‌الزاویه تعریف کردیم نه هر مثلثی).* چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، ارتفاع رسم‌شده، نیمساز و میانه هم هست، پس $A\hat{C}H=۳۰^\circ$ و $AH=۱$ خواهد بود. با استفاده از فیثاغورس نیز $CH=\sqrt{۳}$ به دست می‌آید. حالا نسبت‌های زاویه‌های ۶۰° و ۳۰° به راحتی محاسبه می‌شوند:

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{AC}=\frac{۱}{۲} \qquad \sin ۶۰^\circ=\frac{CH}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{CH}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \cos ۶۰^\circ=\frac{AH}{AC}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{AH}{CH}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \tan ۶۰^\circ=\frac{CH}{AH}=\sqrt{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ=\frac{۱}{\tan ۳۰^\circ}=\sqrt{۳} \qquad \cot ۶۰^\circ=\frac{AH}{CH}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

اعداد به دست آمده را در یک جدول خلاصه می‌کنیم. قبل از این‌که به پله‌ی بعدی بروید، این‌ها را حفظ کنید، چون تا پایان فصل که نه، تا پایان کتاب هم نه، تا پایان دوران تحصیل، به آن‌ها نیاز دارید.

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

حتماً فهمیدید که $\sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ$ یا $\sin ۴۵^\circ=\cos ۴۵^\circ$. این مطلب در حالت کلی هم درست است؛ یعنی اگر جمع دو زاویه ۹۰° بشود (متمم باشند)، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر می‌شود. مثلاً چون $۳۰^\circ+۶۰^\circ=۹۰^\circ$ است، $\sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ$ یا $\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ$.

(تو مثلث قائم‌الزاویه و نوشتن نسبت‌ها هم می‌تونی برای خودت تجزیه و تحلیل کنی.)

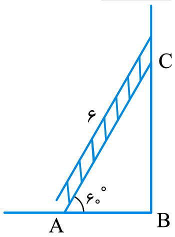
با توجه این‌که به $\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ است، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، همواره نصف وتر است.

مثال و جواب

مثال نردبانی ۶متری که با زمین زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد را به دیواری تکیه داده‌ایم.

الف فاصله‌ی پای نردبان از دیوار (AB) چه‌قدر است؟

ب اگر از نردبان بالا برویم، تا چه ارتفاعی از دیوار (BC) بالا رفته‌ایم؟



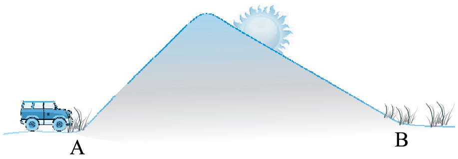
جواب **الف** برای به دست آوردن AB، نسبت مثلثاتی مناسب را می‌نویسیم. AB ضلع مجاور به زاویه‌ی A است؛ پس از نسبت کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AB}{۶} \Rightarrow AB = ۳$$

ب BC ضلع مقابل به زاویه‌ی A است، پس می‌توانیم از سینوس یا تانژانت استفاده کنیم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶} \Rightarrow BC = ۶\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

مثال یک جاده‌ی کوهستانی شبیه شکل زیر است. زاویه‌ی جاده‌ی سربالایی و سرپایینی با سطح زمین به ترتیب ۴۵° و ۳۰° و طول جاده‌ی سرپایینی ۱۲ کیلومتر است.

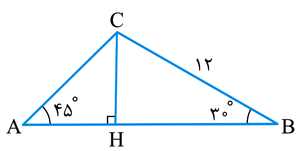


الف ارتفاع قله را به دست آورید.

ب طول جاده‌ی سربالایی را به دست آورید.

پ طول تونل احداث‌شده بین دو نقطه‌ی A و B چه‌قدر است؟

جواب ابتدا یک مثلث به صورت مقابل رسم می‌کنیم. برای این‌که مثلث قائم‌الزاویه درست کنیم، از C بر AB عمود می‌کنیم. از مثلث BHC شروع می‌کنیم. چون یک ضلع و یک زاویه‌ی آن داده شده است:



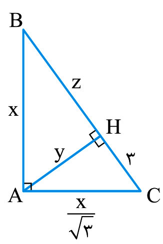
الف $\sin ۳۰^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CH}{۱۲} \Rightarrow CH = ۶$ (ارتفاع قله)

ب $\sin ۴۵^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۶\sqrt{۲}$ طول جاده‌ی سربالایی

پ $AB = AH + HB$، پس طول AH و BH را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BHC} : \cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۱۲} \Rightarrow BH = ۱۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳} \\ \overset{\Delta}{AHC} : \tan ۴۵^\circ = \frac{CH}{AH} \Rightarrow ۱ = \frac{۶}{AH} \Rightarrow AH = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow AB = ۶ + ۶\sqrt{۳}$$

مثال در شکل مقابل z، y و x را به دست آورید.



جواب ابتدا زاویه‌ی C را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{\frac{x}{\sqrt{۳}}} = \sqrt{۳} \Rightarrow C = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : \tan C = \frac{y}{۳} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{y}{۳} \Rightarrow y = ۳\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : \sin C = \frac{y}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{\frac{x}{\sqrt{۳}}} \Rightarrow \frac{\cancel{\sqrt{۳}}}{۲} \times \frac{x}{\cancel{\sqrt{۳}}} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow x = ۶\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : \hat{C} = ۶۰ \Rightarrow \hat{B} = ۳۰^\circ \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳\sqrt{۳}}{z} \Rightarrow z = ۹$$

مثال و جواب

مثال حاصل $A = \cos^{۲} ۴۵^\circ + \frac{\tan ۴۵^\circ}{۲} + ۲\sin ۳۰^\circ$ را به دست آورید.

جواب $۲\sin ۳۰^\circ$ یعنی ابتدا $\sin ۳۰^\circ$ را به دست آورده و در ۲ ضرب می‌کنیم، پس: $۲\sin ۳۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$.

$\frac{\tan ۴۵^\circ}{۲}$ یعنی ابتدا $\tan ۴۵^\circ$ را نوشته و حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، یعنی: $\frac{\tan ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱}{۲}$.

$\cos^{۲} ۴۵^\circ$ یعنی $(\cos ۴۵^\circ)^{۲}$، یعنی حاصل $\cos ۴۵^\circ$ را به توان ۲ می‌رسانیم، یعنی: $\cos^{۲} ۴۵^\circ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$، بنابراین $A = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲$.

توجه دارید که توان دوم کجا گذاشته می‌شود. در حالت کلی: $\cos^{۲} \theta = (\cos \theta)^{۲}$.

