

فصل اول راهبردهای حل مسئله

راهبردهای حل مسئله

راه حل یک مسئله، ممکن است به صورتی کاملاً غیرمنتظره در برابر ما پدیدار شود. مدتی روی یک مسئله کار می‌کنیم و در دور و بر آن به کنکاش می‌پردازیم و پیشرفتی نمی‌کنیم. ناگهان، اندیشه‌ای پدید می‌آید و یکباره پرتویی در تاریکی می‌بینیم. مثل این که در شب، وقتی شما به اتاق تاریکی بروید که حتی نمی‌دانید چراغ را از کجا باید روشن کنید، کلید برق را جستجو می‌کنید، به میلی برخورد می‌کنید، توده‌های مبهم درهم ریخته‌ای را احساس می‌کنید و ... آهان، کلید برق پیدا شد، کلید را می‌زنید و همه چیز یکباره روشن می‌شود، توده‌های مبهم درهم ریخته، شکل چیزهای آشنا را به خود می‌گیرند، ضمناً معلوم می‌شود که این چیزها درست در همان جاهایی هستند که باید باشند و به همان خوبی قرار گرفته‌اند که شما انتظارش را داشتید.

کسی هم که مسئله‌ای را حل می‌کند، می‌تواند دچار همین احساس‌ها بشود. حل مسئله پیش از آن که نیازمند توضیح باشد، محتاج تجربه کردن است. تشویق‌ها و شادی‌های ناشی از کشف لذتی است فراموش‌ناشدنی که جز در سایه‌ی تجربه‌ی شخصی حل مسئله حاصل نمی‌شود. البته مهم‌ترین بخش روند حل مسئله را باید میل، شوق و عزم راسخ حل‌کننده برای حل آن دانست. یک مسئله، وقتی به مسئله‌ی واقعی شما تبدیل می‌شود و به‌طور کامل شما را در برمی‌گیرد، که به‌طور جدی و آن‌طور که باید و شاید، تصمیم بگیرید و بخواهید آن را حل کنید.

چگونه مسئله را حل کنیم؟

در حل یک مسئله، چهار مرحله وجود دارد:

مرحله اول، فهمیدن مسئله

برای درک مسئله باید آن را خوب بخوانید. کارهای زیر می‌تواند شما را در درک بهتر مسئله کمک کند:

- ۱) مسئله را به زبان و کلمات خود بیان کنید.
- ۲) مسئله را خلاصه کنید.
- ۳) داده‌ها و اطلاعات مسئله را مشخص کنید.
- ۴) خواسته‌های مسئله را معلوم کنید.
- ۵) شرط‌های خاص مسئله را جدا کنید.
- ۶) مسئله را به‌صورت یک نمایش ساده اجرا کنید.

مرحله دوم، انتخاب راهبرد مناسب

در دوره‌ی ابتدایی با تعدادی از راهبردهای حل مسئله آشنا شدید. دانستن نام و کاربرد هر راهبرد، به شما کمک می‌کند تا آن‌ها را مرور کنید و دریابید که کدام یک برای حل مسئله ممکن است مفید باشد. این راهبردها عبارت بودند از:

- | | | | |
|-----------------|-------------|-------------------------|-------------------|
| ۱) رسم شکل | ۲) الگوسازی | ۳) حذف حالت‌های نامطلوب | ۴) الگویابی |
| ۵) حدس و آزمایش | ۶) زیرمسئله | ۷) حل مسئله ساده‌تر | ۸) روش‌های نمادین |

مرحله سوم، حل کردن مسئله

با راهبردی که انتخاب می‌کنید، شروع به حل مسئله کنید و اگر تشخیص دادید که مسئله با آن راهبرد به نتیجه نمی‌رسد، به مرحله‌ی دوم برگردید و راهبرد خود را تغییر دهید. شاید هم لازم باشد به مرحله‌ی اول برگردید؛ زیرا ممکن است نکته‌ای در مسئله وجود داشته باشد که شما هنوز به آن توجه نکرده‌اید.



مرحله‌ی چهارم: بازگشت به عقب

حل کردن مسئله با پیدا شدن پاسخ ریاضی تمام نمی‌شود. ابتدا پاسخ ریاضی خود را با توجه به موضوع مسئله تفسیر کنید و ببینید که آیا پاسخ شما همان خواسته‌ی مسئله است. آیا جواب شما منطقی است؟ می‌توانید مراحل و عملیات مسئله را بررسی کنید یا مسئله را با راه حل دیگری پاسخ دهید.

در این جا به شرح راهبردهای ساده، ولی کاربردی و مهم برای حل مسئله‌ها می‌پردازیم.

۱- راهبرد رسم شکل

ضرب‌المثل‌هایی از قبیل «شنیدن کی بود مانند دیدن» و «یک تصویر، با ارزش‌تر از هزار کلمه» از دیرباز رواج داشته است. احتمالاً بسیاری از مردم با این گونه ضرب‌المثل‌ها موافق‌اند، اما قدرت و کارایی بعضی از ضرب‌المثل‌ها برای همه‌ی آن‌ها آشکار نیست. کشیدن یک شکل مناسب می‌تواند به حل مسئله کمک یا به‌طور کامل آن را حل کند؛ به‌طوری‌که نیاز به نوشتن عملیات و محاسبه نباشد. ممکن است این شکل در ذهن شما باشد. منظور از رسم شکل نقاشی نیست؛ بنابراین از ترسیم‌های ساده برای درک بهتر یا حل کردن مسئله استفاده کنید. البته پس از رسم شکل، این پرسش‌ها را نیز مطرح می‌کنیم:



- آیا چنین شکلی می‌تواند وجود داشته باشد؟

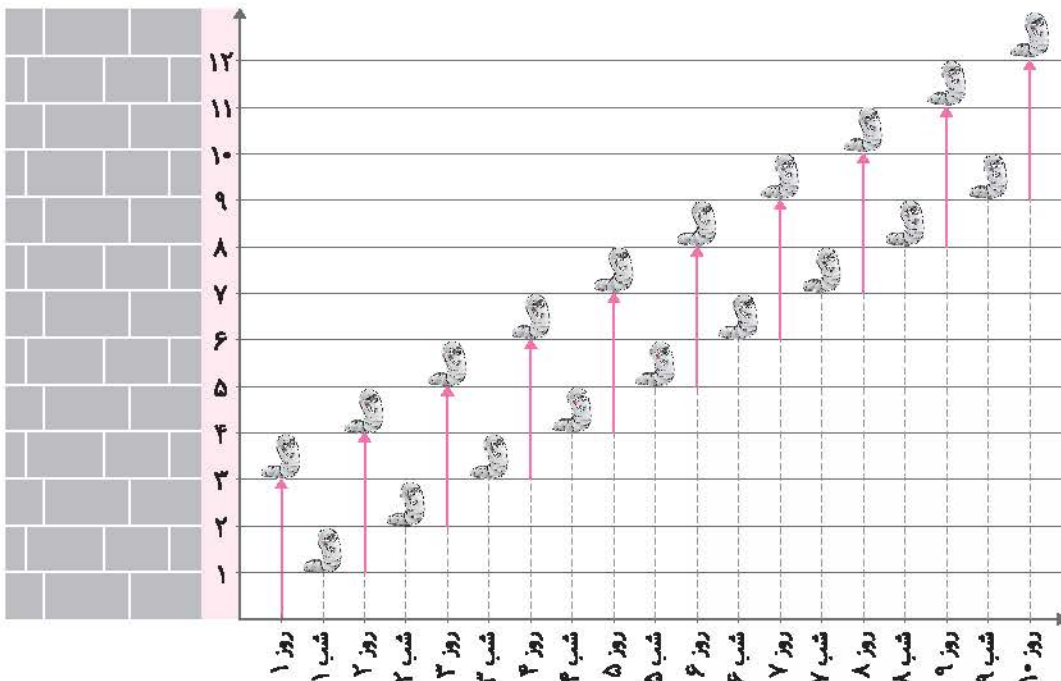
- آیا شکلی که رسم کرده‌ایم، دست کم تا حد معقول، درست و دقیق است؟

- آیا شکل، بیان‌کننده‌ی حالت خاصی از مسئله است، یا حالت کلی آن را بیان می‌کند؟

- و ...؟

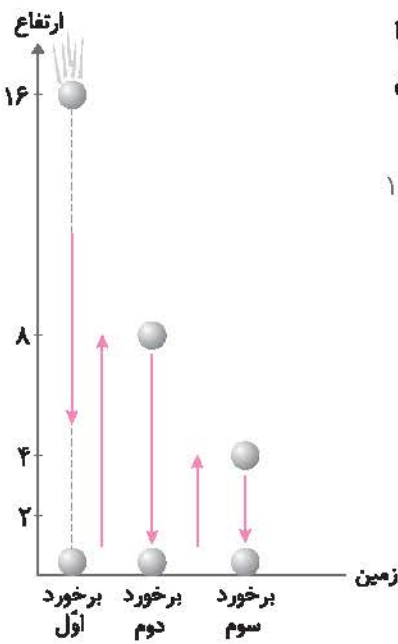
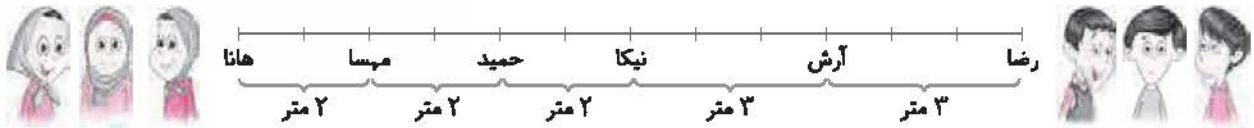
به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱. کرمی، در پایین دیواری دوازده متری به سمت بالای دیوار می‌خزد. این کرم، هر روز سه متر به‌طرف بالا می‌خزد، ولی هنگام شب لیز می‌خورد و دو متر پایین می‌آید. چند روز طول می‌کشد تا این کرم به بالای دیوار برسد؟ با توجه به شکل زیر، روز دهم، کرم به بالای دیوار می‌رسد. یعنی، ده روز طول می‌کشد تا کرم به بالای دیوار برسد.





