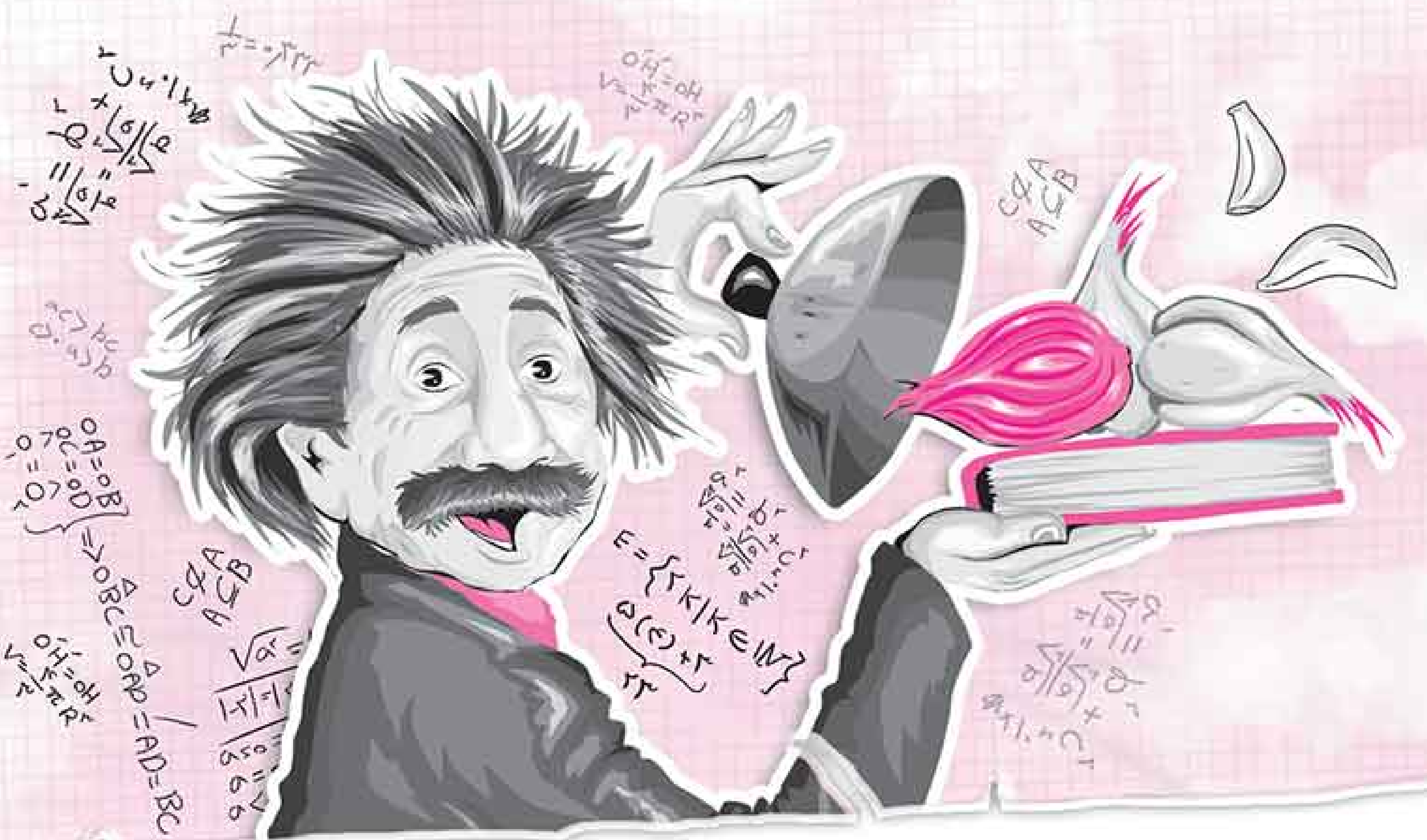


فصل اوّل

مجموعه‌ها

مجموعه

در ریاضی برخی مفهوم‌ها هستند که با این‌که ما آن‌ها را درک می‌کنیم و می‌شناسیم، اما نمی‌توانیم آن‌ها را تعریف کنیم، یا به عبارت دیگر تعریف‌ناپذیر هستند. مثل نقطه و خط.

یکی دیگر از این مفهوم‌ها، مجموعه است. مفهوم مجموعه را اگرچه نمی‌توانیم تعریف کنیم، اما می‌توانیم در مورد آن توضیح بدهیم. در واقع اگر دستهٔ مشخصی از اعداد، افراد و اشیاء یا ... را داشته باشیم، به آن‌ها مجموعه می‌گویند. این افراد، اعداد و اشیاء باید متمایز از هم باشند. یعنی هیچ دوتای آن‌ها یکسان نباشند. مثلاً شمارنده‌های عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ یک مجموعه را تشکیل می‌دهند.

عبارت‌های مشخص‌کنندهٔ مجموعه

یک عبارت، زمانی یک مجموعه را مشخص می‌کند که کاملاً گویا و شفاف باشد. به این معنی که دقیقاً مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیزهایی در آن مجموعه قرار ندارند.

در مثالی که در چند خط بالاتر گفته شد، عبارت «شمارنده‌های عدد ۱۲» کاملاً تعیین می‌کند که چه چیزهایی در مجموعه قرار می‌گیرند و شما به‌راحتی می‌توانید بگویید عددی مثل ۶ در این مجموعه قرار دارد ولی عددی مثل ۸ در این مجموعه قرار ندارد. اما عبارتی مثل «مردان قدبلند»، یک عبارت واضح برای مشخص کردن یک مجموعه نیست، زیرا ممکن است از نظر یک فرد، افرادی با قدّ ۱۹۰ سانتی‌متر به بالا قدبلند حساب شوند اما از نظر فردی دیگر، افرادی با قدّ بیش‌تر از ۱۸۵ سانتی‌متر، قدبلند به‌حساب آیند. می‌بینید که در این‌جا افرادی که در مجموعه قرار می‌گیرند، کاملاً مشخص نیستند، پس عبارت «مردان قدبلند» مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه نیست.

مثال ۱ معلوم کنید که آیا هر عبارت مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه هست یا خیر؟

الف) مجموعهٔ خانه‌های گران‌قیمت یک شهر: نیست

ب) مجموعهٔ اعداد اوّل بزرگ‌تر از ۱۰۰: هست

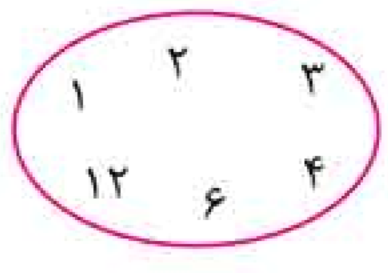
ج) مجموعهٔ اعداد بسیار کوچک: نیست

د) مجموعهٔ اعداد فرد کوچک‌تر از ۱۰۰۰: هست

نمایش مجموعه‌ها

مجموعه‌ها را می‌توان به سه روش نمایش داد.

الف) استفاده از یک شکل یا حلقهٔ بسته: به این روش نمودار وِن گفته می‌شود. به‌عنوان مثال مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۱۲ با استفاده از نمودار وِن به‌صورت مقابل است.



ب) استفاده از یک جفت آکولاد { }: به این روش، نمایش تفضیلی گفته می‌شود. به‌عنوان مثال نمایش مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۱۲ به‌صورت تفضیلی، به شکل مقابل است. $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$

ج) استفاده از زبان ریاضی: این مورد را کمی جلوتر خواهیم آموخت.

نام‌گذاری مجموعه‌ها

معمولاً برای نام‌گذاری مجموعه‌ها، از حروف انگلیسی بزرگ استفاده می‌کنیم. مثل A ،B ،C ،D و ... .

عضو

هر کدام از اعداد، اشیاء یا افرادی که درون یک مجموعه قرار می‌گیرند را عضوی از مجموعه می‌گوییم، مثلاً گیلان عضو مجموعهٔ استان‌های کشور ایران است. برای نشان دادن عضو بودن از علامت $\in$ و برای نشان دادن عضو نبودن، از علامت $\notin$ استفاده می‌کنیم.

برای مثال، اگر A ، مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۰ باشد، ۲ و ۵ عضو آن هستند ولی ۱۲ و ۱۸ عضو آن نیستند.

مجموعهٔ شمارنده‌های ۲۰ : $A = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\}$ $\qquad$ $۲ \in A$ ، $۵ \in A$ ، $۱۲ \notin A$ ، $۱۸ \notin A$

مثال ۲ با توجه به مجموعهٔ A ، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. $A = \{-۲^۳ - ۱, \frac{-\sqrt{۸۱}}{۳}, (-۲)^۴\}$

الف) $۷ \in A$ ☐ $\qquad$ ب) $-۳ \in A$ ☐ $\qquad$ ج) $۱۶ \notin A$ ☐ $\qquad$ د) $-۹ \in A$ ☐

ابتدا ظاهر عضوهای مجموعهٔ A را درست می‌کنیم: $A = \{\underbrace{-۲^۳ - ۱}_{-۹}, \underbrace{\frac{-\sqrt{۸۱}}{۳}}_{-۳}, \underbrace{(-۲)^۴}_{۱۶}\} = \{-۹, -۳, ۱۶\}$

پس قسمت‌های (الف) و (ج) اشتباه هستند، ولی قسمت (ب) و (د) صحیح است.

نکته

۱) در یک مجموعه، جابه‌جا کردن عضوها مشکلی ایجاد نمی‌کند. مثلاً مجموعهٔ اعداد اوّل یک‌رقمی را می‌توان به‌صورت‌های مقابل نشان داد: مجموعهٔ اعداد اوّل یک‌رقمی = $\{۲, ۳, ۵, ۷\}$ یا $\{۷, ۵, ۳, ۲\}$ یا $\{۵, ۷, ۳, ۲\}$ یا $\{۷, ۲, ۳, ۵\}$ یا ...

۲) در مجموعه، نوشتن عضو تکراری قابل قبول نیست و در صورت داشتن عضوهای تکراری، آن‌ها را حذف کرده و مجموعه را بازنویسی می‌کنیم. $A = \{۲, ۳, ۵, \cancel{۳}, \cancel{۵}, ۷\} = A = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$

عدد اصلی یک مجموعه

به تعداد عضوهای یک مجموعه، عدد اصلی یک مجموعه می‌گویند. (دقت کنید بازهم یادآوری می‌کنیم که ابتدا باید عضوهای تکراری را حذف کنیم.) عدد اصلی یک مجموعه مثل A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

اعداد اوّل یک‌رقمی: $A = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \xrightarrow{۴\text{ عضو}} n(A) = ۴$

مثال ۳ عدد اصلی مجموعهٔ مقابل را به‌دست آورید. $A = \{\frac{-\sqrt{۱۴۴}}{۳}, (-۲)^۳ + ۷, (-۳)^۲ - ۱۳, -\sqrt{۱}, ۳^۰\}$

ابتدا ظاهر عضوهای A را درست می‌کنیم:

$A = \{\underbrace{\frac{-\sqrt{۱۴۴}}{۳}}_{-۴}, \underbrace{(-۲)^۳ + ۷}_{-۱}, \underbrace{(-۳)^۲ - ۱۳}_{-۴}, \underbrace{-\sqrt{۱}}_{-۱}, \underbrace{۳^۰}_{۱}\} \Rightarrow A = \{-۴, -۱, \cancel{-۴}, \cancel{-۱}, ۱\} \Rightarrow A = \{-۴, -۱, ۱\} \Rightarrow n(A) = ۳$

نکته

گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آن‌که بین این عضوها یک نظم وجود داشته باشد، می‌توانیم ابتدا تعدادی از آن‌ها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم (...) و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم. مثلاً می‌توانیم اعداد طبیعی دورقمی را به‌صورت زیر نشان دهیم.