پله‌ی چهارم: نسبت‌های زوایای غیرمعروف

خُب! اگر زاویه به غیر از ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° باشد، برای به دست آوردن نسبت‌ها چه باید بکنیم؟ ببینید از این حالت‌ها، خارج نخواهد بود:

① اگر زاویه غیرمعروف باشد، معمولاً نسبت‌های مورد نیازتان در مسئله داده می‌شود.

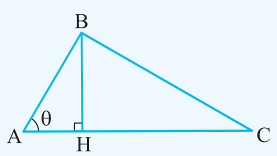
② یک راه دیگر این است که از ماشین‌حسابتان که در حال خاک‌خوردن است، استفاده کنید. فقط حواستان باشد، تنظیم زاویه، روی درجه (deg) باشد نه واحدهای دیگر زاویه!

③ مثلثی قائم‌الزاویه با زاویه‌ی موردنظر رسم کنید. حالا طول ضلع‌ها را با خط‌کش اندازه گرفته و نسبت‌ها را به دست آورید. (*تمرین ۱۷ رو ببین.*)

④ با استفاده از شکل‌های هندسی نیز می‌توانید، نسبت‌های برخی از زاویه‌های غیرمعروف را به دست آورید. (*تمرین ۱۸ رو ببین*)

پله‌ی پنجم: به دست آوردن مساحت مثلث با استفاده از نسبت سینوس

مثلث ABC را در نظر بگیرید. می‌دانیم $S_{ABC} = \frac{BH \times AC}{۲} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$.



از طرفی $\sin \theta = \frac{BH}{AB}$، پس $BH = AB \sin \theta$. با جای‌گذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$S_{ABC} = \frac{(AB \sin \theta)(AC)}{۲} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin \theta$$

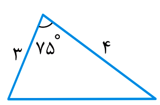
بنابراین رابطه‌ی دیگری برای مساحت مثلث به دست می‌آید. این رابطه به زبان فارسی می‌گوید:

مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}$ (حاصل‌ضرب دو ضلع) × (سینوس زاویه‌ی بین دو ضلع)

این رابطه وقتی زاویه‌ی θ منفرجه باشد هم کار می‌کند، چون جلوتر نشان می‌دهیم دو زاویه‌ی مکمل، سینوس‌های برابر دارند.

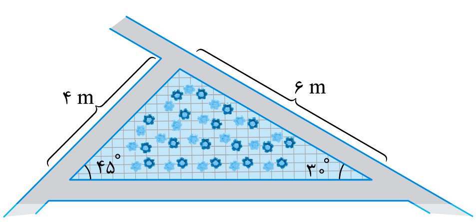
مثال و جواب

مثال با استفاده از ماشین‌حساب $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$ به دست می‌آید. مساحت مثلث مقابل را بیابید.

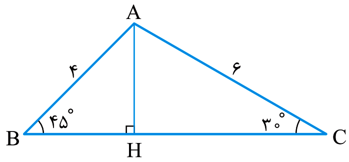


جواب $S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ \times \sin ۷۵^\circ = ۶ \times ۰/۹۶ = ۵/۷۶$

مثال محوطه‌ی گلکاری‌شده‌ای به شکل مثلث، بین چند پیاده‌رو ساخته شده است. مساحت محوطه را به دست آورید. ($\sqrt{۶}$ را تقریباً ۲/۵ بگیرید.)



جواب شکل زیر را رسم می‌کنیم. اگر BH و HC را به دست آوریم، طول ضلع BC به دست می‌آید. سپس می‌توانیم از رابطه‌ی مساحت استفاده کنیم:



$$\cos ۴۵^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{BH}{۴} \Rightarrow BH = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{HC}{۶} \Rightarrow HC = \frac{۶\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

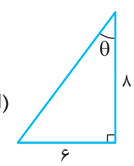
پس: $BC = BH + HC = ۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}$. حالا:

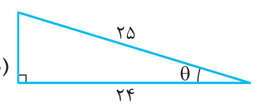
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times (۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}(۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}) = ۴ + ۳\sqrt{۶} \simeq ۴ + ۳(۲/۵) = ۱۱/۵$$ متر مربع

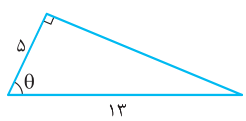
$\hat{A} = ۱۰۵^\circ$ بنابراین $S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(AB)(AC)\sin ۱۰۵^\circ$. اگر $\sin ۱۰۵^\circ$ در مسئله داده شده بود، می‌توانستیم از این راه نیز مساحت مثلث را به دست آوریم.

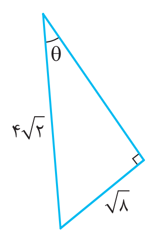
سؤال‌های امتحانی

۱- در هر مثلث، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید.

الف)


ب)


پ)


ت)


۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ$

ب) $\tan ۳۰^\circ \cot ۳۰^\circ + \sin^۲ ۳۰^\circ + \cos^۲ ۳۰^\circ$

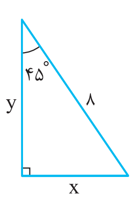
پ) $۱ - ۲\sin^۴ ۳۰^\circ + \frac{\cos^۲ ۳۰^\circ}{۲}$

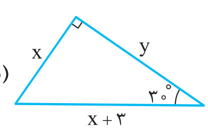
ت) $\frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۳۰^\circ}{۱ + \tan ۶۰^\circ \tan ۳۰^\circ}$

ث) $\left(\frac{۱}{\sin ۶۰^\circ} + \frac{۱}{\tan ۶۰^\circ}\right)^۲$

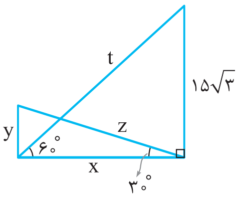
ج) $\sqrt{\frac{۱ - \cos ۶۰^\circ}{۱ + \cos ۶۰^\circ}}$

۳- در هر شکل t، z، y و x را به دست آورید.

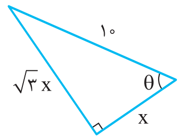
الف)


ب)


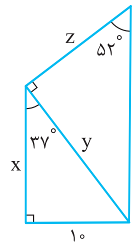
ت)



پ)



ج)

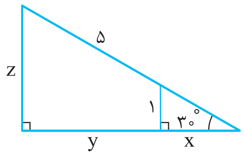


$\sin 37^\circ \simeq 0/6$

$\cos 37^\circ \simeq 0/8$

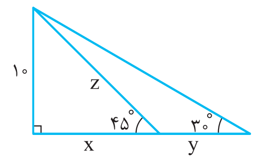
$\tan 52^\circ \simeq 1/28$

ث)

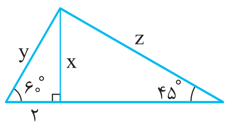


۴- در هر شکل طول اضلاع مجهول را به دست آورید.