مثال ۲. هانا، نیکا، مهسا، حمید، آرش و رضا در یک مسابقه دو ۸۰۰ متر شرکت کردند. در پایان آرش هفت متر از مهسا جلوتر بود، هانا دوازده متر عقب‌تر از رضا بود، آرش پنج متر از حمید جلوتر، ولی سه متر از رضا عقب‌تر بود و فاصله‌ی نیکا از نفر اول و نفر آخر به یک اندازه بود. آن‌ها با چه ترتیبی مسابقه را تمام کردند؟ فاصله‌های بین هر دو نفر از آن‌ها چهقدر بود؟ طبق شکلی که رسم کرده‌ایم، ترتیب اتمام مسابقه و فاصله‌ی بین هر دو نفر آن‌ها مشخص است.



مثال ۳. تویی از ارتفاع شانزده متری سطح زمین رها می‌شود و پس از برخورد با زمین، به اندازه‌ی نصف ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا سومین مرتبه‌ای که به زمین برخورد می‌کند، چند متر حرکت کرده است؟

$$۱۶ + ۸ + ۸ + ۴ + ۴ = ۴۰ \text{ متر}$$

۲- راهبرد الگوسازی

در بعضی مسئله‌ها لازم است همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسیم و برای این که حالتی از قلم نیفتد، لازم است آن‌ها را با نظم و ترتیبی مشخص در یک جدول قرار دهیم تا بتوانیم الگویی را از دل آن‌ها کشف کنیم و اطلاعات پنهان در داده‌های مسئله را به دست آوریم. این روش کمک می‌کند تا مطمئن شویم که همه‌ی حالت‌های ممکن را نوشته‌ایم که روشی مؤثر برای دسته‌بندی و مرتب کردن تمام حالت‌ها است. بنابراین در مسئله‌هایی که لازم است همه‌ی جواب‌ها و پاسخ‌های ممکن نوشته شود، می‌توانید از این راهبرد استفاده کنید. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۴. فروشگاه یک مدرسه، چندین بسته شکلات را به قیمت‌های هر بسته ۵۰، ۱۰۰ و ۱۵۰ تومان می‌فروشد. شقایق ۴۰۰ تومان پول دارد. تمام حالت‌هایی که او می‌تواند همه‌ی پولش را برای خرید شکلات خرج کند، بنویسید.



۵۰ تومانی	۸	۶	۵	۴	۳	۲	۲	۱	۰	۰
۱۰۰ تومانی	۰	۱	۰	۲	۱	۳	۰	۲	۴	۱
۱۵۰ تومانی	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۲	۱	۰	۲

مثال ۵. دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ و حاصل جمع آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

عدد اول	۱	۲	۳	۴
عدد دوم	۲۴	۱۲	۸	۶
حاصل جمع	۲۵	۱۴	۱۱	۱۰

بیش‌ترین حاصل جمع

پس پاسخ اعداد ۱ و ۲۴ هستند.

مثال ۶. پروانه پانزده سکه‌ی ۱۰ تومانی دارد. او می‌خواهد سکه‌هایش را در سه دسته قرار دهد، به طوری که در هر دسته تعداد سکه‌ها فرد باشد. پروانه به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟



دسته‌ی اول	۱	۱	۱	۱	۳	۳	۵
دسته‌ی دوم	۱	۳	۵	۷	۳	۵	۵
دسته‌ی سوم	۱۳	۱۱	۹	۷	۹	۷	۵

از آنجایی که تفاوتی بین دسته‌ها وجود ندارد، حالت‌هایی مانند دسته‌ی اول ۷ سکه، دسته‌ی دوم ۷ سکه و دسته‌ی سوم یک سکه را به‌عنوان حالت تکراری در نظر گرفته و ننوشتیم.

۳- راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

با توجه به شرایط و اطلاعات مسئله، می‌توان حالت‌های نامطلوب و نادرست مسئله را کنار گذاشت تا با حذف آن‌ها، پاسخ مسئله که همان حالت‌های مطلوب هستند، به‌دست آید. ابتدا باید با راهبرد الگوسازی تمام حالت‌های ممکن را پیدا کرد و سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حالت‌های نامطلوب را حذف کرد. فرض کنید از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰، عددی انتخاب شده است. از شما پرسیده می‌شود که این عدد چند است. شما می‌توانید با حدس زدن از عدد ۱ شروع کنید و تا زمانی که به جواب برسید، حدس‌های خود را ادامه دهید مطمئناً با ۱۰ بار حدس زدن به جواب می‌رسید. در این جا فقط یکی از اعداد جواب است (یک حالت مطلوب داریم) و بقیه‌ی اعداد جواب نمی‌باشند (نه حالت نامطلوب داریم). دقت کنید با طرح سؤالاتی از قبیل این که عدد مورد نظر کم‌تر از ۵ است؟ عدد مورد نظر زوج یا فرد است؟ و ... می‌توان خیلی زودتر به جواب مسئله رسید. در واقع با طرح این سؤالات، می‌توان حالت‌های نامطلوب بیش‌تری را حذف کرد و در نتیجه زودتر به جواب رسید. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۷. مجموع سن سه نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آن‌ها ۷۰ سال می‌باشد. سن بزرگ‌ترین نفر را به‌دست آورید.

نفر اول	۱	۱	۱	۲	...
نفر دوم	۲	۵	۷	۵	...
نفر سوم	۳۵	۱۴	۱۰	۷	...
مجموع	۳۸	۲۰	۱۸	۱۴	...

حالت مطلوب

تمام حالت‌هایی را که ضرب سن سه نفر ۷۰ سال می‌شود، در جدول نوشته و حالت‌هایی را که مجموع آن‌ها ۱۴ می‌شود، در نظر می‌گیریم تا سن بزرگ‌ترین نفر به‌دست آید. با توجه به جدول، سن بزرگ‌ترین نفر برابر با ۷ سال می‌شود.



مثال ۸. علی عددی حسابی و کوچکتر از ۱۰۰ را در نظر گرفته است. شما باید با طرح چند سؤال که پاسخ آن‌ها فقط بله یا خیر است، عدد مورد نظر او را پیدا کنید. یک روش طرح سؤال همراه با نظم و ترتیب برای رسیدن به پاسخ بنویسید.



۱- آیا این عدد از ۵۰ بزرگتر است؟

۲- آیا این عدد فرد است؟

۳- اگر عدد از ۵۰ بزرگتر است، آیا از ۷۵ هم بزرگتر است؟

۴- اگر عدد از ۵۰ کوچکتر است، آیا از ۲۵ هم کوچکتر است؟ و ...

۴- راهبرد انگویایی

اهمیت مطالعه‌ی الگوها به حدی است که ریاضیات را علم الگوها نیز نامیده‌اند. توانایی انگویایی موجب می‌شود که مسائل پیچیده را نیز بتوان با استفاده از الگو حل کرد. معمولاً کلید یافتن یک الگو، سازماندهی و تنظیم داده‌هاست. با کشف الگو، رابطه و نظم موجود در بین دنباله‌های عددی و هندسی، می‌توان به خواسته‌ی مسئله پاسخ داد. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۹. چهار جمله‌ی بعدی الگوهای زیر را بنویسید و رابطه‌ی بین عددها را نشان دهید.

(الف) ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵

$$\begin{array}{ccccccc} +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{array}$$

(ب) ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ۳۶

$$\begin{array}{ccccccc} 2 \times 2 & 3 \times 3 & 4 \times 4 & 5 \times 5 & 6 \times 6 & 7 \times 7 & 8 \times 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 \end{array}$$

(ج) ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴

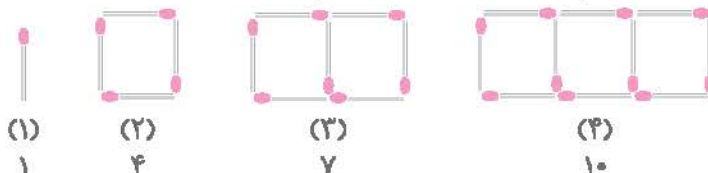
$$\begin{array}{ccccccc} 1 \times 1 & 2 \times 2 & 3 \times 3 & 4 \times 4 & 5 \times 5 & 6 \times 6 & 7 \times 7 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \end{array}$$

دنباله‌ی اعداد طبیعی فرد.

این دنباله، معروف به دنباله‌ی اعداد مثلثی است.

این دنباله، معروف به دنباله‌ی اعداد مربعی است.