مجموعهٔ اعداد طبیعی دورقمی: $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,\cdots,۹۹\}$

مثال ۴ عدد اصلی هر مجموعه را مشخص کنید.

الف) $A=\{-۷۲,-۷۰,-۶۸,\cdots,۱۲۲\}$

ب) $B=\{۲,۴,۸,۱۶,\cdots,۴۰۹۶\}$

الف) در مجموعهٔ A ، فاصلهٔ اعداد مساوی است (۲تا ۲تا است). در این حالت می‌توانیم از رابطهٔ زیر، تعداد عضوها را حساب کنیم:

$$n(A)=\frac{\text{بزرگ‌ترین عدد} - \text{کوچک‌ترین عدد}}{\text{فاصله}}+۱=\frac{۱۲۲\overset{+}{-}(-۷۲)}{۲}+۱=\frac{۱۹۴}{۲}+۱=۹۸\Rightarrow n(A)=۹۸$$

ب) با کمی دقت متوجه می‌شویم، مجموعهٔ B توان‌های عدد ۲ هستند. (چون فاصلهٔ آن‌ها باهم برابر نیست، پس نمی‌توانیم از رابطهٔ بالا استفاده کنیم.

$B=\{۲^۱,۲^۲,۲^۳,۲^۴,\cdots,۲^{۱۲}\}\Rightarrow n(B)=۱۲\Rightarrow B=\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴,۱۲۸,۲۵۶,۵۱۲,۱۰۲۴,۲۰۴۸,۴۰۹۶\}$

مثال ۵ در مجموعهٔ $A=\{(-۵۰)^۲,(-۴۹)^۲,(-۴۸)^۲,\cdots,(+۴۸)^۲,(+۴۹)^۲,(+۵۰)^۲\}$ ، عدد اصلی مجموعه را محاسبه کنید.

می‌دانیم هرگاه یک عدد منفی درون پرانتز باشد و به توان زوج برسد، حاصل مثبت است. پس می‌توان گفت $(-۵۰)^۲=(+۵۰)^۲$ و $(-۴۹)^۲=(+۴۹)^۲$ است. با این حساب اعداد منفی این مجموعه، در واقع عضو تکراری هستند و حذف می‌شوند و مجموعه به‌صورت $\{(۰)^۲,(+۱)^۲,(+۲)^۲,\cdots,(+۴۹)^۲,(+۵۰)^۲\}$ درمی‌آید. لذا این مجموعه ۵۱ عضو دارد. (صفر هم یکی از عضوهاست).

مجموعهٔ تهی

به مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعهٔ تهی می‌گوییم و آن را با علامت $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهیم. دقت کنید نمایش مجموعهٔ تهی به‌صورت $\{\varnothing\}$ اشتباه است.

به‌عنوان مثال، مجموعهٔ دایناسورهای باغ وحش مشهد، یک مجموعهٔ تهی است، زیرا هیچ دایناسوری در باغ وحش مشهد وجود ندارد، پس این مجموعه هیچ عضوی نداشته و تهی است.

مثال ۶ کدام مجموعه، تهی است؟

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰

ب) مجموعهٔ اعداد منفی که جذر دارند.

ج) مجموعهٔ اعداد اوّل کوچک‌تر از صفر

مجموعهٔ (الف) دارای عضو است (اعداد ۱ تا ۹۹۹) ولی هیچ عدد منفی‌ای جذر ندارد، پس مجموعهٔ (ب) و (ج) تهی هستند.

تذکر:

برخی مجموعه‌ها، بی‌شمار عضو دارند. (یعنی عضوهای آن‌ها تمام نمی‌شوند.) به این مجموعه‌ها، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم و برای نشان دادن آن‌ها، پس از نوشتن تعدادی از عضوها، سه‌نقطه قرار می‌دهیم.

مثال ۷ مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۵ را بنویسید.

عضوهای این مجموعه هیچ‌جا به پایان نمی‌رسند.

مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۵ $=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,\ldots\}$

تذکر:

اگر عضوهای یک مجموعه، قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان برسند (حتی اگر تعداد آن‌ها خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه، مجموعهٔ متناهی می‌گوییم. مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ با این‌که تعداد عضوهای زیادی دارد، اما چون شمارش عضوهای آن بالاخره به انتها می‌رسد، به آن، مجموعهٔ متناهی می‌گوییم. $\{1, 2, 3, \dots, 999999\}$ = مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰

مجموعه‌های مساوی

دو مجموعه را مساوی می‌گوییم درصورتی‌که اعضای آن‌ها کاملاً یکسان باشند (جابه‌جا بودن عضوها ایرادی ندارد). مثلاً دو مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 1, 2\}$ باهم برابرند.

مثال ۸ مشخص کنید در هر قسمت، دو مجموعهٔ A و B باهم برابرند یا خیر.

الف) $A = \{5, -2^3, \sqrt{36} - 2, 1\}$ ، $B = \{\frac{-\sqrt{144}}{-3}, -\sqrt{64}, \frac{-(-(-3-2))}{100^0 - 2}, 1\}$

$A = \{5, \underbrace{-2^3}_{-8}, \underbrace{\sqrt{36}-2}_{4}, 1\}$ ، $B = \{\underbrace{\frac{-\sqrt{144}}{-3}}_{+4}, \underbrace{-\sqrt{64}}_{-8}, \frac{-(-(-3-2))}{1-2} = \frac{-5}{-1} = +5, 1\} \Rightarrow A = B$

ب) $A = \{$شمارنده‌های اوّل عدد ۲۱۰$\}$ ، $B = \{$اعداد اوّل یک‌رقمی$\}$

$A = \{$شمارنده‌های اوّل ۲۱۰$\} = \{2, 3, 5, 7\}$ ، $B = \{$اعداد اوّل یک‌رقمی$\} = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow A = B$

مثال ۹ دو مجموعهٔ A و B باهم برابرند، به‌جای $\boxed{}$ و $\triangle$ اعداد مناسب قرار دهید.

$$A = \{\frac{-2-24\div(-3)}{-2}, -5^2+21, \triangle\times(-2)-2\} \text{ ، } B = \{2, \frac{\boxed{}-1}{-1}, -\sqrt{16}\}$$

برای حلّ این سؤال، ابتدا باید ظاهر عضوهای A و B را تا حدّ امکان درست کنیم:

$$A = \{\underbrace{\frac{-2\overbrace{-24\div(-3)}^{+8}}{-2}}_{-3}, \underbrace{-5^2+21}_{-4}, \triangle\times(-2)-2\} = \{-3, -4, \triangle\times(-2)-2\}$$

$$B = \{2, \frac{\boxed{}-1}{-1}, \underbrace{-\sqrt{16}}_{-4}\} = \{2, \frac{\boxed{}-1}{-1}, -4\}$$

با این حساب برای برابر شدن اعضای دو مجموعه، باید داشته باشیم (از حلّ معادله کمک می‌گیریم):

$$\frac{\boxed{}-1}{-1} = -3 \Rightarrow \boxed{}-1 = -3\times(-1) = 3 \Rightarrow \boxed{} = 4$$

$$\triangle\times(-2)-2 = 2 \Rightarrow \triangle\times(-2) = 2+2 = 4 \Rightarrow \triangle = \frac{4}{-2} = -2$$

مثال ۱۰ اگر $\{2a\} = \{2x+1, 4-x\}$ باشد، a را بیابید.

$\xrightarrow{\text{مجموعهٔ سمت چپ}} 2x+1 = 4-x \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

$\{3, \cancel{3}\} = \{2a\} \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

مثال ۱۱ دو مجموعهٔ $A = \{2, x-y\}$ و $B = \{4, x+y\}$ برابرند. x و y را بیابید.

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 2 \\ x - \cancel{y} = 4 \end{cases}$$

جمع: $2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x+y = 2 \xrightarrow{x=3} 3+y = 2 \Rightarrow y = -1$

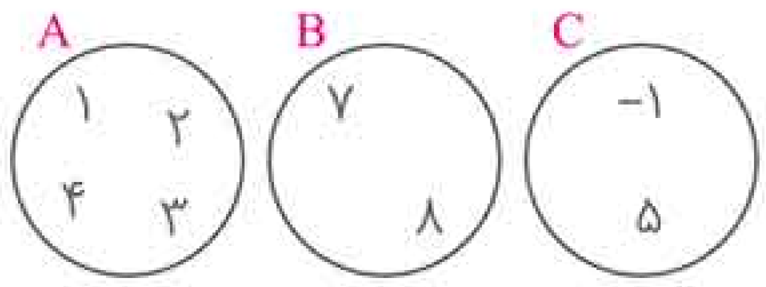
مثال ۱۲ اگر دو مجموعهٔ $A = \{x-2y, -3\}$ و $B = \{x+1, 4\}$ باهم مساوی باشند، مقدار $x+y$ چه‌قدر است؟

$$\left.\begin{array}{l} x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \\ x-2y = 4 \xrightarrow{x=-4} -4-2y = 4 \Rightarrow -2y = 8 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y = -4+(-4) = -8$$

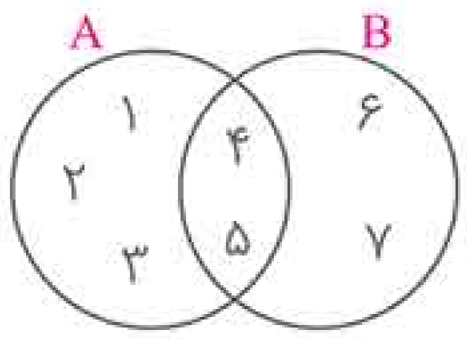
نمایش مجموعه‌ها با نمودار وِن

قبلاً گفتیم که یکی از روش‌های نمایش مجموعه‌ها، این است که اعضای مجموعه را درون یک حلقهٔ بسته نمایش می‌دهیم. به این روش، نمودار وِن گفته می‌شود. در این‌جا با چند مثال، حالت‌های مختلف رسم مجموعه‌ها با نمودار وِن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۳ **مجموعه‌های $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ ، $B = \{۷ , ۸\}$ و $C = \{-۱ , ۵\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.**



