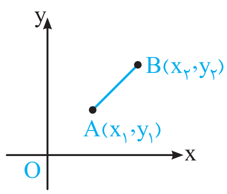
فصل ۲
قسمت دوم
دایره

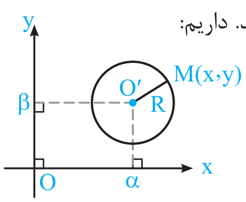
دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت در آن صفحه به فاصلهٔ معلومی قرار دارند. نقطهٔ ثابت مرکز دایره و مقدار معلوم شعاع دایره نامیده می‌شود. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O\,،\,R)$ نشان می‌دهند.



یادآوری فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱،y_۱)$ و $B(x_۲،y_۲)$ در دستگاه مختصات دکارتی برابر است با:

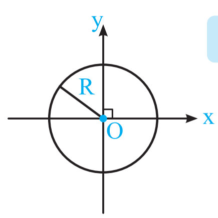
$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

معادلهٔ استاندارد دایره: دایره به مرکز $O'(\alpha،\beta)$ و شعاع R مفروض است. فرض کنیم $M(x،y)$ نقطهٔ دلخواهی از آن باشد. داریم:



$$O'M=R \Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

معادلهٔ استاندارد دایره به مرکز $O'(\alpha\,،\,\beta)$ و شعاع R برابر است با: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$



حالت خاص: اگر مرکز دایره بر مبدأ مختصات منطبق باشد، معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲=R^۲$ است.

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره به مرکز } O(۰،۰) \text{ و شعاع } R} x^۲+y^۲=R^۲$$

نکته معادلهٔ استاندارد دایره‌ای که مرکز آن $O'(\alpha\,،\,\beta)$ است و از مبدأ مختصات می‌گذرد به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\alpha^۲+\beta^۲$ می‌باشد.

تست **معادلهٔ دایره به مرکز $O'(۲،-۱)$ و شعاع ۲ کدام است؟**

۱) $(x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ ۲) $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$

۳) $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۴$ ۴) $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۴$

پاسخ: معادلهٔ استاندارد دایره به مرکز $O'(۲،-۱)$ و شعاع ۲ به‌صورت زیر است:

$(x-۲)^۲+(y-(-۱))^۲=۲^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است

تست **معادلهٔ دایره به مرکز $O'(-۱،۲)$ و شعاع ۲ کدام است؟**

۱) $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۲=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۲=۰$

پاسخ:

$$O'(-۱،۲),\ R=۲ \Rightarrow (x-(-۱))^۲+(y-۲)^۲=۲^۲ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$$

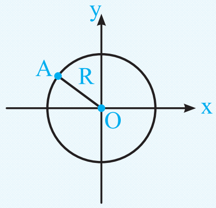
$\Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲-۴y+۴=۴ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست دایره‌ای که مرکزش مبدأ مختصات است و از نقطهٔ $(-۲،۱)$ می‌گذرد از کدام نقطهٔ دیگر نیز می‌گذرد؟

۱) $(۱،۲)$ ۲) $(۲،۲)$ ۳) $(-۱،۱)$ ۴) $(۲،-۲)$

پاسخ: بنابه فرض، مرکز دایره مبدأ مختصات است و $A(-۲،۱)$ نقطه‌ای روی دایره است. پس اندازهٔ شعاع دایره برابر طول پاره‌خط OA است.

$$R = OA = \sqrt{(-۲-۰)^۲ + (۱-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$



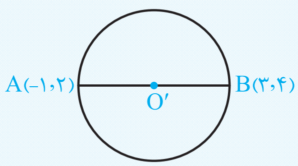
پس معادلهٔ دایره برابر است با $x^۲ + y^۲ = (\sqrt{۵})^۲ = ۵$ و نقطهٔ $(۱،۲)$ در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.
پس گزینهٔ (۱) درست است.

تست معادلهٔ دایره‌ای که نقاط $A(-۱،۲)$ و $B(۳،۴)$ دو سر قطر AB از آن است، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۵ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۴ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۶y - ۵ = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۶y - ۴ = ۰$

پاسخ: مرکز دایره وسط پاره‌خط AB است و شعاع دایره برابر نصف طول پاره‌خط AB است:



$$O'(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}) = (\frac{-۱+۳}{۲}, \frac{۲+۴}{۲}) = (۱،۳)$$

$$R = \frac{AB}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۳+۱)^۲ + (۴-۲)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰} = \sqrt{۵}$$

$(x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = (\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۵ = ۰ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.

نکته جهت یافتن مختصات نقطهٔ تلاقی خط یا منحنی با محورهای مختصات به شرح زیر عمل می‌کنیم:
آ) در معادلهٔ خط یا منحنی قرار می‌دهیم $y = ۰$ و x را به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت طول نقطهٔ تلاقی خط یا منحنی با محور x ها به‌دست می‌آید.
ب) در معادلهٔ خط یا منحنی قرار می‌دهیم $x = ۰$ و y را به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت عرض نقطهٔ تلاقی خط یا منحنی با محور y ها به‌دست می‌آید.

تست دایره به مرکز $O'(-۲،۱)$ و شعاع ۲، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $-۲-\sqrt{۳}$ ۴) $۱-\sqrt{۳}$

پاسخ: ابتدا معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$O'(-۲،۱) ، R = ۲ \Rightarrow (x+۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲^۲ = ۴$$

حال با قرار دادن $y = ۰$ در معادلهٔ دایره، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$(x+۲)^۲ + (۰-۱)^۲ = ۴ \Rightarrow (x+۲)^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۳ \Rightarrow x+۲ = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow x = -۲ \pm \sqrt{۳}$$

بنابراین دایرهٔ فوق محور x ها را در دو نقطه به طول‌های $x_۱ = -۲-\sqrt{۳}$ و $x_۲ = -۲+\sqrt{۳}$ قطع می‌کند. پس گزینهٔ (۳) درست است.

معادلهٔ ضمنی دایره

اگر در معادلهٔ دایره عبارت‌های توان ۲ را بسط دهیم، معادلهٔ ضمنی دایره به‌دست می‌آید:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲\alpha x - ۲\beta y + \alpha^۲ + \beta^۲ - R^۲ = ۰$$

تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد

در معادلهٔ ضمنی فوق اگر فرض کنیم $-۲\alpha = a$، $-۲\beta = b$ و $\alpha^۲ + \beta^۲ - R^۲ = c$ نتیجه می‌شود:

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \quad , \quad O'(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) \quad , \quad R = \sqrt{\frac{a^۲}{۴} + \frac{b^۲}{۴} - c}$$

آ) اگر $a^۲ + b^۲ > ۴c$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ ضمنی فوق دایره به مرکز $O'(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{a^۲}{۴} + \frac{b^۲}{۴} - c}$ می‌باشد.

ب) اگر $a^۲ + b^۲ = ۴c$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ ضمنی فوق نقطهٔ $O'(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ می‌باشد.

پ) اگر $a^۲ + b^۲ < ۴c$ باشد، آن‌گاه مجموعه نقاط صادق در معادلهٔ فوق تهی است.

نکته معادلهٔ ضمنی دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by = ۰$ می‌باشد.

تست شعاع دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۴y-۳=۰$ برابر R و مرکز آن نقطهٔ به مختصات $O'(\alpha , \beta)$ است. حاصل $\alpha+\beta+R$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵-   ۳) ۴-   ۴) ۵

پاسخ :

$$x^۲+y^۲-۶x+۴y-۳=۰ \Rightarrow a=-۶ \ , \ b=۴ \ , \ c=-۳ \Rightarrow O'(-\frac{a}{۲} , -\frac{b}{۲})=(\frac{۶}{۲} , \frac{-۴}{۲})=(۳,-۲)$$

$$R=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}-c}=\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲-(-۳)}=\sqrt{۹+۴+۳}=\sqrt{۱۶}=۴$$

$\alpha+\beta+R=۳-۲+۴=۵ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

تست اگر $x^۲+y^۲-۳x+۵y+m=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد، بیش‌ترین مقدار صحیح m کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۸   ۳) ۷   ۴) ۶

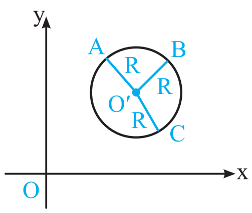
پاسخ :

$$x^۲+y^۲-۳x+۵y+m=۰ \Rightarrow a=-۳ \ , \ b=۵ \ , c=m$$

شرط این‌که معادلهٔ فوق، دایره باشد این است که:

$a^۲+b^۲>۴c \Rightarrow ۹+۲۵>۴m \Rightarrow ۴m<۳۴ \Rightarrow m<۸/۵ \xrightarrow{\text{بیش‌ترین مقدار صحیح}} ۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تعیین دایره‌ای که از سه نقطهٔ معلوم می‌گذرد



برای مشخص کردن دایره‌ای که از نقاط A، B و C می‌گذرد روش‌های مختلفی وجود دارد. بهترین روش این است که مختصات مرکز دایره را به‌صورت $O'(\alpha , \beta)$ فرض کنیم و با توجه بـه $O'A=O'B=O'C=R$ دو معادله بر حسب α و β تشکیل دهیم و این مقادیر را به‌دست آوریم.

تست شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(۴,۶)$، $B(-۲,-۲)$ و $C(۵,-۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ : فرض کنیم $O'(\alpha , \beta)$ مرکز دایره باشد، داریم:

$$O'A=O'B \Rightarrow (\alpha-۴)^۲+(\beta-۶)^۲=(\alpha+۲)^۲+(\beta+۲)^۲ \Rightarrow ۳\alpha+۴\beta=۱۱$$

$$O'A=O'B \Rightarrow (\alpha-۴)^۲+(\beta-۶)^۲=(\alpha-۵)^۲+(\beta+۱)^۲ \Rightarrow ۷\beta-\alpha=۱۳$$

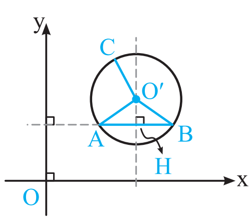
معادلهٔ دوم را ۳ برابر می‌کنیم و آن را با معادلهٔ اول جمع می‌کنیم. داریم:

$$۲۱\beta+۴\beta=۳۹+۱۱ \Rightarrow ۲۵\beta=۵۰ \Rightarrow \beta=۲ , \ \alpha=۱۴-۱۳=۱ \Rightarrow O'(۱,۲)$$

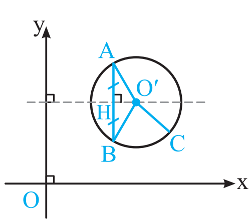
و نهایتاً شعاع دایره برابر است با:

$O'(۱,۲) , A(۴,۶) \Rightarrow R=O'A=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۶-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

نکته اگر دو نقطه از سه نقطهٔ داده‌شده، هم‌عرض یا هم‌طول باشند، در این‌صورت مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط واصل ایـن دو نقطـه قـرار دارد و محاسبات ساده‌تر می‌شود.



آ) دو نقطهٔ A و B هم‌عرض باشند، عمودمنصف وتر AB موازی محور y ها است و مرکز دایره روی آن قرار دارد.



ب) دو نقطهٔ A و B هم‌طول باشند، عمودمنصف وتر AB موازی محور x ها است و مرکز دایره روی آن قرار دارد.

تست **شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-1,0)$ ، $B(3,0)$ و $C(0,3)$ می‌گذرد، کدام است؟**

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

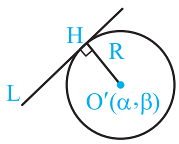
پاسخ : دو نقطهٔ $A(-1,0)$ و $B(3,0)$ هم‌عرض هستند، مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

چون دو نقطه هم‌عرض هستند، عمودمنصف AB موازی محور yها است و از نقطهٔ $M(\frac{3-1}{2},\frac{0+0}{2})=(1,0)$ وسط AB می‌گذرد پس معادلهٔ آن برابر $x=1$ است، در نتیجه مختصات مرکز دایره $O'(1,\beta)$ است و داریم:

$$O'A=O'C \Rightarrow (1+1)^2+(\beta-0)^2=(1-0)^2+(\beta-3)^2 \Rightarrow 4+\beta^2=1+\beta^2-6\beta+9 \Rightarrow \beta=1$$

$O'(1,\beta)=(1,1)$ ، $A(-1,0) \Rightarrow R=O'A=\sqrt{(1+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5} \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تعیین شعاع دایره‌ای که مرکز آن معلوم است و بر خط معلوم L مماس است.



اگر معادلهٔ خط L به‌صورت $ax+by+c=0$ باشد، فاصلهٔ $O'(\alpha,\beta)$ از خط L ، شعاع دایره را مشخص می‌کند.

$$R=O'H=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تست **معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن $O'(1,-1)$ و بر خط به معادلهٔ $3x-4y+3=0$ مماس می‌باشد، کدام است؟**

۱) $x^2+y^2-2x+2y-1=0$ ۲) $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

۳) $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ ۴) $x^2+y^2-2x+2y-3=0$

پاسخ : فاصلهٔ مرکز دایره $O'(1,-1)$ از خط مماس $3x-4y+3=0$ ، شعاع دایره می‌باشد:

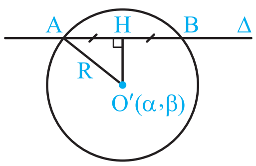
$$R=O'H=\frac{|3\times1-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2 \quad , \quad O'(1,-1) \xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-1)^2+(y+1)^2=2^2=4$$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x+2y-2=0 \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تعیین شعاع دایره‌ای که مرکز آن معلوم است و از خط Δ وتری به طول مشخص جدا می‌کند

ابتدا فاصلهٔ $O'(\alpha,\beta)$ را از خط $\Delta: ax+by+c=0$ محاسبه می‌کنیم، یعنی $O'H=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ، سپس از رابطهٔ زیر، R را محاسبه می‌کنیم:

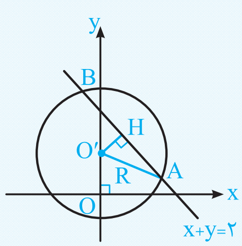
$$O'A^2=O'H^2+(\frac{AB}{2})^2$$



تست **معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن $O'(0,1)$ بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند، کدام است؟**

۱) $2x^2+2y^2-4y-3=0$ ۲) $2x^2+2y^2-4y-1=0$

۳) $2x^2+2y^2-4y-5=0$ ۴) $2x^2+2y^2-4y-7=0$



پاسخ : عمودی که از مرکز دایره بر وتر AB رسم می‌شود آن را نصف می‌کند،

پس $AH=BH=\frac{AB}{2}=\sqrt{2}$. فاصلهٔ $O'(0,1)$ از خط $x+y=2$ برابر است با:

$$O'H=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال شعاع دایره را به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AO'H$ محاسبه می‌کنیم:

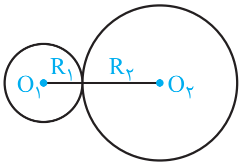
$$O'A^2=O'H^2+AH^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2} \Rightarrow R=O'A=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$O'(0,1)\ ,\ R=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=(\frac{\sqrt{10}}{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2-2y+1=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y+2-5=0 \Rightarrow 2x^2+2y^2-4y-3=0 \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.