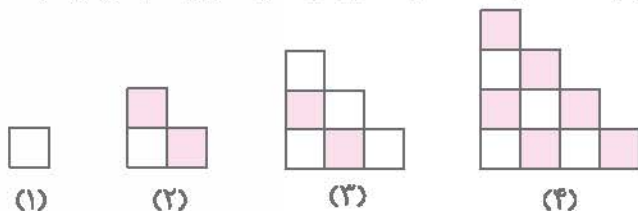
مثال ۱۰. شکل دهم با چند چوب‌کبریت ساخته می‌شود؟



تعداد چوب‌کبریت‌ها: (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۱۰

هر شکل نسبت به شکل قبل از خود، ۳ چوب‌کبریت اضافه دارد. دنباله‌ی تعداد چوب‌کبریت‌ها به صورت ۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ... است که هر عدد آن از رابطه‌ی (شماره‌ی شکل $\times 3$) به دست می‌آید، بنابراین در شکل دهم: $3 \times 10 - 2 = 28$ چوب‌کبریت خواهیم داشت.

مثال ۱۱. با توجه به شکل‌های زیر، اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کنند، چه کسری از شکل شماره‌ی ۶ رنگی می‌شود؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا تعداد مربع‌های شکل شماره‌ی ۶ را به دست می‌آوریم.

با شمارش تعداد مربع‌های شکل‌های داده‌شده به الگوی زیر

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\ +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & & \end{array}$$

می‌رسیم:

دنباله‌ی بالا یک دنباله‌ی مثلثی است و با توجه به آن، تعداد مربع‌های شکل شماره‌ی ۶، برابر ۲۱ است، اما با شمارش مربع‌های رنگی هر شکل، به دنباله‌ی مقابل خواهیم رسید:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \\ +2 & +4 & +6 & & & \end{array}$$

بنابراین $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ شکل شماره‌ی ۶، رنگی است.

۵- راهبرد حدس و آزمایش

حدس زدن برای بیش‌تر مردم چیز جدیدی نیست. هریک از شما بارها در طول تحصیل آگاهانه یا ناخودآگاه در مورد پاسخ پرسش‌ها و مسئله‌ها حدس‌هایی زده‌اید. ممکن است یک مسئله، روش و راه حل مستقیمی نداشته باشد یا رسیدن به پاسخ طولانی و دشوار باشد. شما می‌توانید با یک روش منطقی و منظم پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنید و سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حدس خود را بررسی کنید یا با توجه به نتیجه‌ی به‌دست آمده، حدس بعدی را بزنید تا کم‌کم به پاسخ مسئله نزدیک شوید. بنابراین حدس زدن و آزمایش کردن گاهی زحمت و دردسر هم دارد، ولی نتیجه‌ی کار هرچه باشد گامی به جلو است. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۲. حسن آقا در مزرعه‌اش مرغ و گاو پرورش می‌دهد. او تعداد مرغ‌ها و گاوهایش را به خاطر ندارد. او به خاطر دارد که مرغ‌ها و گاوهایش روی هم ۵۴ سر و ۱۲۲ پا دارند. در مزرعه‌ی حسن آقا چند مرغ و چند گاو وجود دارد؟ این که مرغ‌ها و گاوها روی هم ۵۴ سر دارند؛ یعنی تعداد آن‌ها روی هم ۵۴ تاست و از آن‌جا که هر مرغ ۲ پا و هر گاو ۴ پا دارد، به حدس زدن می‌پردازیم.



تعداد پاها	تعداد گاوها	تعداد مرغ‌ها
(خیلی زیاده!) $68 + 80 = 148$	۲۰	۳۴
(هنوز زیاده!) $78 + 60 = 138$	۱۵	۳۹
(داره خوب میشه!) $88 + 40 = 128$	۱۰	۴۴
(نزدیک شدیم!) $92 + 32 = 124$	۸	۴۶
(خودشه!) $94 + 28 = 122$	۷	۴۷

حسن آقا ۴۷ مرغ و ۷ گاو دارد.

مثال ۱۳. دو زاویه متمم‌اند و یکی از این زاویه‌ها از سه برابر زاویه‌ی دیگر ۱۰ درجه بیش‌تر است. اندازه‌ی هر زاویه را پیدا کنید. این که زاویه‌ها متمم هستند؛ یعنی مجموع آن‌ها ۹۰ درجه می‌شود، پس باید دو زاویه را طوری حدس زد که جمع آن‌ها ۹۰ درجه شود و از طرفی یک زاویه از سه برابر دیگری ۱۰ درجه بیش‌تر باشد.

زاویه‌ی اول	۲۰°	۳۰°	۴۰°
۱۰° + زاویه‌ی اول × ۳	۷۰°	۱۰۰°	۱۳۰°
زاویه‌ی اول ۲۰ درجه و زاویه‌ی دوم ۷۰ درجه می‌باشد.	→ (خودشه!) ۹۰°	(زیاده!) ۱۳۰°	(خیلی زیاده!) ۱۷۰°

۶- راهبرد زیرمسئله

همه‌ی راهبردهایی که تاکنون معرفی شده‌اند، با سازماندهی اطلاعات سروکار دارند، ولی راهبرد زیرمسئله دارای نگاهی متفاوت است و با طرح نقشه و چگونگی حل مسئله سروکار دارد. در این روش، ابتدا مسئله‌ی پیچیده و چندمرحله‌ای را به مسئله‌ای ساده و مرحله به مرحله تبدیل کنید، با پاسخ دادن به هر زیرمسئله به زیرمسئله‌ی بعدی بروید. اگر ترتیب زیرمرحله‌ها را درست تشخیص داده باشید، حل هر زیرمسئله به حل مسئله‌ی بعدی کمک می‌کند تا در نهایت به خواسته‌ی اصلی مسئله برسید.



به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۴. ظرفیت یک آسان‌بر (آسانسور) ۲۰ نفر کودک یا ۱۵ نفر بزرگسال است. اگر ۱۲ نفر کودک درون آسان‌بر باشند، این

وسيله برای چند نفر بزرگسال هم ظرفیت دارد؟ زیر مسئله‌ها:



۱- چند نفر بزرگسال برابر با یک نفر خردسال است؟ چون ۲۰ کودک معادل ۱۵ بزرگسال

است، یک کودک معادل $\frac{15}{20}$ یا $\frac{3}{4}$ یک بزرگسال است.

۲- چند نفر کودک را هنوز می‌توان به افراد حاضر در آسان‌بر اضافه کرد؟ آسان‌بر ظرفیت

۲۰ نفر کودک را دارد، بنابراین ۸ کودک دیگر می‌توانند سوار آسان‌بر شوند.

۳- این تعداد با چه تعداد بزرگسال معادل است؟ این تعداد کودک با $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ بزرگسال

معادل است، پس ۶ بزرگسال می‌توانند سوار شوند.

مثال ۱۵. ۲۵٪ از مخلوطی رنگ قرمز، ۳۰٪ آن رنگ زرد و ۴۵٪ آن آب می‌باشد. اگر ۴ پیمانه‌ی یک لیتری رنگ قرمز و ۲۰

پیمانه‌ی یک لیتری از مخلوط را روی هم بریزیم و مخلوط جدیدی تولید کنیم، چند درصد از مخلوط جدید، رنگ قرمز است؟ زیر مسئله‌ها:



۱- در مخلوط اولیه، چند پیمانه رنگ قرمز وجود داشته است؟

$$20 \times 25\% = 5 \text{ پیمانه}$$

۲- در مخلوط جدید، چند پیمانه رنگ قرمز وجود دارد؟

$$5 + 4 = 9 \text{ پیمانه}$$

۳- در مخلوط جدید، چند پیمانه رنگ وجود دارد؟

$$20 + 4 = 24 \text{ پیمانه}$$

۴- چند درصد از مخلوط جدید، رنگ قرمز است؟

$$\frac{9}{24} \times 100 = 37.5\%$$

۷- راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر

برای حل بعضی از مسئله‌ها، ابتدا مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط با آن را حل می‌کنیم، سپس با توجه به نتیجه و پاسخ مسئله‌ی ساده‌شده، پاسخ

مسئله‌ی اصلی را به‌دست می‌آوریم. برای ساده کردن مسئله می‌توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک‌تر استفاده کرد. برای نتیجه‌گیری و پیدا

کردن پاسخ مسئله‌ی اصلی، از راهبرد الگویابی استفاده می‌کنیم و الگوی کشف شده در مسئله‌ی ساده‌شده را به مسئله‌ی اصلی مرتبط می‌کنیم.

به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۶. در صفحه‌ی شطرنج، چند مربع وجود دارد؟ صفحه‌ی شطرنج یک صفحه‌ی مربعی 8×8 است که شمردن تعداد مربع‌ها

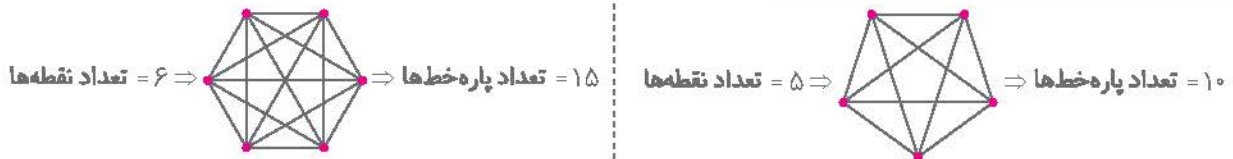
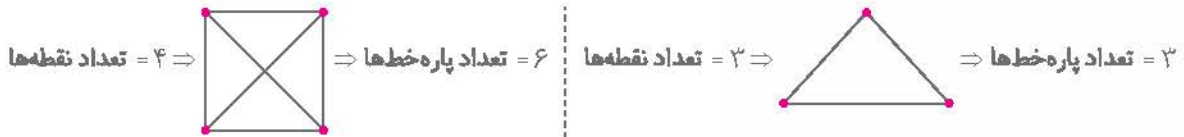
در آن، قدری پیچیده است، بنابراین ابتدا مسئله‌های ساده‌تر یعنی صفحه‌های شطرنجی (1×1) ، (2×2) ، (3×3) و (4×4) را بررسی کرده و تعداد

مربع‌ها را در آن‌ها می‌شماریم تا به الگویی برای حل مسئله‌ی اصلی دست یابیم.