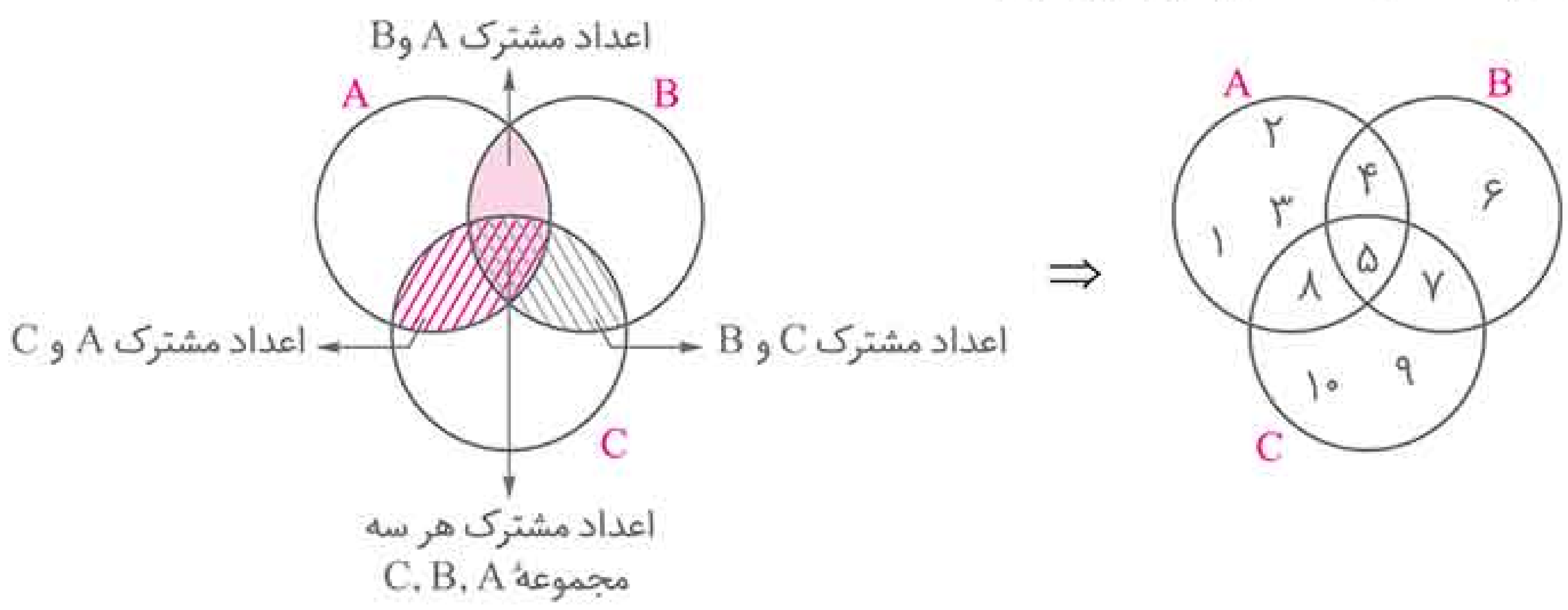
مثال ۱۴ **مجموعه‌های $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ و $B = \{۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ را با نمودار ون نشان دهید.**



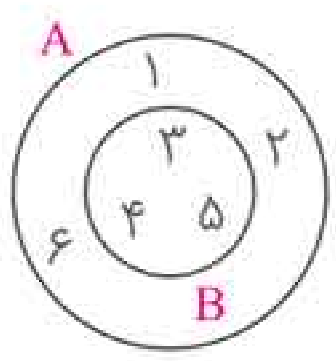
اگر خوب دقت کنید، در این‌جا دو عدد ۴ و ۵، هم عضو A و هم عضو B هستند. پس مجبوریم قسمتی از حلقه‌ها را روی هم رسم کنیم تا این اعداد را درون آن بنویسیم تا هم در A قرار داشته باشند و هم در B .

مثال ۱۵ **سه مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۸\}$ ، $B = \{۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ و $C = \{۵ , ۷ , ۹ , ۱۰ , ۸\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.**

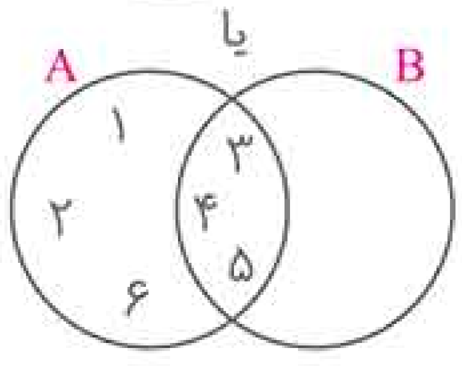
برای رسم این نمودار، از آن‌جا که برخی اعداد مشترک هستند، باید حلقه‌ها را به‌صورت زیر رسم کنیم. دقت کنید عدد ۵ در هر سه مجموعه قرار دارد، پس آن را در قسمت وسط شکل قرار می‌دهیم.



مثال ۱۶ **نمودار وِن مربوط به مجموعه‌های $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$ و $B = \{۳ , ۴ , ۵\}$ را رسم کنید.**



یا



اگر دقت کنید، تمام اعضای B درون مجموعهٔ A وجود دارند. در این حالت بهتر است حلقهٔ B را کاملاً درون A رسم می‌کنیم. البته می‌توانیم مانند شکل‌های قبل هم آن را رسم کنیم، که البته شکل سمت چپ، بیش‌تر استفاده می‌شود.

زیرمجموعه

فرض کنید مجموعه‌هایی مثل $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ و $B = \{۲ , ۳\}$ داریم. اگر خوب دقت کنید متوجه می‌شوید که همهٔ اعضای مجموعهٔ B در مجموعهٔ A نیز وجود دارند. در این‌جا اصطلاحاً گفته می‌شود، B زیرمجموعهٔ A است.

برای نمایش زیرمجموعه بودن، از علامت $\subset$ استفاده می‌کنیم. $(B \subset A)$. اما اگر B عضو یا عضوهایی داشته باشد که درون A وجود نداشته باشند (حتی یک عضو)، آن‌گاه دیگر B زیرمجموعهٔ A به‌حساب نمی‌آید. برای نمایش زیرمجموعه نبودن، از علامت $\not\subset$ استفاده می‌کنیم. مثلاً اگر $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ و $B = \{۱ , ۲ , ۳ , ۵\}$ باشد، دیگر B زیرمجموعهٔ A نیست، زیرا B دارای عضو ۵ است که در A وجود ندارد $(B \not\subset A)$.

مثال ۱۷ **آیا $A=\{(۵-۳)^{۲}-۶ \,,\, -۱۰^{۰}-۳\}$ زیرمجموعهٔ { قرینهٔ شمارنده‌های عدد ۸ } = B است یا خیر؟**

$$A=\{\underbrace{\underbrace{(۵-۳)^{۲}}_{۴}-۶}_{-۲} \,,\, \underbrace{\underbrace{-۱۰^{۰}}_{-۱}-۳}_{-۴}\} \Rightarrow A=\{-۲ \,,\, -۴\}$$

$$\text{شمارنده‌های عدد ۸}=\{۱ , ۲ , ۴ , ۸\} \xrightarrow{\text{قرینه}} B=\{-۱ , -۲ , -۴ , -۸\} \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۱۸ **اگر { مضارب ۱۲ } = A و { مضارب ۶ } = B باشند، کدام‌یک زیرمجموعهٔ دیگری است؟**

$$A=\{\underline{۱۲} , \underline{۲۴} , \underline{۳۶} , \underline{۴۸} , ۶۰ , ۷۲ , ...\} \qquad B=\{۶ , \underline{۱۲} , ۱۸ , \underline{۲۴} , ۳۰ , \underline{۳۶} , ۴۲ , \underline{۴۸} , ...\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، وقتی اعضای مجموعهٔ B را می‌نویسیم، همهٔ اعضای مجموعهٔ A در آن ظاهر می‌شوند ($A \subset B$ می‌باشد)، اما برخی اعضای B (مثل ۶) در A وجود ندارند، پس $B \not\subset A$ نمی‌باشد.

نکته

۱) مجموعهٔ تهی ($\varnothing$)، زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است، یعنی اگر یک مجموعهٔ دلخواه مثل A داشته باشیم، $\varnothing \subset A$.

۲) هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است، یعنی اگر یک مجموعه‌ای مثل $A=\{۱ , ۲\}$ داشته باشیم، $A \subset A$، زیرا همهٔ عضوهای A در خودش وجود دارند. با این حساب، حتی $\varnothing$ زیرمجموعهٔ خودش است $\varnothing \subset \varnothing$.

نوشتن همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فرض کنید یک مجموعه مثل $A=\{۱ , ۲ , ۳\}$ داریم. برای نوشتن همهٔ مجموعه‌هایی که زیرمجموعهٔ A هستند، باید از راهبرد الگوسازی که در سال هفتم آموختیم، استفاده کنیم. (یعنی کار را با یک نظم خاص انجام دهیم). برای این منظور، از مجموعهٔ تهی شروع می‌کنیم. (مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد و زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.) بعد به سراغ مجموعه‌های یک‌عضوی می‌رویم. می‌دانیم برای A مجموعه‌های یک‌عضوی که زیرمجموعهٔ A هستند (عضوهای آن‌ها در A وجود دارد) $\{۱\}$، $\{۲\}$ و $\{۳\}$ می‌باشند.

بعد از آن به سراغ مجموعه‌های ۲عضوی می‌رویم که عضوهای آن‌ها درون A هستند. (باید با اعداد ۱، ۲ و ۳ مجموعه‌های ۲عضوی بنویسیم). این مجموعه‌ها شامل $\{۱ , ۲\}$، $\{۱ , ۳\}$ و $\{۲ , ۳\}$ هستند. اکنون به سراغ مجموعه‌های ۳عضوی می‌رویم که عضوهای آن‌ها، در مجموعهٔ A حضور دارند. تنها مجموعه‌ای که می‌توانیم بنویسیم، $\{۱ , ۲ , ۳\}$، یعنی خود A است. هرگاه در نوشتن زیرمجموعه‌های یک‌مجموعه، به‌خود مجموعه برسیم، کار تمام است و همهٔ زیرمجموعه‌ها را نوشته‌ایم.

$$\text{زیرمجموعه‌های A}=\varnothing , \{۱\} , \{۲\} , \{۳\} , \{۱ , ۲\} , \{۱ , ۳\} , \{۲ , ۳\} , \{۱ , ۲ , ۳\}$$

مثال ۱۹ **همهٔ زیرمجموعه‌های $A=\{-۱ , ۰ , ۲ , ۵\}$ را بنویسید.**

$$\varnothing , \underbrace{\{-۱\} , \{۰\} , \{۲\} , \{۵\}}_{\text{یک‌عضوی‌ها}} , \underbrace{\{-۱ , ۰\} , \{-۱ , ۲\} , \{-۱ , ۵\} , \{۰ , ۲\} , \{۰ , ۵\} , \{۲ , ۵\}}_{\text{دوعضوی‌ها}}$$

$$\underbrace{\{-۱ , ۰ , ۲\} , \{-۱ , ۰ , ۵\} , \{-۱ , ۲ , ۵\} , \{۰ , ۲ , ۵\}}_{\text{سه‌عضوی‌ها}} , \underbrace{\{-۱ , ۰ , ۲ , ۵\}}_{\text{چهارعضوی (خود مجموعه)}}$$

تذکر: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با ۲^{n}.

به مثال قبل دقت کنید. یک مجموعهٔ ۴عضوی، $۲^{۴}$ زیرمجموعه، یعنی ۱۶ زیرمجموعه دارد.