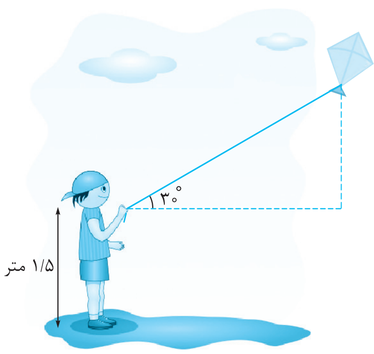
ب)



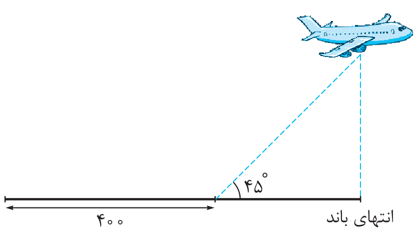
الف)



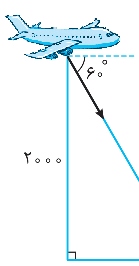
۵- فردی مطابق شکل بادبادکی را به هوا فرستاده است. اگر طول نخ بادبادک ۱۰۰ متر باشد، ارتفاع بادبادک از زمین، چه‌قدر است؟



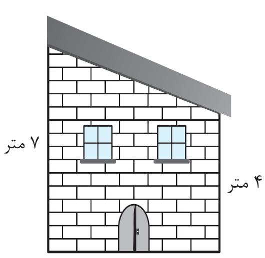
۶- هواپیمایی می‌خواهد از روی باند، بلند شود. ابتدا ۴۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویه 45° درجه از روی زمین بلند می‌شود. وقتی به انتهای باند می‌رسد، در ارتفاع ۱۴۰ متری قرار گرفته است. طول کل باند چه‌قدر است؟



۷- هواپیمایی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما با زاویه‌ی 60° نسبت به سطح افق، شروع به فرود می‌کند. این هواپیما تا رسیدن به سطح زمین چه مسیری را طی می‌کند؟ ($\sqrt{3} \simeq 1/7$ بگیرید.)



۸- در شکل مقابل، زاویه‌ی شیروانی با سطح افق 30° است. عرض ساختمان و طول لبه‌ی شیروانی چه‌قدر است؟

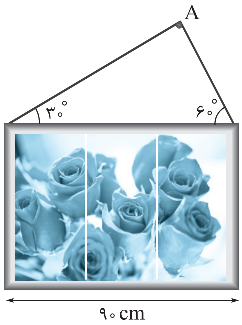


۹- قاب عکسی به صورت افقی در نقطه‌ی A بر دیواری قرار گرفته است.

الف) طول نخ قاب چه‌قدر است؟

ب) اگر زاویه‌ی بین نخ‌ها و قاب به ترتیب ۲۰° و ۵۰° باشد، طول نخ چه‌قدر می‌شود؟

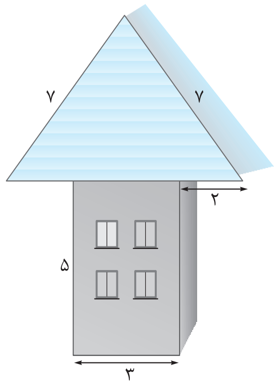
$(\cos ۵۰^\circ \simeq ۰/۶)$، $(\cos ۲۰^\circ \simeq ۰/۹)$، $(\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷)$ و $(\sin ۲۰^\circ \simeq ۰/۳)$



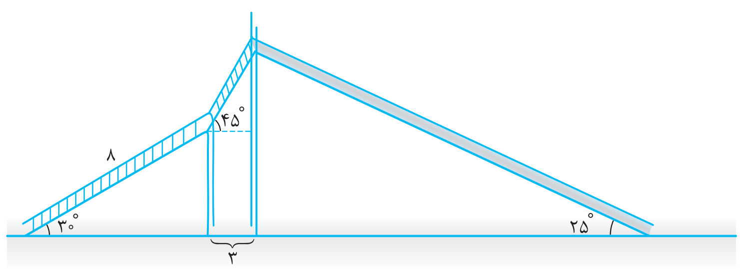
۱۰- خانه‌ای به صورت مقابل ساخته شده است.

الف) زاویه‌ای که شیروانی با سطح افق می‌سازد، چه‌قدر است؟

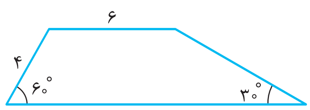
ب) نوک شیروانی چه ارتفاعی از سطح زمین دارد؟



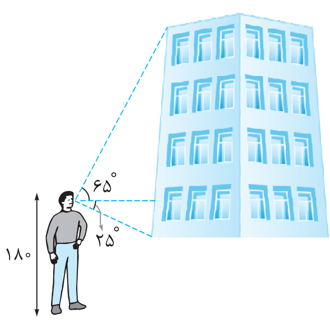
۱۱- برای رسیدن به بالای یک سرسره، باید از دو پلکان به شکل مقابل عبور کرد. طول و ارتفاع سرسره چه‌قدر است؟ $(\sin ۲۵^\circ \simeq ۰/۴۲)$



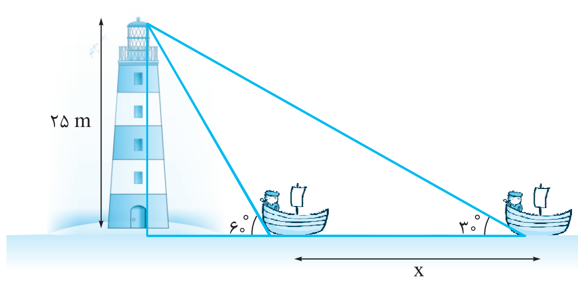
۱۲- محیط و مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دست آورید.