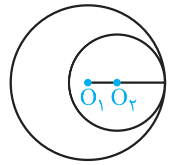
تعیین شعاع دایره‌ای که مرکز آن معلوم است و بر دایرهٔ معلوم دیگر مماس است.

فرض کنیم O_2 مرکز دایره‌ای به شعاع R_2 باشد که بر دایرهٔ $C(O_1, R_1)$ مماس است. دو حالت داریم:

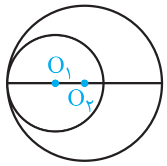


آ) دو دایره مماس خارج باشند، در این‌صورت جهت محاسبهٔ R_2 از تساوی $O_1O_2 = R_1 + R_2$ استفاده می‌کنیم، زیرا مختصات نقاط O_1 و O_2 معلوم است پس طول O_1O_2 و همچنین R_1 معلوم است لذا $R_2 = O_1O_2 - R_1$ می‌شود.

ب) دو دایره مماس داخل باشند، در این‌صورت جهت محاسبهٔ R_2 از تساوی $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ استفاده می‌کنیم.



$O_1O_2 = R_1 - R_2$



$O_1O_2 = R_2 - R_1$

تست

دایره به مرکز $O_2(-1, 1)$ بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس خارج است. این دایره از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(2,2)$ ۲) $(0,-2)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(2,0)$

پاسخ : ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow O_1(-\frac{-2}{2}, -\frac{2}{2}) = (1,-1) \;,\; R_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 - 0} = \sqrt{2}$$

$$O_1(1, -1), O_2(-1, 1) \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

برای این‌که دو دایره مماس خارج باشند، باید داشته باشیم:

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + R_2 \Rightarrow R_2 = \sqrt{2}$$

پس معادلهٔ دایرهٔ مطلوب برابر است با:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow$ نقطهٔ $(-2, 0)$ روی این دایره قرار دارد. $\Leftarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تست

شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای به مرکز $O_2(0,1)$ که بر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس داخل می‌باشد، کدام است؟

۱) $2+2\sqrt{2}$ ۲) $4+2\sqrt{2}$ ۳) $4+4\sqrt{2}$ ۴) $2+4\sqrt{2}$

پاسخ : ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O_1(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}) = (2,3) \;,\; R_1 = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-3)} = \sqrt{16} = 4$$

$$O_1(2,3), O_2(0,1) \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

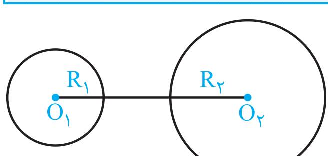
برای این‌که دو دایره مماس داخل باشند باید داشته باشیم:

$$O_1O_2 = |R_1 - R_2| \Rightarrow 2\sqrt{2} = |4 - R_2| \Rightarrow 4 - R_2 = \pm 2\sqrt{2}$$

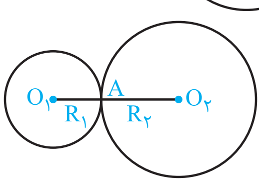
$$\Rightarrow 4 - R_2 = 2\sqrt{2} \text{ یا } 4 - R_2 = -2\sqrt{2} \Rightarrow R_2 = 4 - 2\sqrt{2} \text{ یا } R_2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

پس مسأله دو جواب دارد و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $4 + 2\sqrt{2}$ است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

وضعیت دو دایره نسبت به هم در صفحه



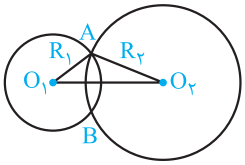
آ) دو دایره متخارج‌اند، اگر و تنها اگر $O_1O_2 > R_1 + R_2$



ب) دو دایره مماس خارج‌اند اگر و تنها اگر $O_1O_2 = R_1 + R_2$

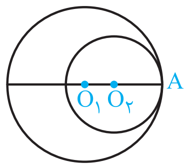
نکته مختصات نقطهٔ تماس دو دایره از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \frac{R_1O_2 + R_2O_1}{R_1 + R_2}$$

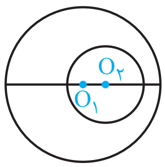


پ) دو دایره متقاطع‌اند اگر و تنها اگر $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$

ت) دو دایره مماس داخل‌اند اگر و تنها اگر $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$



ث) دو دایره متداخل‌اند، اگر و تنها اگر $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$



تست

دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ و $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$ چگونه‌اند؟

۱) متقاطع‌اند. ۲) مماس داخل‌اند. ۳) مماس خارج‌اند. ۴) متخارج‌اند.

پاسخ:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}\right) = (2,3), \quad R_1 = \sqrt{4+9+3} = \sqrt{16} = 4$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \Rightarrow O_2\left(-\frac{-10}{2}, -\frac{-14}{2}\right) = (5,7), \quad R_2 = \sqrt{25+49-73} = \sqrt{74-73} = 1$$

$$O_1(2,3), \; O_2(5,7) \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$O_1O_2 = 5 \;,\; R_1 + R_2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow$ دو دایره مماس خارج هستند. $\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تست

به ازای کدام مقدار a دو دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + a = 0$ مماس داخل هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -3

پاسخ:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O(0,0) \;,\; R = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x + a = 0 \Rightarrow O'(1,0) \;,\; R' = \sqrt{1-a} \quad (a \neq 1)$$

شرط این‌که دو دایره مماس داخل باشند را می‌نویسیم:

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = |1 - \sqrt{1-a}| \Rightarrow 1 = |1 - \sqrt{1-a}| \Rightarrow 1 - \sqrt{1-a} = \pm 1$$

$\Rightarrow 1 = 1 - \sqrt{1-a} \Rightarrow a = 1$ قابل قبول نیست.

$-1 = 1 - \sqrt{1-a} \Rightarrow \sqrt{1-a} = 2 \Rightarrow 1 - a = 4 \Rightarrow a = 1 - 4 = -3 \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

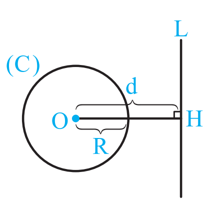
وضعیت خط نسبت به دایره

خط L و دایرهٔ $C(O, R)$ را در نظر می‌گیریم.

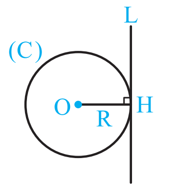
روش اول: از معادلهٔ خط L، y را بر حسب x به‌دست می‌آوریم و آن را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم. یک معادلهٔ درجه دوم بر حسب x به‌دست می‌آید. اگر این معادله دو ریشهٔ متمایز داشته باشد خط و دایره در دو نقطه متقاطع‌اند، اگر این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد خط و دایره بر هم مماس‌اند و نهایتاً اگر معادله ریشه نداشته باشد، خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.

روش دوم: فاصلهٔ مرکز دایره تا خط L را d می‌نامیم. داریم:

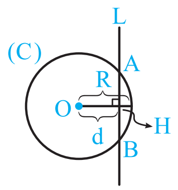
آ) اگر $d > R$ آن‌گاه خط با دایره اشتراک ندارد.



ب) اگر $d = R$، خط بر دایره مماس است.



پ) اگر $d < R$، خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



تست

وضعیت خط $x + y = ۴$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ کدام است؟

۱) خط مماس بر دایره است.
۲) خط و دایره در دو نقطه متقاطع‌اند.
۳) خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.
۴) خط از مرکز دایره می‌گذرد.

پاسخ: **روش اول:**

$$x + y = ۴ \Rightarrow y = ۴ - x$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (۴ - x)^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۱۶ - ۲x - ۳ = ۰$$

$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۰x + ۱۳ = ۰ \quad , \quad \Delta' = ۵^۲ - ۲ \times ۱۳ = ۲۵ - ۲۶ < ۰ \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

بنابراین خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند. پس گزینهٔ (۳) درست است.

روش دوم: ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow O'(۱,۰) \ , \ R = \sqrt{۱^۲ + ۰^۲ + ۳} = \sqrt{۴} = ۲$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $x + y = ۴$ را به‌دست می‌آوریم و آن را با $R = ۲$ مقایسه می‌کنیم:

$d = O'H = \dfrac{|۱ + ۰ - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \dfrac{۳}{\sqrt{۲}} = \dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad R = ۲ \Rightarrow d > R \Rightarrow$ خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.

تست

به ازای کدام مقدار k، خط $۳x + ۴y + k = ۰$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y - ۴ = ۰$ مماس است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) -۵
۴) -۳

پاسخ:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y - ۴ = ۰ \Rightarrow O'(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{-۲}{۲}) = (۲, ۱) \ , \ R = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲ + ۴} = \sqrt{۹} = ۳$$

$$O'H = \frac{|۳ \times ۲ + ۴ \times ۱ + k|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|k + ۱۰|}{۵}$$

برای این‌که دایره و خط مماس شوند باید داشته باشیم:

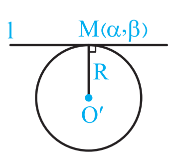
$$O'H = R \Rightarrow \frac{|k + ۱۰|}{۵} = ۳ \Rightarrow |k + ۱۰| = ۱۵ \Rightarrow k + ۱۰ = \pm ۱۵$$

$\Rightarrow k = ۱۵ - ۱۰ = ۵$ یا $k = -۱۵ - ۱۰ = -۲۵$

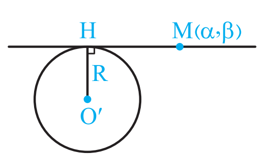
هر دو جواب قابل قبول است و جواب $k = ۵$ در گزینهٔ (۱) آمده است.

معادلات مماس و قائم از یک نقطه بر دایرهٔ مفروض

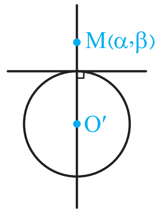
آ) اگر $M(\alpha , \beta)$ روی دایره باشد، ضریب زاویهٔ (شیب) خط l از رابطهٔ $m_l = -\dfrac{۱}{m_{O'M}}$ به‌دست می‌آید و معادلهٔ مماس برابر $y - \beta = m_l(x - \alpha)$ است.



ب) اگر $M(\alpha , \beta)$ خارج دایره باشد، معادلهٔ همهٔ خطوط گذرنده از نقطهٔ M را می‌نویسیم $y - \beta = m(x - \alpha)$ سپس از معادلهٔ $OH = R$، مقادیر m را به‌دست می‌آوریم.



نکته معمولاً دو مقدار برای m (شیب خط) به‌دست می‌آید، اگر یک مقدار برای m حاصل شود، یکی از خطوط مماس $x=\alpha$ می‌باشد.



پ) از هر نقطهٔ معلوم در صفحهٔ دایرهٔ مفروض، همواره می‌توان یک قائم بر نمودار دایره رسم کرد. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ معلوم و مرکز دایره، معادلهٔ خط قائم را مشخص می‌کند.

نکته از مرکز دایره بی‌شمار خط قائم می‌توان بر دایره رسم کرد.

تست

از نقطهٔ $A(۲،۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: خط مماس بر دایره را در نقطهٔ $A(۲،۳)$، l می‌نامیم. داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰ \Rightarrow O'(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{-۲}{۲})=(۱،۱) \quad , \quad R=\sqrt{۱^۲+۱^۲+۳}=\sqrt{۵}$$

$$\text{شیب خط شامل } O'A \Rightarrow m_{O'A}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=\frac{۲}{۱}=۲ \quad , \quad m_l=-\frac{۱}{m_{O'A}}=-\frac{۱}{۲} \ (\text{شیب خط مماس})$$

$$\text{معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ } A \text{ بر دایره} \Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y=-\frac{x}{۲}+۴$$

پس عرض از مبدأ خط مماس برابر ۴ است. لذا گزینهٔ (۴) درست است.

تست

از نقطهٔ $M(۳،۲)$ مماسی بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۱=۰$ رسم شده است. شیب خط مماس کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: نقطهٔ M خارج دایره قرار دارد. معادلهٔ خطوط گذرنده از نقطهٔ $M(۳،۲)$ به‌صورت $y-۲=m(x-۳)$ (البته به‌جز خط $x=۳$) است. داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۱=۰ \Rightarrow O'(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۴}{۲})=(۱،-۲) \ , \ R=\sqrt{۱+۴+۱۱}=\sqrt{۱۶}=۴$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $y-mx+۳m-۲=۰$ را برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-۲-m+۳m-۲|}{\sqrt{۱+m^۲}}=۴ \Rightarrow ۲\sqrt{۱+m^۲}=|m-۲| \Rightarrow ۴+۴m^۲=m^۲-۴m+۴$$

$$\Rightarrow ۳m^۲+۴m=۰ \Rightarrow m(۳m+۴)=۰ \Rightarrow m=۰ \ \text{یا} \ m=-\frac{۴}{۳}$$

هر دو جواب قابل قبول است و $m=-\frac{۴}{۳}$ در گزینهٔ (۴) آمده است.