مثال ۲۰ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $\mathbf{2n-1}$ عضوی برابر ۳۲ می‌باشد. این مجموعه چند عضو دارد؟

$$۲^{۲n-۱} = ۳۲ \Rightarrow ۲^{۲n-۱} = ۲^{۵} \Rightarrow ۲n - ۱ = ۵ \Rightarrow ۲n = ۶ \Rightarrow n = ۳$$

تذکر: تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی هر مجموعه، از رابطهٔ $\dfrac{\text{یکی کم‌تر} \times \text{تعداد اعضا}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲۱ تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی را به‌دست آورید.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی} = \frac{\text{یکی کم‌تر} \times \text{تعداد اعضا}}{۲} \Rightarrow \frac{۱۰ \times ۹}{۲} = ۴۵$$

مثال ۲۲ مجموعهٔ ۵عضوی $A = \{۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰\}$ مفروض است. برای این مجموعه، چند زیرمجموعهٔ ۴عضوی می‌توان نوشت؟

اگر کمی فکر کنید، مشاهده می‌کنید هرگاه یک زیرمجموعهٔ یک‌عضوی برای A می‌نویسیم، با عضوهای باقی‌مانده می‌توان یک زیرمجموعهٔ ۴عضوی نوشت، پس تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی آن، ۵تا است. (به‌اندازهٔ تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی آن)

$\{۱۰\} \downarrow \{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$
$\{۸\} \downarrow \{۲ , ۴ , ۶ , ۱۰\}$
$\{۶\} \downarrow \{۲ , ۴ , ۸ , ۱۰\}$
$\{۴\} \downarrow \{۲ , ۶ , ۸ , ۱۰\}$
$\{۲\} \downarrow \{۴ , ۶ , ۸ , ۱۰\}$

مثال ۲۳ برای مجموعهٔ $A = \{۲ , ۳ , ۱۰ , ۱۱\}$، چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که شامل عضوهای ۲ و ۳ باشند؟

کافی است مجموعهٔ $\{۲ , ۳\}$ را بنویسیم و به آن عضو یا عضوهایی اضافه کنیم تا زیرمجموعه‌های جدید ایجاد شود:

$\{۲ , ۳\}$ ↓ ۱۰ و ۱۱ را اضافه کنیم $\{۲ , ۳ , ۱۰ , ۱۱\}$
$\{۲ , ۳\}$ ↓ ۱۱ را اضافه کنیم $\{۲ , ۳ , ۱۱\}$
$\{۲ , ۳\}$ ↓ ۱۰ را اضافه کنیم $\{۲ , ۳ , ۱۰\}$
$\{۲ , ۳\}$ ↓ عضو دیگری را اضافه نکنیم $\{۲ , ۳\}$

پس ۴ زیرمجموعه می‌توانیم بنویسیم که شامل $\{۲ , ۳\}$ باشد.

مثال ۲۴ اگر $\{۱ , ۲\} \subset A \subset \{۱ , ۲ , ۴ , ۵\}$ باشد، برای A چند مجموعه می‌توان نوشت؟

چون $\{۱ , ۲\} \subset A$ است، پس در همهٔ مجموعه‌هایی که به‌جای A می‌نویسیم، باید ۱ و ۲ وجود داشته باشند. (شبیه مثال قبل) و از آن‌جا که $A \subset \{۱ , ۲ , ۴ , ۵\}$ است، پس برای A، حداکثر از اعداد ۱، ۲، ۴ و ۵ می‌توان استفاده کرد:

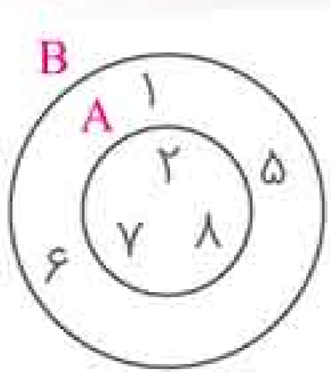
$\{۱ , ۲\}$ ↓ ۴ و ۵ را اضافه کنیم $\{۱ , ۲ , ۴ , ۵\}$
$\{۱ , ۲\}$ ↓ ۵ را اضافه کنیم $\{۱ , ۲ , ۵\}$
$\{۱ , ۲\}$ ↓ ۴ را اضافه کنیم $\{۱ , ۲ , ۴\}$
$\{۱ , ۲\}$ ↓ عضو دیگری را اضافه نکنیم $\{۱ , ۲\}$

در نتیجه ۴ مجموعه می‌توان برای A نوشت.

نکته

اگر مجموعه‌ای مثل A زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مثل B باشد، در هنگام رسم نمودار وِن، حلقهٔ A کاملاً درون حلقهٔ B قرار می‌گیرد.

مثال ۲۵ اگر $A = \{۲ , ۷ , ۸\}$ و $B = \{۱ , ۲ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸\}$ باشند، نمودار وِن آن‌ها به چه صورت رسم می‌شود؟



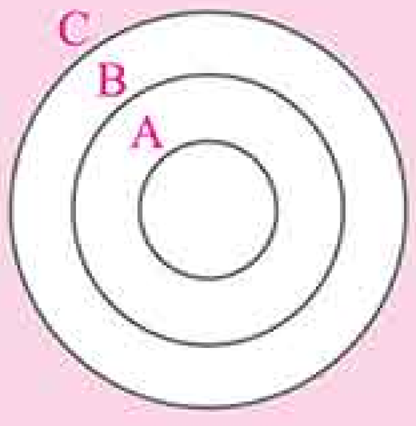
$A \subset B$

نکته

اگر A زیرمجموعهٔ B و B زیرمجموعهٔ C باشد ($A \subset B \subset C$)، حتماً A زیرمجموعهٔ C است.

این موضوع را هم با مثال عددی و هم با نمودار ون می‌توان دید.

$\overbrace{\{۱ , ۲\}}^{A} \subset \overbrace{\{۱ , ۲ , ۳\}}^{B} \subset \overbrace{\{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}}^{C} \Rightarrow A \subset C$ (اعضای A درون C قرار دارند)



(A درون C است، پس $A \subset C$ می‌باشد)

مجموعه‌های عددی مهم

همان‌طور که تا اینجای کار مشاهده کرده‌اید، در بحث مجموعه‌ها، می‌توان بی‌شمار مجموعهٔ عددی مختلف تشکیل داد. اما در بین این مجموعه‌ها، برخی از آن‌ها بسیار پرکاربرد هستند. بنابراین برای آن‌ها اسامی مشخصی استفاده می‌شود (حروف خاصی)، تا همهٔ افراد با دیدن آن حروف، بفهمند که منظور کدام مجموعه است. در این‌جا برخی از آن‌ها را می‌نویسیم.

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ...\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W}$ یا $I = \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$

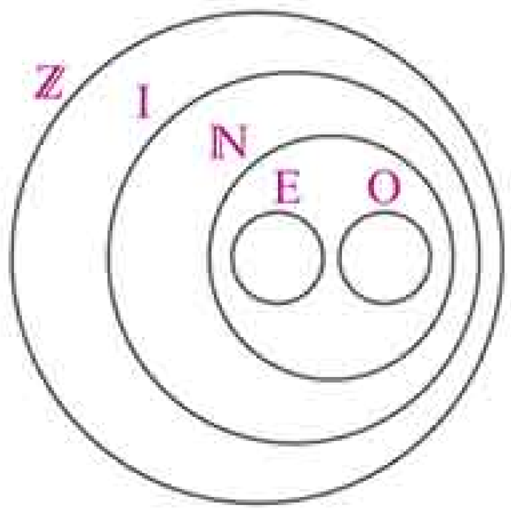
مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{... , -۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$

مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد: $O = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ...\}$

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج: $E = \{۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ...\}$

با توجه به آن‌چه که تاکنون در مورد زیرمجموعه‌ها آموختیم، می‌توان گفت:

$$E , O \subset \mathbb{N} \subset I \subset \mathbb{Z}$$



محدوده‌های عددی

در سال‌های قبل با علامت‌های $<$، $\leq$ آشنا شده‌اید. اکنون مروری بر این علامت‌ها می‌کنیم. اگر به‌عنوان مثال نوشته شود $-۲ < ۵$، یعنی عدد ۲- از ۵ کوچک‌تر است. حال گاهی ما به‌جای ۲- با چندین عدد سروکار داریم. بنابراین به‌جای همهٔ آن‌ها حرفی مثل x می‌نویسیم. مثلاً می‌نویسیم $x < ۵$ که معنی آن این است که اعداد موردنظر ما از ۵ کوچک‌تر هستند. یا هنگامی‌که به‌عنوان مثال می‌نویسیم $x \leq ۵$، یعنی اعداد موردنظر ما از ۵ کوچک‌تر هستند و خود ۵ هم می‌تواند عدد موردنظر ما باشد. $x > ۵$ یعنی اعداد موردنظر ما از ۵ بزرگ‌تر هستند و $x \geq ۵$ یعنی اعداد موردنظر ما از ۵ بزرگ‌تر هستند و خود ۵ هم می‌تواند عدد موردنظر ما باشد.

تذکر:

گاهی این علامت‌ها (بزرگ‌تر و کوچک‌تر) باهم ترکیب می‌شوند که در این‌جا چند مثال آورده‌ایم.

$-۵ < x < ۳$: اعداد موردنظر ما از ۵- بزرگ‌ترند و از ۳ کوچک‌ترند (۵- و ۳ نمی‌توانند جزو آن اعداد باشند)

$-۵ \leq x < ۳$: اعداد موردنظر ما از ۵- بزرگ‌ترند و از ۳ کوچک‌ترند (۵- می‌تواند جزو اعداد ما باشد اما ۳ نمی‌تواند)

$-۵ < x \leq ۳$: اعداد موردنظر ما از ۵- بزرگ‌ترند و از ۳ کوچک‌ترند (۵- نمی‌تواند جزو اعداد ما باشد ولی ۳ می‌تواند)

$-۵ \leq x \leq ۳$: اعداد موردنظر ما از ۵- بزرگ‌ترند و از ۳ کوچک‌ترند (هم ۵- و هم ۳- می‌توانند جزو اعداد ما باشند)

نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی

در ابتدای فصل گفتیم برخی عبارت‌های کلامی یک مجموعه را توضیح می‌دهند. (مثلاً مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۱۲). اکنون می‌خواهیم عبارت‌های ریاضی را بیاموزیم که یک مجموعه را توضیح می‌دهند. برای این‌کار باید بدانیم هر عبارت ریاضی که یک مجموعه را توضیح می‌دهد، معمولاً به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

{محدودهٔ اعداد موردنظر عضو چه مجموعه‌ای هستند | رابطه‌ای که اعداد را در آن قرار می‌دهیم }

خطّ عمودی «|» که در شکل بالا می‌بینید، معنی به‌صورتی‌که می‌دهد. به‌عنوان اوّلین مثال، مجموعهٔ زیر را درنظر بگیرید.

$$A=\{x \mid \underbrace{x\in\mathbb{N}}_{\text{اعداد موردنظر عضو اعداد طبیعی هستند.}} , \underbrace{۲\le x<۱۰}_{\text{اعداد موردنظر از ۲ بزرگ‌تر و از ۱۰ کوچک‌ترند (خود ۲هم هست)}}\}$$

با توجه به تعریف ریاضی که آمده است، اعداد موردنظر ما شامل ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ هستند و چون در سمت چپ خطّ عمودی، فقط x نوشته شده «$x\mid$»، پس نیازی نیست روی آن‌ها تغییر بدهیم. $A=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

مثال ۲۶ اعضای مجموعهٔ $\{۲x+۱ \mid x\in\mathbb{Z} , -۳<x\le ۲\}$ را بنویسید.