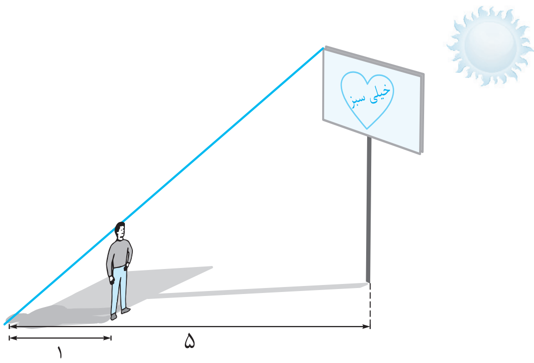
۱۳- فردی در مقابل یک ساختمان ایستاده و به آن نگاه می‌کند. فاصله‌ی چشم او تا زمین ۱۸۰ cm است. او پایین ساختمان را با زاویه‌ی ۲۵° و نوک ساختمان را با زاویه‌ی ۶۵° نسبت به خط افق می‌بینند. فاصله‌ی فرد تا ساختمان و ارتفاع ساختمان را به دست آورید. (فقط از نسبت‌های $\sin ۲۵^\circ \simeq ۰/۴$، $\cos ۲۵^\circ \simeq ۰/۹$ و $\tan ۶۵^\circ \simeq ۲/۱$ استفاده کنید.)



۱۴- قایقی با چنان فاصله‌ای نسبت به فانوس دریایی ایستاده است که با زاویه‌ی ۶۰° نوک فانوس را مشاهده می‌کند. این قایق مقداری از فانوس دور می‌شود به طوری که در نقطه‌ی جدید، نوک فانوس با زاویه‌ی ۳۰° دیده شود. اگر ارتفاع فانوس ۲۵ متر باشد، این قایق حدوداً چند متر به عقب حرکت کرده است؟ $(\sqrt{۳} \simeq ۱/۷)$



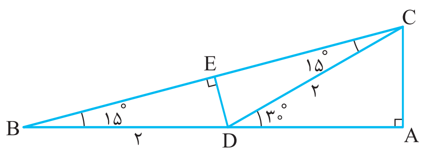
۱۵- سایه‌ی یک تابلوی تبلیغاتی در ساعتی از روز ۵ متر است. فردی با قد ۱۶۰ cm در مقابل این تابلو در همان ساعت از روز قرار می‌گیرد. اگر طول سایه‌ی این فرد ۱ متر باشد، ارتفاع تابلوی تبلیغاتی چه‌قدر است؟



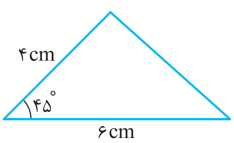
۱۶- اگر $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، حاصل $A = ۲\sin\theta + \sin^۲\theta + \sin ۲\theta$ را به دست آورید.

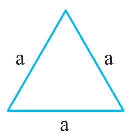
۱۷- نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۷۰° را با استفاده از نقاله و خط‌کش به دست آورید و با اعداد به دست آمده از ماشین‌حساب مقایسه کنید.

۱۸- به کمک شکل مقابل، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵° را به دست آورید.

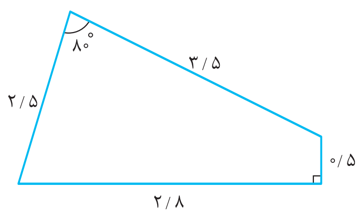


۱۹- مساحت هر شکل را به دست آورید.

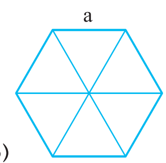
الف)


ب)


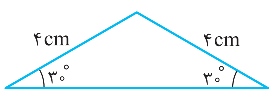
مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a

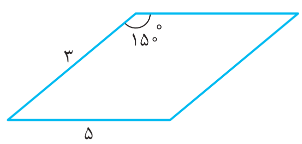
پ)


$\sin ۸۰^\circ \simeq ۰/۹۸$

ت)


شش‌ضلعی

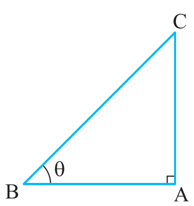
ث)


ج)


متوازی‌الاضلاع

۲۰- مساحت متوازی‌الاضلاعی که طول دو قطر آن ۱۰ و ۱۲ و زاویه‌ی بین آن‌ها ۶۰° است را به دست آورید. (راهنمایی: در درس بعدی نشان می‌دهیم، دو زاویه‌ی مکمل، سینوس‌های برابر دارند.)

۲۱- در مثلث مقابل با نوشتن نسبت‌ها ثابت کنید: $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$.



۲۲- در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = ۹۰^\circ$. با محاسبه‌ی دو طرف رابطه‌ی $\dfrac{\cos^۲ B + \sin^۲ C}{۱ - \sin^۲ C} = ۲\tan^۲ C$ نشان دهید تساوی برقرار است.

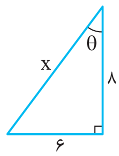
درس دوم: دایره‌ی مثلثاتی

در این درس یاد می‌گیرید:

۱) نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه‌ی دلخواه، چگونه تعریف می‌شوند.
۲) به دست آوردن نسبت‌ها از روی یکی از نسبت‌ها
۳) ارتباط شیب خط و تانژانت زاویه

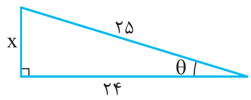
نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث و برای زاویه‌های حاده معرفی کردیم. برای این‌که بتوانیم، نسبت‌ها را برای هر زاویه‌ای معرفی کنیم، دایره‌ی مثلثاتی را تعریف می‌کنیم.

۱- در همه‌ی شکل‌ها، ابتدا با قضیه‌ی فیثاغورس، طول ضلع مجهول را به دست می‌آوریم. (چون x طول ضلع است، فقط جواب مثبت قبول است.)



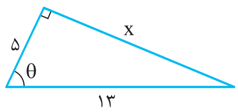
الف) $۶^۲+۸^۲=x^۲ \Rightarrow ۱۰۰=x^۲ \Rightarrow x=۱۰$

$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۶}{۱۰}\,,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۸}{۱۰}\,,\ \tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۶}{۸}\,,\ \cot\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{۸}{۶}$



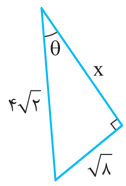
ب) $x^۲+۲۴^۲=۲۵^۲ \Rightarrow x^۲=۶۲۵-۵۷۶=۴۹ \Rightarrow x=۷$

$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۷}{۲۵}\,,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۲۴}{۲۵}\,,\ \tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۷}{۲۴}\,,\ \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۲۴}{۷}$



پ) $x^۲+۵^۲=۱۳^۲ \Rightarrow x^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \Rightarrow x=۱۲$

$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۱۲}{۱۳}\,,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۵}{۱۳}\,,\ \tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۱۲}{۵}\,,\ \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۵}{۱۲}$



ت) $x^۲+(\sqrt{۸})^۲=(۴\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲+۸=۳۲ \Rightarrow x=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$

$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{\sqrt{۸}}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}\,,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\sqrt{۸}}{۲\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\,,\ \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\sqrt{۳}$