اندازه‌ی صفحه‌ی شطرنج	تعداد مربع‌ها
1×1	۱
2×2	$1 + 4 = 5$
3×3	$1 + 4 + 9 = 14$
4×4	$1 + 4 + 9 + 16 = 30$
\vdots	\vdots
8×8	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$

مثال ۱۷. اگر ۱۰ نقطه را که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط نیستند، دوبعدی به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط به وجود می‌آید؟ ابتدا مسئله‌های ساده‌شده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم. (توجه کنید که برای مسئله‌های ساده‌تر، تعداد نقاط را کم‌تر در نظر می‌گیریم.)



$$\begin{array}{cccccccc}
 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 \\
 3 & . & 6 & . & 10 & . & 15 & . & 21 & . & 28 & . & 36 & . & 45 \\
 \text{۱۰ نقطه} & & \text{۹ نقطه} & & \text{۸ نقطه} & & \text{۷ نقطه} & & \text{۶ نقطه} & & \text{۵ نقطه} & & \text{۴ نقطه} & & \text{۳ نقطه}
 \end{array}$$

با توجه به اعداد به‌دست آمده در بالا، الگوی مقابل را خواهیم داشت: بنابراین، با وصل کردن ۱۰ نقطه به هم، ۴۵ پاره‌خط به وجود می‌آید.

۸- راهبرد روش‌های نمادین

بسیاری از مسئله‌ها را می‌توان به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کرد. در بعضی از مسئله‌ها نیز ممکن است از مدل‌سازی هندسی استفاده کنیم. تبدیل مسئله به یک شکل هندسی و حل هندسی آن نیز، نوعی روش نمادین یا مدل‌سازی به شمار می‌رود. برای استفاده از راهبرد روش‌های نمادین در فرآیند حل مسئله، ۵ گام وجود دارد که در فصل ۴، با آن‌ها آشنا می‌شویم. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۸. دستفروشی اجناس خود را در یک جمع‌بازار حراج کرده بود. او هر قلم جنس را به قیمت ۱۰۰۰ تومان می‌فروخت و سعی می‌کرد به هر مشتری فقط یک قلم جنس بفروشد. البته اگر مشتری‌ها چانه می‌زدند، می‌توانستند جنس مورد نیاز خود را به نصف قیمت هم از او بخرند. دستفروش در پایان روز متوجه شد که همه‌ی دوازده قلم جنس خود را فروخته و ۹۵۰۰ تومان به‌دست آورده است. در صورتی که او از هر خریدار فقط یک اسکناس ۱۰۰۰ تومانی یا ۵۰۰ تومانی دریافت کرده باشد، از هر کدام از این اسکناس‌ها چندتا دارد؟ اگر دستفروش \square تا اسکناس ۱۰۰۰ تومانی گرفته باشد، $\square - ۱۲$ تا هم اسکناس ۵۰۰ تومانی گرفته است؛ زیرا در مجموع دوازده قلم جنس فروخته است و برای هر جنس نیز فقط یک اسکناس دریافت کرده است. پس می‌توان نوشت: $۱۰۰۰ \times \square + ۵۰۰ \times (۱۲ - \square) = ۹۵۰۰$ حالا با روش حدس و آزمایش مقدارهایی را برای \square انتخاب می‌کنیم و حاصل $۱۰۰۰ \times \square + ۵۰۰ \times (۱۲ - \square)$ را به‌دست می‌آوریم:



\square	$۱۰۰۰ \times \square + ۵۰۰ \times (۱۲ - \square)$	بررسی و آزمایش
۳	$۳۰۰۰ + ۴۵۰۰ = ۷۵۰۰$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۴	$۴۰۰۰ + ۴۰۰۰ = ۸۰۰۰$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۵	$۵۰۰۰ + ۳۵۰۰ = ۸۵۰۰$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۶	$۶۰۰۰ + ۳۰۰۰ = ۹۰۰۰$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۷	$۷۰۰۰ + ۲۵۰۰ = ۹۵۰۰$	به جواب رسیدیم

پس دستفروش ۷ اسکناس ۱۰۰۰ تومانی و $(۱۲ - ۷ = ۵)$ اسکناس ۵۰۰ تومانی گرفته است.



مثال ۱۹. نیما کتاب داستانی را در هفت ساعت مطالعه کرد و هشت صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۱۲۰ صفحه داشته

باشد، نیما به‌طور متوسط در هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟

فرض کنیم نیما به‌طور متوسط \square صفحه از کتاب را در هر ساعت خوانده باشد. بنابراین:

$$7 \times \square + 8 = 120$$

حالا با روش حدس و آزمایش مقادارهایی را برای \square انتخاب می‌کنیم و حاصل

$7 \times \square + 8$ را به‌دست می‌آوریم:

<input type="checkbox"/>	$7 \times \square + 8$	بررسی و آزمایش
۱۰	$7 \times 10 + 8 = 78$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۱۱	$7 \times 11 + 8 = 85$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۱۲	$7 \times 12 + 8 = 92$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۱۳	$7 \times 13 + 8 = 99$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۱۴	$7 \times 14 + 8 = 106$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۱۵	$7 \times 15 + 8 = 113$	<input type="checkbox"/> را زیاد می‌کنیم
۱۶	$7 \times 16 + 8 = 120$	به جواب رسیدیم

مسئله‌های زیر را با کمک راهبرد رسم شکل حل کنید.



۱ پدر علی استخر شنای خانگی خود را به کمک تعدادی کارگر و به‌وسیله‌ی بیل و کلنگ حفر کرد. چون کندن زمین بسیار سخت بود، برای صرفه‌جویی در هزینه، او ابتدا نقشه‌ای برای استخر طراحی کرد. در این نقشه پدر علی حاشیه‌ای به پهنای ۴ متر پیرامون استخر در نظر گرفت. استخر به شکل مستطیل بود و ۴۰ متر طول و ۱۴ متر عرض داشت. او برای سنگ‌فرش کردن حاشیه‌ی استخر، می‌بایست مساحت آن را تعیین می‌کرد. مساحت حاشیه‌ی استخر را به‌دست آورید.



۲ صادق، مهران، رضا و ایمان چهار نفر اول رشته‌ی تییس روی میز مدرسه هستند. مهارت ایمان از رضا و مهران بیش‌تر است. صادق از همه برتر است و مهران بالاتر از رضا قرار دارد. رتبه‌ی این چهار نفر را تعیین کنید.

۳ مسیر ریل قطار اسباب‌بازی کاوه، دایره‌ای شکل است. شش تیرچه‌ی خطوط ارتباط تلفن، به فاصله‌های یکسان دور مسیر قرار دارند و ۱۰ ثانیه طول می‌کشد تا قطار از تیرچه‌ی اول به تیرچه‌ی سوم برسد. چه‌قدر طول می‌کشد تا قطار کل مسیر را دور بزند؟



۴ هادی صندوق‌دار یکی از فروشگاه‌های زنجیره‌ای شهر است. ساختمان این فروشگاه چند طبقه است و هادی در طبقه‌ی وسط آن کار می‌کند. یک روز او در آخر وقت کاری خود مرخصی گرفت و در فروشگاه مشغول خرید شد. ابتدا به قسمت لوازم منزل که سه طبقه بالاتر بود رفت، بعد برای خرید از قسمت بچه‌گانه پنج طبقه پایین آمد، سپس شش طبقه بالا رفت تا از قسمت لوازم صوتی خرید کند و در آخر ده طبقه پایین آمد و از در خروجی اصلی فروشگاه که در طبقه‌ی اول بود، خارج شد. این فروشگاه بزرگ چند طبقه دارد؟

۵ چه تعداد سرامیک مربع‌شکل به ضلع ۲۰ سانتی‌متر، برای پوشاندن کف سالن مستطیل‌شکلی به طول ۴ متر و عرض ۳ متر لازم است؟

مسئله‌های زیر را با کمک راهبرد الگوسازی حل کنید.

۶ مساحت مستطیلی ۱۲۰ سانتی‌متر مربع است و طول و عرض مستطیل یک عدد صحیح است. چند مستطیل با این ویژگی وجود دارد؟ کدام‌یک از این مستطیل‌ها کم‌ترین محیط را دارد؟



۷ پری قصد دارد با ۶۰۰۰ تومان تعدادی مجله‌ی طنز و جدول بخرد. قیمت هر مجله‌ی طنز ۶۰۰ تومان و قیمت هر مجله‌ی جدول ۱۲۰۰ تومان است. او به چند طریق می‌تواند با همه‌ی پولش مجله‌ی طنز و جدول خریداری کند؟

۸ حاصل ضرب دو عدد حسابی ۳۶۰ و مجموع آن‌ها کم‌تر از ۱۰۰ است. همه‌ی حالت‌های ممکن برای این دو عدد را بنویسید.