$x\in\mathbb{Z}$، یعنی اعداد موردنظر ما عدد صحیح هستند. $-۳<x\le ۲$ یعنی اعداد موردنظر ما از ۳- بزرگ‌تر و از ۲ کوچک‌ترند و خود ۲ هم عضو اعداد است $(-۲,-۱,۰,۱,۲)$. هم‌چنین عبارت $۲x+۱$ نشان می‌دهد که ما باید این اعداد را در این رابطه قرار دهیم (۲ برابر کرده و یک واحد به آن اضافه کنیم) تا اعضای مجموعهٔ A به‌دست آید:

$$A=\{\underbrace{۲\times(-۲)+۱}_{-۳},\underbrace{۲\times(-۱)+۱}_{-۱},\underbrace{۲\times(۰)+۱}_{+۱},\underbrace{۲\times(+۱)+۱}_{+۳},\underbrace{۲\times(+۲)+۱}_{+۵}\}\Rightarrow A=\{-۳,-۱,+۱,+۳,+۵\}$$

مثال ۲۷ اعضای مجموعهٔ $A=\{\frac{x+۱}{x+۲} \mid x\in I , x<۵\}$ را بنویسید.

$x\in I$، نشان می‌دهد که اعداد موردنظر جزو اعداد حسابی هستند و $x<۵$ یعنی آن‌ها از ۵ کوچک‌ترند. از آن‌جا که اعداد حسابی از صفر شروع می‌شوند، پس اعداد موردنظر ما شامل $(۴,۳,۲,۱,۰)$ هستند. کافی است آن‌ها را درون رابطهٔ $\frac{x+۱}{x+۲}$ قرار دهیم، تا اعضای مجموعه به‌دست آیند:

$$A=\{\frac{(۰)+۱}{(۰)+۲},\frac{(۱)+۱}{(۱)+۲},\frac{(۲)+۱}{(۲)+۲},\frac{(۳)+۱}{(۳)+۲},\frac{(۴)+۱}{(۴)+۲}\}=\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶}\}$$

مثال ۲۸ اعضای مجموعهٔ $A=\{۲^x \mid x\in\mathbb{N}\}$ را بنویسید.

$x\in\mathbb{N}$، یعنی اعداد موردنظر ما جزو اعداد طبیعی هستند و چون برای آن محدوده نوشته نشده، یعنی همهٔ اعداد طبیعی $(۱,۲,۳,\ldots)$ موردنظر ما هستند. کافی است آن‌ها را در رابطهٔ ۲^x قرار دهیم:

$$A=\{۲^{(۱)},۲^{(۲)},۲^{(۳)},۲^{(۴)},\ldots\}\Rightarrow A=\{۲,۴,۸,۱۶,\ldots\}$$

مثال ۲۹ اعضای مجموعهٔ $A=\{x^۲ \mid x\in E , ۱۰<x\}$ را بنویسید.

$x\in E$، یعنی اعداد موردنظر ما اعداد زوج طبیعی هستند و $x>۱۰$ یعنی آن‌ها از ۱۰ بزرگ‌ترند $(۱۲,۱۴,۱۶,\ldots)$ اکنون باید آن‌ها را در رابطهٔ $x^۲$ قرار دهیم: $A=\{۱۲^۲,۱۴^۲,۱۶^۲,\ldots\}\Rightarrow A=\{۱۴۴,۱۹۶,۲۵۶,\ldots\}$

نکته

گاهی پس از به‌دست آوردن اعضای مجموعه مشاهده می‌کنیم برخی از آن‌ها تکراری هستند. در این حالت باید آن‌ها را حذف کنیم.

مثال ۳۰ **اعضای مجموعهٔ $A=\{x^2+1 \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ -4<x<3\}$ را به‌دست آورید.**

$x\in\mathbb{Z}$ ، یعنی اعداد موردنظر ما صحیح هستند و $-4<x<3$ ، یعنی اعداد موردنظر ما از ۴- بزرگ‌تر و از ۳ کوچک‌ترند (۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲- , ۳-). پس کافی است آن‌ها را در رابطهٔ x^2+1 قرار دهیم:

$$A=\{(-3)^2+1\ ,\ (-2)^2+1\ ,\ (-1)^2+1\ ,\ (0)^2+1\ ,\ (+1)^2+1\ ,\ (+2)^2+1\}=\{10\ ,\ 5\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \cancel{2}\ ,\ \cancel{5}\}=A=\{1\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 10\}$$

مثال ۳۱ **اگر $A=\{x-1 \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ -4<x\le 2\}$ و $B=\{a+2 \mid a\in A\ ,\ -2<a\}$ باشد، اعضای مجموعهٔ B را به‌دست آورید.**

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، برای پیدا کردن اعضای مجموعهٔ B ، باید ابتدا اعضای مجموعهٔ A را پیدا کنیم. در مجموعهٔ A اعداد موردنظر صحیح هستند ($x\in\mathbb{Z}$) و شامل (۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲- , ۳-) می‌شوند.

حال باید آن‌ها را در رابطهٔ $x-1$ قرار دهیم: $A=\{(-3)-1\ ,\ (-2)-1\ ,\ (-1)-1\ ,\ (0)-1\ ,\ (1)-1\ ,\ (2)-1\}=\{-4\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\}$

برای مجموعهٔ B ، اعداد موردنظر باید عضو A باشند و از ۲- بزرگ‌تر باشند. پس این اعداد شامل (۱ , ۰ , ۱-) هستند. کافی است آن‌ها را در رابطهٔ $a+2$ قرار دهیم:

$$B=\{(-1)+2\ ,\ (0)+2\ ,\ (+1)+2\}=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$$

نکته

گاهی در توضیح یک مجموعه به زبان ریاضی، در قسمتی که محدودهٔ اعداد نوشته می‌شود، یک عبارت نوشته شده که با توجه به آن اعداد را باید پیدا کنیم.

مثال ۳۲ **اعضای مجموعهٔ $\{-x+1 \mid x\in\mathbb{N}\ ,\ \sqrt{x}<10\}$ را بنویسید.**

$x\in\mathbb{N}$ ، یعنی اعداد موردنظر ما، اعداد طبیعی هستند و $\sqrt{x}<10$ ، یعنی جذر آن‌ها کم‌تر از ۱۰ است. می‌دانیم $\sqrt{100}=10$ است، پس اعداد موردنظر ما باید از ۱۰۰ کوچک‌تر باشند تا جذر آن‌ها از ۱۰ کم‌تر شود (۹۹ , ... , ۳ , ۲ , ۱). کافی است آن‌ها را در رابطهٔ $-x+1$ قرار دهیم (آن‌ها را قرینه کنیم و یک واحد به آن‌ها اضافه کنیم):

$$A=\{-1+1\ ,\ -2+1\ ,\ -3+1\ ,\ \ldots\ ,\ -99+1\}\Rightarrow A=\{0\ ,\ -1\ ,\ -2\ ,\ \cdots\ ,\ -98\}$$

تذکر مهم:

شاید بپرسید اعضایی را که ما به‌دست آوردیم، صفر یا منفی هستند و عضو $\mathbb{N}$ نیستند. باید یاد آور شویم که اعضای مجموعه حتماً نباید عضو $\mathbb{N}$ باشند، بلکه اعدادی که ما به‌جای x پیدا می‌کنیم، باید شرایطی که مجموعه گفته است را داشته باشند.

مثال ۳۳ **اعضای مجموعهٔ $A=\{2x-1 \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ x^2\le 10\}$ را به‌دست آورید.**

می‌دانیم $x\in\mathbb{Z}$ ، یعنی اعداد موردنظر ما اعداد صحیح هستند و $x^2\le 10$ ، یعنی اعداد موردنظر ما، اعداد صحیحی هستند که اگر آن‌ها را به‌توان ۲ برسانیم، کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ می‌شوند. می‌دانیم اعداد صحیح، شامل اعداد مثبت، صفر و اعداد منفی‌اند و اعداد منفی هم هنگامی‌که به توان زوج می‌رسند، به اعداد مثبت تبدیل می‌شوند. اعدادی که دنبال آن‌ها می‌گردیم، اعداد ۳ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲- , ۳- هستند، زیرا اعداد دیگر مثل ۴- یا ۴+ را اگر به توان ۲ برسانیم، حاصل ۱۶ می‌شود که از ۱۰ بزرگ‌تر هستند. کافی است اعدادی را که پیدا کرده‌ایم، در رابطهٔ $2x-1$ قرار دهیم:

$$A=\{2\times(-3)-1\ ,\ 2\times(-2)-1\ ,\ 2\times(-1)-1\ ,\ \ldots\ ,\ 2\times(+2)-1\ ,\ 2\times(+3)-1\}=\{-7\ ,\ -5\ ,\ -3\ ,\ \ldots\ ,\ 3\ ,\ 5\}$$

مثال ۳۴ اعضای مجموعهٔ $A = \{\frac{x-1}{x+1} \mid \frac{40}{x} \in \mathbb{N}\}$ را بنویسید.

در این سؤال $\frac{40}{x} \in \mathbb{N}$، یعنی اعدادی که اگر ۴۰ را بر آن‌ها تقسیم کنیم، حاصل تقسیم عددی طبیعی شود، یا به‌عبارتی ۴۰ بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد (شمارنده‌های طبیعی ۴۰). پس اعداد موردنظر ما (۴۰ ، ۲۰ ، ۱۰ ، ۸ ، ۵ ، ۴ ، ۲ ، ۱) هستند. کافی است آن‌ها را در رابطهٔ $\frac{x-1}{x+1}$ قرار دهیم:

$$A = \{\frac{1-1}{1+1}, \frac{2-1}{2+1}, \frac{4-1}{4+1}, \frac{5-1}{5+1}, \frac{8-1}{8+1}, \frac{10-1}{10+1}, \frac{20-1}{20+1}, \frac{40-1}{40+1}\} \Rightarrow A = \{\frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{19}{21}, \frac{39}{41}\}$$

مثال ۳۵ اعضای مجموعهٔ $A = \{2^{xy} \mid x, y \in \mathbb{N} , x + y = 5\}$ را بنویسید.

ظاهر این سؤال، کمی با بقیهٔ مثال‌هایی که تاکنون دیدید، تفاوت دارد. اما حلّ آن مثل قبلی‌ها است. $x , y \in \mathbb{N}$، یعنی اعداد موردنظر ما طبیعی هستند و $x + y = 5$، یعنی دو عدد طبیعی که جمع آن‌ها برابر با ۵ باشد. حالت‌های موردنظر $(x = 1 , y = 4)$، $(x = 2 , y = 3)$، $(x = 3 , y = 2)$ و $(x = 4 , y = 1)$ هستند. دقت کنید صفر جزو اعداد طبیعی **نیست**، پس **نمی‌توانیم** حالت $x = 0 , y = 5$ را قبول کنیم.

کافی است اعداد به‌دست‌آمده را در رابطهٔ 2^{xy} قرار دهیم و عضوهای تکراری را حذف کنیم:

$$A = \{2^{1\times4} , 2^{2\times3} , 2^{3\times2} , 2^{4\times1}\} = \{2^4 , 2^6 , 2^6 , 2^4\} = \{16 , 64 , \cancel{64} , \cancel{16}\} = \{16 , 64\}$$

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی

تا کنون مثال‌هایی را دیدیم که در آن مجموعه به زبان ریاضی توضیح داده شده بود و ما می‌بایست اعضای آن را مشخص می‌کردیم. اکنون می‌خواهیم برعکس این کار را انجام دهیم. یعنی از روی اعضای یک مجموعه، آن را به زبان ریاضی توضیح دهیم. برای این کار کافی است ابتدا رابطهٔ بین عضوهای مجموعه را مشخص کرده و از روی آن رابطه، مشخص کنیم که این اعضاء چگونه ساخته شده‌اند. در این‌جا با چند مثال این کار را می‌آموزیم.

