



فصل اول

عددهای صحیح و گویا



مجموعه اعداد طبیعی: اعداد طبیعی شامل اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... می‌شوند.

مجموعه اعداد صحیح: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$

نکته

در سال‌های قبل، با اعداد صحیح آشنا شدیم. این مجموعه، شامل اعداد مثبت (همان اعداد طبیعی)، اعداد منفی و عدد صفر می‌باشد.



- ۱ عدد صفر، نه منفی است و نه مثبت؛ در واقع عدد صفر علامت ندارد.
- ۲ تعداد اعداد صحیح بی‌شمار است، یعنی هرگز نوشتن آن‌ها تمام نمی‌شود.
- ۳ اعداد منفی، هرچه قدر مقدارشان بیش‌تر می‌شود ارزش کم‌تری پیدا می‌کنند.

$$-97 < -17$$

$$-1020 < -55$$

تمام اعداد منفی، از صفر کوچک‌تر هستند و صفر هم از اعداد مثبت کوچک‌تر است.

اعداد مثبت $< 0 <$ اعداد منفی

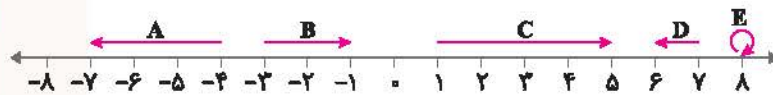
$$73 = +73$$

اگر برای عددی، علامت ننویسیم، علامت آن مثبت است.

مثال ۱ روی محور زیر، هر یک از اعداد مشخص شده، چه عددی را نمایش می‌دهند؟



مثال ۲ هر یک از حرکت‌های زیر، چه عددی را نمایش می‌دهند؟



A = -3 واحد به سمت منفی‌ها

B = +2 واحد به سمت مثبت‌ها

C = +4 واحد به سمت مثبت‌ها

D = -1 یک واحد به سمت منفی‌ها

E = بدون جابه‌جایی

قرینه یک عدد، در قرینه هر عدد، علامت آن عدد عوض می‌شود. تنها عددی که قرینه آن برابر با خودش است، عدد صفر است.

الف) $+3 \rightarrow$ قرینه -3

ب) $-7 \rightarrow$ قرینه $+7$

ج) $0 \rightarrow$ قرینه 0

تعیین علامت یک عدد: گاهی برای یک عدد، بیش از یک علامت نوشته شده است. برای انجام محاسبات، حتماً باید ابتدا **تعیین علامت** کنیم. برای تعیین علامت یک عدد، فقط **علامت‌های منفی** را شمارش می‌کنیم. اگر تعداد آن‌ها **فرد** بود، حاصل **منفی** و اگر تعداد آن‌ها **زوج** بود، حاصل **مثبت** است.

مثال ۳ هر یک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

- (الف) $3 \xrightarrow{2 \text{ علامت منفی}} -3$ (ب) $4 \xrightarrow{\text{صفر علامت منفی}} +4$
 (ج) $-5 \xrightarrow{3 \text{ علامت منفی}} -(-(-5))$ (د) $-8 \xrightarrow{\text{یک علامت منفی}} -(+8)$

جمع اعداد صحیح: در جمع دو عدد صحیح، اگر هر دو، علامت **یکسان** داشتند، مقدار آن‌ها را با هم **جمع** می‌کنیم و همان علامت را برای حاصل قرار می‌دهیم؛ مانند:

(الف) $-8 - 5 = -13$ (ب) $+7 + 9 = +16$

ولی اگر دو عدد، علامت **متفاوتی** داشتند، مقدارها را از هم **کم** می‌کنیم و علامت عددی را که مقدار **بزرگ‌تری** دارد، قرار می‌دهیم؛ مانند:

(الف) $-6 + 9 = 3$ (ب) $-17 + 11 = -6$

نکته

۱ اگر عددی، چند علامت داشته ابتدا آن را تعیین علامت می‌کنیم؛ مانند:

(الف) $+5 - (-4) = +5 + 4 = +9$ (ب) $-7 + (-2) = -7 - 2 = -9$ (ج) $-(-8) - (-3) = +8 + 3 = +11$

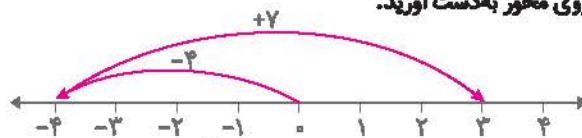
۲ چنانچه بخوایم چندین عدد را با هم جمع و تفریق کنیم، از **سمت چپ** مرحله به مرحله محاسبه را انجام می‌دهیم؛ مانند:

$\frac{-6+8}{+2} - 9 - 10 + 15 = \frac{+2-9}{-7} - 10 + 15 = \frac{-7-10}{-17} + 15 = -17 + 15 = -2$

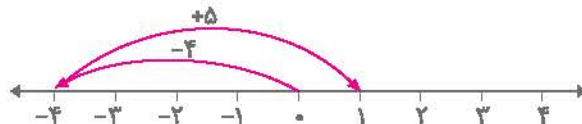
نمایش جمع اعداد صحیح روی محور: هر گاه بخوایم جمع دو عدد صحیح را روی محور نمایش دهیم، ابتدا از **صفر** به اندازه **عدد اول** حرکت می‌کنیم و سپس از نقطه‌ای که به آن رسیده‌ایم، به اندازه **عدد دوم** حرکت می‌کنیم. (در صورت نیاز، ابتدا اعداد را تعیین علامت می‌کنیم.)

مثال ۴ حاصل هر عبارت را روی محور به دست آورید.

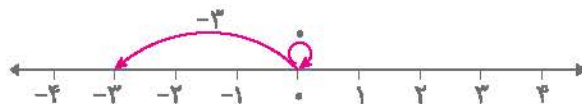
(الف) $-4 + 7$



(ب) $-(-4) - (-5) = -4 + 5$



(ج) $0 - (+3) = 0 - 3$



نکته

جمع هر عدد و قرینه‌اش برابر با **صفر** می‌شود؛ مانند:

(الف) $-4 + 4 = 0$ (ب) $-6 + (+6) = -6 + 6 = 0$

جمع با استفاده از ارزش مکانی: یکی از روش‌های جمع دو عدد، استفاده از جدول ارزش مکانی است. در این روش، ابتدا هر رقم را با رقم متناظر خودش جمع می‌کنیم و سپس حاصل عبارت‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۵ حاصل جمع‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش مکانی انجام دهید.

الف) $-۳۹۲ - ۱۰۵ =$

ب) $-۴۵۶ + ۹۷ =$

دقت کنید عددی مانند -۳۹۲ را می‌توانیم به صورت $-۳۰۰ - ۹۰ - ۲$ بنویسیم.

	یکان	دهگان	صدگان
الف)	-۲	-۹۰	-۳۰۰
	-۵	۰	-۱۰۰
	-۷	-۹۰	-۴۰۰
			$-۴۰۰ - ۹۰ - ۷ = -۴۹۷$
			-۴۹۰

	یکان	دهگان	صدگان
ب)	-۶	-۵۰	-۴۰۰
	$+۷$	$+۹۰$	۰
	$+۱$	$+۴۰$	-۴۰۰
			$-۴۰۰ + ۴۰ + ۱ = -۳۵۹$
			-۳۶۰

ضرب علامت‌ها: برای ضرب دو علامت، از رابطه‌های روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

ضرب اعداد صحیح: برای ضرب دو عدد صحیح، ابتدا علامت‌های آن‌ها را ضرب می‌کنیم و سپس خود اعداد را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۶ حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-۷) \times (-۳) = \overset{+}{-} \times \overset{+}{-} = \overset{+}{+} + ۲۱$

ب) $-۶ \times (+۴) = \overset{-}{-} \times \overset{+}{+} = \overset{-}{-} - ۲۴$

نکته

۱) در صورتی که بین یک عدد و یک پرانتز، هیچ علامتی وجود نداشته در واقع علامت بین آن‌ها ضرب است.

$-۸(-۳) = -۸ \times (-۳) = \overset{-}{-} \times \overset{-}{-} = \overset{+}{+} + ۲۴$

۲) برای ضرب چند عدد صحیح هم می‌توانیم، ابتدا کُل علامت‌ها را در هم ضرب کرده و سپس اعداد را در هم ضرب کنیم.