تست

معادلهٔ خط قائم بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۸x-۱۰y+۳۲=۰$ که بر خط $x+y=۰$ عمود باشد کدام است؟

۱) $y=-x+۹$ ۲) $y=x+۹$ ۳) $y=-x+۱$ ۴) $y=x+۱$

پاسخ: ابتدا مرکز دایرهٔ داده‌شده را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۸x-۱۰y+۳۲=۰ \Rightarrow O'(-\frac{۸}{۲}, -\frac{-۱۰}{۲})=(-۴،۵)$$

خطی که از مرکز دایره می‌گذرد، قائم بر دایره است و چون این خط بر خط $x+y=۰$ عمود است، پس شیب خط قائم برابر است با $m=-\frac{۱}{-۱}=۱$ و معادلهٔ آن برابر است با:

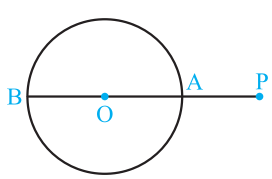
$$O'(-۴،۵) \ , \ m=۱ \xrightarrow[\text{بر خط } x+y=۰]{\text{معادلهٔ قائم بر دایره و عمود}} y-۵=۱\times(x+۴) \Rightarrow y=x+۹ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره از یک نقطهٔ معلوم

نقطهٔ معلوم P و دایرهٔ $C(O،R)$ مفروضند. نقطهٔ P را به مرکز دایره یعنی O وصل می‌کنیم. امتداد OP دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند که یکی از آن‌ها نزدیک‌ترین و دیگری دورترین نقطهٔ دایره از نقطهٔ P می‌باشند.

$BP=OP+R$ (دورترین)

$AP=|OP-R|$ (نزدیک‌ترین)



تست بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲،۳)$ از دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲=۰$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ:

$$x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲=۰ \Rightarrow O'(-\frac{۲}{۲}, -\frac{۲}{۲})=(-۱, -۱), R=\sqrt{۱+۱+۲}=۲$$

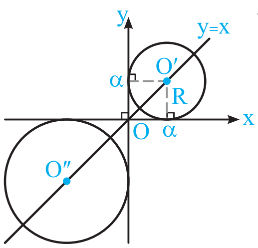
$$O'(-۱, -۱), M(۲،۳) \Rightarrow O'M=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

گزینهٔ (۳) درست است. $\Leftarrow$ بیش‌ترین فاصلهٔ M از نقاط دایره $=O'M+R=۵+۲=۷$

معادلهٔ دایره‌ای که بر محورهای مختصات مماس است

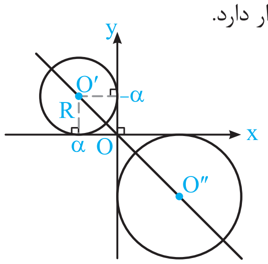
آ) دایره‌ای که بر محور xها و yها در ناحیهٔ اول یا در ناحیهٔ سوم مماس است، مرکزش روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

$$O'(\alpha , \alpha) , R=|\alpha| \Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲$$



ب) دایره‌ای که بر محور xها و yها در ناحیهٔ دوم یا در ناحیهٔ چهارم مماس است، مرکزش روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد.

$$O'(\alpha ,-\alpha) , R=|\alpha| \Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y+\alpha)^۲=\alpha^۲$$



تست معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش روی خط $x+y=۲$ بوده و بر محورهای مختصات مماس است، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۱=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+x+y+۱=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۲x+۲y+۱=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x-۲y+۱=۰$

پاسخ: مرکز دایره‌هایی که بر محور مختصات مماس هستند روی خط $y=x$ (معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم) یا خط $y=-x$ (معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم) قرار دارد. چون خط $x+y=۲$ با خط $y=-x$ موازی است پس مرکز این دایره نقطهٔ تلاقی دو خط $x+y=۲$ و $y=x$ است:

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱ , y=۱ \Rightarrow O'(۱،۱)$$

گزینهٔ (۴) درست است. $O'(۱،۱) , R=۱ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۲y+۱=۰ \Rightarrow$

تست دو دایره از نقطهٔ $(۱،۸)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند. شعاع این دایره‌ها کدام است؟

۱) ۵ ، ۱۳ ۲) ۴ ، ۱۳ ۳) ۴ ، ۱۲ ۴) ۵ ، ۱۲

پاسخ: نقطهٔ تلاقی دو دایره یعنی $A(۱،۸)$ در ناحیهٔ اول قرار دارد، پس دایره‌ها در ربع اول بر محورهای مختصات مماس‌اند، بنابراین معادلهٔ دایره‌ها به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲$ است. مختصات نقطهٔ A را در معادله قرار می‌دهیم و α را به‌دست می‌آوریم:

$$(۱-\alpha)^۲+(۸-\alpha)^۲=\alpha^۲ \Rightarrow ۱-۲\alpha+\alpha^۲+۶۴-۱۶\alpha+\alpha^۲=\alpha^۲ \Rightarrow \alpha^۲-۱۸\alpha+۶۵=۰$$

$$\Rightarrow (\alpha-۵)(\alpha-۱۳)=۰ \Rightarrow \alpha=۵ \text{ یا } \alpha=۱۳$$

پس شعاع دایره‌ها $R_۱=\alpha=۱۳$ و $R_۲=\alpha=۵$ است. لذا گزینهٔ (۱) درست است.

نکته اگر دو دایره بر محورهای مختصات مماس باشند و از نقطهٔ $A(m،n)$ بگذرند آن‌گاه شعاع دایره‌ها برابر است با:

$$R=|m|+|n|\pm\sqrt{۲|mn|}$$

مثلاً در تست فوق با استفاده از این دستور شعاع دایره‌ها به شرح زیر به‌دست می‌آیند:

$$R=|۱|+|۸|\pm\sqrt{۲|۱\times۸|}=۱+۸\pm\sqrt{۱۶}=۹\pm۴ \Rightarrow R=۵ \text{ یا } R=۱۳$$

وضعیت یک نقطه و دایره

اگر معادلهٔ دایره به‌صورت $F(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}-R^{۲}=۰$ باشد (ضرایب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ مثبت باشند) و $M(x_{۱},y_{۱})$ نقطه‌ای از صفحه باشد، آن‌گاه داریم:

آ) $M \Leftrightarrow F(x_{۱},y_{۱})<۰$ درون دایره است.

ب) $M \Leftrightarrow F(x_{۱},y_{۱})>۰$ خارج دایره است.

پ) $M \Leftrightarrow F(x_{۱},y_{۱})=۰$ روی دایره است.

تست

نقطهٔ $(۲,۱)$ خارج دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۳x+۵y+k=۰$ است، حدود عدد k کدام است؟

۱) $k>۱۶$ ۲) $k<-۱۶$ ۳) $-۱۶<k<\frac{۱۷}{۲}$ ۴) $-۱۶<k<۳۴$

پاسخ: ابتدا شرط دایره بودن معادلهٔ داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

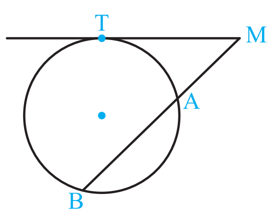
$$x^{۲}+y^{۲}+۳x+۵y+k=۰ \Rightarrow R^{۲}=(\frac{۳}{۲})^{۲}+(\frac{۵}{۲})^{۲}-k=\frac{۱۷}{۲}-k>۰ \Rightarrow k<\frac{۱۷}{۲} \quad (۱)$$

$M(۲,۱) \Rightarrow F(M)>۰ \Rightarrow F(۲,۱)>۰$ بیرون دایره است.

$$\Rightarrow ۲^{۲}+۱^{۲}+۳\times۲+۵\times۱+k>۰ \Rightarrow ۱۶+k>۰ \Rightarrow k>-۱۶ \quad (۲)$$

$(۱)\bigcap(۲) \Rightarrow -۱۶<k<\frac{۱۷}{۲} \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

محاسبهٔ طول قطعهٔ مماس رسم‌شده از یک نقطهٔ معلوم بر دایره



اگر از نقطهٔ $M(x_{۱},y_{۱})$ مماس MT و قاطع MAB را نسبت به دایره $F(x,y)=(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}-R^{۲}=۰$ یا $F(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ رسم کنیم، همواره داریم:

$$MT^{۲}=MA\times MB=F(x_{۱},y_{۱}) \Rightarrow MT=\sqrt{F(x_{۱},y_{۱})}$$

تست

طول قطعه مماسی که از نقطهٔ $M(۴,۱)$ بر دایره به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۳=۰$ رسم شده، برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ:

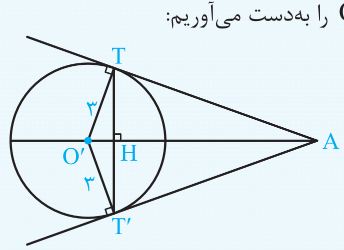
$MT^{۲}=F(۴,۱)=۴^{۲}+۱^{۲}-۲\times۴+۴\times۱+۳=۱۶+۱-۸+۴+۳=۹+۷=۱۶ \Rightarrow MT=۴ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست

از نقطهٔ $A(۲,۳)$ دو مماس بر دایرهٔ $(x+۲)^{۲}+y^{۲}=۹$ رسم کرده‌ایم. اندازهٔ پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) ۵/۲ ۲) ۴/۸ ۳) ۴/۲ ۴) ۳/۶

پاسخ: مرکز دایره $O'(-۲,۰)$ و شعاع آن $R=۳$ است. ابتدا طول مماس AT و طول پاره‌خط $O'A$ را به‌دست می‌آوریم:



$$AT^{۲}=F(۲,۳)=(۲+۲)^{۲}+۳^{۲}-۹=۱۶ \Rightarrow AT=۴$$

$$O'A^{۲}=(۲+۲)^{۲}+(۳-۰)^{۲}=۱۶+۹=۲۵ \Rightarrow O'A=۵$$

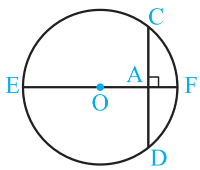
حال مساحت مثلث ATO' را می‌نویسیم:

$$S(ATO')=\frac{۱}{۲}TH\times O'A=\frac{۱}{۲}\times O'T\times AT \Rightarrow TH\times۵=۳\times۴ \Rightarrow TH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

$TT'=۲TH=۲\times۲/۴=۴/۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

محاسبهٔ طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ معلوم A داخل یک دایره

کوتاه‌ترین وتر گذرنده بر نقطهٔ A داخل یک دایره، وتری است عمود بر قطری از دایره که از نقطهٔ A می‌گذرد. اگر معادلهٔ دایره به‌صورت $F(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ و $A(x_۱,y_۱)$ باشد آن‌گاه طول وتر CD برابر است با:



$$\boxed{CD=۲\sqrt{|F(x_۱,y_۱)|}}$$

تست

اندازهٔ کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ $A(-۱,۰-۲)$ واقع در داخل دایره به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۲x+۴y-۱۱=۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

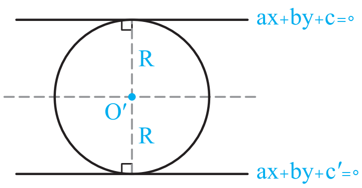
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ : اگر طول این وتر را CD بنامیم داریم:

$CD=۲\sqrt{|F(x_۱,y_۱)|}=۲\sqrt{|۱+۴-۲-۸-۱۱|}=۲\sqrt{|-۱۶|}=۲\sqrt{۱۶}=۲\times۴=۸\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

وضعیت دایرهٔ مماس بر دو خط

آ) اگر دایره‌ای بر دو خط موازی مماس باشد، مرکز آن روی خطی است که به موازات آن دو خط قرار دارد و از هر دو به یک فاصله است و شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ دو خط موازی است.



$\boxed{ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰}$: معادلهٔ خط گذرنده از مرکز دایره

$\boxed{R=\frac{|c-c'|}{۲\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}}$: شعاع دایره

تست

معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن روی خط $y=۲x-۳$ قرار دارد و بر دو خط به معادلهٔ $y=-x$ و $y=-x+۶$ مماس می‌باشد، کدام است؟

۱) $x^{۲}+y^{۲}-۸x-۴y+۲=۰$
۲) $۲x^{۲}+۲y^{۲}-۸x-۴y+۱=۰$
۳) $x^{۲}+y^{۲}-۸x+۴y-۲=۰$
۴) $۲x^{۲}+۲y^{۲}+۸x-۴y+۱=۰$

پاسخ : دو خط داده‌شده که بر دایره مماس‌اند، موازی‌اند، پس مرکز دایره روی خط موازی و متساوی‌الفاصله از آن‌ها قرار دارد:

$$y=-x\quad,\quad y=-x+۶\Rightarrow y=-x+\frac{۶+۰}{۲}\Rightarrow y=-x+۳$$

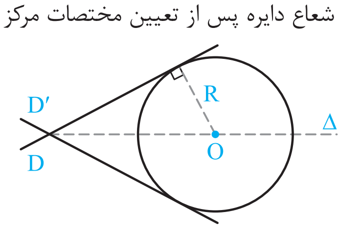
از طرفی مرکز دایره روی خط $y=۲x-۳$ واقع است. پس نقطهٔ تلاقی این دو خط، مرکز دایره است.

$$\begin{cases}y=-x+۳\\ y=۲x-۳\end{cases}\Rightarrow ۲x-۳=-x+۳\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\,,y=۱\Rightarrow O'(۲,۱)$$

شعاع دایره نصف فاصلهٔ دو خط داده‌شده است: $R=\frac{|۶-۰|}{۲\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$ و نهایتاً معادلهٔ دایره برابر است با:

$(x-۲)^{۲}+(y-۱)^{۲}=\frac{۹}{۲}\Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}-۸x-۴y+۱=۰\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

ب) اگر دایره‌ای بر دو خط متقاطع مماس باشد، مرکز آن روی نیمساز زاویهٔ بین آن دو خط قرار دارد و برای تعیین شعاع دایره پس از تعیین مختصات مرکز دایره، فاصلهٔ آن را تا یکی از دو خط متقاطع حساب می‌کنیم.



$$\begin{cases}D: ax+by+c=۰\\ D': a'x+b'y+c'=۰\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط}}\boxed{\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^{۲}+b'^{۲}}}}$$

تست **دایره‌ای بر دو خط $۳x-۴y+۵=۰$ و $۴x-۳y+۱=۰$ مماس است و مرکز آن روی نیمساز ربع اول و سوم واقع است، شعاع این دایره کدام است؟**

۱) $۰/۶$ ۲) $۰/۸$ ۳) $۰/۵$ ۴) ۱

پاسخ: دو خط داده‌شده متقاطع هستند، چون دایره بر هر دوی آن‌ها مماس است پس مرکزش روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط قرار دارد:

$$\frac{۴x-۳y+۱}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\pm\frac{۳x-۴y+۵}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}\Rightarrow ۴x-۳y+۱=۳x-۴y+۵\quad ,\quad ۴x-۳y+۱=-۳x+۴y-۵$$

$$\Rightarrow x+y-۴=۰\quad ,\quad ۷x-۷y+۶=۰$$

از طرفی مرکز دایره روی خط $y=x$ قرار دارد و این خط فقط خط $x+y-۴=۰$ را قطع می‌کند.

$$\begin{cases}x+y-۴=۰\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x=y=۲\Rightarrow O'(۲،۲)$$

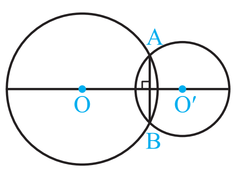
و نهایتاً شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز دایره از یکی از دو خط داده‌شده است.

$$R=\frac{|۳\times۲-۴\times۲+۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۳}{۵}=۰/۶\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

وتر مشترک دو دایره

پاره‌خطی که نقاط تلاقی دو دایره را به هم وصل می‌کند، وتر مشترک دو دایره نام دارد. برای تعیین معادلهٔ خط شامل این وتر مشترک، کافی است جملات درجهٔ دوم را از معادلات دو دایره حذف کنیم.