۹ خانم رضائی به چند طریق می‌تواند یک اسکناس ۵۰۰ تومانی را به اسکناس‌های ۵۰ تومانی، ۱۰۰ تومانی و ۲۰۰ تومانی خرد کند؟



۱۰) سارا، مونا، رعنا و حُسنّا برای پاسخ دادن به یک مسابقه‌ی رادیویی، با مرکز پخش رادیو تماس تلفنی گرفته‌اند. همه‌ی حالت‌های ممکن را برای ترتیب تماس گرفتن این چهار نفر بنویسید.

مسئله‌های زیر را به کمک راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب حل کنید.



۱۱) فرشاد و فرهاد یک گریه (TOM) و یک اسب (NAG) دارند. گریه‌ی آن‌ها تنبل و اسب‌شان پیر است. آن‌ها تصمیم گرفتند آن گریه‌ی تنبل و اسب پیر را با یک بز (GOAT) عوض کنند. فرشاد که به زبان انگلیسی تسلط داشت گفت: «به‌نظر می‌آید که در نام‌های انگلیسی این حیوان‌ها یک مسئله‌ی رمزگشایی جالب وجود دارد.» اگر هر حرف را نمایان‌گر یک رقم از صفر تا ۹ در نظر بگیریم و بدانیم $TOM + NAG = GOAT$ است، تعیین کنید هر حرف نمایان‌گر کدام رقم است؟



۱۲) مجموع سه عدد طبیعی ۱۳ و حاصل ضرب آن‌ها ۷۵ می‌باشد. کوچک‌ترین آن‌ها چند است؟
 ۱۳) سهراب تعداد خط‌های یک صفحه از کتابش را شمرد. وقتی آن‌ها را سه‌تا سه‌تا می‌شمرد دو خط باقی می‌ماند، وقتی آن‌ها را پنج‌تا پنج‌تا می‌شمرد باز هم دو خط باقی می‌ماند، ولی وقتی آن‌ها را هفت‌تا هفت‌تا می‌شمرد پنج خط باقی می‌ماند. در آن صفحه چند خط وجود دارد؟



۱۴) آرش ۵ دارت به سمت صفحه‌ی هدف پرتاب کرد. امتیازهای روی صفحه‌ی هدف ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ بودند. اگر همه‌ی پرتاب‌های او به صفحه‌ی هدف برخورد کرده باشند، کدام عددها نمی‌توانند مجموع امتیازهای آرش باشند؟ ۱۵، ۱۴، ۶، ۲۶، ۳۱، ۴۲، ۳۰، ۵۸، ۲۳، ۳۸

۱۵) اگر عدد چهاررقمی abcd را در ۴ ضرب کنیم، ترتیب ارقام آن برعکس می‌شود؛ یعنی $abcd \times 4 = deba$. ارقام a, b, c, d متفاوت هستند، آن‌ها را بیابید.



۱۶) در غرب، داستانی قدیمی در مورد دو تبهکار معروف به نام‌های «نلسون» و «کارسون» وجود دارد. در اعلامیه‌ای که تصویر این دو نفر را به‌عنوان مجرم‌ان فراری نشان می‌داد، جایزه‌ی بزرگی نیز برای دستگیری آن‌ها در نظر گرفته شده بود. ولی مبلغ جایزه را به‌صورت رمز مشخص کرده بودند. این مسئله باعث شد که اغلب افراد به‌جای دقت در تصویر این دو نفر، برای شناسایی آن‌ها، مشغول حل معمای پاداش دستگیری آن‌ها شوند، حتی خود نلسون و کارسون!

ولی معمای پاداش به‌سادگی قابل حل نبود. مجرم‌ان بعد از تلاش زیاد برای حل مسئله و ناکامی در حل آن، از کلاتر راهنمایی خواستند و کلاتر بعد از دستگیری آن‌ها به‌عنوان راهنمایی گفت که به‌جای N عدد ۵ را قرار دهند، به این ترتیب آن‌ها در طول محکومیت خود در زندان، توانستند مسئله را حل کنند. شما نیز این مسئله را با توجه به این که هر حرف دقیقاً نماینده‌ی یک رقم بین ۰ تا ۹ است، حل کنید.

NELSON
+ CARSON
REWARD

فصل اول / راهبردهای حل مسئله



۱۷) پویا، پیام و پدram سه دوست هستند که سنّ همهی آنها به گفته‌ی پویا که از همه بزرگ‌تر است، بین ۱۱ تا ۳۰ سال است. پیام می‌گوید مجموع سنّ آنها ۷۰ سال است و پدram که از همه کوچک‌تر است، می‌گوید اگر هر کدام از ما سنّ خود را در خودش ضرب کند، همهی ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک‌بار در این سه عدد ظاهر می‌شوند. تعیین کنید هر یک از این سه نفر چند سال دارند.



۱۸) طاهره (که از همه بلندقدتر است) از مریم (که وزنش از همه کم‌تر است) بزرگ‌تر است. قدّ سارا (که از همه بزرگ‌تر است) از ناهید (که وزنش از همه پیش‌تر است) کوتاه‌تر است. هیچ‌کدام از آنها در این دسته‌بندی‌ها دارای رتبه‌ی یکسان نیستند. مثلاً اگر کسی از نظر بلندی قد دومین نفر است، نمی‌تواند از نظر وزن یا سن دومین نفر باشد. این چهار دختر را در هر یک از دسته‌بندی‌های سن، وزن و قد رتبه‌بندی کنید.

مسئله‌های زیر را به کمک راهبرد الگویابی حل کنید.

۱۹) الگوی مربوط به هر دنباله را کشف کنید و آن را به فارسی توضیح دهید، سپس ۴ جمله‌ی بعدی هر دنباله را بنویسید.

الف) ۲، ۳، ۵، ۹، ۱۷، ۳۳،

ب) ۱، ۵، ۱۳، ۲۹، ۶۱، ۱۲۵،

ج) ۱، ۴، ۱۳، ۴۰، ۱۲۱، ۳۶۴،

د) ۲، ۵، ۱۰، ۱۷،

ه) ۶۴، ۳۲، ۱۶، ۸، ۴،

و) ۵، ۱۰، ۹، ۱۸، ۱۷، ۳۴، ۳۳،

ز) ۱، ۲، ۶، ۲۴، ۱۲۰، ۷۲۰،

۲۰) الگوی زیر را ادامه دهید و بگویید در شکل سی و چهارم چند دایره وجود دارد؟



۲۱) اگر عدد دو را ۵۷ بار در خودش ضرب کنیم، رقم یکان آن چند می‌شود؟

۲۲) مثلث مقابل، مثلث خیام - پاسکال نام دارد. الگویی که سطر بعدی را تولید می‌کند بیابید و به کمک آن سه سطر بعدی را ادامه دهید.

	۱				
	۱	۱			
	۱	۲	۱		
	۱	۳	۳	۱	
	۱	۴	۶	۴	۱

مسئله‌های زیر را به کمک راهبرد حدس و آزمایش حل کنید.



۲۳) تعداد ۱۰ تومانی‌های سحر، ۵ تا بیش‌تر از تعداد ۲۵ تومانی‌های اوست. او جمعاً ۳۳۰ تومان پول دارد. سحر چه تعداد ۱۰ تومانی و چه تعداد ۲۵ تومانی دارد؟

۲۴) عددی دورقمی بیابید که اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم و با عدد اولیّه جمع کنیم، حاصل جمع برابر با ۱۳۲ شود.

امتیازی

خوب آزما

نمونه سوالات (با پاسخ)

تکمیلی

خوب آزما

نمونه سوالات (با پاسخ)

سوالات تیزهوشان

۲۵) ریحانه ۲ کتاب بیش‌تر از ۳ برابر کتاب‌های حنانه دارد. اگر ریحانه ۱۲ جلد از کتاب‌هایش را به حنانه بدهد، هر دوی آن‌ها به تعداد برابر کتاب خواهند داشت. ریحانه در ابتدا چند کتاب داشته است؟



۲۶) شقایق ۵۸ سکه از انواع ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی دارد. تعداد ۵ تومانی‌ها سه تا کم‌تر از دو برابر تعداد ۱۰ تومانی‌هاست. ارزش کل سکه‌ها ۷۴۰ تومان است. شقایق از هر نوع سکه چند تا دارد؟

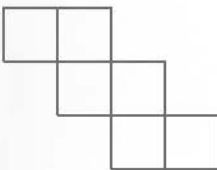
۲۷) در یک شهر، به‌ازای هر ۹ نفر دانش‌آموز پسر، ۱۰ نفر دانش‌آموز دختر وجود دارد. در این شهر، ۲۶۲۲ دانش‌آموز مشغول به تحصیل هستند. چند نفر از آن‌ها دختر و چند نفر از آن‌ها پسر هستند؟

مسئله‌های زیر را به کمک راهبرد زیر مسئله حل کنید.