مثال ۷ حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-۷ \times (-۲) \times (+۴) = \overset{-}{-} \times \overset{-}{-} \times \overset{+}{+} = \overset{+}{+} + ۵۶$

ب) $-۶ \times (-۵) \times (-۹) = \overset{-}{-} \times \overset{-}{-} \times \overset{-}{-} = \overset{-}{-} - ۲۷۰$

تقسیم اعداد صحیح: در تقسیم دو عدد صحیح، ابتدا علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و سپس عدد اول را بر عدد دوم تقسیم می‌کنیم؛ مانند:

الف) $-۸ \div (+۲) = \overset{-}{-} \div \overset{+}{+} = \overset{-}{-} - ۴$

ب) $-۲۰ \div -۱۰ = \overset{-}{-} \div \overset{-}{-} = \overset{+}{+} + ۲$

اولویت در محاسبات: در محاسبات ریاضی، اولویت‌ها به صورت زیر است:

- ۱) اگر پرانتز داشته باشیم، باید ابتدا حاصل پرانتز را حساب کنیم. (قبل از محاسبه، اعداد تواندار و رادیکالی را به عدد معمولی تبدیل می‌کنیم.)
- ۲) در هنگام محاسبه (چه درون پرانتز و چه خارج از پرانتز) همواره ابتدا از سمت چپ، ضرب‌ها و تقسیم‌ها را انجام می‌دهیم (دقت کنید هر کدام سمت چپ بود، آن را زودتر انجام می‌دهیم).

$-۵۰ \div (-۵) \times ۳ = \overset{+}{+} \times \overset{+}{+} = \overset{+}{+} + ۳۰$

۳) پس از انجام ضرب‌ها و تقسیم‌ها، جمع‌ها و تفریق‌ها را انجام می‌دهیم.

مثال ۸ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) ابتدا ضرب و تقسیم $\rightarrow 8 - 3 \times (-2) + 20 = \frac{8-3 \times (-2)}{+6} + \frac{20}{+4} = \frac{8+6}{+14} + 20 = +34$

ب) $-8 \times (-2) + 12 \div (-3) - 4 \times (-2) \times 5 = \frac{+16}{+12} - \frac{4}{-4} + \frac{40}{+40} = +52$

ج) $-8 \div (-2) \times (+3) - 5 \div 4 \times (-8) - 6 \div 6 \times (-3) \div (-9) = \frac{+12}{+4} - \frac{5}{-4} - \frac{32}{-4} + \frac{9}{+2} = +12 - 5 - 32 - 6 + 2 = -29$

مثال ۹ حاصل هر عبارت را محاسبه کنید.

الف) $+10 - 10 \times (+12 - 24 \div (-2)) = +10 - 10 \times (+24) = +10 - 240 = -230$

ابتدا داخل هر پرانتز را حساب می کنیم:

ب) $7 - (-6) - 11 \times (-10) - 5 \times 2 = 7 - (-6) - 11 \times 0 = 7 - (-6) = +13$

یادآوری مفهوم توان: هرگاه عددی به توان برسد، باید آن را به تعداد توانش، در خودش ضرب کنیم؛ مانند:

الف) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = +8$

ب) $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$

نکته

اگر عدد داخل پرانتز **نبود** علامت آن را فقط **یک بار** حساب می کنیم؛ مانند:

الف) $-2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8$

ب) $-3^2 = -3 \times 3 = -9$



مثال ۱۰ حاصل عبارت مقابل را محاسبه کنید.

$-3^2 - 2 \times (40 \div (-2)^2 + 10) + 5^2 =$

$-3^2 = -3 \times 3 = -9$, $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$

ابتدا اعداد توان دار را به صورت عدد معمولی می نویسیم.

$\Rightarrow -9 - 2 \times (\frac{40}{+4} + 10) + 25 = -9 - 2 \times (10 + 10) + 25 = -9 - 40 + 25 = -24$

نکته

اگر در یک عبارت ریاضی، پرانتزها به صورت تودرتو بودند، برای انجام محاسبات از **داخلی ترین** پرانتز شروع می کنیم.



مثال ۱۱ حاصل عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $12 - (5 - (6 - 7) - 3) = 12 - (5 - \frac{(6-7)}{-1} - 3) = 12 - (5 - \frac{-1}{+1} - 3) = 12 - (5 + 1 - 3) = 12 - \frac{(+3)}{-3} = 12 - 3 = 9$

ب) $40 - (18 - (12 - 10)) = 40 - (18 - \frac{(12-10)}{+2}) = 40 - (18 - \frac{+2}{-2}) = 40 - \frac{(18-2)}{+16} = 40 - \frac{+16}{-16} = 40 - 16 = +24$

نکته

اگر کسری داشتیم که در صورت و مخرج آن عبارتهای عدد صحیح بود حاصل صورت و مخرج را جداگانه محاسبه می کنیم و در نهایت در صورت امکان، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم. (اگر امکان تقسیم کردن **نبود** پاسخ را به همان صورت

کسری می نویسیم.)



$$\frac{24 - 24(8 - 36 \div (-2) - 16)}{12 - 2(8 - (5 - 9) - 10)}$$

مثال ۱۲ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

صورت حاصل صورت: $24 - 24 \times (8 - 36 \div (-2) - 16) = 24 - 24 \times (8 + 18 - 16) = 24 - 24 \times (10) = 24 - 240 = -216$ (۱)

مخرج حاصل مخرج: $12 - 2 \times (8 - (5 - 9) - 10) = 12 - 2 \times (8 - (-4) - 10) = 12 - 2 \times (8 + 4 - 10) = 12 - 2 \times (2) = 12 - 4 = +8$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{-216}{+8} = -27 + (+8) = -27$

مثال ۱۳ دمای هوای تهران ۱۱ درجه بالای صفر است. دمای هوای یاسوج ۱۸ درجه از آن سردتر است. اگر دمای هوای گرمسار، ۲۰ درجه از میانگین دمای این دو شهر، گرم‌تر باشد، دمای هوای گرمسار چه قدر است؟

دمای یاسوج = $+11 - 18 = -7$

میانگین دمای تهران و یاسوج = $\frac{(+11) + (-7)}{2} = \frac{+11 - 7}{2} = \frac{+4}{2} = +2$

دمای گرمسار = $(+2) + 20 = +22$

مثال ۱۴ در میان گزینه‌های داده شده، اعداد طبیعی را مشخص کنید.

الف) عدد صحیح -11 $-\sqrt{121}$

ب) عدد طبیعی $+2$ $\frac{-\sqrt{64}}{-\sqrt{16}} = \frac{-8}{-4} = +2$

ج) عدد طبیعی $5^3 + 200 = 125 + 200 = 325$ $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

محدوده اعداد: برای نمایش **محدوده اعداد**، از علامت‌های $<$ و \leq استفاده می‌کنیم. عددی که کنار $<$ می‌آید، جزو محدوده **نیست**، ولی عددی که کنار \leq می‌آید، جزو محدوده است.

مثال ۱۵ محدوده اعداد $9 \leq x < 8$ شامل چه اعدادی می‌شود؟ این محدوده، شامل اعداد -9 تا کوچک‌تر از $+8$ می‌شود. (دقت کنید

-9 جزو محدوده است، ولی $+8$ جزو محدوده **نیست**.)

مثال ۱۶ محدوده اعداد $5 < x \leq 13$ شامل چه اعدادی می‌شود؟ این محدوده، شامل اعداد بزرگ‌تر از -5 تا عدد $+13$ است. (دقت

کنید -5 جزو محدوده **نیست**، ولی $+13$ جزو محدوده است.)

مثال ۱۷ محدوده اعداد $20 \leq x \leq 10$ شامل چه اعدادی می‌شود؟ این محدوده، شامل اعداد -20 تا $+10$ است (هم -20 و هم $+10$ جزو

محدوده هستند.)

مثال ۱۸ اعداد صحیح هر محدوده را بنویسید.

الف) $-17 < x \leq 11 = -16, -15, -14, \dots, +10, +11$

ب) $-18 < x < 19 = -17, -16, -15, \dots, +17, +18$

ج) $+13 \leq x \leq 100 = +13, +14, +15, \dots, +99, +100$

محاسبه ساده‌تر عبارت‌ها

در جمع اعداد صحیح، می‌توانیم **اعداد قرینه** را با هم **حذف** کنیم تا حاصل عبارت راحت‌تر به دست آید.

الف) $-37 + 18 + 24 - 18 + 15 + 37 = +24 + 15 = +39$

مثال ۱۹ حاصل عبارت‌های مقابل را محاسبه کنید.