نکته خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، همواره عمودمنصف وتر مشترک دو دایره است.



تست **معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۱=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱=۰$ کدام است؟**

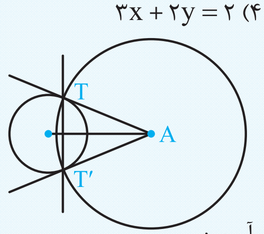
۱) $x-۲y-۱=۰$ ۲) $x+۲y-۱=۰$ ۳) $-x+۲y=۰$ ۴) $x+۲y+۱=۰$

پاسخ: جهت یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ فوق کافی است، معادلات دو دایره را از یکدیگر کم کنیم:

$$(x^۲+y^۲-۱)-(x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱)=۰\Rightarrow ۲x+۴y-۲=۰\Rightarrow x+۲y-۱=۰\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست **از نقطهٔ $A(۳،۲)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ خطی که نقاط تماس را به هم وصل می‌کند، کدام است؟**

۱) $۲x+۳y=۳$ ۲) $۳x+۲y=۳$ ۳) $۲x+۳y=۲$ ۴) $۳x+۲y=۲$



پاسخ: ابتدا طول مماسی که از A بر دایره رسم می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$AT=\sqrt{F(۳،۲)}=\sqrt{۹+۴-۶+۴-۲}=\sqrt{۹}=۳$$

حال معادلهٔ دایره‌ای به مرکز A و شعاع $AT=۳$ را می‌نویسیم:

$$(x-۳)^۲+(y-۲)^۲=۹$$

برای رسیدن به معادلهٔ خطی که نقاط T و T' را به هم وصل می‌کند، کافی است معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را به‌دست آوریم؛ به همین جهت معادلات دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲)-(x-۳)^۲-(y-۲)^۲+۹=۰\Rightarrow -۲x+۲y-۲+۶x-۹+۴y-۴+۹=۰$$

$$\Rightarrow ۴x+۶y-۶=۰\Rightarrow ۲x+۳y=۳\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

☆۱۷۸. دو نقطهٔ A و B داخل زاویهٔ xOy مفروضند. می‌خواهیم نقطه‌ای بیابیم که از دو ضلع زاویه به یک فاصله و از دو نقطهٔ A و B هم به یک فاصله باشد. تعداد جواب کدام است؟

۱) ۱ ۲) یک یا بی‌شمار ۳) صفر ۴) صفر یا یک یا بی‌شمار

۱۷۹. روی امتداد یک ضلع مثلث، چند نقطه یافت می‌شود که از خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) حداکثر یکی ۳) ۲ ۴) دقیقاً یکی

☆۱۸۰. زاویهٔ ثابت xOy مفروض است. اگر A و B دو نقطهٔ متغیر به ترتیب روی نیم‌خط‌های Ox و Oy باشند، مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو نیم‌خط Ox و Oy و پاره‌خط AB مماس‌اند، کدام است؟

۱) خطی موازی با Ox ۲) خطی موازی AB ۳) خطی موازی Oy ۴) یک نیم‌خط

۱۸۱. دو خط متقاطع l و l' مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه روی خط D می‌توان یافت که از دو خط l و l' به یک فاصله باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

★۱۸۲. دو خط غیرموازی d و d' و نقطهٔ A روی d مفروضند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که در نقطهٔ A بر خط d و همچنین بر خط d' مماس باشد، تعداد جواب‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

☆۱۸۳. در مثلث $ABC(AB < AC)$ ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ADE (نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها)، بر روی کدام جزء مثلث ABC است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) عمودمنصف BC ۲) میانهٔ نظیر ضلع BC ۳) ارتفاع وارد بر BC ۴) نیمساز داخلی زاویهٔ A

قسمت دوم: دایره

دایره و مشخصات آن

۱۸۴. مختصات مرکز دایرهٔ $3x^2 + 3y^2 - 6x + 3y - 1 = 0$ کدام است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(1,-\frac{1}{2})$ ۳) $(2,1)$ ۴) $(2,\frac{1}{2})$

☆۱۸۵. اگر $O'(1,2)$ مرکز دایرهٔ $x^2 + y^2 - ax + 2by = 0$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) صفر

۱۸۶. فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,4)$ از مرکز دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{2}$

☆۱۸۷. به ازای کدام مقادیر m معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2x + m = 0$، معادلهٔ یک دایره است؟

۱) $m < 1$ ۲) $m > 0$ ۳) $m = 0$ ۴) $m > 2$

۱۸۸. طول قطر دایرهٔ $4(x-1)^2 + (2y+1)^2 = 1$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۸۹. محیط دایرهٔ $16x^2 + 16y^2 = 1$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 16π ۴) $\frac{\pi}{16}$

☆۱۹۰. اگر نمایش هندسی رابطهٔ $x^2 + ay^2 + 2x + y = -1$ دایره باشد، مساحت این دایره کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{16}$

۱۹۱. شعاع دایرهٔ $ax^2 + y^2 + 2x + 4y = k$ برابر ۲ است. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

☆۱۹۲. اگر $x^2 + (3n-2)y^2 - (m-n-2)xy + (m+1) + (n+3)y - 8 = 0$ معادلهٔ یک دایره باشد، شعاع آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

☆**۱۹۳.** دایرهٔ $a(x^2+y^2-2x)+b(x^2+y^2-2y)=0$ از نقطهٔ $(2,-2)$ می‌گذرد، شعاع دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۱۹۴. اگر $(m-1)x^2+(2m-3)y^2=k^2+1$ معادلهٔ یک دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $m=2$ و k هر چه باشد. ۲) $m=2$ و k فقط یک باشد.
۳) m و k مثبت باشند. ۴) m و k هر عدد حقیقی باشند.

☆**۱۹۵.** به ازای چند مقدار m، نمودار معادلهٔ $x^2+y^2=m(m^2-1)x^2+2m-1$ نمایش یک دایره است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۶. به ازای چند مقدار k، نمودار معادلهٔ $kx^2+\frac{y^2}{k}=2x+k^2-3$، یک دایره است؟

۱) دو مقدار ۲) بی‌شمار ۳) یک مقدار ۴) صفر

☆**۱۹۷.** نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

☆**۱۹۸.** شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $(1,2)$ و $(3,0)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y=2x-1$ باشد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{13}$

۱۹۹. معادلهٔ قطری از دایرهٔ $x^2+y^2-2x=0$ که عمود بر خط $y=x$ باشد کدام است؟

۱) $y+x=2$ ۲) $y+2x=2$ ۳) $2y+x=1$ ۴) $y+x=1$

☆**۲۰۰.** معادلهٔ قطری از دایرهٔ $x^2+y^2-6x+4y=0$ که موازی محور y هاست، کدام است؟

۱) $x=-3$ ۲) $x=-2$ ۳) $x=2$ ۴) $x=3$

۲۰۱. دایرهٔ $8x^2+16x+8y^2=4$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

☆**۲۰۲.** سطح دایرهٔ $x^2+2x+y^2-2y=-\frac{1}{4}$ در کدام ربع‌های محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) فقط دوم ۲) فقط دوم و سوم ۳) اول، دوم و سوم ۴) چهار ربع

☆**۲۰۳.** دسته خطوط به معادلات $(m+2)y+(m+1)x+1=0$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطهٔ $A(5,2)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

☆**۲۰۴.** معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ $(-2,-1)$ و $(1,1)$ یک نقطه از آن باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2-4x-2y-8=0$ ۲) $x^2+y^2+4x+2y-8=0$
۳) $x^2+4x+2y-4=0$ ۴) $x^2+y^2+4x+2y+4=0$

☆**۲۰۵.** اگر دایرهٔ $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ محور x ها را در نقاط A و B قطع کند، آن‌گاه طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) $4\sqrt{6}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{3}$

☆**۲۰۶.** دایره‌ای مرکزش روی محور x ها قرار دارد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند، معادلهٔ دایره کدام است؟

۱) $(x-4)^2+y^2=16$ ۲) $(x-4)^2+y^2=25$ ۳) $(x-3)^2+y^2=18$ ۴) $(x-3)^2+y^2=16$

۲۰۷. دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

☆**۲۰۸.** دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

دایره‌ای که از سه نقطهٔ معلوم می‌گذرد

☆۲۰۹. شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $P(۱,۱)$، $Q(۴,۰)$ و $R(۵,۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

☆۲۱۰. معادلهٔ دایره‌ای که از نقاط تلاقی خط $۴x+۳y=۲۴$ با محورهای مختصات و مبدأ مختصات می‌گذرد، کدام است؟

۱) $(x-۴)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$ ۲) $(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۲۵$

۳) $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۳$ ۴) $(x-۳)^۲+(y-۲)^۲=۱۳$

۲۱۱. مختصات مرکز دایره‌ای که از سه نقطهٔ $(-۲,۰)$، $(۴,۰)$ و $(۰,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $(۱,\frac{۱}{۶})$ ۲) $(\frac{۱}{۶},۱)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۱,۲)$

☆۲۱۲. خط‌های $y=x+۱$ و $y=-x+۵$ محور x ها را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را A می‌نامیم، شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

☆۲۱۳. شعاع دایرهٔ گذرا از سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۲,-۱)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

★۲۱۴. از نقطهٔ $A(-۳,۰)$ دو مماس AB و AC بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ رسم شده است. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۳=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۲x-۳y+۳=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۲x-۲y-۳=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x+۳y-۳=۰$

خط قاطع بر دایره

☆۲۱۵. طول وتری که دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x=\frac{۱۹}{۵}$ از خط به معادلهٔ $y=۲x$ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۱۶. خط $my+x-۱=۰$ دایرهٔ $x^۲-۲x+y^۲-۳=۰$ را در دو نقطه قطع می‌کند، فاصلهٔ این دو نقطه چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

☆۲۱۷. خط $۵x+۱۲y=۱۴$ دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. فاصلهٔ A و B از هم چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۱۸. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O'(۰,۱)$ که از خط $y=۳$ وتری به طول ۲ جدا کند، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲+۲y=۴$ ۲) $x^۲+y^۲-۲y=۴$ ۳) $x^۲+y^۲-۳y=۳$ ۴) $x^۲+y^۲+۲y=۳$

★۲۱۹. مرکز دایره‌ای به شعاع ۳ که دو خط $۲x+y-۱=۰$ و $x+۲y+۱=۰$ را قطع می‌کند و از هر یک وتری به طول ۴ جدا می‌کند کدام است؟

۱) $(۶,-۶)$ ۲) $(-۵,۵)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(۴,۴)$

۲۲۰. مساحت دایره‌ای که از دو خط $x-y=۱$ و $x-y=۵$ وترهای به طول ۱۴ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۴۸π ۲) ۴۹π ۳) ۵۱π ۴) ۵۲π

☆۲۲۱. خط $y=x+۱$ دایرهٔ $x^۲+y^۲-x-۵=۰$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. طول نقطهٔ وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

☆۲۲۲. شعاع دایره‌ای که از نقاط $A(۲,۱)$ و $B(-۲,۳)$ می‌گذرد و فاصلهٔ مرکز آن از خط شامل پاره‌خط AB، برابر $\sqrt{۲}$ است، کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۸}$ ۴) ۳

☆۲۲۳. به ازای کدام مقادیر a، خط $۳x+۴y+a=۰$ دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟

۱) $-۱۰<a<۲۰$ ۲) $a>۲۰$ ۳) $a<۵$ ۴) $-۵<a<۱۰$

★۲۲۴. خط $y=mx$ دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y+۱=۰$ را در نقاط A و B قطع می‌کند و $AB=\sqrt{۶}$ است. مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) -۳ ۴) ۱

طول مماس رسم‌شده بر دایره و معادلهٔ خط مماس و قائم بر دایره

۲۲۵. طول قطعه مماسی که از نقطهٔ $A(1,2)$ بر دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ رسم می‌شود، چقدر است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

☆**۲۲۶.** اندازهٔ مماسی که از نقطهٔ $(3,-1)$ بر دایرهٔ $x^2+y^2+7x+6y=0$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

★**۲۲۷.** از نقطهٔ $(3,0)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2=3$ رسم می‌کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند، مختصات A و B کدام است؟

۱) $(1,\pm\sqrt{2})$ ۲) $(\sqrt{2},\pm 1)$ ۳) $(\pm\sqrt{2},1)$ ۴) $(\pm 1,\sqrt{2})$