۲۸) ۵ نفر از دانش‌آموزان تصمیم گرفتند یک مهمانی برگزار کنند. آن‌ها توافق کردند که هزینه‌های مهمانی را به تساوی بین خود تقسیم کنند. لادن ۱۴۰۰۰ تومان برای نوشیدنی پرداخت کرد. آزاده ۳۰۰۰ تومان برای خرید لیوان یکبارمصرف پرداخت کرد. حمیده برای تزئین محل مهمانی ۷۰۰۰ تومان کاغذ رنگی خرید. مرجان ۹۰۰۰ تومان برای خوراکی پرداخت کرد و بهناز ۲۰۰۰ تومان برای بادکنک و ۵۸۰۰ تومان برای آب‌نبات هزینه کرد. تعیین کنید هر کس باید چه‌قدر پول به دیگری بدهد؟

۲۹) در یک هواپیما که دو سوم آن پر بود، ۲۰٪ مسافران پسر، $\frac{1}{4}$ مسافران زن، $\frac{1}{8}$ مسافران دختر و ۶۸ نفر از آن‌ها مرد بودند. در این هواپیما چند صندلی وجود دارد؟



۳۰) در شکل رویه‌رو، شش مربع مساوی دیده می‌شود. اگر مساحت شکل ۵۴ متر مربع باشد، محیط آن چه‌قدر است؟



۳۱) اگر کاهو با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت رانندگی کند، ۳ ساعت طول می‌کشد تا به زربین‌دشت برسد. اگر با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت حرکت کند، سفرش چند دقیقه بیش‌تر طول خواهد کشید؟

۳۲) خانم نصرتی هر ماه ۱۰٪ حقوقش را پس‌انداز می‌کرد. شرکتی که این خانم در آن کار می‌کرد، به‌علت بحران مالی، حقوق او را از ۳۶۰۰۰۰ تومان به ۳۰۰۰۰۰ تومان در ماه کاهش داد، ولی خانم نصرتی تصمیم گرفت مقدار پس‌انداز ماهانه‌اش را ثابت نگه دارد. حالا او چند درصد حقوقش را پس‌انداز می‌کند؟

مسئله‌های زیر را با کمک راهبرد حل مسئله ساده‌تر حل کنید.

۳۳) در یک ۱۰ ضلعی، مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌ها چه‌قدر است؟

۳۴) حاصل عبارت مقابل چه‌قدر است؟ $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 4999 = ?$

۳۵) تفاضل مجموع اولین پانصد عدد طبیعی زوج، از مجموع اولین پانصد عدد طبیعی فرد را به‌دست آورید.

۳۶) ۹ نقطه به شکلی در صفحه قرار گرفته‌اند که هیچ ۳ تایی از آن‌ها روی یک خط راست نیستند. با استفاده از هر ۳ تا از این نقاط (به‌عنوان رأس‌های مثلث)، چند مثلث متفاوت می‌توان ایجاد کرد؟

مسئله‌های زیر را با کمک راهبرد روش‌های تعدادین حل کنید.



۳۷ قاطر و الاغی، باری به وزن چند صد و چند واحد حمل می‌کردند. الاغ از صاحب خود گله کرد و به قاطر گفت: «اگر فقط ۱۰۰ واحد از بار تو به بار من اضافه شود، سنگینی بار من دو برابر سنگینی بار تو خواهد شد.» قاطر پاسخ داد: «بله این درست است، ولی اگر تو ۱۰۰ واحد از بار خود را به من بدهی، سنگینی بار من ۳ برابر سنگینی بار تو خواهد شد.» وزن بار الاغ و بار قاطر را تعیین کنید.



۳۸ محیط یک زمین بازی مستطیل‌شکل، ۳۷۰ متر است و طول زمین از دو برابر عرض آن ۴۰ متر کم‌تر است. مساحت این زمین بازی را تعیین کنید.



۳۹ رحیم به اندازه‌ی ۳۲۵ تومان سکه‌ی ۵ تومانی و ۱۰ تومانی دارد. سکه‌های ۵ تومانی او ۸ تا بیش‌تر از سکه‌های ۱۰ تومانی اوست. او از هر نوع سکه چند تا دارد؟

۴۰ دو زاویه‌ی مکمل را در نظر بگیرید که اندازه‌ی یکی از آن‌ها ۶ درجه بیش‌تر از اندازه‌ی دو برابر دیگری باشد. اندازه‌ی هر یک از زاویه‌ها چه قدر است؟



۴۱ خانه‌ی بهرام از خانه‌ی دوستش احسان، ۱۵ کیلومتر فاصله دارد. روزی بهرام با دوچرخه به طرف خانه‌ی احسان حرکت کرد. پس از نیم‌ساعت دوچرخه‌اش پنجر شد و بقیه‌ی راه را پیاده در ۳ ساعت پیمود. اگر سرعت پیاده‌روی بهرام $\frac{1}{4}$ سرعت دوچرخه رانندش باشد، سرعت او هنگام دوچرخه راندن چه قدر بوده است؟



۴۲ گروهی از دانش‌آموزان به وسیله‌ی تعدادی اتوبوس و مینی‌بوس، برای شرکت در یک دوره مسابقه‌ی ورزشی به اردوگاهی رفتند. وقتی یک اتوبوس و دو مینی‌بوس به اردوگاه رسیدند، ۷۳ دانش‌آموز پیاده شدند. چند دقیقه‌ی بعد، دو اتوبوس و یک مینی‌بوس دیگر هم از راه رسیدند و این بار تعداد دانش‌آموزان ۹۸ نفر بود. به این ترتیب در مجموع، سه اتوبوس و هشت مینی‌بوس همه‌ی دانش‌آموزان را به اردوگاه منتقل کردند. تعداد کل دانش‌آموزان شرکت کننده در این دوره از مسابقات، چند نفر بوده است؟

۱) فرش دایره‌ای شکل به قطر ۲ متر را در وسط اتاق انداخته‌ایم. اگر لبه‌ی فرش تا هر طول اتاق $\frac{5}{8}$ متر و تا هر عرض اتاق ۱ متر فاصله داشته باشد، مساحت این اتاق مستطیل شکل چند مترمربع است؟

(فرزاد ۹۳ - نامه‌ی ۳ مشور)

۲) $\frac{2}{5}$ ظرفی آب دارد. اگر ۶۰ لیتر آب به آن اضافه شود، ظرف پر می‌شود. گنجایش ظرف چند لیتر است؟

(فرزاد ۹۳ - نامه‌ی ۳ مشور)

۳) با انگشتان یک دست، به چند صورت می‌توان عدد ۳ را نوشت؟

(فرزاد ۹۳ - تاش)

۴) زهرا سه فرزند دارد. حاصل ضرب سن آنها ۷۲ و حاصل جمع سن آنها ۱۹ است. سن بزرگ‌ترین فرزند زهرا چند سال است؟

(فرزاد ۹۳ - شیراز)

۵) ظرفیت یک آسانسور ۱۵ نفر کودک و ۹ نفر بزرگسال است. اگر ۱۰ کودک وارد آسانسور شوند، چند بزرگسال می‌توانند وارد آسانسور شوند؟

(فرزاد ۹۳ - مشور)



۶) یک ماشین راه‌سازی هر روز تا هنگام غروب ۸ کیلومتر به جلو حرکت می‌کند و عصر همان روز ۶ کیلومتر به عقب بازمی‌گردد. اگر صبح شنبه کار خود را آغاز کند، در ظهر روز پنج‌شنبه در چند کیلومتری نقطه‌ی شروع شنبه قرار دارد؟

(فرزاد ۹۳ - مشور)

۷) اگر ضلع مربعی را 30% کاهش دهیم، مساحت آن چند درصد کاهش می‌یابد؟

(دیرستان نمونه - ورامین)

۸) محسن و محمد ۶۴ جلد کتاب را صحافی کرده‌اند، اگر محسن ۱۲ جلد کتاب بیش‌تر از محمد صحافی کرده باشد، هر کدام چند جلد کتاب صحافی کرده‌اند؟

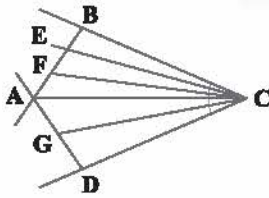
(فرزاد ۹۳ - اصفهان)



۹) باک ماشینی بنزین دارد. در پمپ بنزین ۱۶ لیتر بنزین زده شد. هنوز نصف باک خالی است. گنجایش این باک چند لیتر است؟

(فرزاد ۹۳ - منطقه‌ی ۳ - تهران)

فصل اول / راهبردهای حل مسئله



(شرداد ۹۳ - مشعر)

۱۰) در شکل مقابل، نام تمامی نیم‌خطها و پاره‌خطهای شکل را بنویسید.

۱۱) در یک اتاق سه لامپ صورتی، زرد و آبی وجود دارد. به چند طریق با این سه لامپ می‌توان نور اتاق را تنظیم کرد در صورتی که برای هر لامپ یک کلید جداگانه وجود دارد.

(شرداد ۹۳ - مشعر)



۱۲) اگر دمای قطب شمال ۴۵ درجه زیر صفر و دمای خط استوا ۶۰ درجه بالای صفر باشد، میانگین دمای دو نقطه را به دست آورید.