ب) $-40 \times 3 + 12 - 24 + (-3) - 8 + 120 = -120 + 12 + 120 - 8 - 24 + 3 = +12$

ج) $-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = -5 + 0 = -5$

دنباله اعداد منظم: به رشته‌ای از اعدادی که فاصله بین آن‌ها ثابت است، دنباله اعداد منظم یا تصاعد حسابی می‌گوییم؛ مانند:

$$1, 2, 3, 4, \dots, 100 \quad , \quad 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 88$$

فانون گاوس

یکی از نوایغ ریاضی به نام گاوس روش جالبی برای جمع اعداد منظم کشف کرده است؛ به این صورت که عدد اول را با عدد آخر جمع می‌کند و عدد دوم را با عدد یکی مانده به آخر جمع می‌کند و ... در این صورت جمع هر دو عدد، یک عدد یکسان ایجاد می‌کند.

مثال ۲۰ جمع اعداد ۱ تا ۵۰ را محاسبه کنید.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 46 + 47 + 48 + 49 + 50$$

مشاهده می‌کنید، جمع هر دو عدد برابر با ۵۱ شده است. از آن‌جا که ۵۰ عدد داشتیم و آن‌ها را ۲ به ۲ جمع کردیم، پس اکنون ۲۵ عدد ۵۱ داریم:

$$\underbrace{(51 + 51 + 51 + \dots + 51)}_{25 \text{ بار}} = 25 \times 51 = 1275$$

مثال ۲۱ جمع اعداد ۱ تا ۵۰۰ را محاسبه کنید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 498 + 499 + 500$$

چون ۵۰۰ عدد داشتیم و آن‌ها را ۲ به ۲ جمع کرده‌ایم، پس اکنون ۲۵۰ عدد ۵۰۱ داریم.

مثال ۲۲ یک ملخ روی نقطه صفر قرار دارد. این ملخ در پرش اول، ۱۰ واحد به راست و در پرش دوم، ۵ واحد به چپ می‌پرد. در پرش سوم، ۱۰ واحد به راست و در پرش چهارم، ۵ واحد به چپ می‌پرد. اگر به همین صورت ادامه دهد، پس از ۱۸ پرش، به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

پرش اول	پرش دوم	پرش سوم	پرش چهارم	پرش پنجم	پرش هفدهم
$+10$	-5	$+10$	-5	$+10$	-5
\hline	\hline	\hline	\hline	\hline	\hline

مشاهده می‌کنید، جمع هر دو پرش، برابر با ۵+ است و چون در کل ۱۸ پرش انجام داده و ما آن‌ها را ۲ به ۲ جمع کرده‌ایم، پس در کل ۹ عدد ۵+ داریم:

$$9 \times (+5) = +45$$

اعداد گویا: هرگاه بتوانیم یک عدد را به صورت عدد کسری نمایش دهیم، می‌گوییم آن عدد گویا است، به شرط آن که صورت و مخرج کسر، هر دو عدد صحیح باشند و مخرج کسر صفر نباشد. (صورت کسر می‌تواند صفر باشد). مانند:

گویا $\frac{3}{2}$ (الف) گویا $\frac{-5}{-2}$ (ب) گویا $\frac{-4}{-3}$ (ج) گویا $\frac{0}{6}$ (د)

گویا نیست (صورت اعشاری است) $\frac{-2}{5}$ (و) گویا نیست (مخرج صفر است) $\frac{9}{0}$ (ه)

نکته

۱) همه اعداد صحیح، گویا هستند زیرا می‌توانیم به آن‌ها مخرج یک بدسیم.

(الف) $-5 = \frac{-5}{1}$

(ب) $+3 = \frac{+3}{1}$

(ج) $0 = \frac{0}{1}$

۲) اگر مخرج یک کسر، صفر باشد، می‌گوییم تعریف نشده است؛ مانند: $\frac{5}{0}$

نمایش اعداد گویا روی محور: در دوره ابتدایی، نمایش اعداد گویا را روی محور آموختیم.



مثال ۲۲ اعداد $\frac{2}{5}$ ، $1\frac{1}{4}$ و $2\frac{2}{3}$ را روی محور نمایش دهید.



نکته

در صورتی که عدد گویا دارای علامت منفی بود، آن را در قسمت اعداد منفی نمایش می‌دهیم.



مثال ۲۳ اعداد $-\frac{4}{5}$ ، $-2\frac{3}{4}$ و $-3\frac{1}{5}$ را روی محور نمایش دهید.



تبدیل اعداد مخلوط به کسر: برای تبدیل اعداد مخلوط به کسر، کافی است قسمت صحیح عدد را در مخرج ضرب و با صورت جمع کنیم. برای اعداد مخلوط منفی، پس از تبدیل به کسر، علامت منفی را برای آن‌ها قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$\text{الف) } 2\frac{1}{5} = \frac{2 \times 5 + 1}{5} = \frac{11}{5} \qquad \text{ب) } -3\frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 + 1}{4} = \frac{13}{4} = -\frac{13}{4}$$

نکته

اگر یک کسر دارای علامت منفی باشد، می‌توانیم آن را برای صورت یا مخرج فرض کنیم، یا حتی علامت منفی را در کنار

کسر بنویسیم؛ مانند:

$$\text{الف) } \frac{-5}{3} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \qquad \text{ب) } -2\frac{3}{7} = \frac{-14}{7} = \frac{14}{-7} = -\frac{14}{7}$$



تبدیل عدد اعشاری به کسر: کافی است، عدد اعشاری را بدون ممیز در صورت بنویسیم و سپس در مخرج کسر، اعدادی مثل ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... را بنویسیم (تعداد صفرها به اندازه تعداد ممیزهای عدد اعشاری خواهد بود)؛ مانند:

$$\text{الف) } -2/4 = \frac{-24}{10} \qquad \text{ب) } -3/03 = \frac{-303}{100}$$

قرینه یک عدد گویا (یا اعشاری): برای نوشتن قرینه یک عدد گویا (یا اعشاری)، کافی است علامت آن را عوض کنیم، مانند:

$$\text{الف) } -2\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{قرینه}} +2\frac{1}{4} \qquad \text{ب) } +3/6 \xrightarrow{\text{قرینه}} -3/6 \qquad \text{ج) } \frac{-5}{7} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{+5}{7}$$

تعیین علامت یک عدد گویا

گاهی یک عدد گویا، چندین علامت دارد. برای تعیین علامت نهایی آن، کافی است فقط علامت‌های منفی را شمارش کنیم؛ اگر تعداد آن‌ها فرد بود، علامت نهایی منفی و اگر تعداد آن‌ها زوج بود، علامت نهایی مثبت است؛ مانند:

$$\text{الف) } \frac{-2}{+3} \xrightarrow{\text{علامت منفی}} \frac{+2}{3} \qquad \text{ب) } \frac{-3}{-5} \xrightarrow{\text{علامت منفی}} \frac{3}{5} \qquad \text{ج) } \frac{-4}{-7} \xrightarrow{\text{علامت منفی}} \frac{+4}{7}$$

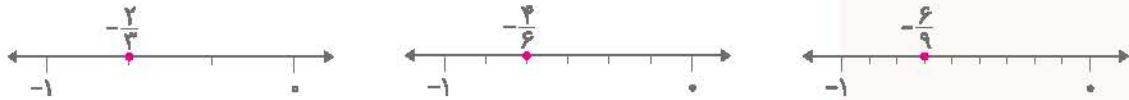
کسرهای مساوی: در سال‌های قبل آموختیم که اگر صورت و مخرج یک کسر را در یک عدد مساوی ضرب کنیم، کسر جدید و کسر اول مساوی هستند. تساوی در کسرهای علامت‌دار هم، به همین صورت است؛ مانند:

$$\text{الف) } \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10} \qquad \frac{4}{10} \times \frac{3}{3} = \frac{12}{30} \qquad \text{ب) } \frac{-5}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{-10}{6} \qquad \frac{-10}{6} \times \frac{4}{4} = \frac{-40}{24} \qquad \frac{-40}{24} \times \frac{(-3)}{(-3)} = \frac{+120}{-72}$$

مثال ۲۵ دو کسر مساوی $\frac{-۲}{۳}$ بنویسید و روی شکل نشان دهید که با هم مساوی اند.

کسر اول $\frac{-۲}{۳} \times \frac{۲}{۲} = \frac{-۴}{۶}$

کسر دوم $\frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{۳} = \frac{-۶}{۹}$



مقایسه اعداد گویا: برای مقایسه اعداد گویا، ابتدا قسمت صحیح آن‌ها را با هم و سپس قسمت کسری (اعشاری) آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. (یادآوری: در اعداد منفی، هرچه قدر مقدار عدد بزرگ‌تر باشد، ارزش آن کم‌تر است.)

نکته

در مقایسه دو کسر، مانند $\frac{-۲}{۷}$ و $\frac{-۴}{۱۰}$ ، می‌توانیم **مخرج مشترک** بگیریم:

$$\frac{-۲}{۷} = \frac{-۲۸}{۷۰} \quad , \quad \frac{-۴}{۱۰} = \frac{-۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{-۲۸}{۷۰} > \frac{-۴۰}{۱۰۰}$$

مثال ۲۶ هر یک از اعداد داده‌شده را با هم مقایسه کنید.