۲-

الف) $\sin۶۰^\circ\cos۳۰^\circ+\sin۳۰^\circ\cos۶۰^\circ=(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$

ب) $\tan۳۰^\circ\cot۳۰^\circ+\sin^۲۳۰^\circ+\cos^۲۳۰^\circ=\underbrace{(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳})}_{۱}+\underbrace{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}_{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}}=۱+۱=۲$

پ) $۱-۲\sin^۴۳۰^\circ+\frac{\cos^۲۳۰^\circ}{۲}=۱-۲(\frac{۱}{۲})^۴+\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۲}=۱-(۲\times\frac{۱}{۱۶})+\frac{\frac{۳}{۴}}{۲}=۱-\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$

ت) $\frac{\tan۶۰^\circ-\tan۳۰^\circ}{۱+\tan۶۰^\circ\tan۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+(\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۳}}{۱+۱}=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ث) $(\frac{۱}{\sin۶۰^\circ}+\frac{۱}{\tan۶۰^\circ})^۲=(\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲=(\frac{۲}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲=(\frac{۳}{\sqrt{۳}})^۲=\frac{۹}{۳}=۳$

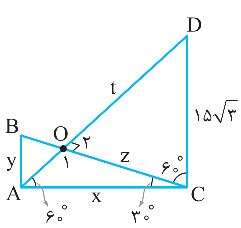
ج) $\sqrt{\frac{۱-\cos۶۰^\circ}{۱+\cos۶۰^\circ}}=\sqrt{\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}}=\sqrt{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳-

الف) $\sin۴۵^\circ=\frac{x}{۸} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{x}{۸} \Rightarrow x=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}\ ,\ \tan۴۵^\circ=\frac{x}{y} \Rightarrow ۱=\frac{x}{y} \Rightarrow y=x \Rightarrow y=۴\sqrt{۲}$

ب) $\sin۳۰^\circ=\frac{x}{x+۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۳} \Rightarrow ۲x=x+۳ \Rightarrow x=۳\ ,\ \cos۳۰^\circ=\frac{y}{x+۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{y}{۶} \Rightarrow y=۶\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$

پ) ابتدا زاویه‌ی θ را به دست می‌آوریم: $\tan\theta=\frac{\sqrt{۳}x}{x}=\sqrt{۳} \Rightarrow \theta=۶۰^\circ \Rightarrow \cos\theta=\frac{x}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{۱۰} \Rightarrow x=۵$



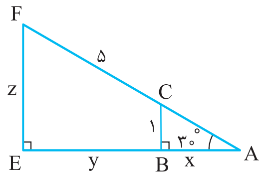
ت) $\overset{\triangle}{ACD}:\tan۶۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \cancel{\sqrt{۳}}=\frac{۱۵\cancel{\sqrt{۳}}}{x} \Rightarrow x=۱۵$

$\overset{\triangle}{ABC}:\tan۳۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{y}{۱۵} \Rightarrow y=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۳}=۵\sqrt{۳}$

$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲=۹۰^\circ \xrightarrow{\overset{\triangle}{ODC}} \sin۶۰^\circ=\frac{t}{۱۵\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{t}{۱۵\sqrt{۳}} \Rightarrow t=\frac{۴۵}{۲}$

$\overset{\triangle}{ODC}:\cos۶۰^\circ=\frac{z}{۱۵\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{z}{۱۵\sqrt{۳}} \Rightarrow z=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

ث)



$$\overset{\Delta}{ABC}: \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{AC} \Rightarrow AC = ۲ \Rightarrow AF = ۷$$

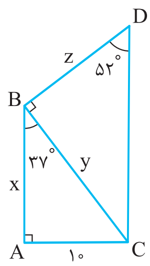
$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۳}{\sqrt{۳}} = x \Rightarrow x = \sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{AEF}: \sin ۳۰^\circ = \frac{z}{AF} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{z}{۷} \Rightarrow z = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

$$\overset{\Delta}{AEF}: \tan ۳۰^\circ = \frac{z}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳/۵}{AE} \Rightarrow AE = \frac{۱۰/۵}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۳/۵\sqrt{۳}$$

$$AE = x + y \Rightarrow ۳/۵\sqrt{۳} = y + \sqrt{۳} \Rightarrow ۲/۵\sqrt{۳} = y$$

ج)

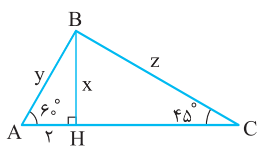


$$\overset{\Delta}{ABC}: \sin ۳۷^\circ = \frac{۱۰}{y} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{۱۰}{y} \Rightarrow y = \frac{۱۰}{۰/۶} = \frac{۱۰۰}{۶} = \frac{۵۰}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \cos ۳۷^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{x}{\frac{۵۰}{۳}} \Rightarrow x = \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۵۰}{۳} = \frac{۴۰}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{BDC}: \tan ۵۲^\circ = \frac{y}{z} \Rightarrow ۱/۲۸ = \frac{\frac{۵۰}{۳}}{z} \Rightarrow z = \frac{\frac{۵۰}{۳}}{۱/۲۸} = \frac{\frac{۵۰}{۳}}{\frac{۱۲۸}{۱۰۰}} = \frac{۵۰۰۰}{۳۸۴} \simeq ۱۳$$

۴- الف)



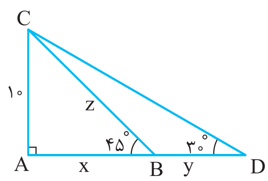
$$\overset{\Delta}{ABH}: \cos ۶۰^\circ = \frac{۲}{y} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{y} \Rightarrow y = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin ۶۰^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{BHC}: \sin ۴۵^\circ = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{z} \Rightarrow \sqrt{۲}z = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow$$

$$z = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow z = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۲} = ۲\sqrt{۶}$$

ب)



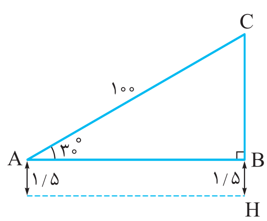
$$\overset{\Delta}{ABC}: \sin ۴۵^\circ = \frac{۱۰}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۰}{z} \Rightarrow z = \frac{۲۰}{\sqrt{۲}} = ۱۰\sqrt{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۴۵^\circ = \frac{۱۰}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{۱۰}{x} \Rightarrow x = ۱۰$$

توجه کنید که مثلث CBD قائم‌الزاویه نیست، بنابراین نمی‌توانیم نسبت‌ها را در آن بنویسیم. در مثلث بزرگ $(\overset{\Delta}{ACD})$ داریم:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۱۰}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۳۰}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AD = x + y \Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} = ۱۰ + y \Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} - ۱۰ = y$$