مثال ۳۶ مجموعهٔ $A = \{-7 , -6 , -5 , \dots , 11\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

مشاهده می‌کنید اعضای این مجموعه همگی عضو مجموعهٔ اعداد صحیح $(x \in \mathbb{Z})$ و از ۷- تا ۱۱+ هستند $(-7 \le x \le 11)$. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} , -7 \le x \le 11\}$$

دقت کنید در مثال قبل، به‌جای $-7 \le x \le 11$ می‌توانستیم عبارت‌های $-8 < x < 12$ یا $-7 \le x < 12$ یا $-8 < x \le 11$ را هم بنویسیم.

مثال ۳۷ مجموعهٔ $A = \{0 , 1 , 2 , 3 , \dots , 57\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

مشاهده می‌کنید که این مجموعه شامل اعداد حسابی است (چون صفر را هم درخود دارند) $(x \in I)$ و عضوها شامل اعداد کوچک‌تر از ۵۸ $(x < 58)$ یا کوچک‌تر مساوی ۵۷ $(x \le 57)$ هستند. پس می‌توان نوشت $A = \{x \mid x \in I , x \le 57\}$. دقت کنید چون مجموعهٔ اعداد حسابی از صفر شروع می‌شوند، پس دیگر نیازی **نیست** بنویسیم $0 \le x \le 57$ و همین که بگوییم $x \le 57$ یا $x < 58$ کافی است.

مثال ۳۸ اعضای مجموعهٔ $\{17 , 19 , 21 , 23 , \dots\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

این مجموعه شامل اعداد فرد طبیعی هستند $(x \in O)$ که از ۱۷ شروع می‌شوند $(17 \le x)$. پس می‌توان نوشت $\{x \mid x \in O , x \ge 17\}$ یا $\{x \mid x \in O , 15 < x\}$.

نکته

گاهی عضوهای مجموعه پشت سرهم **نیستند**، حتی اعداد فرد یا زوج پشت سرهم **نیستند**. اعضای این مجموعه‌ها می‌توانند رابطه‌های مختلفی داشته باشند (مضارب یک عدد باشند، توان‌های یک عدد باشند، شمارنده‌های یک عدد باشند یا ...). گام اوّل این است که رابطهٔ بین آن‌ها را پیدا کنیم. در این‌جا سعی می‌کنیم چند نمونه از آن‌ها را مثال بزنیم تا شما بیش‌تر با آن‌ها آشنا شوید.

مثال ۳۹ **مجموعهٔ $\{۹۵ , ... , ۲۵ - , ۳۰ - , ۳۵ -\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.**

با دقت به اعداد داده‌شده، مشاهده می‌کنید این اعداد ۵تا ۵تا باهم فاصله دارند و مضارب عدد ۵ هستند $(۵x)$. اما برای این‌که مجموعه را به زبان ریاضی بنویسیم، باید ببینیم چه اعدادی در ۵ ضرب شده‌اند و این عضوها را ساخته‌اند (x ها را پیدا کنیم).

برای این‌کار عضوهای مجموعه را به‌صورت $\{۵\times ۱۹ , ... , ۵\times ۵- , ۵\times ۶- , ۵\times ۷-\}$ درنظر می‌گیریم. پس فهمیدیم اعدادی که در ۵ ضرب شده‌اند $(۱۹ , ... , ۵- , ۶- , ۷-)$ هستند. این اعداد، همگی صحیح هستند $(x \in \mathbb{Z})$ و از ۷- شروع شده و تا ۱۹ ادامه دارند $(-۷ \le x \le ۱۹)$.

پس می‌توان نوشت: $A = \{۵x \mid x \in \mathbb{Z} , -۷ \le x \le ۱۹\}$

مثال ۴۰ **مجموعهٔ $\{... , ۱۲۸ , ۶۴ , ۳۲ , ۱۶\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.**

بین این اعداد فاصلهٔ مساوی وجود ندارد، اما اگر دقت کنید هر عدد دو برابر شده و عدد بعدی را ساخته است:

$$(۱۶ \xrightarrow{\times ۲} ۳۲ \xrightarrow{\times ۲} ۶۴ \xrightarrow{\times ۲} ۱۲۸)$$

معمولاً در این نوع رشته‌ها، اعداد داده‌شده توان‌های همان عددی هستند که بالای فلش‌ها نوشته می‌شوند (در این‌جا عدد ۲)، $(۲^۷ = ۱۲۸ , ۲^۶ = ۶۴ , ۲^۵ = ۳۲ , ۲^۴ = ۱۶)$. پس نتیجه می‌گیریم عضوهای مجموعهٔ ما، توان‌های عدد ۲ هستند (۲^x) که در آن، ۲ را به توان اعداد $(... , ۷ , ۶ , ۵ , ۴)$ رسانده‌ایم. این اعداد طبیعی هستند $(x \in \mathbb{N})$ و از ۴ شروع می‌شوند $(۴ \le x)$.

پس می‌توان گفت: $A = \{۲^x \mid x \in \mathbb{N} , ۴ \le x\}$

مثال ۴۱ **مجموعهٔ $A = \{۳۶ , ۴۹ , ۶۴ , ... , ۱۰۰۰۰\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.**

در این مثال، نه تنها فاصلهٔ بین اعداد مساوی نیست، بلکه حتی مانند مثال قبل، نمی‌توان با ضرب هر عضو در یک عدد ثابت، عدد بعدی را ساخت.

اکنون به سه عضو اوّل این مجموع دقت کنید $(۶۴ , ۴۹ , ۳۶)$. اگر کمی دقت کنید، این اعداد همان اعدادی هستند که جذر صحیح دارند، یا به‌عبارتی از ضرب یک عدد صحیح در خودش ساخته شده‌اند $(\overbrace{۸\times ۸}^{۶۴} , \overbrace{۷\times ۷}^{۴۹} , \overbrace{۶\times ۶}^{۳۶})$ که می‌توان آن‌ها را به‌صورت $\{۱۰۰^۲ , ... , ۸^۲ , ۷^۲ , ۶^۲\}$ درنظر گرفت، یعنی مجموعهٔ ما، شامل مربع برخی اعداد است $(x^۲)$. اعدادی که ما آن‌ها را به‌توان ۲ رسانده‌ایم $(۱۰۰ , ... , ۸ , ۷ , ۶)$ اعداد طبیعی هستند $(x \in \mathbb{N})$، از ۶ شروع می‌شوند و تا ۱۰۰ ادامه دارند $(۶ \le x \le ۱۰۰)$. پس می‌توان نوشت: $A = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{N} , ۶ \le x \le ۱۰۰\}$

مثال ۴۲ **مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۲ , ۲۴\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.**

قطعاً شما هم متوجه شده‌اید که هیچ‌کدام از راه‌هایی که برای حلّ مجموعه‌های قبلی استفاده کردیم، در مورد این مجموعه به‌کار نمی‌آید، زیرا اعداد کاملاً نامنظم به‌نظر می‌رسند. اما اگر به درس‌های سال هفتم برگردیم، متوجه می‌شویم که این مجموعه، شمارنده‌های عدد ۲۴ هستند. یعنی اعدادی هستند که اگر ۲۴ را بر آن‌ها تقسیم کنیم، خارج‌قسمت عدد طبیعی می‌شود $(\frac{۲۴}{x} \in \mathbb{N})$. خود این اعداد (x ها) همگی اعداد طبیعی هستند. پس می‌توان نوشت: $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{N} , \frac{۲۴}{x} \in \mathbb{N}\right\}$

اشتراک

در ابتدای فصل، هنگامی‌که مجموعه‌ها را با نمودار وِن نشان می‌دادیم، مشاهده می‌کردیم که برخی از اعداد، عضو مشترک دو یا چند مجموعه هستند. مثلاً در $A = \{۱ , \underline{۲} , \underline{۳} , ۴\}$ و $B = \{\underline{۲} , \underline{۳} , ۵ , ۷\}$، اعداد ۲ و ۳، عضوهای مشترک A و B هستند. اگر این اعداد را درون یک مجموعه قرار دهیم (با این اعداد یک مجموعه تشکیل دهیم $\{۲ , ۳\}$)، به این مجموعه، مجموعهٔ اشتراک A و B می‌گوییم و آن را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم: $A \cap B = \{۲ , ۳\}$

مثال ۴۳ **مجموعهٔ اشتراک $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$ ، $B = \{۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸\}$ و $C = \{۶ , ۷ , ۸ , ۹\}$ را بنویسید.**

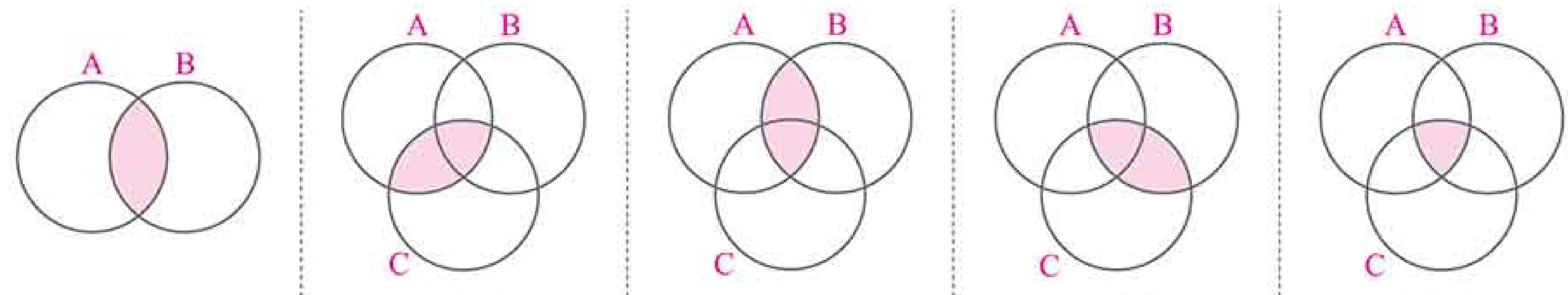
تنها عددی که عضو هر سه مجموعه است، عدد ۶ می‌باشد، پس: $A \cap B \cap C = \{۶\}$

دقت کنید عددی مثل ۴، در دو مجموعهٔ A و B وجود دارد، اما چون در مجموعهٔ C وجود ندارد، پس عضو مجموعهٔ اشتراک نیست.

نمایش اشتراک مجموعه‌ها روی نمودار وِن

همان‌طور که گفتیم، به اعضای مشترک دو یا چند مجموعه، اشتراک آن‌ها گفته می‌شود.

در هنگام رسم نمودار وِن، برای دو یا چند مجموعه، اعضای مشترک را در قسمت‌های مشترک شکل‌ها (قسمت‌هایی که روی هم قرار می‌گیرند) می‌نویسیم. در این‌جا ابتدا با رنگ، اشتراک مجموعه‌ها را روی نمودار وِن نمایش می‌دهیم.