الف) $-۳\frac{۲}{۵} \square -۲\frac{۱}{۷} \Rightarrow -۳\frac{۲}{۵} < -۲\frac{۱}{۷}$

ب) اعداد مثبت از اعداد منفی بزرگ‌تر هستند. $-۱۰\frac{۱}{۴} \square \frac{۲}{۵} \Rightarrow -۱۰\frac{۱}{۴} < \frac{۲}{۵}$

ج) $-۳\frac{۲}{۷} \square -۳\frac{۲}{۳} \Rightarrow -۳\frac{۲}{۷} > -۳\frac{۲}{۳}$

د) $-۶\frac{۱}{۴} \square -\frac{۳۰}{۴} \Rightarrow -۶\frac{۱}{۴} > -\frac{۳۰}{۴}$

ه) $-۲\frac{۱}{۴} \square -\frac{۱۷}{۷} \Rightarrow -۲\frac{۱}{۴} > -\frac{۱۷}{۷}$

$-۲\frac{۱}{۷}, -۲\frac{۳}{۵}, -۲\frac{۶}{۷}, -۲\frac{۹}{۱۰}$

مثال ۲۷ بین ۲- و ۳-، چهار عدد مخلوط بنویسید.

مثال ۲۸ سه کسر علامت‌دار بنویسید که در محدوده $۰ < x \leq ۱$ قرار بگیرند.

$\frac{۱}{۱}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۷}$

در این جا خود ۱- هم جزو محدوده است، پس باید اعدادی بین ۱- و صفر بنویسیم.

مثال ۲۹ پنج عدد بنویسید که در محدوده $۱ < x \leq ۲$ قرار بگیرند.

$-۱\frac{۱}{۵}, -۱۰۰, \frac{۳}{۵}, +۱$

باید اعدادی بنویسیم که بین ۲- و ۱+ هستند. (خود ۱+ جزو محدوده است.)

ساده کردن کسرها: برای ساده کردن یک کسر، کافی است **صورت و مخرج** آن را بر یک عدد مساوی **تقسیم** کنیم. (این کار را می‌توانیم در چند مرحله انجام دهیم.)

مثال ۳۰ هر یک از کسرهای داده‌شده را ساده کنید.

الف) $\frac{-۳۶}{-۲۰} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{۳۶}{۲۰} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱۸}{۱۰} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۹}{۵}$

ب) $\frac{-۴}{۳} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{۴}{۳} \xrightarrow{\div ۳} \frac{۴}{۹}$

تذکره: می‌توانیم ابتدا **تعیین علامت** کنیم و بعد کسر را ساده کنیم.

مثال ۳۱ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{-72}{-48} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{-72}{48} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

نکته

در صورتی که در صورت و مخرج یک کسر، همه اعداد در هم ضرب شده باشند می‌توانیم آن را ساده کنیم. برای این کار ابتدا با شمارش علامت‌های منفی، تعیین علامت کرده سپس اعداد را بدون علامت می‌نویسیم و آن‌ها را ساده می‌کنیم.

مثال ۳۲ هر یک از عبارتهای داده شده را ساده کنید.

الف) $\frac{-24 \times (+46)}{-32 \times (-23)} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{24 \times 46}{32 \times 23} = \frac{3}{2}$

ب) $\frac{(-56) \times (40) \times (-80)}{(-30) \times (-64)} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{56 \times 40 \times 80}{30 \times 64} = \frac{280}{3}$

پیدا کردن مقدار مجهول در تساوی‌ها: گاهی در تساوی بین دو کسر، مقدار یکی از قسمت‌ها مجهول است. برای پیدا کردن مقدار مجهول، می‌توانیم از روشی که در جدول تناسب استفاده می‌کردیم، کمک بگیریم، یعنی به صورت ضربی دو عدد معلوم را در هم ضرب کنیم و در صورت بنویسیم و عددی را که در X ضرب می‌شود، در مخرج بنویسیم و آن‌ها را ساده کنیم.

$$\frac{56}{35} = \frac{x}{65} \Rightarrow x = \frac{56 \times 65}{35} = 104$$

مثال ۳۳ مقدار x را در عبارت مقابل به دست آورید.

تذکره:

در صورت داشتن علامت منفی در کنار کسرها، می‌توانیم علامت منفی را برای عددی که در صورت یا مخرج x قرار دارد فرض کنیم.

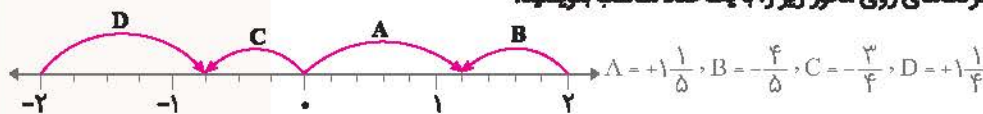
مثال ۳۴ مقدار x را در عبارتهای زیر به دست آورید.

الف) $\frac{24}{x} = \frac{27}{36} \Rightarrow \frac{24}{x} = \frac{-27}{36} \Rightarrow x = \frac{-24 \times 36}{-27} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x = \frac{24 \times 36}{27} = 32$

ب) $\frac{x}{18} = \frac{-45}{-81} \Rightarrow \frac{x}{-18} = \frac{-45}{-81} \Rightarrow x = \frac{(-45) \times (-18)}{-81} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x = \frac{45 \times 18}{81} = -10$

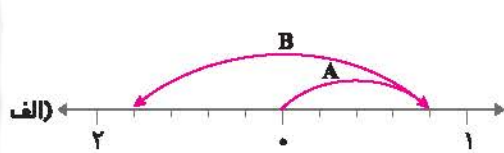
حرکت روی محور: برخی حرکتهای روی محور را با اعداد صحیح نمی‌توان نشان داد، بلکه برای بیان کردن آن‌ها باید از اعداد گویا استفاده کرد. (حرکت به سمت راست، علامت مثبت و حرکت به سمت چپ، علامت منفی دارد.)

مثال ۳۵ هر یک از حرکتهای روی محور زیر را با یک عدد مناسب بنویسید.



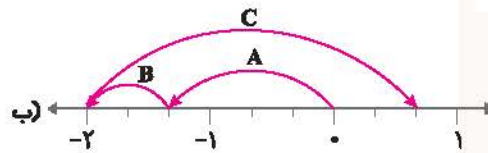
مجموع حرکتهای متوالی: برای دو یا چند حرکت پشت سر هم، می‌توان یک جمع نوشت. کافی است اندازه هر حرکت را بنویسیم سپس بین آن‌ها علامت جمع قرار دهیم.

مثال ۳۶ برای هر یک از شکل‌های زیر، یک جمع بنویسید.



$$A = +\frac{4}{5}, B = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$$

تبدیل تفریق به جمع: برای تبدیل تفریق دو کسر، کافی است که کسر دوم را به همراه علامت منفی در پرانتز بنویسیم و بین دو پرانتز، علامت جمع قرار دهیم.



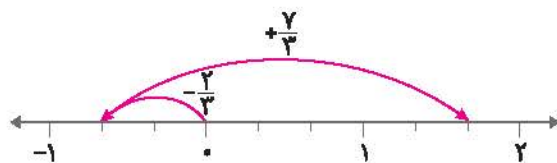
$$A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)$$

مثال ۳۷ تفریق‌های کسری زیر را به جمع تبدیل کنید.

(الف) $\frac{8}{9} - \frac{12}{3} = \frac{8}{9} + \left(-\frac{12}{3}\right)$

(ب) $\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{2}\right) = \frac{3}{5} + \left(-\left(-\frac{4}{2}\right)\right) = \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{2}\right)$

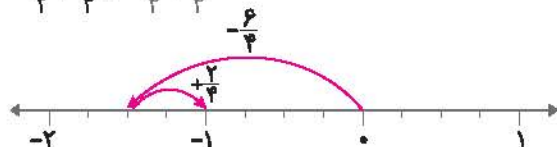
نمایش جمع روی محور: برای نمایش جمع، ابتدا از **صفر** به اندازه **عدد اول** حرکت می‌کنیم و سپس از **محل جدید** به اندازه **عدد دوم** حرکت می‌کنیم.



مثال ۳۸ حاصل جمع $-\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$ را روی محور نمایش دهید.