(شرداد ۹۳ - بهرم)

۱۳) علی در طبقه ۲ - مرکز خرید وارد آسانسور شد. او ابتدا ۷ طبقه بالا رفت و اجناس مورد نظر خود را خرید و برای خریدهای دیگر ۳ طبقه پایین آمد و در آخر ۶ طبقه با آسانسور بالا رفت. علی هم اکنون در کدام طبقه مرکز خرید قرار دارد؟

(شرداد ۹۳ - نهاوند)

۱۴) زمینی به شکل مستطیل به طول ۹ متر و عرض ۴ متر داریم. می‌خواهیم به فاصله ۱ متر از لبه‌ی زمین دورتادور آن را ۳ دور سیم‌خاردار بکشیم. چند متر سیم‌خاردار نیاز داریم؟

(شرداد ۹۳ - کرمان)



۱۵) در یک مسیر ویژه اتوبوس، ۹ ایستگاه اتوبوس به فاصله‌ی مساوی از هم قرار دارند. فاصله‌ی بین ایستگاه اول و سوم ۶۰۰ متر است. طول مسیر چه قدر است؟

(شرداد ۹۳ - زاهدان)

۱۶) گنجایش یک بطری و یک فنجان باهم برابر است با گنجایش یک پارچ. گنجایش بطری برابر است با مجموع گنجایش‌های یک فنجان و یک لیوان. مجموع گنجایش‌های سه لیوان برابر است. با مجموع گنجایش‌های دو پارچ. چند فنجان گنجایش یک لیوان دارد؟

(شرداد ۹۳ - زاهدان)

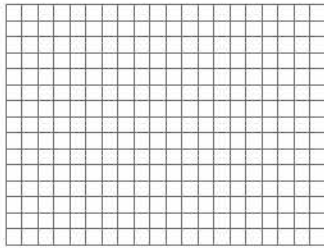
امتیازی

 نمونه سوالات (با پاسخ)
 خودآزمایی

تکمیلی

 نمونه سوالات (با پاسخ)
 خودآزمایی

 سوالات تیزهوشانه



۲۰۰ سانتی‌متر

۴۰۰ سانتی‌متر

سرامیک $30 \times 20 = 600$

۸. مستطیل با این ویژگی داریم:

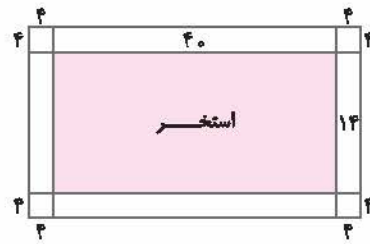
عرض	طول	محیط
۱	۱۲۰	۲۴۲
۲	۶۰	۱۲۴
۳	۴۰	۸۶
۴	۳۰	۶۸
۵	۲۴	۵۸
۶	۲۰	۵۲
۸	۱۵	۴۶
۱۰	۱۲	۴۴

کم‌ترین محیط \Rightarrow

۷. به ۶ طریق می‌تواند مجله‌ی طنز و جدول خریداری کند:

مجله‌ی طنز	مجله‌ی جدول	قیمت کل
۱۰	۰	۶۰۰۰
۸	۱	۶۰۰۰
۶	۲	۶۰۰۰
۴	۳	۶۰۰۰
۲	۴	۶۰۰۰
۰	۵	۶۰۰۰

عدد اول	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۲	۱۵	۱۸
عدد دوم	۹۰	۷۲	۶۰	۴۵	۴۰	۳۶	۳۰	۲۴	۲۰
مجموع	۹۴	۷۷	۶۶	۵۳	۴۹	۴۶	۴۲	۳۹	۳۸



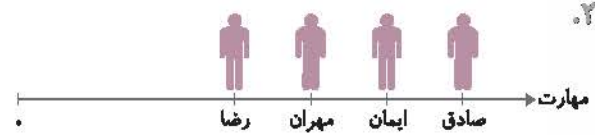
متر $4+4+4+4=16$ طول مستطیل بزرگ

متر $4+14+4=22$ عرض مستطیل بزرگ

متر مربع $16 \times 22 = 352$ مساحت مستطیل بزرگ

متر مربع $40 \times 14 = 560$ مساحت سطح استخر

متر مربع $352 - 560 = -208$ مساحت حاشیه‌ی استخر

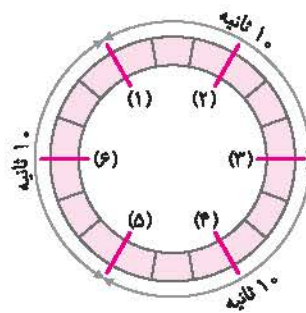


مهران: رتبه‌ی سوم

صادق: رتبه‌ی اول

رضا: رتبه‌ی چهارم

ایمان: رتبه‌ی دوم



ثانیه $3 \times 1 = 3$

۱۳ طبقه دارد.

(۱۳)
(۱۲)
لوازم صوتی (۱۱)
لوازم منزل (۱۰)
(۹)
(۸)
محل کار هادی (۷) ← طبقه‌ی وسط
(۶)
بچه‌گانه (۵)
(۴)
(۳)
(۲)
(۱) در خروجی اصلی



فصل اول / راهبردهای حل مسئله

$$\begin{array}{r} \text{TOM} \\ + \text{NAG} \\ \hline \text{GOAT} \end{array}$$

۱۱

چون TOM و NAG دو عدد سه رقمی هستند، پس مجموع آن‌ها به ۲۰۰۰ نمی‌رسد، یعنی $G=1$ است؛ چون $O+\Lambda=\Lambda$ می‌شود. پس O هم باید صفر باشد. (چرا؟) چون $G=1$ و $O=0$ شد، پس $T+N=10$ می‌شود. حالا با توجه به این که $M+1=T$ و $T+N=10$ ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

N	①	۲	۳	۴	⑤	۶	۷	۸	۹
T	۹	۸	۷	۶	⑤	۴	۳	۲	①
M	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	①	①

نامطلوب نامطلوب نامطلوب نامطلوب

چون دو حرف نمی‌توانند نمایان گر یک رقم باشند، حالت‌های نامطلوب را حذف کردیم. Λ هم می‌تواند هر رقمی باشد که تاکنون استفاده نشده است.

بنابراین پاسخ‌های زیر به دست می‌آید:

- ۱) $N=2, T=8, M=7, G=1, O=0, \Lambda=3, 4, 5, 6, 9$
- ۲) $N=3, T=7, M=6, G=1, O=0, \Lambda=2, 4, 5, 8, 9$
- ۳) $N=4, T=6, M=5, G=1, O=0, \Lambda=2, 3, 7, 8, 9$
- ۴) $N=6, T=4, M=3, G=1, O=0, \Lambda=2, 5, 7, 8, 9$
- ۵) $N=7, T=3, M=2, G=1, O=0, \Lambda=4, 5, 6, 8, 9$

۱۲. تمام حالت‌هایی که ضرب ۳ عدد طبیعی برابر با ۷۵ می‌شود را می‌نویسیم.

از میان این حالت‌ها، تنها حالت مطلوب ۵، ۵، ۳ می‌باشد که کم‌ترین عدد بین آن‌ها ۳ است.

عدد اول	عدد دوم	عدد سوم	جمع
۱	۱	۷۵	۷۷
۱	۳	۲۵	۲۹
۱	۵	۱۵	۲۱
۳	۵	۵	۱۳

حالت مطلوب →

۵۰ تومانی	۱۰۰ تومانی	۲۰۰ تومانی
۱۰	۰	۰
۸	۱	۰
۶	۲	۰
۶	۰	۱
۴	۳	۰
۴	۱	۱
۲	۴	۰
۲	۲	۱
۲	۰	۲
۰	۵	۰
۰	۳	۱
۰	۱	۲

۱۳. ۲۴ حالت

ردیف	تفر اول	تفر دوم	تفر سوم	تفر چهارم
۱	سارا	مونا	رعنا	حُسنّا
۲	سارا	مونا	حُسنّا	رعنا
۳	سارا	رعنا	مونا	حُسنّا
۴	سارا	رعنا	حُسنّا	مونا
۵	سارا	حُسنّا	رعنا	مونا
۶	سارا	حُسنّا	مونا	رعنا
۷	مونا	رعنا	حُسنّا	سارا
۸	مونا	رعنا	سارا	حُسنّا
۹	مونا	حُسنّا	رعنا	سارا
۱۰	مونا	حُسنّا	سارا	رعنا
۱۱	مونا	سارا	رعنا	حُسنّا
۱۲	مونا	سارا	حُسنّا	رعنا
۱۳	رعنا	مونا	حُسنّا	سارا
۱۴	رعنا	مونا	سارا	حُسنّا
۱۵	رعنا	حُسنّا	مونا	سارا
۱۶	رعنا	حُسنّا	سارا	مونا
۱۷	رعنا	سارا	مونا	حُسنّا
۱۸	رعنا	سارا	حُسنّا	مونا
۱۹	حُسنّا	رعنا	سارا	مونا
۲۰	حُسنّا	رعنا	مونا	سارا
۲۱	حُسنّا	مونا	رعنا	سارا
۲۲	حُسنّا	مونا	سارا	رعنا
۲۳	حُسنّا	سارا	مونا	رعنا
۲۴	حُسنّا	سارا	رعنا	مونا



$$abcd \times 4 = dcba$$

۱۵.