۲۲۸. خط L گذرنده از نقطهٔ $M(2,1)$ دایره به معادلهٔ $2x^2+2y^2-2x+4y-2=0$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند، حاصل‌ضرب $MA\times MB$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۸

☆**۲۲۹.** خط D در نقطهٔ $T(3,4)$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-25=0$ مماس است. معادلهٔ خط D کدام است؟

۱) $3y+4x-25=0$ ۲) $3y+4x+25=0$ ۳) $4y+3x-25=0$ ۴) $4y-3x-25=0$

۲۳۰. خط به معادلهٔ $x+\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادلهٔ دایره کدام است؟

۱) $x^2+y^2=4$ ۲) $x^2+y^2=12$ ۳) $x^2+y^2=16$ ۴) $x^2+y^2=48$

★**۲۳۱.** از نقطهٔ $M(3,1)$ می‌توان دو مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2=5$ رسم کرد. مختصات یکی از نقاط تماس کدام است؟

۱) $(2,1)$ ۲) $(2,-1)$ ۳) $(1,-2)$ ۴) $(1,2)$

۲۳۲. اگر معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y-5=0$ در نقطهٔ $A(2,1)$ به‌صورت $y=ax+b$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

★**۲۳۳.** شیب خطی که از نقطهٔ $A(-2,-4)$ بگذرد و بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$

★**۲۳۴.** از نقطهٔ $M(3,-1)$ دو مماس بر دایرهٔ $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ خطی که از نقاط تماس می‌گذرد، کدام است؟

۱) $x=-\frac{3}{4}$ ۲) $x=-4$ ۳) $x=-\frac{15}{4}$ ۴) $x=-\frac{7}{2}$

☆**۲۳۵.** اگر خط $y=1$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-4x+8y+n=0$ مماس باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) -5 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۵

۲۳۶. عرض از مبدأ خط قائم بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-4y-13=0$ در نقطهٔ $(4,5)$ واقع بر آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆**۲۳۷.** معادلهٔ خط قائم بر دایرهٔ $x^2+y^2-6x+8y-1=0$ که موازی خط $x+2y=0$ است، کدام است؟

۱) $2x+y=1$ ۲) $2x+y-2=0$ ۳) $x+2y-1=0$ ۴) $x+2y+5=0$

☆**۲۳۸.** تمام خطوطی که با دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y=0$ زاویهٔ 90° می‌سازند، از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند. مختصات A کدام است؟

۱) $(1,-2)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(2,-1)$ ۴) $(-1,2)$

۲۳۹. به ازای کدام مقدار a قائم بر منحنی به معادلهٔ $2x^2+(a-1)y^2-3x+4y=0$ همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

☆**۲۴۰.** دایره‌ای بر خط به معادلهٔ $y=2x-1$ مماس است و تمام قائم‌های بر دایره از نقطهٔ $(-1,2)$ می‌گذرند. بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط این دایره از محور xها کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $2+\sqrt{5}$ ۲) $3+\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) ۶

☆**۲۴۱.** هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ $(-2,1)$ می‌گذرد، این دایره بر خط به معادلهٔ $y=x-1$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) $3\sqrt{2}$

☆۲۴۲. به ازای کدام مقدار a، زاویهٔ بین خط مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+y=1$ و خط به معادلهٔ $3x+2y=a$ در نقطهٔ تلاقی آن‌ها، 90° است؟
(سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

دایرهٔ مماس بر یک خط، خطهای موازی، خطهای متقاطع و محورهای مختصات

۲۴۳. معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $O'(1,2)$ و بر خط $x+y=1$ مماس است، کدام است؟

۱) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ ۲) $x^2+y^2-2x-4y+3=0$

۳) $x^2+y^2+2x+4y=0$ ۴) $x^2+y^2-2x-4y=0$

☆۲۴۴. اگر دایرهٔ $(x-1)^2+(y-1)^2=R^2$ بر خط $3x+4y+2=0$ مماس باشد، آن‌گاه R کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۸ ۴) ۲

۲۴۵. به ازای کدام مقدار a دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ بر خط $x+3y=0$ مماس است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۵

☆۲۴۶. اگر دایرهٔ $x^2+y^2+mx-2y=0$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مماس باشد، آن‌گاه شعاع دایره چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

☆۲۴۷. دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,2)$ و $(4,0)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه‌ای دیگر با کدام عرض قطع می‌کند؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۴۸. دایره‌ای به مرکز $(2,-1)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x-y=1$، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱ ۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

۲۴۹. دایره به مرکز $(2,0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادلهٔ $y=1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱، ۳ ۲) صفر، ۴ ۳) $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{2}$ ۴) $2-\sqrt{2}$ ، $2+\sqrt{2}$

★۲۵۰. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که از نقطهٔ $(\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ می‌گذرد و بر خط $y=x$ مماس باشد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۲۵۱. دایره‌ای از دو نقطهٔ $(2,0)$ و $(-2,0)$ گذشته و بر خط $y=1$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۲۵۲. دو دایره از نقاط $A(2,0)$ و $B(0,-2)$ گذشته و بر خط $y=2$ مماس هستند. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

☆۲۵۳. معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+4$ مماس باشد کدام است؟
(سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $x^2+y^2+2x-2y=0$ ۲) $x^2+y^2+2x-2y=1$

۳) $x^2+y^2-2x+y=0$ ۴) $x^2+y^2+2x-y=0$

☆۲۵۴. دایرهٔ گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y=2x$ و $y=2x+10$ مماس است، مختصات مرکز این دایره کدام است؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $(-3,2)$ ۲) $(-3,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-1,2)$

۲۵۵. به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $y=mx+2$، بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x=3$ مماس است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ، صفر ۲) $\frac{4}{3}$ ، صفر ۳) $-\frac{2}{3}$ ، ۱ ۴) $-\frac{2}{3}$ ، ۱

☆۲۵۶. دایره‌ای بر محور x ها و خط $3x+4y=0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطهٔ مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۴)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

☆۲۵۷. نقطهٔ $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

☆۲۵۸. مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(6,3)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = 2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{10}$

☆۲۵۹. اگر دایرهٔ $x^2 + ax + y^2 - 4y = b$ در ربع اول بر هر دو محور مماس باشد، $a + 2b$ چقدر است؟

۱) -8 ۲) -4 ۳) -16 ۴) -12

☆۲۶۰. دو دایره از نقطهٔ $(2,1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع دایره‌ها کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) ۱ , ۴ ۲) ۱ , ۵ ۳) ۲ , ۴ ۴) ۲ , ۵

☆۲۶۱. نقطهٔ $A(3,6)$ روی دایره‌ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است، شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۲ , ۱۲ ۲) ۲ , ۱۵ ۳) ۳ , ۹ ۴) ۳ , ۱۵

☆۲۶۲. دو دایرهٔ گذرا از نقطهٔ $(-9,2)$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ یک نقطه تا نقاط دایره ـ طول کوتاه‌ترین وتر در دایره و وتر مشترک دو دایره

۲۶۳. اگر نقطهٔ M روی منحنی $x^2 + y^2 + 2x = 3$ باشد، مینیمم طول OM چقدر است؟ (O مبدأ مختصات است)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۴. نقطهٔ M را روی منحنی $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ و نقطهٔ N را روی منحنی $(x+4)^2 + (y-9)^2 = 1$ انتخاب می‌کنیم. بیش‌ترین فاصلهٔ MN کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

★۲۶۵. اگر (x, y) نقطه‌ای روی نمودار به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار عبارت $\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۶. نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ به نقطهٔ $A(-1,3)$، به کدام فاصله از مبدأ مختصات است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

☆۲۶۷. فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادلهٔ $3x + 4y = 15$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۲۶۸. چند وتر به طول ۳ در دایرهٔ $x^2 + (y-1)^2 = 25$ می‌توان رسم کرد که از نقطهٔ $(2,3)$ بگذرد؟

۱) ۱ ۲) بی‌شمار ۳) صفر ۴) ۲

۲۶۹. طول کوتاه‌ترین وتری از دایرهٔ $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$ که از نقطهٔ $A(1,1)$ می‌گذرد، چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۱

☆۲۷۰. همهٔ خط‌های $y - mx - m + 3 = 0$ دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 11 = 0$ را در دو نقطه قطع می‌کنند. کوتاه‌ترین فاصلهٔ این نقاط کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

☆۲۷۱. طول وتری از دایرهٔ $x^2 + y^2 = 21$ که نقطهٔ $A(1,2)$ وسط آن باشد، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱۰

۲۷۲. نقطهٔ $M(2,1)$ روی وتر AB از دایرهٔ $x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12$ قرار دارد، حاصل $MA.MB$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

☆۲۷۳. معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2$ و $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ کدام خط است؟

۱) $x + y - 1 = 0$ ۲) $x + y + 1 = 0$ ۳) $y - x + 1 = 0$ ۴) $y - x - 1 = 0$

★۲۷۴. طول وتر مشترک دو دایرهٔ $x^2+y^2-1=0$ و $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

وضعیت نقطه و دایره ـ وضعیت دو دایره نسبت به هم

☆۲۷۵. حدود m برای آن‌که نقطهٔ $A(m, m-1)$ خارج دایرهٔ $x^2+y^2=5$ باشد، کدام است؟

۱) $-1<m<2$ ۲) $m>-1$ ۳) $m<2$ ۴) $m>2$ یا $m<-1$

☆۲۷۶. به ازای چند مقدار صحیح k، نقطهٔ $A(-2,1)$ داخل دایرهٔ $x^2+y^2+10x-6y+k=0$ قرار می‌گیرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) بی‌شمار

☆۲۷۷. دو دایره به معادله‌های $x^2+y^2-4x+4y=1$ و $x^2+y^2-4x+8y+19=0$، نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارجی ۲) مماس داخلی ۳) متقاطع در دو نقطه ۴) متخارج

☆۲۷۸. دو دایرهٔ $x^2-4x+y^2=0$ و $x^2+4x+y^2=5$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) مماس داخل‌اند. ۲) مماس خارج‌اند. ۳) متخارج‌اند. ۴) متقاطع‌اند.

☆۲۷۹. به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$ و $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل‌اند؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) -5 ۲) -4 ۳) -3 ۴) -2

☆۲۸۰. به ازای کدام مقدار b، دو دایره به معادلات $x^2+y^2+4\sqrt{6}y+b=0$ و $x^2+y^2-2x=3$ مماس خارج‌اند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

☆۲۸۱. دو دایرهٔ C و C' در نقطهٔ $(0,1)$ مماس برون هستند. اگر قائم‌های بر دایرهٔ C همواره از نقطهٔ $(2,-3)$ بگذرد، مرکز دایرهٔ C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(1,-2)$ ۴) $(1,-1)$

۲۸۲. طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ و $x^2+y^2-4x+8y+16=0$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

☆۲۸۳. دایرهٔ C بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-4x+2y=4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(8,7)$ می‌گذرد. شعاع دایرهٔ C کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

قسمت سوم: بیضی و سهمی

بیضی

☆۲۸۴. نقاط $F(3,1)$ و $F'(-3,1)$ کانون‌ها و نقطهٔ $M(-5,1)$ نقطه‌ای از بیضی می‌باشد. طول کوچک‌ترین قطر بیضی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

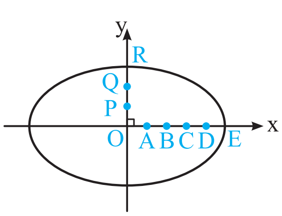
۲۸۵. نقاط $A'(-3,1)$ و $A(3,1)$ دو رأس یک بیضی با فاصلهٔ کانونی $2\sqrt{6}$ واحد است. طول کوچک‌ترین قطر بیضی کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۶. مختصات دو کانون یک بیضی $F(2,-3+\sqrt{5})$ و $F'(2,-3-\sqrt{5})$ و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{5}}{3}$ است. طول قطر بزرگ آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

☆۲۸۷. در بیضی روبه‌رو OE به پنج و OR به سه قسمت مساوی تقسیم شده‌اند به طوری‌که همهٔ تقسیمات برابرند. کدام نقطه کانون بیضی است؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۱۸۷ **۱** ۲ ۳ ۴

معادلهٔ زیر وقتی معادلهٔ یک دایره است که $R>۰$ باشد:

$x^۲+y^۲-۲x+m=۰$

$\Rightarrow R=\sqrt{(-\frac{-۲}{۲})^۲+(-\frac{۰}{۲})^۲-m}=\sqrt{۱-m}$

اگر مقدار زیر رادیکال مثبت باشد، آن‌گاه همواره $R>۰$ است:

$۱-m>۰\Rightarrow m<۱$

۱۸۸ **۱** ۲ ۳ ۴

روش اول:

$۴(x-۱)^۲+(۲y+۱)^۲=۱\Rightarrow ۴x^۲-۸x+۴+۴y^۲+۴y+۱=۱$

$\Rightarrow ۴x^۲+۴y^۲-۸x+۴y+۴=۰$

$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+y+۱=۰\Rightarrow R=\sqrt{۱^۲+(\frac{۱}{۲})^۲-۱}=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$ قطر دایره $=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$

روش دوم:

$۴(x-۱)^۲+(۲y+۱)^۲=۱\Rightarrow ۴(x-۱)^۲+۴(y+\frac{۱}{۲})^۲=۱$

$\Rightarrow (x-۱)^۲+(y+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow R^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$ قطر دایره $=۲R=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$

۱۸۹ ۱ **۲** ۳ ۴

$۱۶x^۲+۱۶y^۲=۱\Rightarrow x^۲+y^۲=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow R^۲=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow R=\frac{۱}{۴}$

محیط دایره $=۲\pi R=۲\pi\times\frac{۱}{۴}=\frac{\pi}{۲}$

۱۹۰ **۱** ۲ ۳ ۴

نمایش هندسی رابطهٔ $x^۲+ay^۲+۲x+y=-۱$ وقتی دایره است که $a=۱$ باشد. داریم:

$x^۲+y^۲+۲x+y+۱=۰\Rightarrow R=\sqrt{۱^۲+(\frac{۱}{۲})^۲-۱}=\frac{۱}{۲}$

$S_{\text{دایره}}=\pi R^۲=\pi\times(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{\pi}{۴}$