۵-

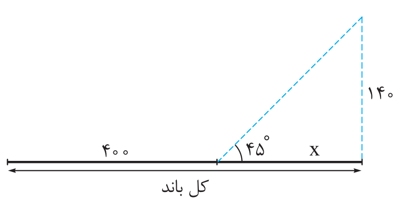


$$\text{ارتفاع بادبادک} = CH = CB + BH = CB + ۱/۵$$

پس کافی است طول CB را به دست آوریم. چون وتر را داریم و ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° را می‌خواهیم، پس:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{CB}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CB}{۱۰۰} \Rightarrow CB = ۵۰ \Rightarrow \text{ارتفاع بادبادک} = ۵۰ + ۱/۵ = ۵۱/۵$$

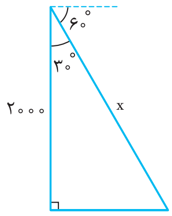
۶-



$$\tan ۴۵^\circ = \frac{۱۴۰}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{۱۴۰}{x} \Rightarrow x = ۱۴۰$$

$$\text{طول باند} = ۴۰۰ + ۱۴۰ = ۵۴۰ \ \text{متر}$$

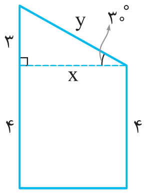
۷-



$$\cos 30^\circ = \frac{2000}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2000}{x} \Rightarrow x = \frac{4000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4000\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\sqrt{3}\simeq 1/7} x \simeq 2267$$

۲۲۶۷ متر را طی می‌کند تا به زمین برسد.

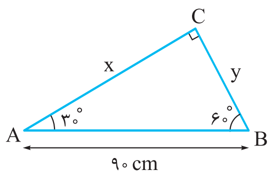
۸-



$$\tan 30^\circ = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$ عرض ساختمان

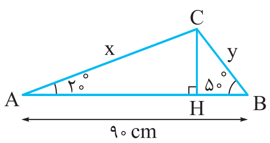
$$\sin 30^\circ = \frac{3}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = 6$$ طول لبه‌ی شیروانی

۹- الف) طول نخ برابر $x+y$ است.



$$\left.\begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{y}{90} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{90} \Rightarrow y = 45 \\ \sin 60^\circ = \frac{x}{90} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{90} \Rightarrow x = 45\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{طول نخ} = 45 + 45\sqrt{3}\ \text{cm}$$

ب) مثلث قائم‌الزاویه نیست، بنابراین از C بر AB عمود می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه ساخته شود. باید $x+y$ را محاسبه کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \cos 20^\circ = \frac{AH}{x} \Rightarrow 0/9x = AH \\ \cos 50^\circ = \frac{BH}{y} \Rightarrow 0/6y = BH \end{array}\right\} \Rightarrow 0/9x + 0/6y = \overbrace{AH + BH}^{90} \xrightarrow{\div 3} 0/3x + 0/2y = 30 \qquad (1)$$

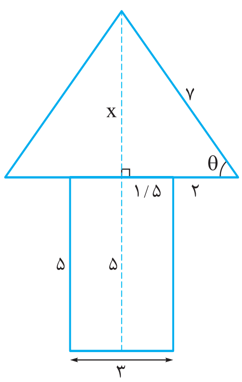
باید رابطه‌ی دیگری بین x,y به دست آوریم تا با حل دستگاه x,y محاسبه شوند.

$$\left.\begin{array}{l} \sin 20^\circ = \frac{CH}{x} \Rightarrow CH = 0/3x \\ \sin 50^\circ = \frac{CH}{y} \Rightarrow CH = 0/7y \end{array}\right\} \Rightarrow 0/3x = 0/7y \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 0/7y + 0/2y = 30 \Rightarrow 0/9y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{0/9} = \frac{10}{0/3} = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow 0/3x = 0/7\left(\frac{100}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{700}{9} \Rightarrow \text{طول نخ} = x + y = \frac{700}{9} + \frac{100}{3} = \frac{700+300}{9} = \frac{1000}{9} \simeq 111\ \text{cm}$$

۱۰-

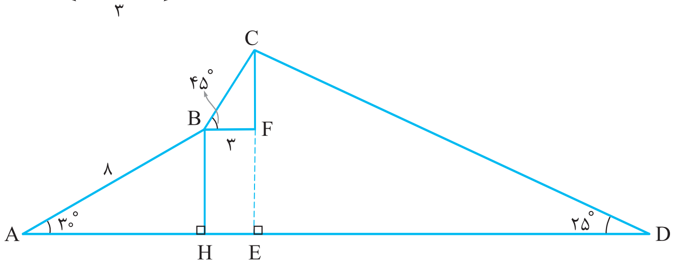


الف) $$\cos\theta = \frac{3/5}{7} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

ب) $$\sin\theta = \frac{x}{7} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{7\sqrt{3}}{2} + 5$$

۱۱-



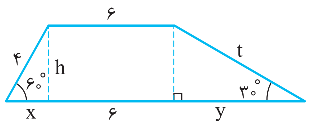
$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin 30^\circ = \frac{BH}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{8} \Rightarrow BH = 4 \Rightarrow FE = 4$$

$$\overset{\Delta}{BCF}: \tan 45^\circ = \frac{CF}{BF} \Rightarrow 1 = \frac{CF}{3} \Rightarrow CF = 3$$

ارتفاع سرسره $= CF + FE = 4 + 3 = 7$

$$\overset{\Delta}{DEC}: \sin 25^\circ = \frac{CE}{CD} \Rightarrow 0/42 = \frac{7}{CD} \Rightarrow CD = \frac{7}{0/42} = \frac{100}{6}$$ طول سرسره

۱۲-



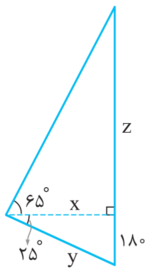
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{h}{۴} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{h}{۴} \Rightarrow h = ۲\sqrt{۳} \qquad \sin ۳۰^\circ = \frac{h}{t} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{t} \Rightarrow t = ۴\sqrt{۳}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{x}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x = ۲ \qquad \cos ۳۰^\circ = \frac{y}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{y}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow y = ۶$$

$$\text{محیط ذوزنقه} = ۴+۶+t+y+۶+x = ۲۴+۴\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲} = \frac{(۶+۱۴)(۲\sqrt{۳})}{۲} = ۲۰\sqrt{۳}$$