تذکره: در صورت نیاز، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

(الف) $-\frac{2}{2} + \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4}$

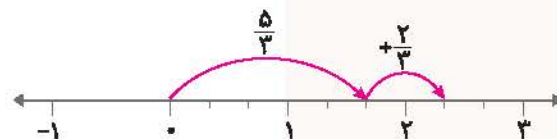
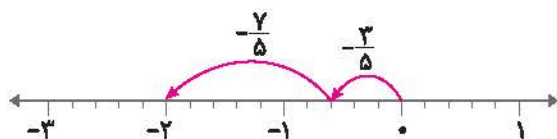


نمایش تفریق: برای نمایش تفریق روی محور، ابتدا آن را به **جمع** تبدیل می‌کنیم، سپس آن را نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۹ حاصل تفریق‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

(الف) $\frac{3}{5} - \frac{7}{5} = \frac{3}{5} + \left(-\frac{7}{5}\right)$

(ب) $\frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \left(-\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)$



محاسبه جمع و تفریق کسرها: برای جمع و تفریق دو کسر، ابتدا **مخرج مشترک** می‌گیریم، سپس صورت آن‌ها را با هم جمع و تفریق می‌کنیم. برای انجام محاسبات ساده‌تر، موارد زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) اگر کسری چند علامت داشت، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

(۲) علامت هر کسر را برای صورت آن کسر در نظر می‌گیریم و مخرج‌ها را همواره مثبت فرض می‌کنیم.



مثال ۲۱ حاصل عبارت‌های مقابل را به دست آورید.

الف) $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{-3-2}{8} = \frac{-5}{8}$

ب) $\frac{2}{7} - \left(\frac{-9}{7}\right) = \frac{2}{7} + \frac{9}{7} = \frac{2+9}{7} = \frac{11}{7}$

ج) $\left(\frac{3}{-11}\right) - \left(\frac{-5}{+11}\right) = \frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}$

د) $\left(\frac{-4}{5}\right) + \left(\frac{3}{10}\right) = \frac{-4}{5} + \frac{3}{10}$ مخرج مشترک $\rightarrow \frac{-8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{-8+3}{10} = \frac{-5}{10}$

ه) $\frac{5}{6} - \left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ مخرج مشترک $\rightarrow \frac{20}{24} + \frac{21}{24} = \frac{20+21}{24} = \frac{41}{24}$

جمع و تفریق یک عدد صحیح و یک کسر: در این نوع مسائل، دو حالت پیش می‌آید:

(۱) اگر هر دو هم‌علامت بودند، آن‌ها را با همان علامت به صورت **عدد مخلوط** می‌نویسیم.

مثال ۲۲ حاصل عبارت‌های مقابل را بنویسید. الف) $2 - \frac{3}{5} = 2 - \frac{3}{5}$ ب) $4 + \frac{3}{8} = 4 + \frac{3}{8}$ ج) $\frac{3}{5} - 8 = -8 + \frac{3}{5}$

(۲) اگر هر دو هم‌علامت نبودند، از عدد صحیح یک واحد کم می‌کنیم و آن را به صورت عدد مخلوط می‌نویسیم، سپس قسمت‌های کسری را با هم جمع و تفریق می‌کنیم و حاصل آن‌ها را در کنار عدد صحیح می‌نویسیم.

مثال ۲۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $6 + \frac{3}{7} = 6 + \frac{3}{7} = 6\frac{3}{7}$

ب) $7 - \frac{2}{9} = 6\frac{9}{9} - \frac{2}{9} = 6\frac{7}{9}$

ج) $\frac{7}{8} - 3 = \frac{7}{8} - 2\frac{8}{8} = \frac{7-16}{8} = -2\frac{1}{8}$

جمع و تفریق عدد مخلوط و کسر

(۱) اگر عدد مخلوط و کسر، هم‌علامت بودند، قسمت‌های کسری را با هم جمع کرده و در کنار قسمت صحیح عدد مخلوط می‌نویسیم. (اگر قسمت کسری حاصل به دست آمده، از واحد بزرگ‌تر بود، آن را به عدد مخلوط تبدیل کرده و سپس با قسمت صحیح جمع می‌کنیم).

مثال ۲۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $4\frac{3}{7} - \frac{2}{3} = 4\frac{9}{21} - \frac{14}{21} = 4\frac{9-14}{21} = 4\frac{-5}{21} = 3\frac{16}{21}$

ب) $6\frac{3}{5} + \frac{2}{8} = 6\frac{24}{40} + \frac{10}{40} = 6\frac{24+10}{40} = 6\frac{34}{40} = 6\frac{17}{20}$

(۲) اگر عدد مخلوط و کسر هم‌علامت نبودند، ابتدا قسمت‌های کسری را با هم جمع و تفریق کرده، سپس حاصل را با قسمت صحیح جمع و تفریق می‌کنیم.

مثال ۲۵ حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به دست آورید.

الف) $3\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = 3\frac{10}{15} + \frac{3}{15} = 3\frac{10+3}{15} = 3\frac{13}{15}$

ب) $2\frac{3}{10} - \frac{5}{6} = 2\frac{9}{30} - \frac{25}{30} = 2\frac{9-25}{30} = 2\frac{-16}{30} = 1\frac{30}{30} - \frac{16}{30} = 1\frac{14}{30} = 1\frac{7}{15}$

ج) $\frac{3}{4} - 3\frac{1}{5} = \frac{15}{20} - 3\frac{4}{20} = \frac{15-12}{20} - 3 = \frac{3}{20} - 3 = \frac{3-60}{20} = -5\frac{17}{20}$

جمع و تفریق دو عدد مخلوط: برابر جمع و تفریق دو عدد مخلوط، ابتدا قسمت‌های کسری و صحیح را جداگانه با هم جمع و تفریق می‌کنیم، سپس حاصل‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۴۶ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2\frac{12}{20} - 1\frac{5}{20} = \frac{-2-1=-3}{\frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}} = -3 - \frac{17}{20} = -3\frac{17}{20}$

ب) $2\frac{4}{7} - 3\frac{1}{5} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2\frac{20}{35} - 3\frac{7}{35} = \frac{+20-7=+13}{+2-3=-1} = -1 + \frac{13}{35} = -\frac{35}{35} + \frac{13}{35} = -\frac{22}{35}$

ج) $-2\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} -2\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} = \frac{-2+4=+2}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}} = +2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$

نکته

اگر بیش از دو عدد گویا داشتیم می‌توانیم ابتدا حاصل دو عدد را به دست آوریم سپس حاصل را با عدد سوم جمع یا تفریق کنیم.

مثال ۴۷ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$-3\frac{1}{4} - 5 + 2\frac{1}{5} = -3\frac{1}{4} - 5 + 2\frac{1}{5} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} -3\frac{5}{20} - 5 + 2\frac{4}{20} = -8\frac{5}{20} + 2\frac{4}{20} = \frac{-8+2=-6}{\frac{-5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{-1}{20}} = -6 + \frac{5}{20} = -5\frac{15}{20} = -5\frac{3}{4}$

همواره بهتر است، ابتدا اعدادی را که **هم‌علامت** هستند، با هم جمع و تفریق کنیم.

مثال ۴۸ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$-\frac{1}{25} + (-2\frac{1}{4}) - (-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{25} - 2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} -\frac{1}{25} - 2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = -2\frac{2}{4} + 1\frac{1}{4} = -1\frac{1}{4} = -1\frac{1}{4}$

تذکره: همواره در محاسبات باید **لولیت‌ها** را رعایت کنیم.

مثال ۴۹ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2\frac{1}{3} - (5 - 1\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{3} - (4\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} - 4\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2\frac{4}{12} - 4\frac{9}{12} = -2\frac{5}{12} = -2\frac{5}{12}$

ب) $-3 + 5\frac{1}{4} - (-2\frac{1}{4} - 4\frac{1}{3}) = -3 + 5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{3} = 2\frac{1}{4} + 6\frac{5}{6} = 2\frac{3}{6} + 6\frac{5}{6} = 8\frac{8}{6} = 9\frac{2}{6}$

مثال ۵۰ اگر از نقطه $+1\frac{2}{3}$ به اندازه $(+\frac{5}{4})$ حرکت کنیم، به چه نقطه‌ای می‌رسیم؟

می‌دانیم $(+\frac{5}{4}) = -5\frac{1}{4}$ است: $+1\frac{2}{3} \xrightarrow{+\frac{5}{4}} +1\frac{2}{3} + (-5\frac{1}{4}) = 1\frac{2}{3} - 5\frac{1}{4} = 1\frac{8}{12} - 5\frac{3}{12} = -4\frac{5}{12}$

مثال ۵۱ از نقطه $۶\frac{۳}{۷}$ به اندازه چند واحد حرکت کنیم تا به نقطه -۲ برسیم؟

$$-۶\frac{۳}{۷} \rightarrow \square \rightarrow -۲ \Rightarrow \square = -۲ - \left(-۶\frac{۳}{۷}\right) \Rightarrow \square = -۲ + ۶\frac{۳}{۷} = ۴\frac{۳}{۷}$$

ضرب کسرها: برای ضرب دو یا چند کسر، ابتدا تعیین علامت می‌کنیم (کل منفی‌ها را شمارش می‌کنیم)، سپس اعداد را بدون علامت می‌نویسیم و تا حد امکان آن‌ها را ساده می‌کنیم و بعد از آن، اعداد را ضرب می‌کنیم.