بیش‌ترین مقدار برای a ، رقم ۲ است؛ زیرا اگر $a > 2$ باشد، چهار برابر عدد داده شده، ۵ رقمی می‌شود. a نمی‌تواند برابر با یک هم باشد؛ زیرا حاصل این ضرب باید زوج باشد. پس $a = 2$ است؛ یعنی رقم یکان حاصل ضرب $4 \times d$ باید برابر با ۲ شود. پس $d = 3$ یا $d = 8$ است، ولی $d = 3$ حالت نامطلوب است؛ زیرا ۴ برابر عددی که بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ است، بیش‌تر از ۸۰۰۰ می‌شود، پس $d = 8$.
 $2bc8 \times 4 = 8cb2$

اگر گسترده‌نویسی ضرب بالا را انجام دهیم، داریم:

$$(2000 + 100b + 10c + 8) \times 4 = 8000 + 100c + 10b + 2$$

$$39 = b + 3c = 6 + c$$

بنابراین:

$$abcd = 2178$$

پس $b = 1$ و $c = 7$ می‌باشد؛ یعنی:

۱۶. مقدار $N = 5$ داده شده است. بنابراین چون $N + N = D$ ، یعنی $D = 0$ می‌شود. از طرفی چون $E + A = E$ شده است و A نمی‌تواند صفر باشد (چون $D = 0$ است)، تنها راهی که ممکن است این حالت اتفاق بیفتد، آن است که حاصل جمع $L + R$ عددی دورقمی شود تا داشته باشیم $1 + E + A = E$. بنابراین $A = 9$ خواهد بود. حالا می‌توان نوشت $1 + 5 + C = R$ که حاصل حتماً باید عددی کم‌تر از ۱۰ شود (زیرا حاصل جمع داده‌شده عددی ۶ رقمی است). پس C دو مقدار ۱ یا ۲ را می‌تواند داشته باشد که به‌ازای آن $R = 7$ یا $R = 8$ می‌شود. با توجه به رابطه‌ی $O + O + 1 = R$ ، R باید حتماً عددی فرد باشد. بنابراین $R = 7$ و $C = 1$ هستند.

$$\begin{array}{r} 11 \quad 1 \\ \Delta EL \ SO\Delta \\ + 197 \ SO\Delta \\ \hline VEW97 = \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

که در رابطه‌ی بالا $S + S = 9$ شده است و امکان ندارد، مگر این‌که حاصل $1 + O + O$ عددی دورقمی شده باشد که البته یکان آن ۷ باشد. پس $O = 8$ و $S = 4$ خواهند بود. با توجه به دو رابطه‌ی $L + 7 = W$ و $E + 1 + 9 = E$ و همچنین رقم‌های ۲، ۳ و ۶ که هنوز استفاده نشده‌اند، به مقدارهای $L = 6$ ، $W = 3$ و $E = 2$ می‌رسیم و مسئله حل می‌شود.

۱۳. سهراب وقتی خط‌های دفترش را هفت تا هفت تا می‌شمارد، ۵ خط باقی می‌ماند، پس تعداد خط‌های دفتر او $7 + 5 = 12$ یا $19 = 2 \times 7 + 5$ یا $26 = 3 \times 7 + 5$ یا $33 = 4 \times 7 + 5$ و ... است. حالا باقی‌مانده‌ی تقسیم این اعداد را بر ۵ و ۳ به‌دست می‌آوریم. حالتی مطلوب است که باقی‌مانده‌ی تقسیم بر هر دوی این اعداد، برابر با ۲ شود:

تعداد خط‌های دفتر سهراب	باقی‌مانده بر ۳	باقی‌مانده بر ۵	
۱۲	۰	۲	→ نامطلوب
۱۹	۱	۴	→ نامطلوب
۲۶	۲	۱	→ نامطلوب
۳۳	۰	۳	→ نامطلوب
۴۰	۱	۰	→ نامطلوب
۴۷	۲	۲	→ مطلوب

پس تعداد خط‌های آن صفحه از کتاب سهراب ۴۷ تا است.

۱۴.

مجموع امتیازها	۱۰ امتیازی	۸ امتیازی	۶ امتیازی	۴ امتیازی	۲ امتیازی
۳۸	۳	۰	۰	۲	۰
۳۰	۱	۱	۱	۱	۱
۴۲	۴	۰	۰	۰	۱
۲۶	۰	۰	۳	۲	۰
۱۴	۰	۰	۱	۰	۴

طبق جدول بالا، بعضی از حالت‌هایی که آرش می‌تواند امتیازهای ۴۲، ۳۸، ۳۰، ۲۶ و ۱۴ را کسب کند، نشان داده‌ایم. ۵۸ امتیاز حالت نامطلوبی است؛ زیرا او با ۵ پرتاب، حداکثر ۵۰ امتیاز کسب می‌کند. ۲۳ امتیاز حالت نامطلوب است؛ زیرا هیچ ترکیبی از اعداد زوج، عدد فردی را تولید نمی‌کند. امتیازهای ۱۵ و ۳۱ نیز همین‌طور هستند. ۶ امتیاز نیز حالت نامطلوبی است؛ زیرا حداقل امتیاز با ۵ پرتاب ۲ امتیازی؛ ۱۰ امتیاز است.



فصل اول / راهبردهای حل مسئله

۱۷. ابتدا هریک از اعداد ۱۲ تا ۲۹ را در خودش ضرب کرده و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم و حالت‌هایی را که یک رقم دوبار تکرار شده باشد، حذف می‌کنیم.

سن	سن × سن	سن	سن × سن
۱۲	۱۴۴ نامطلوب	۲۱	۴۴۱ نامطلوب
۱۳	۱۶۹	۲۲	۴۸۴ نامطلوب
۱۴	۱۹۶	۲۳	۵۲۹
۱۵	۲۲۵ نامطلوب	۲۴	۵۷۶
۱۶	۲۵۶	۲۵	۶۲۵
۱۷	۲۸۹	۲۶	۶۷۶ نامطلوب
۱۸	۳۲۴	۲۷	۷۲۹
۱۹	۳۶۱	۲۸	۷۸۴
۲۰	۴۰۰ نامطلوب	۲۹	۸۴۱

حالا سه عددی که مجموع آن‌ها ۷۰ باشد و در ستون سن × سن این سه عدد، ارقام ۱ تا ۹ که فقط یک‌بار ظاهر شده باشند را به‌عنوان حالت مطلوب در نظر می‌گیریم که اعداد ۲۳، ۱۹ و ۲۸ هستند. بنابراین پویا ۲۸ سال دارد، پدرام ۱۹ ساله است و سن پیام ۲۳ سال است.

۱۸.

رتبه	سن	وزن	قد
۱	سارا	ناهد	طاهره
۲	طاهره	سارا	مریم
۳	مریم	طاهره	ناهد
۴	ناهد	مریم	سارا

۱۹. الف) اختلاف بین دو عدد ابتدایی این دنباله یک واحد است و اختلاف بین هر دو عدد پشت سرهم بعدی ۲ برابر اختلاف بین هر ۲ عدد متوالی قبلی است.

$$+1 \quad +2 \quad +4 \quad +8 \quad +16 \quad +32 \quad +64 \quad +128 \quad +256$$

$$۲, ۳, ۵, ۹, ۱۷, ۳۳, ۶۵, ۱۲۹, ۲۵۷, ۵۱۳$$

ب) اختلاف بین دو عدد ابتدایی این دنباله، ۴ واحد است و اختلاف

$$+4 \quad +8 \quad +16 \quad +32 \quad +64 \quad +128 \quad +256 \quad +512 \quad +1024$$

$$۱, ۵, ۱۳, ۲۹, ۶۱, ۱۲۵, ۲۵۳, ۵۰۹, ۱۰۲۱, ۲۰۴۵$$

ج) اختلاف دو عدد نخست ۳ واحد است و اختلاف بین هر دو عدد متوالی بعدی ۳ برابر اختلاف بین هر دو عدد متوالی قبلی است.

$$+3 \quad +9 \quad +27 \quad +81 \quad +243 \quad +729 \quad +2187 \quad +6561$$

$$۱, ۴, ۱۳, ۴۰, ۱۲۱, ۳۶۴, ۱۰۹۳, ۳۲۸۰, ۹۸۴۱$$

د) اختلاف بین جملات دنباله اعداد فرد متوالی است که از ۳ شروع شده است.

$$+3 \quad +5 \quad +7 \quad +9 \quad +11 \quad +13 \quad +15$$

$$۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶, ۳۷, ۵۰, ۶۵$$

ه) از عدد ۶۴ شروع شده است و هر عدد نصف عدد قبلی خود است.

$$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$$

$$۶۴, ۳۲, ۱۶, ۸, ۴, ۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$$

و) عددهای دوم، چهارم، ششم و ... دو برابر عدد قبلی خود می‌باشند و عددهای سوم، پنجم، هفتم و ... یک واحد از عدد قبلی خود کم‌تر هستند.

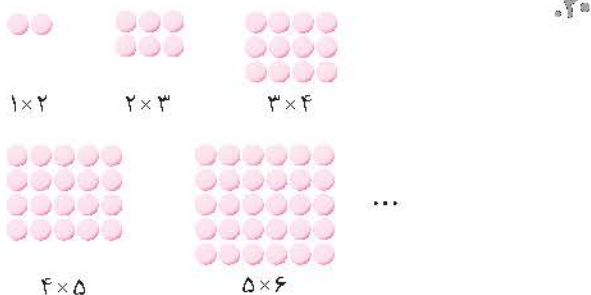
$$\times 2 \quad -1 \quad \times 2 \quad -1 \quad \times 2 \quad -1 \quad \times 2 \quad -1 \quad \times 2$$

$$۵, ۱۰, ۹, ۱۸, ۱۷, ۳۴, ۳۳, ۶۶, ۶۵, ۱۳۰$$

ز) عدد دوم، ۲ برابر عدد اول، عدد سوم، ۳ برابر عدد دوم، عدد چهارم، ۴ برابر عدد سوم و ... می‌باشند.

$$\times 2 \quad \times 3 \quad \times 4 \quad \times 5 \quad \times 6 \quad \times 7 \quad \times 8 \quad \times 9$$

$$۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, ۷۲۰, ۵۰۴۰, ۴۰۳۲۰, ۳۶۲۸۸۰$$



در شکل سی‌وچهارم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$۳۴ \times ۳۵ = ۱۱۹۰ \text{ دایره}$$