۱۳-



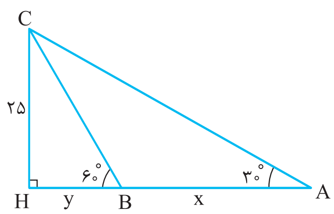
$$\sin ۲۵^\circ = \frac{۱۸۰}{y} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{۱۸۰}{y} \Rightarrow y = ۴۵۰\,\text{cm}$$

$$\cos ۲۵^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow ۰/۹ = \frac{x}{۴۵۰} \Rightarrow x = ۴۰۵\,\text{cm}$$ فاصله‌ی فرد تا ساختمان

$$\tan ۶۵^\circ = \frac{z}{x} \Rightarrow ۲/۱ = \frac{z}{۴۰۵} \Rightarrow z = ۸۵۰/۵$$

پس: $\text{ارتفاع ساختمان} = ۱۸۰ + ۸۵۰/۵ = ۱۰۳۰/۵\,\text{cm}$

۱۴-

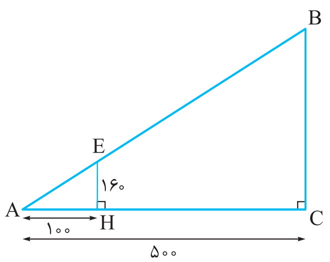


$$\overset{\Delta}{BHC}: \tan ۶۰^\circ = \frac{۲۵}{y} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۲۵}{y} \Rightarrow y = \frac{۲۵}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: \tan ۳۰^\circ = \frac{۲۵}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲۵}{AH} \Rightarrow AH = \frac{۷۵}{\sqrt{۳}}$$

$$AH = x + y \Rightarrow \frac{۷۵}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۵}{\sqrt{۳}} + x \Rightarrow x = \frac{۵۰}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{\sqrt{۳} \simeq ۱/۷} x \simeq ۲۸/۳\,\text{m}$$

۱۵- همه‌ی اعداد را به سانتی‌متر تبدیل می‌کنیم:

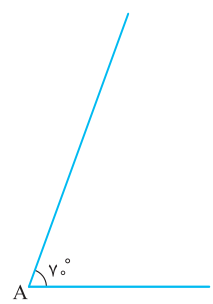


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AEH}: \tan A = \frac{۱۶۰}{۱۰۰} \\ \overset{\Delta}{ABC}: \tan A = \frac{BC}{۵۰۰} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۶۰}{۱۰۰} = \frac{BC}{۵۰۰} \Rightarrow BC = ۸۰۰\,\text{cm} = ۸\,\text{m}$$

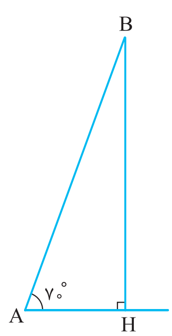
۱۶-

$$A = ۲\sin ۳۰^\circ + \sin^۲ ۳۰^\circ + \sin ۶۰^\circ = ۲(\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۵}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

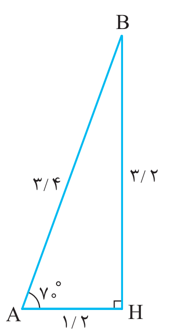
۱۷-



مرحله‌ی اول: با نقاله یک زاویه‌ی ۷۰° رسم می‌کنیم.



مرحله‌ی دوم: از نقطه‌ی دلخواه عمود می‌کنیم تا مثلث درست شود.



مرحله‌ی سوم: با خط‌کش، اضلاع را اندازه می‌گیریم. *(مثلاً مثل بالا می‌شه)*

مرحله‌ی چهارم: نسبت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\sin ۷۰^\circ = \frac{۳/۲}{۳/۴} \simeq ۰/۹۴$$

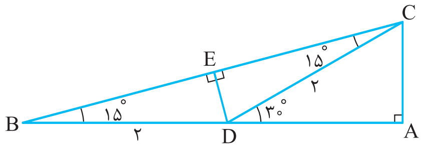
$$\cos ۷۰^\circ = \frac{۱/۲}{۳/۴} \simeq ۰/۳۵$$

$$\tan ۷۰^\circ = \frac{۳/۲}{۱/۲} \simeq ۲/۶۶$$

$$\cot ۷۰^\circ = \frac{۱/۲}{۳/۲} \simeq ۰/۳۷۵$$

با ماشین حساب $\sin ۷۰^\circ \simeq ۰/۹۳۹$
$\cos ۷۰^\circ \simeq ۰/۳۴۲$
$\tan ۷۰^\circ \simeq ۲/۷۴$
$\cot ۷۰^\circ \simeq ۰/۳۶۳$

۱۸- می‌توانیم با استفاده از ماشین‌حساب یا روش خط‌کش و نقاله، مقدار تقریبی نسبت‌ها را بیابیم ولی در این‌جا با استفاده از روش هندسی، مقدار دقیق نسبت‌ها را می‌یابیم:



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AC}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AC}{۲} \Rightarrow AC = ۱$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AD}{۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AD}{۲} \Rightarrow AD = \sqrt{۳} \Rightarrow AB = ۲ + \sqrt{۳}$$

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow (۲+\sqrt{۳})^۲ + ۱ = BC^۲ \Rightarrow ۴ + ۳ + ۴\sqrt{۳} + ۱ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۸ + ۴\sqrt{۳}} = \sqrt{۴(۲+۲\sqrt{۳})} = ۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

چون مثلث DBC متساوی‌الساقین است، پس: $EC = BE = \frac{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲} = \sqrt{۲+\sqrt{۳}}$. با یک فیثاغورس در مثلث BED، ضلع ED هم به دست می‌آید:

$$BD^۲ = BE^۲ + DE^۲ \Rightarrow ۴ = ۲ + \sqrt{۳} + DE^۲ \Rightarrow DE = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

حالا:

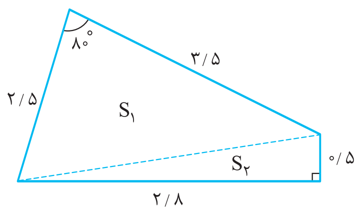
$$\sin ۱۵^\circ = \frac{ED}{BD} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲} \quad , \quad \cos ۱۵^\circ = \frac{BE}{BD} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\tan ۱۵^\circ = \frac{ED}{BE} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}} \quad , \quad \cot ۱۵^\circ = \frac{۱}{\tan ۱۵^\circ} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}}$$

۱۹- الف) $S = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۶\sqrt{۲}$

ب) $S = \frac{۱}{۲} a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} a^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$

پ)