$A \cap B \cap C$ | $B \cap C$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ | $A \cap B$

مثال ۴۴ **مجموعه‌های $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ ، $B = \{۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹ , ۱۰\}$ و $C = \{۱ , ۲ , ۳ , ۷ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲\}$ را روی نمودار وِن نمایش داده و اشتراک‌های دوبه‌دو و اشتراک سه مجموعه را بنویسید.**

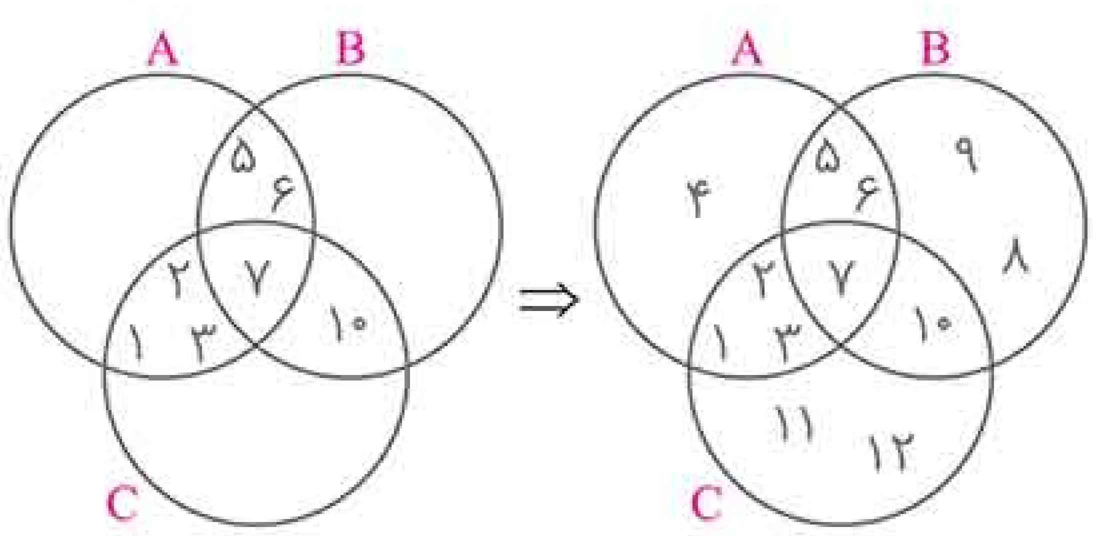
بهتر است ابتدا $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $B \cap C$ و $A \cap B \cap C$ را به‌دست آوریم و آن‌ها را درون نمودار بنویسیم و سپس با نوشتن عضوهای باقی‌مانده، نمودار را کامل کنیم:

$A \cap B = \{۵ , ۶ , ۷\}$

$A \cap C = \{۱ , ۲ , ۳ , ۷\}$

$B \cap C = \{۷ , ۱۰\}$

$A \cap B \cap C = \{۷\}$



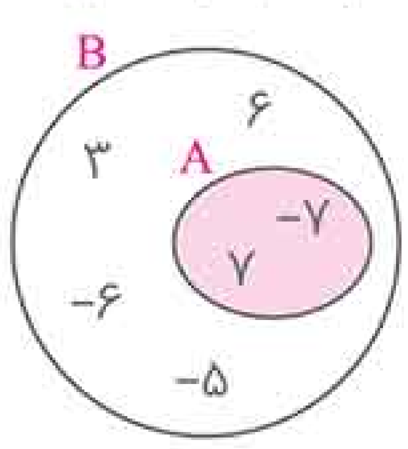
نکته

اگر مجموعه‌ای مثل A داشته باشیم که زیرمجموعهٔ B باشد، یعنی همهٔ عضوهای A در B باشند $(A \subset B)$، آن‌گاه اشتراک آن‌ها، همان مجموعهٔ کوچک‌تر $(A \cap B = A)$ است، زیرا اعضای مجموعهٔ کوچک‌تر، در هر دو مجموعه وجود دارند.

مثال ۴۵ **با یک مثال عددی و نیز نمودار وِن، نشان دهید اگر $A \subset B$ باشد، آن‌گاه $A \cap B = A$ است.**

فرض کنید $A = \{۷ , -۷\}$ و $B = \{۳ , ۶ , ۷ , -۷ , -۶ , -۵\}$ باشد $(A \subset B)$، آن‌گاه داریم:

$A \cap B = \{۷ , -۷\} = A$



$\Rightarrow A \cap B = \{۷ , -۷\} = A$

اجتماع دو مجموعه

اجتماع در لغت به‌معنی در یک‌جا جمع شدن می‌باشد. در مجموعه‌ها نیز اگر اعضای دو یا چند مجموعه را درون یک مجموعه بنویسیم و اعضای تکراری را حذف کنیم، به آن اجتماع می‌گوییم و آن را با نماد $\cup$ نشان می‌دهیم، یعنی $(A \cup B)$.

مثال ۴۶ اگر $A=\{۵,۹,۱۰\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ باشد، $A\cup B$ را بنویسید.

$$A\cup B=\{\underbrace{۱,۲,۳,۴,۵}_{B},\underbrace{\overset{\text{تکراری}}{\cancel{۵}},۹,۱۰}_{A}\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۹,۱۰\}$$

البته نیاز **نیست** شما در دو مرحله جواب را بنویسید. بلکه از همان ابتدا می‌توانید عضوهای تکراری را یادداشت **نکنید**.

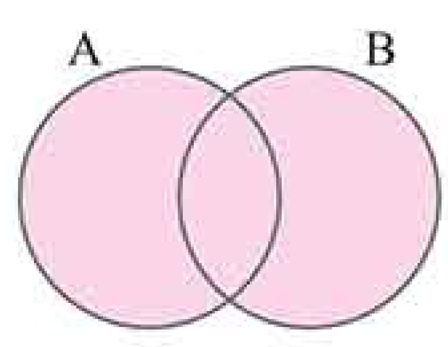
مثال ۴۷ اگر $A=$ {شمارنده‌های عدد ۱۰۰} و $B=$ {مضارب عدد ۱۰، کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰} باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ را بنویسید.

$A=\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰,۲۵,۵۰,۱۰۰\}$ $\qquad$ $B=\{۱۰,۲۰,۳۰,۴۰,۵۰,۶۰,۷۰,۸۰,۹۰,۱۰۰\}$

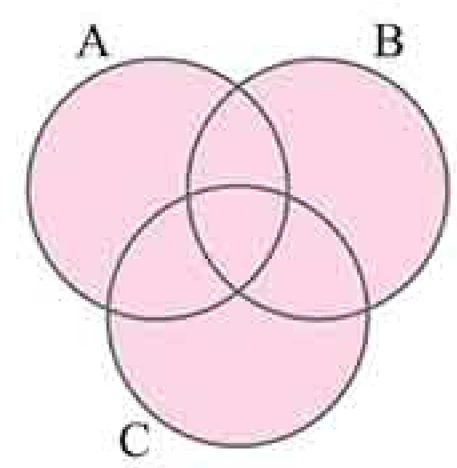
$A\cap B=\{۱۰,۲۰,۵۰,۱۰۰\}$, $A\cup B=\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰,۲۵,۳۰,۴۰,۵۰,۶۰,۷۰,۸۰,۹۰,۱۰۰\}$

نمایش اجتماع روی نمودار وِن

از آن‌جا که اجتماع دو یا چند مجموعه، شامل همهٔ اعضای دو یا چند مجموعه است، در نمودار وِن برای نشان دادن اجتماع، تمام سطح مجموعه‌ها را رنگ می‌زنیم.



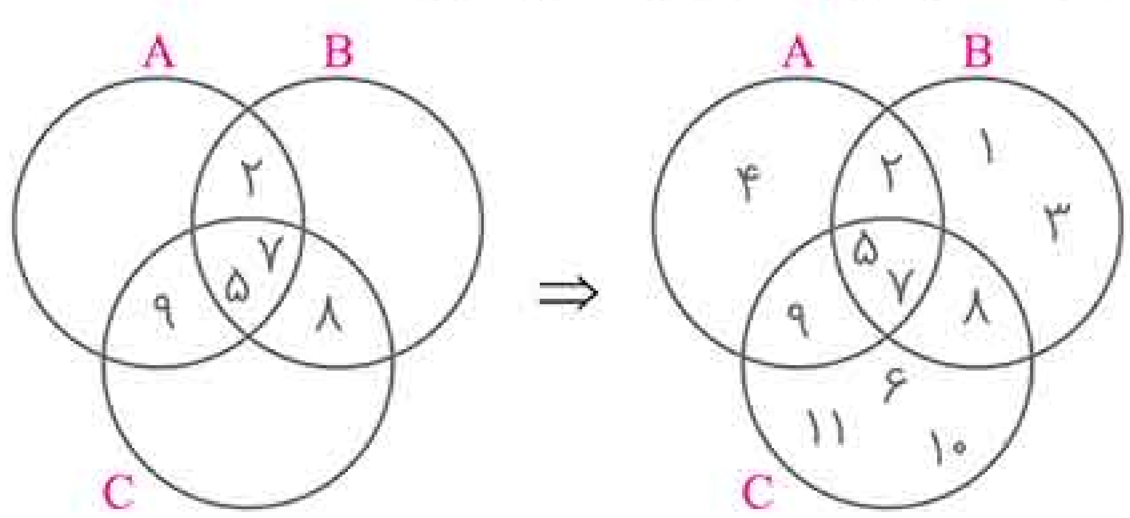
$A\cup B$



$A\cup B\cup C$

مثال ۴۸ اگر $A=\{۲,۵,۷,۹,۴\}$، $B=\{۱,۲,۳,۵,۷,۸\}$ و $C=\{۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ باشد، نمودار وِن آن‌ها را رسم کرده و $A\cup B$ و $B\cup C$ را از روی آن به‌دست آورید.

قبلاً گفتیم برای رسم نمودار وِن، بهتر است ابتدا اعضای قسمت‌های اشتراک را بنویسیم و سپس نمودار را کامل کنیم:



$A\cap B=\{۲,۵,۷\}$

$A\cap C=\{۵,۷,۹\}$

$A\cap B\cap C=\{۵,۷\}$

$B\cap C=\{۵,۷,۸\}$

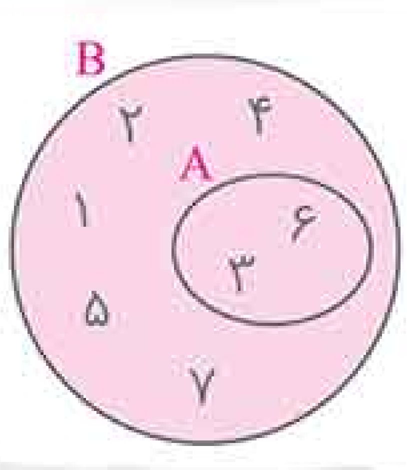
$A\cup B=\{۲,۴,۵,۷,۱,۳,۸,۹\}$ (اعدادی که در دو دایرهٔ A و B هستند)

$B\cup C=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ (اعدادی که در دو دایرهٔ B و C هستند)

نکته

اگر مجموعه‌ای مثل A داشته باشیم که زیرمجموعهٔ B باشد، یعنی همهٔ عضوهای A درون B وجود داشته باشند $(A\subset B)$، آن‌گاه اجتماع آن‌ها برابر با مجموعهٔ بزرگ است، زیرا تمام اعضای دومجموعه، در مجموعهٔ بزرگ قرار دارند. این مورد را با یک مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۴۹ اگر $A=\{۳,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ باشد، $A\cup B$ را به‌دست آورید.