۱۹۱ ۱ **۲** ۳ ۴

معادلهٔ $ax^۲+y^۲+۲x+۴y=k$ وقتی دایره است که $a=۱$ باشد در این‌صورت داریم:

$x^۲+y^۲+۲x+۴y-k=۰\Rightarrow R=\sqrt{۱+۴-k}=\sqrt{۵-k}$

$\xrightarrow{R=۲\ (\text{فرض})}\sqrt{۵-k}=۲\Rightarrow ۵-k=۴\Rightarrow k=۱$

۱۹۲ ۱ **۲** ۳ ۴

معادلهٔ زیر وقتی دایره است که ضریب $y^۲$ برابر یک و ضریب xy برابر صفر باشد:

$x^۲+(۳n-۲)y^۲-(m-n-۲)xy+(m+۱)x+(n+۳)y-۸=۰$

$\begin{cases}۳n-۲=۱\\ m-n-۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\\ m=n+۲=۳\end{cases}$

$\Rightarrow x^۲+y^۲+۴x+۴y-۸=۰\Rightarrow R=\sqrt{۴+۴+۸}=\sqrt{۱۶}=۴$

۱۹۳ ۱ **۲** ۳ ۴

نقطهٔ $(۲,-۲)$ روی دایره به معادلهٔ داده‌شده قرار دارد. پس در معادلهٔ آن یعنی $a(x^۲+y^۲-۲x)+b(x^۲+y^۲-۲y)=۰$ صدق می‌کند:

$a(۴+۴-۴)+b(۴+۴+۴)=۰\Rightarrow ۴a+۱۲b=۰\Rightarrow a=-۳b$

این تساوی را در معادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم:

$-۳b(x^۲+y^۲-۲x)+b(x^۲+y^۲-۲y)=۰$

$\xrightarrow{b\neq۰}-۳x^۲-۳y^۲+۶x+x^۲+y^۲-۲y=۰$

$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۶x+۲y=۰\Rightarrow x^۲+y^۲-۳x+y=۰$

$\Rightarrow R=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۱۹۴ **۱** ۲ ۳ ۴

برای این‌که معادلهٔ $(m-۱)x^۲+(۲m-۳)y^۲=k^۲+۱$ نمایش یک دایره باشد باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ مساوی باشند:

$m-۱=۲m-۳\Rightarrow m=۲\Rightarrow x^۲+y^۲=k^۲+۱$

معادلهٔ فوق به ازای هر k حقیقی معادلهٔ یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع $\sqrt{k^۲+۱}$ است.

۱۹۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$x^۲+y^۲=m(m^۲-۱)x^۲+۲m-۱$

$\Rightarrow x^۲(۱-m^۳+m)+y^۲=۲m-۱$

$۱-m^۳+m=۱\Rightarrow m(m^۲-۱)=۰\Rightarrow m=۰$ یا $m=۱$ یا $m=-۱$

مقداری از m قابل قبول است که به ازای آن $۲m-۱$ مثبت باشد و این مقدار $m=۱$ است.

۱۹۶ ۱ ۲ **۳** ۴

برای این‌که نمودار معادلهٔ $kx^۲+\frac{y^۲}{k}=۲x+k^۲-۳$ یک دایره باشد، باید داشته باشیم:

$k=\frac{۱}{k}\Rightarrow k^۲=۱\Rightarrow k=\pm۱$

$k=۱\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۲=۰\Rightarrow R^۲=-۱\Rightarrow$ معادلهٔ دایره نمی‌باشد.

$k=-۱\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲=۰$

$\Rightarrow R^۲=۳\Rightarrow$ معادلهٔ دایره به شعاع $\sqrt{۳}$ است.

۱۹۷ **۱** ۲ ۳ ۴

نقطهٔ $O'(a,۲a)$ مرکز دایره و نقاط $A(۲,۱)$ و $B(-۱,۴)$ روی دایره هستند. پس داریم:

$O'A=O'B\Rightarrow (a-۲)^۲+(۲a-۱)^۲=(a+۱)^۲+(۲a-۴)^۲$

$\Rightarrow a^۲-۴a+۴+۴a^۲-۴a+۱=a^۲+۲a+۱+۴a^۲-۱۶a+۱۶$

$\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲$

$R=O'A=\sqrt{(a-۲)^۲+(۲a-۱)^۲}=\sqrt{۰^۲+۳^۲}=۳$ (شعاع دایره)

۱۹۸ ۱ ۲ **۳** ۴

چون مرکز دایره روی خط $y=۲x-۱$ قرار دارد، پس مرکز آن $O'(\alpha,۲\alpha-۱)$ است. دایره از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ می‌گذرد پس داریم:

$O'A=O'B\Rightarrow(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۱-۲)^۲=(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱-۰)^۲$

$\Rightarrow(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۳)^۲=(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲$

$\Rightarrow\alpha^۲-۲\alpha+۱+۴\alpha^۲-۱۲\alpha+۹=\alpha^۲-۶\alpha+۹+۴\alpha^۲-۴\alpha+۱$

$\Rightarrow ۴\alpha=۰\Rightarrow\alpha=۰$

$R=O'A=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$ (شعاع دایره)

۱۹۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد. بنابراین ابتدا مرکز دایره را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۲x=۰ \Rightarrow O'(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۰}{۲})=(۱,۰)$$

اما بنا به فرض قطری از دایره بر خط $y=x$ عمود است پس شیب این قطر برابر $m=-\frac{۱}{۱}=-۱$ است و با داشتن یک نقطهٔ $O'(۱,۰)$ و شیب $m=-۱$ معادلهٔ قطر به‌دست می‌آید:

$$y-۰=-۱\times(x-۱) \Rightarrow y=-x+۱ \Rightarrow y+x=۱$$

۲۰۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

همانند پرسش قبل ابتدا مرکز دایره را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۶x+۴y=۰ \Rightarrow O'(-\frac{-۶}{۲}, -\frac{۴}{۲})=(۳,-۲)$$

اما بنا به فرض قطری از دایره موازی محور yها است پس معادلهٔ آن به‌صورت $x=k$ است و چون نقطهٔ $O'(۳,-۲)$ روی این قطر قرار دارد پس معادلهٔ آن برابر $x=۳$ است.

۲۰۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$۸x^۲+۱۶x+۸y^۲=۴$$

$$\xrightarrow[\text{محور x ها به‌دست می‌آید.}]{\text{با قرار دادن y=0 نقطهٔ تلاقی با}} ۸x^۲+۱۶x-۴=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۴x-۱=۰$$

این معادله دو ریشه دارد پس دایره محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

$$۸x^۲+۱۶x+۸y^۲=۴$$

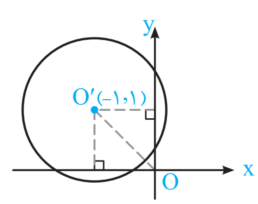
$$\xrightarrow[\text{محور y ها به‌دست می‌آید.}]{\text{با قرار دادن x=0 نقطهٔ تلاقی با}} ۸y^۲=۴ \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس دایره محور yها را نیز در دو نقطه قطع می‌کند و در مجموع محورهای مختصات را در ۴ نقطه قطع می‌کند.

۲۰۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$x^۲+۲x+y^۲-۲y=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y+\frac{۱}{۴}=۰$$

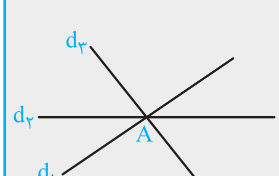
$$\Rightarrow O'(-۱,۱), R=\sqrt{۱+۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$



و مرکز دایرهٔ فوق نقطهٔ $O'(-۱,۱)$ و شعاع آن $R=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ است با توجه به این‌که $OO'=\sqrt{۲}>R=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ پس مبدأ مختصات خارج دایره قرار دارد و این یعنی دایره از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد و سطح آن در ربع اول، دوم و سوم قرار می‌گیرد.

۲۰۳ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: همهٔ خطوطی که از نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ می‌گذرند، معادله‌شان به‌صورت $\begin{cases} y-\beta=m(x-\alpha) \\ x=\alpha \end{cases}$ است که در آن m یک عدد حقیقی دلخواه است.



معادله‌های فوق را معادلات دسته خطوطی که از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند می‌نامند. اگر معادلات دسته خطوط داده شوند برای یافتن نقطهٔ ثابت A به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ از جملاتی که پارامتر m دارند، m را فاکتور می‌گیریم، ضریب و جملهٔ بدون m را مساوی صفر قرار داده، مقادیر x و y و در نتیجه مختصات نقطهٔ A به‌دست می‌آید.

۲ـ دو مقدار مختلف به پارامتر m می‌دهیم و یک دستگاه دو معادله دو مجهول تشکیل داده، مقادیر x و y را محاسبه می‌کنیم.

مثال: همهٔ خط‌های $(m-۱)y+mx-۲=۰$ از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند. مختصات این نقطه را بیابید.

پاسخ: روش اول:

$$(m-۱)y+mx-۲=۰ \Rightarrow m(y+x)-y-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+x=۰ \\ y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow x=۲, y=-۲ \Rightarrow A(۲,-۲)$$

روش دوم:

$$\left.\begin{matrix} m=۱ \Rightarrow ۰\times y+۱\times x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ m=۰ \Rightarrow -y+۰\times x-۲=۰ \Rightarrow y=-۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(۲,-۲)$$

قطرهای دایره همواره از مرکز دایره می‌گذرند، پس همهٔ خطوط $(m+۲)y+(m+۱)x+۱=۰$ که قطرهای دایره‌اند از نقطهٔ ثابتی که مرکز دایره است می‌گذرند و جای این نقطه به مقدار m بستگی ندارد. برای یافتن آن به شرح زیر عمل می‌کنیم:

$$(m+۲)y+(m+۱)x+۱=۰ \Rightarrow my+۲y+mx+x+۱=۰$$

$$\Rightarrow m(y+x)+۲y+x+۱=۰$$

$$\begin{cases} y+x=۰ \\ ۲y+x+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow ۲(-x)+x+۱=۰ \Rightarrow -x+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=۱, y=-۱ \Rightarrow O'(۱,-۱)$$

پس مختصات مرکز دایره $O'(۱,-۱)$ است و با معلوم بودن یک نقطه از آن $A(۵,۲)$، شعاع دایره به‌دست می‌آید:

$$O'A=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۲+۱)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۲۰۴ ۱ **۲** ۳ ۴

مرکز دایره نقطهٔ $O'(-۲,-۱)$ و $A(۱,۱)$ یک نقطه از آن است. پس شعاع آن برابر است با:

$$R=O'A=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

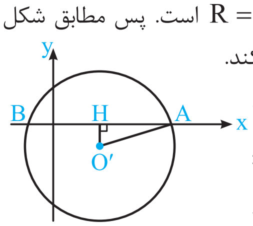
$$O'(-۲,-۱), R=\sqrt{۱۳} \Rightarrow (x+۲)^۲+(y+۱)^۲=(\sqrt{۱۳})^۲=۱۳$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+۴+y^۲+۲y+۱=۱۳$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۴x+۲y-۸=۰$$

۲۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴

روش اول: مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۲y-۱۵=۰$ به ترتیب $O'(۳,-۱)$ و $R=\sqrt{۹+۱+۱۵}=\sqrt{۲۵}=۵$ است. پس مطابق شکل محور xها را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند.



$$O'A^۲=O'H^۲+AH^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲=۵^۲-۱^۲=۲۴ \Rightarrow AH=۲\sqrt{۶}$$

$$AB=۲AH=۴\sqrt{۶}$$

روش دوم: جهت یافتن نقاط تقاطع دایره با محور xها کافی است در معادلهٔ دایره قرار دهیم $y=0$، داریم:

$$x^2+y^2-6x+2y-15=0 \xrightarrow{y=0} x^2-6x-15=0$$

ریشه‌های این معادله طول نقاط A و B است. پس $AB=|x_A-x_B|$

و می‌دانیم در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ در نتیجه داریم:

$$AB=|x_A-x_B|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{6^2-4(-15)}}{1}$$
$$=\sqrt{36+60}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$$

۲۰۶ ۱ **۲** ۳ ۴

مرکز دایره نقطهٔ $O'(\alpha,0)$ است و دایره از دو نقطهٔ $A(0,3)$ و $B(-1,0)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$O'A=O'B\Rightarrow(\alpha-0)^2+(0-3)^2=(\alpha+1)^2+(0-0)^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2+9=\alpha^2+2\alpha+1\Rightarrow 2\alpha=8\Rightarrow \alpha=4$$
$$O'(\alpha,0)=(4,0)$$
$$R=O'A=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

پس معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=5^2\Rightarrow (x-4)^2+y^2=25$$

۲۰۷ ۱ ۲ **۳** ۴

چون مرکز دایره بر روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، پس مختصات آن $O'(\alpha,\alpha)$ است. این دایره از دو نقطهٔ $A(1,0)$ و $B(3,0)$ می‌گذرد.