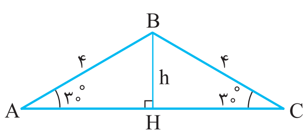
$$S_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵ \times ۳/۵ \times \sin ۸۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵ \times ۳/۵ \times ۰/۹۸ = ۴/۲۸۷۵$$

$$S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲/۸ \times ۰/۵ \times \sin ۹۰^\circ = ۰/۷$$

$$S_{\text{کل}} = S_۱ + S_۲ = ۴/۹۸۷۵ \simeq ۵$$

ت) شش‌ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a درست‌می‌شود. $\xrightarrow{\text{از ب}} S = ۶(\frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ) = ۶\frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$

ث)



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{۴} \Rightarrow h = ۲$$

$$AH^۲ + h^۲ = ۴^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۴ = ۱۶ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۲}$$

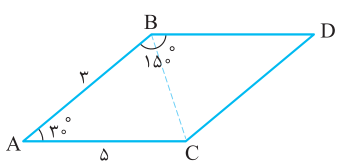
چون مثلث متساوی‌الساقین است، ارتفاع، میانه هم هست؛ پس: $AH = HC$ و لذا $AC = ۲\sqrt{۱۲}$. حالا:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲\sqrt{۱۲} \times \frac{۱}{۲} = ۲\sqrt{۱۲} = ۴\sqrt{۳}$$

روش دوم: $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$. در درس بعد نشان می‌دهیم، دو زاویه‌ی مکمل، سینوس‌های برابر دارند، پس $\sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$ و لذا:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ \times \sin ۱۲۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

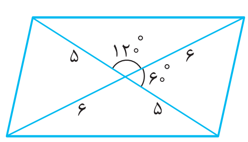
ج) زوایای مجاور، در متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند، پس: $\hat{A} = ۳۰^\circ$.



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱۵}{۴}$$

$$S_{ABDC} = ۲S_{ABC} = ۲ \times \frac{۱۵}{۴} = \frac{۱۵}{۲}$$

۲۰- در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. دو زاویه‌ی ۶۰° و ۱۲۰° مکمل‌اند، پس سینوس‌های برابر دارند؛ بنابراین هر چهار مثلث دارای مساحت‌های یکسانی هستند:

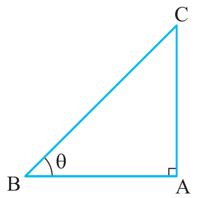


$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = ۴(\frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۵ \times \sin ۶۰^\circ) = ۳۰\sqrt{۳}$$

نکته: در حالت کلی اگر طول قطرها a,b بوده و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع می‌شود: $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

(در این‌جا می‌شد $S=\frac{1}{2}\times 12\times 10\times\sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$)

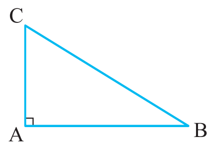
-۲۱



$$\sin\theta=\frac{AC}{BC}\ ,\ \cos\theta=\frac{AB}{BC}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{\overbrace{AC^2+AB^2}^{\text{فیثاغورس}}}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

-۲۲ مثلث ABC که $\hat{A}=90^\circ$ را رسم می‌کنیم:



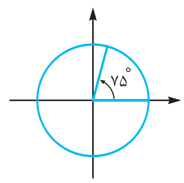
$$\cos^2 B=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2\ ,\ \sin^2 C=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

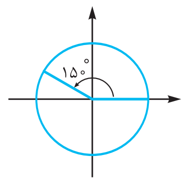
$$\text{سمت چپ}=\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2}{1-\left(\frac{AB}{BC}\right)^2}=\frac{\frac{2AB^2}{BC^2}}{\frac{BC^2-AB^2}{BC^2}}=\frac{2AB^2}{\underbrace{BC^2-AB^2}_{\text{فیثاغورس}}}=\frac{2AB^2}{AC^2}$$

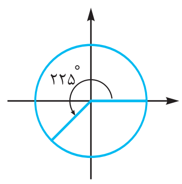
$$\text{سمت راست}=2\tan^2 C=2\times\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=2\frac{AB^2}{AC^2}$$

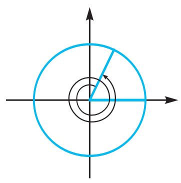
بنابراین دو طرف برابرند.

-۲۳

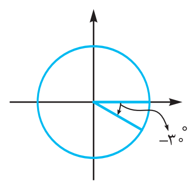
الف) 

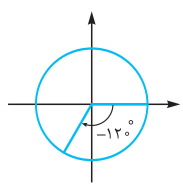
ب) 

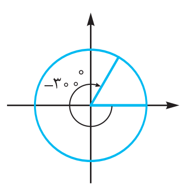
پ) 

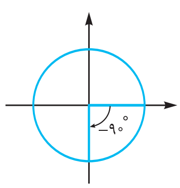
ت) 

$770^\circ=2(360^\circ)+50$

ث) 

ج) 

چ) 

ح) 

-۲۴

الف) $90^\circ<127^\circ<180^\circ \Rightarrow$ ربع دوم $\Rightarrow$ در ربع دوم فقط سینوس مثبت است و بقیه‌ی نسبت‌ها منفی هستند. $\Rightarrow \begin{cases}\sin 127^\circ>0\\ \cos 127^\circ<0\\ \tan 127^\circ<0\\ \cot 127^\circ<0\end{cases}$

ب) $270^\circ<313^\circ<360^\circ \Rightarrow$ ربع چهارم $\Rightarrow$ در ربع چهارم فقط کسینوس مثبت و بقیه‌ی نسبت‌ها منفی هستند.

پ) $-240^\circ=-\underbrace{180^\circ}_{\text{نیم دور در جهت منفی}}-60^\circ \Rightarrow$ ربع دوم $\Rightarrow$ در ربع دوم فقط سینوس مثبت است و بقیه‌ی نسبت‌ها منفی هستند.

ت) $-62^\circ \Rightarrow$ ربع چهارم $\Rightarrow$ فقط کسینوس مثبت و بقیه منفی هستند.

ث) $2000^\circ=\underbrace{5(360^\circ)}_{\text{با ۵ دور کامل برمی‌گردیم روی صفر}}+\underbrace{200^\circ}_{\text{ربع سوم}} \Rightarrow$ ربع سوم $\Rightarrow$ سینوس و کسینوس منفی و تانژانت و کتانژانت مثبت هستند.

ج) $-730^\circ=\underbrace{2(-360^\circ)}_{\text{(می‌ذاریم کنار)}}-10^\circ \Rightarrow$ ربع چهارم $\Rightarrow$ فقط کسینوس مثبت و بقیه منفی هستند.