الف $\frac{-۴}{۸} \times \frac{-۵}{۳}$ تعیین علامت دو علامت منفی $\rightarrow \frac{۴}{۸} \times \frac{۵}{۳} = \frac{۵}{۶}$

ب $\frac{-۳}{-۲۰} \times \left(\frac{-۱۵}{-۴}\right)$ تعیین علامت پنج علامت منفی $\rightarrow \frac{۳}{۲۰} \times \frac{۱۵}{۴} = \frac{۹}{۱۶}$

ج $\frac{-۴}{-۱۵} \times \left(\frac{-۷}{-۱۲}\right) \times \left(\frac{-۲۰}{-۲۱}\right)$ تعیین علامت هفت علامت منفی $\rightarrow \frac{۴}{۱۵} \times \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۲۰}{۲۱} = \frac{۴}{۲۷}$

مثال ۵۲ حاصل ضرب‌های مقابل را به دست آورید.

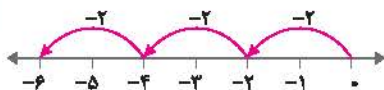
تذکره: برای ضرب حتماً باید اعداد مخلوط و اعشاری را به کسر تبدیل کنیم.

مثال ۵۳ حاصل ضرب زیر را به دست آورید.

$$-۲\frac{۱}{۴} \times \left(-۳\frac{۱}{۵}\right) \times \left(-\frac{۲۵}{-۳۶}\right) = \left(-\frac{۲۴}{۱۰}\right) \times \left(\frac{-۱۶}{۵}\right) \times \left(-\frac{۲۵}{-۳۶}\right)$$

تعیین علامت پنج علامت منفی $\rightarrow \frac{۲۴}{۱۰} \times \frac{۱۶}{۵} \times \frac{۲۵}{۳۶} = \frac{۱۶}{۳} = ۵\frac{۱}{۳}$

پایش ضرب روی محور: فرض کنید می‌خواهیم $۳ \times (-۲)$ را روی محور نمایش دهیم. کافی است که از صفر، ۳ حرکت به اندازه -۲ انجام دهیم.



معکوس یک عدد گویا: برای نوشتن معکوس، کافی است جای صورت و مخرج را عوض کنیم. (برای اعداد اعشاری و اعداد مخلوط، باید آن‌ها را به کسر تبدیل کنیم). دقت کنید معکوس کردن، علامت را تغییر نمی‌دهد.

مثال ۵۴ وارون اعداد $\frac{-۲۵}{-۱۷}$ ، $۳\frac{۴}{۵}$ و $-۲\frac{۲۵}{۵}$ را بنویسید. (وارون = معکوس)

$$\frac{-۲۵}{-۱۷} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱۷}{۲۵} = +\frac{۱۷}{۲۵} \quad ۳\frac{۴}{۵} = \frac{-۱۹}{۵} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۵}{-۱۹} \quad -۲\frac{۲۵}{۵} = \frac{-۲۲۵}{۱۰۰} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱۰۰}{-۲۲۵}$$

تقسیم اعداد گویا: برای تقسیم دو عدد گویا، آن‌ها را به کسر تبدیل می‌کنیم. سپس کسر اول را نوشته، تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را معکوس می‌کنیم، در نهایت، دو کسر را در هم ضرب می‌کنیم.

الف $\frac{-۲۴}{۲۵} \div \left(\frac{-۳۶}{-۱۵}\right) = \frac{-۲۴}{۲۵} \times \left(\frac{-۱۵}{-۳۶}\right)$ تعیین علامت $\rightarrow \frac{۲۴}{۲۵} \times \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۲}{۵}$

ب $\left(-۳\frac{۳}{۵}\right) \div \left(-۲\frac{۷}{۷}\right) = \left(-۳\frac{۳}{۵}\right) \div \left(-۲\frac{۷}{۱۰}\right) = \left(\frac{-۱۸}{۵}\right) \div \left(\frac{-۲۷}{۱۰}\right) = \left(\frac{-۱۸}{۵}\right) \times \left(\frac{۱۰}{-۲۷}\right)$ تعیین علامت $\rightarrow \frac{۱۸}{۵} \times \frac{۱۰}{۲۷} = +\frac{۴}{۳}$

مثال ۵۵ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

نکته

هنگام ضرب و تقسیم اعداد به اعداد صحیح، مخرج یک می‌دهیم.

مثال ۵۶ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(-2+7) \div (-3\frac{3}{4}) = (+5) \div (-\frac{15}{4}) = \frac{+5}{1} \times (-\frac{4}{15}) \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{4}{1} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

نکته

گفتن تقسیم دو کسر را با نوشتن آن‌ها روی هم نشان می‌دهیم؛ در این حالت عدد بالایی را بر عدد پایینی تقسیم می‌کنیم.

مثال ۵۷ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{-3\frac{3}{7}}{1\frac{1}{7}} = -3\frac{3}{7} \div (1\frac{1}{7}) = \frac{-24}{7} \div \frac{8}{7} = \frac{-24}{7} \times \frac{7}{8} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{24}{8} \times \frac{7}{7} = \frac{3}{1} = -3$$

مثال ۵۸ در هر بخش، به جای \square عدد مناسب قرار دهید.

الف) $\square \times -3\frac{3}{5} = -1 \Rightarrow \square = -1 \div (-3\frac{3}{5}) = \frac{-1}{1} \div (-\frac{18}{5}) = \frac{-1}{1} \times \frac{5}{-18} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{1}{1} \times \frac{5}{18} = \frac{5}{18}$

ب) $-2\frac{2}{3} \div \square = -1\frac{1}{2} \Rightarrow \square = -2\frac{2}{3} \div -1\frac{1}{2} = (-\frac{14}{3}) \div (-\frac{3}{2}) = (-\frac{14}{3}) \times (-\frac{2}{3}) \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{14}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$

محاسبه عبارت‌های ترکیبی: برای محاسبه عبارت‌های ترکیبی، باید همواره اولویت‌ها را رعایت کنیم.

مثال ۵۹ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-\frac{3}{5}) \div (-\frac{2}{5} + \frac{5}{6}) = -\frac{3}{5} \div (-\frac{13}{30}) = \frac{-3}{5} \times \frac{30}{13} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{3}{1} \times \frac{6}{13} = \frac{18}{13}$

ب) $(-2+3-7) \div (-\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{-15}{-8}) = -6 \div (-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) = -6 \div \frac{1}{4} = \frac{-6}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{-24}{1} = -24$

ج) $-1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{5} \times \frac{-24}{-15} = -1\frac{2}{3} - \frac{48}{25} = -1\frac{2}{3} - 1\frac{23}{25} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} -1\frac{50}{75} - 1\frac{69}{75} = -2\frac{119}{75} = -3\frac{44}{75}$

د) $(-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}) - 2\frac{1}{2} \times \frac{-4}{15} = -\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{-5}{6}$

ه) $5 - 5 \times (2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{5}) = 5 - 5 \times (-\frac{14}{15}) = 5 - \frac{5}{1} \times (-\frac{14}{15}) = 5 + \frac{14}{3} = 5 + 4\frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}$

مثال ۶۰ حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $5 - \frac{-3 - \frac{1}{3}}{2 - 5\frac{1}{3}}$

ابتدا حاصل صورت و مخرج کسر بزرگ را محاسبه می‌کنیم.

$$5 - \frac{-3 - \frac{1}{3}}{2 - 5\frac{1}{3}} = 5 - \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{10}{3}} = 5 - \left(\frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{10}{3}} \right) = 5 - (+1) = 5 - 1 = 4$$

ب) $6 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4}}$

ابتدا مخرج کسر بزرگ را حساب می‌کنیم.

$$6 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4}} = 6 - \frac{1}{\frac{11}{4}} = 6 - \left(1 \times \frac{11}{4}\right) = 6 - \frac{11}{4} = 6 - \frac{11}{4} = \frac{24}{4} - \frac{11}{4} = \frac{13}{4}$$

$$1 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} - 1$$

مثال ۶۱ چگونه می‌توان حاصل عبارت مقابل را محاسبه کرد؟

صورت کسر را یک عبارت و مخرج کسر را یک عبارت فرض کرده و هریک را جداگانه حساب می‌کنیم.