$\Rightarrow A\cup B=B$

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}=B$

مشاهده می‌کنید که در نمودار ون هم می‌توان نشان داد که اگر $A\subset B$ باشد، $A\cup B=B$ است.

مثال ۵۰ **اگر $A \cap B = \{۲ , ۵\}$ و $A \cup B = \{۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ باشد، حداقل سه حالت برای مجموعه‌های A و B بنویسید.**

چون اشتراک A و B (یعنی $A \cap B$) برابر با $\{۲ , ۵\}$ شده است، پس در هردوی آن‌ها ۲ و ۵ حضور دارند. حال بقیهٔ اعضای باقی‌ماندهٔ اجتماع، یعنی ۳، ۴، ۶ و ۷ را باید بین این دو مجموعه تقسیم کنیم، فقط باید دقت کرد که هیچ‌کدام از این اعضای باقی‌مانده را نباید به هر دو مجموعه‌ها داد، زیرا تنها عضوهایی که باید در هر دوی آن‌ها باشند، ۲ و ۵ هستند:

حالت اوّل: $A = \{۲ , ۵ , ۴\}$ $\quad B = \{۲ , ۵ , ۳ , ۶ , ۷\}$

حالت دوم: $A = \{۲ , ۵ , ۶\}$ $\quad B = \{۲ , ۵ , ۳ , ۴ , ۷\}$

حالت سوم: $A = \{۲ , ۵ , ۳ , ۶\}$ $\quad B = \{۲ , ۵ , ۴ , ۷\}$

حالت چهارم: $A = \{۲ , ۵ , ۶ , ۷\}$ $\quad B = \{۲ , ۵ , ۳ , ۴\}$

مثال ۵۱ **در یک اردوی ۲۰ نفره، ۱۵ نفر ورزشکار هستند و ۹ نفر از عینک استفاده می‌کنند. در این اردو، چند نفر هم عینک دارند و هم ورزشکار هستند؟**

کلّ جمعیت (اجتماع) ۲۰ نفر است، درحالی‌که اگر تعداد ورزشکاران و افرادی که عینک استفاده می‌کنند را جمع کنیم (نفر $۲۴ = ۹ + ۱۵$)، می‌بینیم که ۴ نفر بیش‌تر از ۲۰ نفر شد. پس نتیجه می‌گیریم که این ۴ نفر را هم در افراد ورزشکار و هم در افراد عینکی شمارش کرده‌ایم.

تفاضل

اگر دو مجموعه مثل A و B داشته باشیم و مجموعه‌ای تشکیل دهیم که شامل عضوهایی باشد که در A وجود دارند ولی در B وجود ندارند، به آن تفاضل $(A - B)$ می‌گوییم.

در واقع برای نوشتن مجموعهٔ $A - B$، باید عضوهای مشترک A و B را از درون A حذف کنیم. مثلاً فرض کنید $A = \{۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ و $B = \{۳ , ۵ , ۶ , ۷\}$ باشد. عضوهای مشترک A و B، شامل ۳ و ۵ هستند. اگر این دو را از A حذف کنیم، $A - B$ به‌دست می‌آید:

$$A - B = \{۲ , \cancel{۳} , ۴ , \cancel{۵}\} - \{\cancel{۳} , \cancel{۵} , ۶ , ۷\} = \{۲ , ۴\}$$

حال اگر بخواهیم $B - A$ را به‌دست آوریم، باید عضوهای مشترک A و B را از B حذف کنیم:

$$B - A = \{\cancel{۳} , \cancel{۵} , ۶ , ۷\} - \{۲ , \cancel{۳} , ۴ , \cancel{۵}\} = \{۶ , ۷\}$$

نکته

همان‌طور که در مثال بالا دیدید، $A - B$ و $B - A$ جواب‌های متفاوتی دارند.

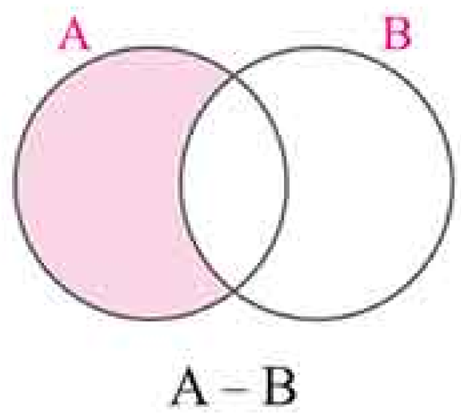
نمایش تفاضل به زبان ریاضی

همان‌طور که گفتیم، $A - B$ یعنی عضوهایی که درون مجموعهٔ A هستند ولی در مجموعهٔ B وجود ندارند. این مطلب را به زبان ریاضی به‌صورت مقابل نشان می‌دهیم:

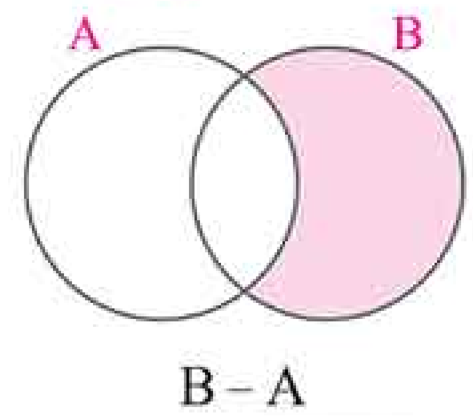
$$A - B = \{x \mid x \in A , x \notin B\}$$

نمایش تفاضل روی نمودار ون

اگر بخواهیم $A - B$ و $B - A$ را روی نمودار ون نشان دهیم، به‌صورت زیر با رنگ زدن می‌توانیم این کار را انجام دهیم. مشاهده می‌کنید که از هر دایره، قسمت مشترک، دیگر رنگ نمی‌شود.



A – B



B – A

نکته

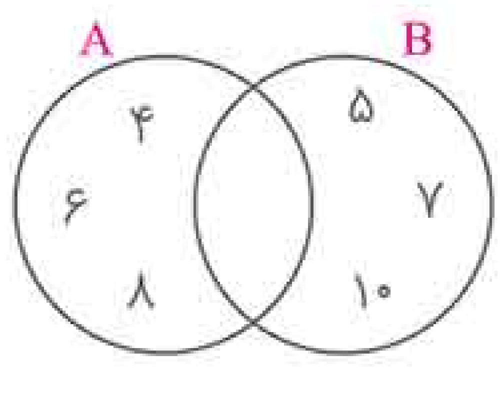
اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه $A-B=\varnothing$ است، ولی $B-A\neq\varnothing$. این مورد را با یک مثال نشان می‌دهیم. فرض کنید $A=\{۵,۶\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$ باشد ($A\subset B$ است)، آن‌گاه اعضای مشترک آن‌ها همان ۵ و ۶ هستند. اگر از A این اعضا را خط بزنیم، دیگر برای A عضوی باقی نمی‌ماند:

$$A-B=\{\cancel{۵},\cancel{۶}\}-\{۳,۴,\cancel{۵},\cancel{۶},۷\}=\{\ \}$$

اما $B-A$ تهی نخواهد بود:

$$B-A=\{۳,۴,\cancel{۵},\cancel{۶},۷\}-\{\cancel{۵},\cancel{۶}\}=\{۳,۴,۷\}$$

مثال ۵۲ برای مجموعه‌های $A=\{۴,۶,۸\}$ و $B=\{۵,۷,۱۰\}$ نمودار ون رسم کنید و حاصل $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ را به‌دست آورید و نتیجه‌گیری کنید.



$A\cap B=\varnothing$

$A-B=\{۴,۶,۸\}-\{۵,۷,۱۰\}=\{۴,۶,۸\}=A$

$B-A=\{۵,۷,۱۰\}-\{۴,۶,۸\}=\{۵,۷,۱۰\}=B$

نتیجه‌گیری: اگر دو مجموعه مثل A و B داشته باشیم که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند ($A\cap B=\varnothing$)، آن‌گاه $A-B=A$ و $B-A=B$ خواهد بود، زیرا هیچ عضوی از A و B حذف نمی‌شود.

نکته

در ریاضی به دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی ندارند، مجموعه‌های جدا از هم می‌گویند.

مثال ۵۳ اگر $A=\{x^۲-۱\mid x\in\mathbb{Z}\,,\,-۱\leq x\leq ۲\}$ و $B=\{x^۲+۱\mid x\in I\,,\,x\leq ۳\}$ باشد، حاصل $A-B$ را به‌دست آورید.

ابتدا اعضای مجموعهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم. اعداد موردنظر در A ، شامل $(-۱,۰,۱,۲)$ هستند. آن‌ها را در رابطهٔ $x^۲-۱$ قرار می‌دهیم.

اعداد موردنظر در B نیز شامل $(۰,۱,۲,۳)$ هستند. آن‌ها را نیز در رابطهٔ $x^۲+۱$ قرار می‌دهیم:

$$A=\{(-۱)^۲-۱,(۰)^۲-۱,(+۱)^۲-۱,(+۲)^۲-۱\}=\{۰,-۱,۰,۳\}=\{-۱,۰,۳\}$$

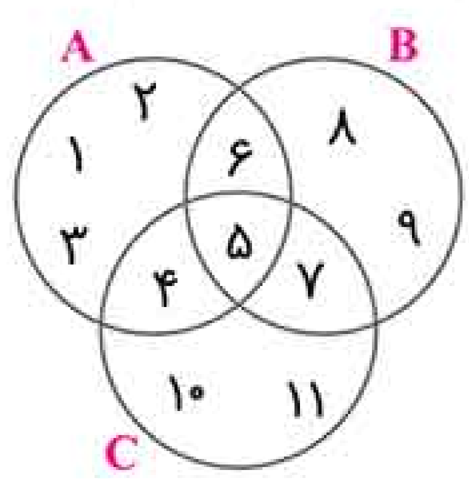
$$B=\{(۰)^۲+۱,(+۱)^۲+۱,(+۲)^۲+۱,(+۳)^۲+۱\}=\{۱,۲,۵,۱۰\}$$

مشاهده می‌کنید که A و B عضو مشترک ندارند. ($A\cap B=\varnothing$) است، پس در $A-B$ هیچ عضوی از A خط نمی‌خورد. یعنی:

$$A-B=\{-۱,۰,۳\}=A$$

مثال ۵۴ با توجه به نمودار زیر، پاسخ $A-B$ ، $C-A$ و $B-C$ را بنویسید.

ابتدا مجموعه‌های A ، B و C را می‌نویسیم: $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ $C=\{۴,۵,۷,۱۰,۱۱\}$



$A-B=\{۱,۲,۳,۴,\cancel{۵},\cancel{۶}\}-\{\cancel{۵},\cancel{۶},۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۴\}$

$C-A=\{\cancel{۴},\cancel{۵},۷,۱۰,۱۱\}-\{۱,۲,۳,\cancel{۴},\cancel{۵},۶\}=\{۷,۱۰,۱۱\}$

$B-C=\{\cancel{۵},۶,\cancel{۷},۸,۹\}-\{۴,\cancel{۵},\cancel{۷},۱۰,۱۱\}=\{۶,۸,۹\}$

تذکر:

در سال‌های قبل آموختیم که در محاسبهٔ عبارت‌ها، اولویت با پرانتز است. درعبارت‌های مربوط به مجموعه‌ها هم این قانون برقرار است. یعنی ابتدا اعضای داخل پرانتزها را به‌دست می آوریم.