پس داریم:

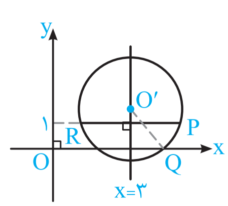
$$O'A=O'B\Rightarrow(\alpha-1)^2+\cancel{(\alpha-0)^2}=(\alpha-3)^2+\cancel{(\alpha-0)^2}$$
$$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1=\alpha^2-6\alpha+9\Rightarrow 4\alpha=8\Rightarrow \alpha=2$$
$$O'(2,2),A(1,0)\Rightarrow R=O'A=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2}$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲۰۸ ۱ ۲ **۳** ۴

مرکز دایره روی خط به معادلهٔ $x-y=2$ قرار دارد، پس $O'(\alpha,\alpha-2)$ و دایره از نقاط $A(0,1)$ و $B(3,0)$ می‌گذرد. داریم:

$$O'A=O'B\Rightarrow(\alpha-0)^2+(\alpha-2-1)^2=(\alpha-3)^2+(\alpha-2-0)^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2+(\alpha-3)^2=(\alpha-3)^2+(\alpha-2)^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2=\alpha^2-4\alpha+4\Rightarrow 4\alpha=4\Rightarrow \alpha=1\Rightarrow O'(1,-1)$$
$$R=O'A=\sqrt{\alpha^2+(\alpha-3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲۰۹ **۱** ۲ ۳ ۴



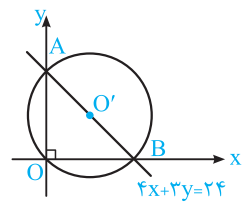
چون نقاط $P(1,1)$ و $R(5,1)$ هم‌عرض هستند، عمودمنصف وتر RP موازی محور yها است و از نقطهٔ وسط این وتر می‌گذرد، لذا معادلهٔ آن برابر است با:

$$x=\frac{5+1}{2}=3$$

مرکز این دایره روی این عمودمنصف قرار دارد، پس مختصات آن $O'(3,\beta)$ می‌باشد. از طرفی دایره از نقطهٔ $Q(4,0)$ می‌گذرد پس می‌توان نوشت:

$$O'P=O'Q\Rightarrow(3-1)^2+(\beta-1)^2=(3-4)^2+(\beta-0)^2$$
$$\Rightarrow 4+\beta^2-2\beta+1=1+\beta^2\Rightarrow 2\beta=4\Rightarrow \beta=2\Rightarrow O'(3,2)$$
$$\text{شعاع دایره}=O'Q=\sqrt{(3-4)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴



مطابق شکل خط $4x+3y=24$ محورها را در نقاط A و B قطع کرده است. قطر دایره‌ای که از نقاط A، B و O می‌گذرد، AB می‌باشد زیرا زاویهٔ محاطی AOB، قائمه است.

پس برای نوشتن معادلهٔ دایره کافی است مختصات O' وسط AB و نصف طول AB را محاسبه کنیم.

$$4x+3y=24\xrightarrow{y=0}x=6\Rightarrow B(6,0)$$
$$4x+3y=24\xrightarrow{x=0}y=8\Rightarrow A(0,8)$$
$$\Rightarrow O'\left(\frac{6+0}{2},\frac{8+0}{2}\right)=(3,4)$$
$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(6-0)^2+(0-8)^2}}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5^2=25$$

۲۱۱ **۱** ۲ ۳ ۴

چون دو نقطهٔ $A(-2,0)$ و $B(4,0)$ هم‌عرض هستند. پس عمودمنصف وتر AB از دایره، موازی محور yها است. و از نقطهٔ وسط پاره‌خط AB می‌گذرد پس معادلهٔ عمودمنصف وتر AB برابر $x=\frac{4-2}{2}=1$ است.

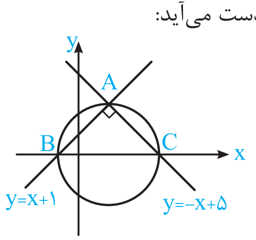
مرکز دایره روی این خط قرار دارد، پس مختصات آن $O'(1,\beta)$ می‌باشد و چون نقطهٔ $C(0,3)$ روی دایره است پس داریم:

$$O'A=O'C\Rightarrow(1+2)^2+(\beta-0)^2=(1-0)^2+(\beta-3)^2$$
$$\Rightarrow 9+\beta^2=1+\beta^2-6\beta+9\Rightarrow \beta=\frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow O'(1,\beta)=\left(1,\frac{1}{6}\right)$$

۲۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

چون دو خط $y=x+1$ و $y=-x+5$ در نقطهٔ A بر هم عمودند (حاصل‌ضرب شیب دو خط برابر ۱- است.)

پس قطر دایره‌ای که از نقاط A، B و C می‌گذرد، BC می‌باشد و شعاع آن برابر $R=\frac{BC}{2}$ است و به شرح زیر به‌دست می‌آید:



$$y=x+1\xrightarrow{y=0}x=-1$$
$$\Rightarrow B(-1,0)$$
$$y=-x+5\xrightarrow{y=0}x=5$$
$$\Rightarrow C(5,0)$$
$$\Rightarrow BC=\sqrt{(5+1)^2+(0-0)^2}=6\Rightarrow R=\frac{BC}{2}=\frac{6}{2}=3$$

قسمت دوم: دایره

۸۶. **جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

آ) معادلهٔ دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $۲\sqrt{۵}$ برابر .... است.

ب) مرکز دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y - ۱ = ۰$ برابر .... است.

پ) شعاع دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y - ۶ = ۰$ برابر .... است.

ت) دو دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۹$، .... هستند.

۸۷. **تعیین کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟**

آ) نقطهٔ $A(-۱,۲)$ داخل دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۴y - ۱ = ۰$ قرار دارد.

ب) خط $x + y = ۲$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲$ مماس است.

پ) معادلهٔ دایره به مرکز $O'(۱,-۱)$ و شعاع یک برابر $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$ است.

ت) خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ از مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۶y = ۰$ می‌گذرد.

۸۸. **معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r را به‌دست آورید.**

۸۹. **حدود a را طوری تعیین کنید که $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.**

۹۰. **مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + ۴y - ۲ = ۰$ را به‌دست آورید.**

۹۱. **مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۱ = ۰$ را به‌دست آورید.**

۹۲. **وضع هر یک از نقاط $A(-۱,۱)$، $B(۱,-۲)$، $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۵$ تعیین کنید.**

۹۳. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(۱,۱)$ بوده و از نقطهٔ $M(۳,۲)$ بگذرد.**

۹۴. **وضعیت خط به معادلهٔ $x + y = ۴$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را تعیین کنید.**

۹۵. **وضعیت خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۰$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۴y + ۷ = ۰$ را تعیین کنید.**

۹۶. **وضعیت خط به معادلهٔ $x + y = ۱$ و دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۲$ را تعیین کنید.**

۹۷. **وضعیت دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲$ و خط به معادلهٔ $x + y = ۲$ را تعیین کنید.**

۹۸. **دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y - ۱ = ۰$ مفروض است.**

آ) مختصات مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.

ب) نقطهٔ تلاقی دایره با نیمساز ربع اول و سوم را به‌دست آورید.

۹۹. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O'(-۲,-۱)$ باشد و از مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + ۱۷ = ۰$ بگذرد.**

۱۰۰. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مختصات دو سر یک قطر آن برابر $(۳,-۱)$ و $(۵ , -۱)$ باشد.**

۱۰۱. **معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به‌دست آورید.**

۱۰۲. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O'(۰,-۱)$ و شعاع آن ۵ واحد باشد و دو نقطه از این دایره را چنان تعیین کنید که طول این نقاط ۳ باشد.**

۱۰۳. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ می‌گذرد و خط $y = ۲x - ۱$ شامل قطری از آن باشد.**

۱۰۴. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O'(۱,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $۳x - ۴y + ۳ = ۰$ مماس باشد.**

۱۰۵. **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O'(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.**

۱۰۶. وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2-10x-14y+73=0$ و $x^2+y^2-4x-6y=3$ را مشخص کنید.

۱۰۷. وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ را نسبت به یکدیگر مشخص کنید.

۱۰۸. وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2-8x-4y+19=0$ و $x^2+y^2=4$ را نسبت به یکدیگر مشخص کنید.

۱۰۹. وضعیت دو دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۱۰. دو دایرهٔ $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$ و $x^2+y^2=1$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱۱۱. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O_1(-1,1)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ مماس خارج باشد.

۱۱۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O_1(0,1)$ بوده و بر دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

۱۱۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O'(-1,-1)$ باشد و روی خط به معادلهٔ $x+y=1$ وتری به طول ۲ جدا کند.

۱۱۴. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O'(2,1)$ بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

۱۱۵. در نقطهٔ $A(3,2)$ خط مماسی بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y=3$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به‌دست آورید.

۱۱۶. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

۱۱۷. نقاط $A(-1,-1)$، $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند، معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید، سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B بنویسید.

قسمت سوم: بیضی و سهمی

۱۱۸. **جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

آ) بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو .... یک مقدار .... است.

ب) سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک .... ثابت در آن صفحه و از یک .... ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

پ) در بیضی به قطرهای بزرگ و کوچک ۱۰ و ۶، فاصلهٔ کانونی برابر .... است.

ت) در یک بیضی اگر خروج از مرکز (یعنی $\frac{c}{a}$) صفر باشد، بیضی به .... تبدیل می‌شود.

۱۱۹. **تعیین کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است.**

آ) معادلهٔ سهمی به کانون $F(a,0)$ ، $(a>0)$ و خط هادی $x=-a$ برابر $x^2=-4ay$ است.

ب) اگر P نقطه‌ای درون بیضی به کانون‌های F و F' آن‌گاه $PF+PF'$ از طول قطر بزرگ بیضی کوچک‌تر است.

پ) اگر P نقطه‌ای روی بیضی به کانون‌های F و F' باشد آن‌گاه $PF+PF'$ برابر قطر بزرگ بیضی است.

ت) سهمی مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند و بر خط معلومی که نقطهٔ ثابت بر آن واقع نیست، مماس هستند.

۱۲۰. **بیضی به کانون‌های F و F' و عدد ثابت 2a مفروض است. ثابت کنید اگر نقطهٔ P داخل بیضی باشد، آن‌گاه مجموع فواصل P از دو کانون کوچک‌تر از 2a است. $(PF'+PF<2a)$**

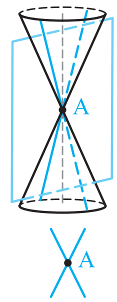
۱۲۱. **بیضی به کانون‌های F و F' و عدد ثابت 2a مفروض است. ثابت کنید اگر نقطهٔ P بیرون بیضی باشد، آن‌گاه مجموع فواصل P از دو کانون بزرگ‌تر از 2a است. $(PF+PF'>2a)$**

۱۲۲. **در یک بیضی، خط شامل فاصلهٔ کانونی، بیضی را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کند. ثابت کنید:**

آ) $AA'=2a$ ب) $AF=A'F'$

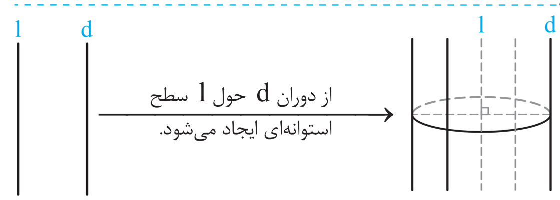
۱۲۳. **هر پاره‌خطی که از مرکز بیضی (وسط فاصلهٔ کانونی) بگذرد بیضی را در دو نقطه قطع می‌کند. پاره‌خط حاصل را یک قطر بیضی می‌نامند. ثابت کنید طول بزرگ‌ترین قطر بیضی برابر 2a است.**

۸۴

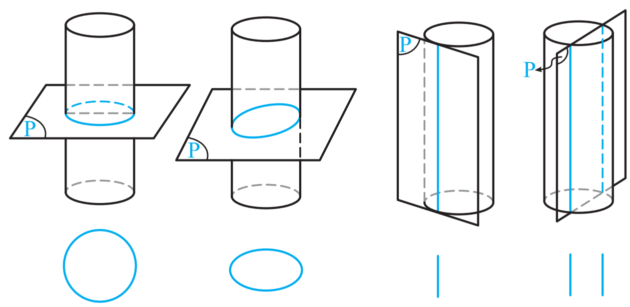


مطابق شکل، صفحه‌ای که شامل محور یک سطح مخروطی است، فصل مشترکش با آن، دو خط متقاطع در نقطهٔ A می‌باشد.

۸۵



از برخورد صفحهٔ P با یک سطح استوانه‌ای چهار حالت زیر پدید می‌آید:



(ت) دو خط موازی | (پ) یک خط | (ب) بیضی | (آ) دایره

آ) اگر صفحهٔ P عمود بر محور سطح استوانه‌ای آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.

ب) اگر صفحهٔ P محور سطح استوانه‌ای را قطع کند و بر آن عمود نباشد آن‌گاه فصل مشترکش با سطح استوانه‌ای بیضی است.

پ) اگر صفحهٔ P چنان باشد که شامل محور سطح استوانه‌ای باشد یا موازی محور آن سطح استوانه‌ای را قطع کند آن‌گاه فصل مشترک حاصل، دو خط موازی است.

ت) اگر صفحهٔ P مماس بر سطح استوانه‌ای باشد، آن‌گاه مقطعاش با سطح استوانه‌ای یک خط است.

۸۶

آ) $x^۲+y^۲=۲۰$ ب) $O'(۱,۲)$

پ) $R=\sqrt{۹+۱+۶}=\sqrt{۱۶}=۴$ ت) دو دایرهٔ هم‌مرکز

۸۷

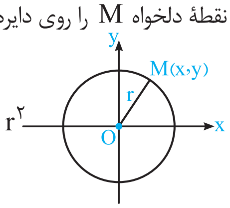
آ) درست ب) درست پ) نادرست ت) درست

۸۸

نقطهٔ دلخواه M را روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع r در نظر می‌گیریم. داریم:

$O(۰,۰)\,,M(x,y)\Rightarrow OM=\sqrt{x^۲+y^۲}$

$OM=r\Rightarrow\sqrt{x^۲+y^۲}=r\Rightarrow x^۲+y^۲=r^۲$



پس معادلهٔ دایره به مرکز O (مبدأ مختصات) و شعاع r همواره به‌صورت $x^۲+y^۲=r^۲$ است.

۸۹

برای این‌که رابطهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد باید داشته باشیم $a^۲+b^۲>۴c$ پس رابطهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ معادلهٔ یک دایره است، هر گاه:

$$(-۳)^۲+۵^۲>۴\times a\Rightarrow ۴a<۹+۲۵\Rightarrow ۴a<۳۴\Rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$$

۹۰

$$۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰\Rightarrow x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+۲y-۱=۰$$

$$\Rightarrow O'(\frac{۳}{۴},-۱)$$

$$R=\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۱+۱}=\sqrt{\frac{۹+۳۲}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۴۱}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$$

۹۱

می‌دانیم مختصات مرکز و شعاع دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ به ترتیب $O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ و $R=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}-c}$ می‌باشد. پس داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱=۰$$

$$\Rightarrow O'(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۴}{۲})=(۱,-۲)\ ,\ R=\sqrt{۱+۴+۱}=\sqrt{۶}$$

۹۲

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$$

$$\Rightarrow O'(۱,-۲)\ ,\ R=\sqrt{۱^۲+۴+۵}=\sqrt{۱۰}$$

حال فاصلهٔ نقاط داده‌شده از مرکز دایره را محاسبه می‌کنیم و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم:

$O'(۱,-۲)\,,\,A(-۱,-۱)$

$$\Rightarrow O'A=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}<\sqrt{۱۰}$$

$\Rightarrow O'A<R\Rightarrow$ A داخل دایره است.