صورت کسر: $1 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3}} = 1 - \left(-\frac{1}{2} \div \frac{4}{3}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) = 1 - \left(-\frac{3}{8}\right) = 1 + \frac{3}{8} = 1\frac{3}{8}$ (۱)

مخرج کسر: $\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{2}{3} \div \frac{4}{3}\right) - 1 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{2}{4} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{1\frac{3}{8}}{-\frac{1}{2}} = 1\frac{3}{8} \div \left(-\frac{2}{2}\right) = \frac{11}{8} \times \left(-\frac{2}{2}\right) = -\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$

مثال ۶۲ می‌خواهیم فاصله دو نقطه $3\frac{2}{5}$ و $4\frac{1}{4}$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم؛ طول هر واحد چه قدر می‌شود؟ ابتدا فاصله این دو

عدد را پیدا می‌کنیم (عدد بزرگ را منهای عدد کوچک می‌کنیم): $4\frac{1}{4} - 3\frac{2}{5} = 4\frac{5}{20} - 3\frac{8}{20} = 1\frac{13}{20}$ کل فاصله

اکنون باید کل فاصله را بر ۱۰ تقسیم کنیم. $1\frac{13}{20} \div 10 = \frac{153}{200} \div 10 = \frac{153}{200} \times \frac{1}{10} = \frac{153}{2000}$

مثال ۶۳ یک خرگوش روی نقطه $4\frac{1}{4}$ قرار دارد. این خرگوش ۱۲ پرش انجام می‌دهد که طول هر یک $1\frac{1}{3}$ به سمت منفی هاست. این

خرگوش بعد از پرش‌ها، به چه نقطه‌ای می‌رسد؟ ابتدا طول کل پرش‌ها را حساب می‌کنیم.

پس خرگوش ۱۸ واحد به سمت منفی‌ها می‌رود (-18) . $4\frac{1}{4} + (-18) = 4\frac{1}{4} - 18 = 4\frac{1}{4} - 17\frac{4}{4} = -13\frac{3}{4}$

مثال ۶۴ به جای حروف A و B، اعداد مناسب قرار دهید.

$B \xrightarrow{(-\frac{2}{3})} A \xrightarrow{(-2/2)} -8\frac{4}{5}$

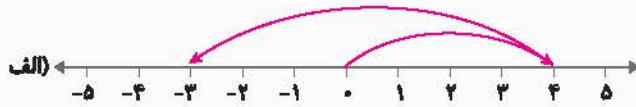
دقت کنید در این گونه سوالات که از انتباه به ابتدا حرکت می‌کنیم، علامت اعداد روی فلش‌ها تغییر می‌کند، مثلاً + به ضرب تبدیل می‌شود (اگر عددی که روی فلش قرار دارد، علامت × یا + نداشت، آن‌گاه علامت + به - تبدیل می‌شود و علامت - هم به + تبدیل می‌شود).

ابتدا A را حساب می‌کنیم. $A = \left(-8\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{2}\right) = -8\frac{4}{5} \div \left(-\frac{22}{10}\right) = \left(-\frac{44}{5}\right) \times \left(-\frac{10}{22}\right) = \frac{44}{5} \times \frac{10}{22} = +4$

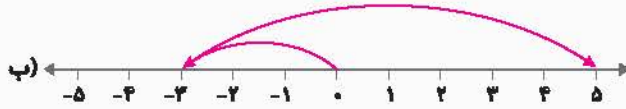
اکنون می‌توانیم B را حساب کنیم. $B \xrightarrow{(-\frac{2}{3})} +4 \xrightarrow{(-2/2)} -8\frac{4}{5} \Rightarrow B = +4 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 4 - \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$

الف) به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

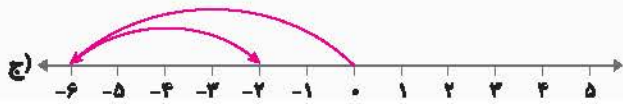
۱) برای هر محور، یک جمع بنویسید.



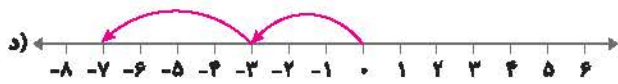
$$(\quad) + (\quad) = (\quad)$$



$$(\quad) + (\quad) = (\quad)$$



$$(\quad) + (\quad) = (\quad)$$



$$(\quad) + (\quad) = (\quad)$$

۲) سمت راست را عبارت را کامل کنید.

الف) $(-8) = \square$

ب) $-(+1293) = \square$

ج) $-(-14) = \square$

د) $(-70) = \square$

ه) $-99 \xrightarrow{\text{قرینه}} \square$

و) $25 \xrightarrow{\text{قرینه}} \square$

ز) $-8 \xrightarrow{\text{قرینه}} \square \xrightarrow{\text{قرینه}} \square$

۳) هر عبارت را روی محور نمایش دهید و حاصل را به کمک آن تعیین کنید.

الف) $(+7) + (-5) =$

ب) $(+6) - (-3) =$

ج) $-5 + 4 =$

د) $-2 - 1 + 6 =$

ه) $4 \times (-2) =$

و) $2 \times (+4) =$

ز) $-3 + 0 =$

۴) فاصله ۹- و قرینه اش چند واحد است؟

۵) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(+5) + (+8) =$

ب) $(-6) + (-21) =$

ج) $(-47) + (+4) =$

د) $(-99) + (+99) =$

ه) $(+101) - (-16) =$

و) $(-218) - (-44) =$

ز) $(-515) - (+515) =$

ح) $0 - (-44) =$

ط) $(-2) \times (-936) =$

ی) $(-1006) \times (+7) =$

ک) $(+1100) \div (-10) =$

ل) $(-2000) \div (-50) =$

م) $(+13) \div (+9) =$

ن) $(-8) \div (-6) =$

امکانی

نمونه سوالات (با پاسخ)
خود آزمایی

تکمیلی

نمونه سوالات (با پاسخ)
خود آزمایی

سوالات تیزهوشانه

۶) حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف) $-5 + 18 =$

پ) $12 - 19 =$

ج) $-21 - 45 =$

د) $-9 - (+14) =$

ه) $26 - 29 + 54 - 4 =$

و) $-(-12) + (-8) - 38 =$

ز) $(-44) - [(-13) - 5] =$

ح) $[(-53) - (+75)] \times (-6 - 5 + 10) =$

ط) $[(-42) - 8] \times [(-12) \div 3] =$

ی) $-23 - 40 \div (-8) \times 2 - 1 =$

۷) یک سردخانه موادی را که در آن است، در دمای ۶ درجه زیر صفر نگهداری می‌کند. اگر یک ماهی را که دمای آن ۱۴ درجه بالای صفر است، در این سردخانه قرار دهیم، ماهی چند درجه سردتر می‌شود؟

۸) میانگین دمای هوای شهرهای A و B با دمای هوای شهر C برابر است. اگر دمای هوای شهر C برابر با ۱۲- درجه باشد، میانگین دمای هوای این سه شهر را به دست آورید.

۹) مجموع اعداد صحیحی که می‌توانند در رابطه $-5 < x < +1$ قرار گیرند، چند است؟

۱۰) عدد ۱۰۰- متعلق به کدام عبارت است؟ دور آن خط بکشید.

الف) $-300 < x < -121$

ب) $-99 < x < -80$

ج) $-110 < x < -70$

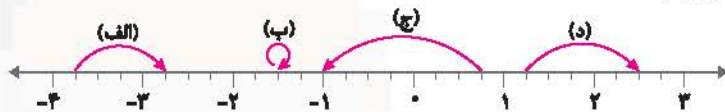
۱۱) اختلاف بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی سه رقمی و کوچک‌ترین عدد صحیح منفی چهاررقمی چند واحد است؟

$-1\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{16}{3}, 2\frac{2}{3}, -\frac{12}{3}, -\frac{2}{3}$

۱۲) هر یک از اعداد گویای زیر را روی محور نمایش دهید.



۱۳) در محور زیر، مقدار هر یک از حرکت‌ها را روی آن بنویسید.



۱۴) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	قرینه	معموس	قرینه معموس
$\frac{3}{7}$			
$-\frac{2}{3}$			
$4/2$			
$-5/9$			
$+26$			
$(-\frac{1}{8})$			

(۱۵) برای هر مورد، چهار کسر مساوی بنویسید.

الف) $\frac{-۴}{۹} =$

ب) $۳\frac{۵}{۸} =$

(۱۶) مقایسه کنید.

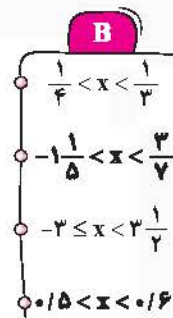
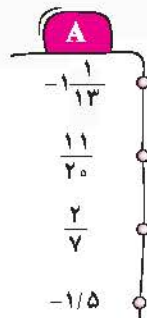
الف) $-۷\frac{۸}{۱۲}$ $-۷\frac{۲}{۳}$

ب) $(-\frac{۵}{۲})^۲$ $\frac{۵}{۲}$

ج) $\frac{۳}{۱۳}$ $-۱\frac{۳}{۷}$ $-۱/۵$

د) $-۱۴/۵$ $\frac{-۲۱}{۴}$ $-۳\frac{۱}{۳}$

(۱۷) هر یک از اعداد ستون A را به قسمت مربوط در ستون B وصل کنید.



(۱۸) در هر تساوی، مقدار x را تعیین کنید.

الف) $\frac{-۱۸}{x} = \frac{۹}{۴}$

ب) $\frac{-۲۴}{۳۶} = \frac{x}{۴۵}$

ج) $\frac{۶۰}{۳۵} = \frac{۱۲}{-x}$

د) $\frac{-۳x}{۴۸} = \frac{۲۶}{-۳۲}$

(۱۹) هر یک از کسرهای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

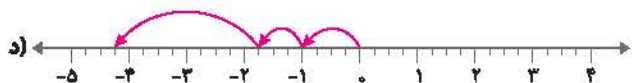
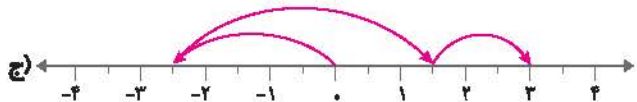
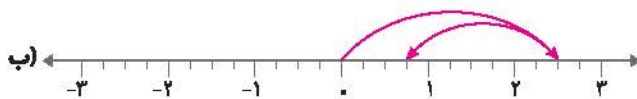
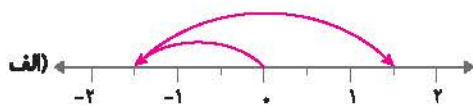
الف) $(-\frac{۹۶}{-۱۰۴}) =$

ب) $\frac{-\sqrt{۲۲۵}}{-(-۱۸۰)} =$

ج) $\frac{(-۹۹) \times (+۷۰)}{(-۲۸) \times (-۵۵) \times (+۱۸)} =$

د) $\frac{-۸۰}{۲۰۰} \times \frac{(-۴۰) \times (+۱۸)}{-(-۳۲)} =$

(۲۰) جمع متناظر با هر محور را بنویسید.



امکانی خود آزمایی نمونه سوالات (با پاسخ)

تکمیلی خود آزمایی نمونه سوالات (با پاسخ)

سوالات تیزهوشانه

۲۱) حاصل عبارت‌های زیر را با کمک محور به دست آورید.

الف) $(-1\frac{2}{3}) + (+3\frac{1}{3}) =$

ب) $(-\frac{1}{5}) + \frac{3}{5} =$

ج) $3 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

د) $0.7 - 1\frac{2}{5} =$

ه) $-\frac{3}{5} - (+1\frac{2}{5}) =$

و) $2\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4}) =$



۲۲) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{9}{11} + (-\frac{3}{8}) =$

د) $\frac{12}{7} - (-2\frac{3}{4}) =$

ز) $\frac{13}{15} + 2\frac{13}{20} - (-\frac{3}{10}) =$

ب) $-\frac{10}{14} + 1\frac{2}{7} =$

ه) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$

ح) $(1\frac{2}{9} - 3) - (5 + 2\frac{3}{4}) =$

ج) $-1\frac{2}{3} + (-\frac{5}{6}) =$

و) $13\frac{1}{4} - 3\frac{5}{6} =$

ط) $-\frac{5}{12} + \frac{3}{8} - \frac{4}{6} + (-\frac{1}{2}) =$

۲۳) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-7 - (-4)) + (\frac{2}{-5} + 1 - 1\frac{1}{2}) =$

ب) $-2/6 + \frac{3}{5} - (-6) =$

ج) $4/2 + (-1\frac{1}{3}) =$

۲۴) اگر $A = -\frac{1}{2}$ و $B = -5\frac{2}{6}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$A - B - 4 =$

۲۵) چه کسری را با کسر $-\frac{3}{8}$ جمع کنیم تا حاصل برابر با $\frac{4}{15}$ شود؟

۲۶) اختلاف دو عدد گویای $2\frac{1}{5}$ و $-\frac{12}{10}$ چند است؟

۲۷) حاصل هر یک از ضرب‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-\frac{4}{9} \times \frac{5}{9} =$

ب) $1\frac{2}{3} \times (-\frac{25}{3}) =$

ج) $-2\frac{5}{9} \times 4 =$

د) $-5\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$

۲۸) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-\frac{4}{5} \times \frac{10}{-3} \times 1\frac{6}{20} =$

ب) $(-0/4) \times (+2\frac{1}{8}) =$

ج) $2\frac{1}{4} \times (-3/0.2) =$

۲۹) حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{8}{15} \div \frac{-4}{15} =$

ب) $(-1\frac{2}{3}) \div (-\frac{4}{3}) =$

ج) $(-6) \div \frac{3}{14} =$

د) $(-10\frac{2}{9}) \div 3\frac{5}{6} =$

۳۰) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = (-\frac{4}{6}) =$

ب) $0.04 \div (-\frac{1}{5}) =$

ج) $-2\frac{1}{5} \div 0.5 \times 3 =$

(۳۱) اگر $A = \frac{-1}{7}$ ، $B = \frac{3}{4}$ و $C = 2$ باشد، حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $C = B =$

ب) $\frac{2}{5} A \times B = C =$

(۳۲) چه عددی را در $\frac{1}{5}$ ضرب کنیم تا حاصل برابر با $-\frac{5}{4}$ شود؟

(۳۳) حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به سادهترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(-1\frac{1}{7}) + [-\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7} + 1] =$

ب) $(\frac{8}{21} - 1) \times [\frac{-3}{13} \div 9] =$

ج) $\frac{-1}{10} \times (-9 - 12 - 4) =$

د) $\frac{-5 - \frac{1}{5}}{-5/2 + \frac{3}{5}} =$

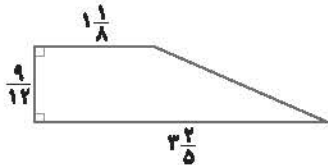
(۳۴) حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید. (با رعایت ترتیب انجام عملیات ریاضی)

الف) $\frac{-1}{5} + \frac{1}{5} \times (\frac{-3}{5}) + 2\frac{2}{5} \div (-1\frac{1}{5})$

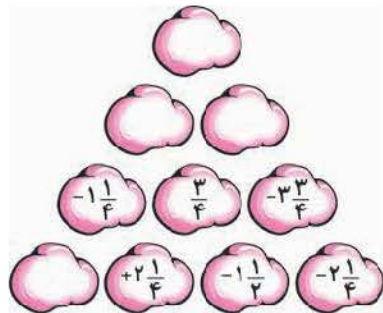
ب) $-\frac{5}{7} + 1 - \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} - (-4) \div \frac{1}{2} =$

ج) $\frac{1}{10} - \frac{2}{5} \times 3 \times (\frac{4}{5} - \frac{5}{5}) =$
 $8 \div 3\frac{1}{5}$

(۳۵) مساحت ذوزنقه زیر را حساب کنید.



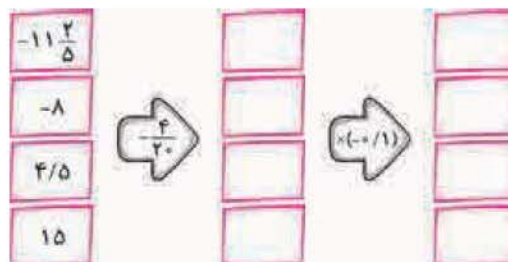
(۳۶) جدول مقابل را کامل کنید.



(۳۷) اختلاف مجذور و مکعب عدد $(-\frac{2}{5})$ را به دست آورید.

(۳۸) وزن احمد $\frac{3}{5}$ برابر وزن برادرش است. اگر وزن برادر او $10\frac{3}{4}$ کیلوگرم باشد، وزن احمد چند کیلوگرم از برادرش بیش تر است؟

(۳۹) نمودار زیر را کامل کنید.



امکانی

خود آموخه

نمونه سوالات (با پاسخ)

تکمیلی

خود آموخه

نمونه سوالات (با پاسخ)

سوالات تیزهوشانه