$O'(۱,-۲)\,,\,B(۱,-۲)\Rightarrow O'=B\Rightarrow$ B مرکز دایره است.

$O'(۱,-۲)\,,\,C(۲,۳)$

$$\Rightarrow O'C=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}>\sqrt{۱۰}$$

$\Rightarrow O'C>R\Rightarrow$ C خارج دایره است.

$$O'(۱,-۲)\,,\,D(۴,-۱)\Rightarrow O'D=\sqrt{(۴-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}$$

$$=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}=R$$

بنابراین D روی دایره قرار دارد.

۹۳

شعاع دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ $O'(۱,۱)$ است و از نقطهٔ $M(۳,۲)$ می‌گذرد برابر طول پاره‌خط $O'M$ می‌باشد.

$$O'M=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}\Rightarrow R=\sqrt{۵}$$

$$O'(۱,۱)\,,\,R=\sqrt{۵}\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}}(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=(\sqrt{۵})^۲=۵$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰$$

۹۴

روش اول: از معادلهٔ خط y را بر حسب x به‌دست می‌آوریم $(y = ۴ - x)$ و آن را در معادلهٔ دایره $(x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰)$ قرار می‌دهیم و یک معادلهٔ درجه دوم بر حسب x به‌دست می‌آید.
اگر این معادله دو ریشه داشته باشد خط و دایره متقاطع‌اند، اگر یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد خط و دایره مماس هستند و اگر ریشه نداشته باشد، خط و دایره متقاطع نیستند.

$$x^۲ + (۴ - x)^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x^۲ - ۸x + ۱۶ - ۲x - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۰x + ۱۳ = ۰$$
$$\Rightarrow \Delta = (-۱۰)^۲ - ۴ \times ۲ \times ۱۳ = ۱۰۰ - ۱۰۴ = -۴ < ۰$$

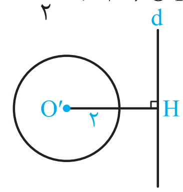
بنابراین معادلهٔ درجه دوم فوق ریشه ندارد و خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.

روش دوم: فاصلهٔ مرکز دایره را از خط به‌دست می‌آوریم و آن را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow O'(۱,۰) \ , \ R = \sqrt{۱^۲ + ۰^۲ + ۳} = \sqrt{۴} = ۲$$

فاصلهٔ O' از خط $x + y = ۴$ $\Rightarrow O'H = \dfrac{|۱ + ۰ - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \dfrac{۳}{\sqrt{۲}} = \dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

$\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲} > ۲ \Rightarrow O'H > R \Rightarrow$ خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.



۹۵

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۴y + ۷ = ۰$$
$$\Rightarrow O'(۲,۲) \ , \ R = \sqrt{۴ + ۴ - ۷} = \sqrt{۱} = ۱$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۰$ را تعیین می‌کنیم:

$$O'H = \frac{|۳ \times ۲ + ۴ \times ۲|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۶ + ۸}{۵} = \frac{۱۴}{۵} = ۲/۸ > ۱$$

$\Rightarrow O'H > R \Rightarrow$ خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.

۹۶

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۲ = ۰ \Rightarrow O'(۱,۱) \ , \ R = \sqrt{۱ + ۱ + ۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از خط به معادلهٔ $x + y = ۱$ را تعیین می‌کنیم.

$$O'H = \frac{|۱ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} < ۲$$

$\Rightarrow O'H < R \Rightarrow$ خط و دایره در دو نقطه متقاطع‌اند.

۹۷

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۲ \Rightarrow O' = O(۰,۰) \ , \ R^۲ = ۲ \Rightarrow R = \sqrt{۲}$$

فاصلهٔ مرکز دایره را از خط به معادلهٔ $x + y = ۲$ به‌دست می‌آوریم:

$O'H = \dfrac{|۰ + ۰ - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \dfrac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} = R \Rightarrow$ خط بر دایره مماس است.

۹۸

آ) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y - ۱ = ۰$

$$\Rightarrow O'(-\frac{-۲}{۲} , -\frac{-۶}{۲}) = (۱,۳) \ , \ R = \sqrt{۱ + ۹ + ۱} = \sqrt{۱۱}$$

ب) معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم $y = x$ است، آن را با معادلهٔ دایره در یک دستگاه قرار می‌دهیم و مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y - ۱ = ۰ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^۲ + x^۲ - ۲x - ۶x - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۸x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ + ۲}}{۲} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۸}}{۲}$$
$$\Rightarrow x_۱ = \frac{۴ - ۳\sqrt{۲}}{۲} \ , \ x_۲ = \frac{۴ + ۳\sqrt{۲}}{۲}$$

پس نقاط برخورد نیمساز ربع اول و سوم با دایرهٔ داده‌شده $B(\dfrac{۴ + ۳\sqrt{۲}}{۲} , \dfrac{۴ + ۳\sqrt{۲}}{۲})$ و $A(\dfrac{۴ - ۳\sqrt{۲}}{۲} , \dfrac{۴ - ۳\sqrt{۲}}{۲})$ است.

۹۹

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + ۱۷ = ۰ \Rightarrow A(-\frac{-۲}{۲} , -\frac{۸}{۲}) = (۱,-۴)$$
$$O'(-۲,-۱) \ , \ A(۱,-۴)$$
$$\Rightarrow R = O'A = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۴+۱)^۲} = \sqrt{۹+۹} = ۳\sqrt{۲}$$

پس معادلهٔ دایره به مرکز $O'(-۲,-۱)$ و شعاع $R = ۳\sqrt{۲}$ برابر است با:

$$(x+۲)^۲ + (y+۱)^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ = ۱۸$$
$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y - ۱۳ = ۰$$

۱۰۰

بنابه فرض مختصات دو سر قطر AB، به‌صورت $A(-۱ , ۵)$ و $B(۳ , -۱)$ می‌باشد. مرکز دایره وسط پاره‌خط AB است و شعاع دایره نصف طول پاره‌خط AB است.

$$O' = \frac{A+B}{۲} = \frac{(-۱ , ۵) + (۳,-۱)}{۲} = \frac{(۲,۴)}{۲} = (۱,۲)$$
$$R = \frac{AB}{۲} = \frac{\sqrt{(۳+۱)^۲ + (-۱-۵)^۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۱۶+۳۶}}{۲}$$
$$= \frac{\sqrt{۵۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۱۳}}{۲} = \sqrt{۱۳}$$
$$O'(۱,۲) \ , \ R = \sqrt{۱۳} \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = (\sqrt{۱۳})^۲ = ۱۳$$
$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y - ۸ = ۰$$

۱۰۱

$$O'(۲,-۱) \ , \ R = ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y + ۱ = ۰$$

برای یافتن مختصات محل برخورد دایره با محور xها، در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم $y = ۰$ و طول نقاط برخورد را به‌دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲ + (۰+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۴ - ۱ = ۳$$
$$\Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow x_A = ۲ - \sqrt{۳} \ , \ x_B = ۲ + \sqrt{۳}$$

پس $A(۲ - \sqrt{۳} , ۰)$ و $B(۲ + \sqrt{۳} , ۰)$ نقاط برخورد دایره با محور xها است.

برای یافتن مختصات محل برخورد دایره با محور y ها، در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم $x=۰$ و عرض نقاط برخورد را به‌دست می‌آوریم:

$$(۰-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴ \Rightarrow (y+۱)^{۲}=۴-۴=۰ \Rightarrow y=-۱$$

پس دایره در نقطهٔ $C(۰,-۱)$ بر محور y ها مماس است زیرا محور y ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۰۲

$$O'(۰,-۱)\ ،\ R=۵ \Rightarrow (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۵^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+(y+۱)^{۲}=۲۵ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲y-۲۴=۰$$

با قرار دادن $x=۳$ در معادلهٔ دایره داریم:

$$۳^{۲}+(y+۱)^{۲}=۲۵ \Rightarrow (y+۱)^{۲}=۲۵-۹=۱۶$$

$$\Rightarrow y+۱=\pm ۴ \Rightarrow y_A=-۵\ ،\ y_B=۳$$

پس نقاط $A(۳,-۵)$ و $B(۳,۳)$ روی دایره قرار دارند.

۱۰۳

روش اول: چون مرکز دایره روی خط $y=۲x-۱$ قرار دارد پس مختصات آن $O'(\alpha\ ،\ ۲\alpha-۱)$ است دایره از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ می‌گذرد، لذا داریم:

$$O'A=O'B$$

$$\Rightarrow (\alpha-۱)^{۲}+(۲\alpha-۱-۲)^{۲}=(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱-۰)^{۲}$$

$$\Rightarrow (\alpha-۱)^{۲}+(۲\alpha-۳)^{۲}=(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲}-۲\alpha+۱+۴\alpha^{۲}-۱۲\alpha+۹=\alpha^{۲}-۶\alpha+۹+۴\alpha^{۲}-۴\alpha+۱$$

$$\Rightarrow ۴\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=۰ \Rightarrow O'(۰\ ،\ -۱)$$

$$R=O'A=\sqrt{(\alpha-۱)^{۲}+(۲\alpha-۳)^{۲}}=\sqrt{(۰-۱)^{۲}+(۰-۳)^{۲}}$$

$$=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

$$O'(۰,-۱)\ ،\ R=\sqrt{۱۰} \xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}=(\sqrt{۱۰})^{۲}=۱۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲y-۹=۰$$

روش دوم: مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. معادلهٔ آن را می‌نویسیم.

$$A(۱,۲)\ ،\ B(۳,۰)$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط عمودمنصف } AB \quad m=-\frac{۱}{m_{AB}}$$

$$=-\frac{۱}{\frac{۲-۰}{۱-۳}}=-\frac{۱}{-۱}=۱$$

$$\text{نقطهٔ وسط پاره‌خط } AB \quad M \Rightarrow M=\frac{A+B}{۲}=\frac{(۱,۲)+(۳,۰)}{۲}$$

$$=\frac{(۴,۲)}{۲}=(۲,۱)$$

$$\text{معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط } AB:\ y-۱=۱\times(x-۲) \Rightarrow y=x-۱$$

چون مرکز دایره روی خط $y=۲x-۱$ قرار دارد، پس مرکز دایره نقطهٔ تلاقی این خط و عمودمنصف AB است:

$$\begin{cases} y=x-۱ \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow x-۱=۲x-۱ \Rightarrow x=۰\ ,\ y=-۱ \Rightarrow O'(۰,-۱)$$

شعاع دایره فاصلهٔ O' از نقطهٔ A یا B است:

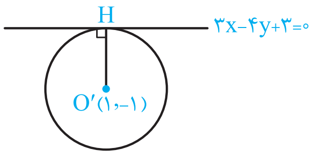
$$O'A=\sqrt{(۰-۱)^{۲}+(-۱-۲)^{۲}}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰} \Rightarrow R=\sqrt{۱۰}$$

$$O'(۰,-۱)\ ،\ R=\sqrt{۱۰} \xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}=(\sqrt{۱۰})^{۲}=۱۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲y-۹=۰$$

۱۰۴

می‌دانیم خط مماس، بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. پس فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره می‌باشد.



می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha\ ،\ \beta)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر $\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ است. داریم:

$$O'H=\frac{|۳\times۱-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^{۲}+(-۴)^{۲}}}=\frac{|۳+۴+۳|}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

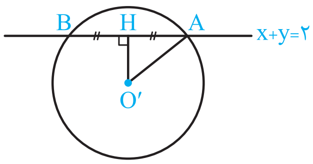
$$\Rightarrow R=O'H=۲$$

$$O'(۱,-۱)\ ،\ R=۲ \Rightarrow (x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۲^{۲}=۴$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y-۲=۰$$

۱۰۵

می‌دانیم خطی که از مرکز دایره بر یک وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند پس $AH=BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$. فاصلهٔ مرکز دایره $O'(۰,۱)$ را از خط $x+y=۲$ به‌دست می‌آوریم:



$$O'H=\frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$O'A^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}$$

$$\Rightarrow R^{۲}=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

$$O'(۰,۱)\ ،\ R=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \Rightarrow (x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=(\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲y+۱=\frac{۵}{۲} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲y-\frac{۳}{۲}=۰$$

۱۰۶

$$x^{۲}+y^{۲}-۱۰x-۱۴y+۷۳=۰$$

$$\Rightarrow O_۱(۵,۷)\ ،\ R_۱=\sqrt{۵^{۲}+۷^{۲}-۷۳}=\sqrt{۲۵+۴۹-۷۳}=۱$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y-۳=۰$$

$$\Rightarrow O_۲(۲,۳)\ ،\ R_۲=\sqrt{۴+۹+۳}=\sqrt{۱۶}=۴$$

$$O_۱(۵\ ،\ ۷)\ ،\ O_۲(۲,۳)$$

$$\Rightarrow O_۱O_۲=\sqrt{(۵-۲)^{۲}+(۷-۳)^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$O_۱O_۲=۵\ ،\ R_۱+R_۲=۱+۴=۵$$

$\Rightarrow O_۱O_۲=R_۱+R_۲ \Rightarrow$ دو دایره مماس خارج هستند.

۱۰۷

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y+۱=۰$$

$$\Rightarrow O_۱(-\frac{-۲}{۲}\ ،\ -\frac{۲}{۲})=(۱\ ،\ -۱)\ ،\ R_۱=\sqrt{۱+۱-۱}=۱$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۹ \Rightarrow O_۲(۰,۰)\ ،\ R_۲=۳$$

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$R_۲-R_۱=۳-۱=۲ \Rightarrow O_۱O_۲<R_۲-R_۱$$

پس دو دایره متداخل هستند.