

قسمت سوم

فصل

۲

معادلات مثلثاتی

معادله مثلثاتی: معادلاتی که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم. به عنوان مثال،

معادلات $2 \sin^2 x + \cos 2x = 0$ و $3 \tan x + \cot x = 1$ معادله‌های مثلثاتی هستند.

جواب معادله: مقدارهایی از زاویه مجهول که به ازای آن‌ها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادله مثلثاتی پیدا کردن کلیه جواب‌های آن معادله است.

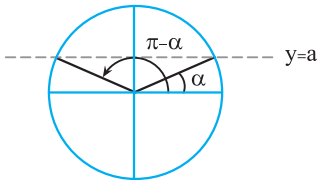
به عنوان مثال، در معادله مثلثاتی $2 \cos x = 1$ داریم:

$$2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

تمام جواب‌های معادله $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) می‌باشند.

حل معادله مثلثاتی

برای حل یک معادله مثلثاتی، ابتدا به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستوره‌های جبری، آن را به معادله ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = a$ یا $\cot x = a$ تبدیل شود.



حل معادله sin x = a

برای حل معادله $\sin x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

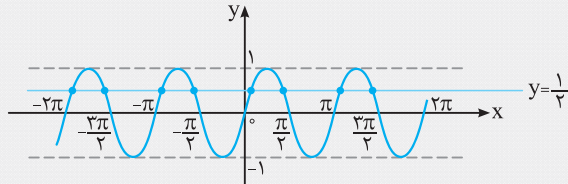
نکته اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

مثال معادله‌های مثلثاتی $2 \sin 2x - 1 = 0$ و $\sin 2x + \sin x = 0$ را حل کنید.

پاسخ: معادله $2 \sin 2x - 1 = 0$ را به صورت $\sin 2x = \frac{1}{2}$ درمی‌آوریم و با توجه به این‌که $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های معادله $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ، محل تلاقی خط $y = \frac{1}{2}$ با نمودار $y = \sin 2x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده است:



برای حل معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sin x = 0$ ، می‌نویسیم:

$$\sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \sin(\underbrace{2x}_u) = \sin(\underbrace{-x}_\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $10, \pm 2, \pm 1$ و ... را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

تست

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{3}$ (۲) $\frac{11\pi}{3}$ (۳) $\frac{31\pi}{16}$ (۴) $\frac{41\pi}{16}$

پاسخ: با توجه به این‌که $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{13\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{7\pi}{24} = \frac{24k\pi + 7\pi}{24} \\ x = k\pi + \frac{13\pi}{24} = \frac{24k\pi + 13\pi}{24} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

k	0	1
x	$\frac{7\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}$	$\frac{31\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}$

با دادن مقادیر صحیح به k، جواب‌های معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ به دست می‌آوریم:

گزینه (۲) صحیح است. $\Rightarrow \frac{7\pi}{24} + \frac{13\pi}{24} + \frac{31\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} = \frac{88\pi}{24} = \frac{11\pi}{3}$ مجموع جواب‌های معادله

۵۰

آموزش | فصل دوم (مثلثات)

تست

معادله $2\sin^3 x - \sin x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ: برای حل معادله، با استفاده از فاکتورگیری داریم:

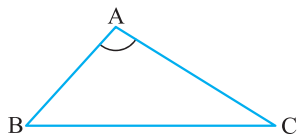
$$\sin x (2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow[k=0,1]{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} x = 0, x = \pi \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8k\pi - \pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{8k\pi + 5\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

معادله در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ، ۶ جواب دارد، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

یادآوری: مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

(برگرفته از کتاب درسی)

تست

چند مثلث وجود دارد که مساحت آن ۶ و طول دو ضلع آن ۴ و ۶ باشند؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ: با فرض $AB = 6$ و $AC = 4$ داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$$

چون A اندازه یک زاویه مثلث است، پس $0^\circ < A < 180^\circ$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \text{ یا } \hat{A} = 150^\circ$$

پس دو مثلث می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینه (۳) درست است.

در برخی از حالت‌ها، جواب معادله مثلثاتی فقط با یک رابطه به دست می‌آید.

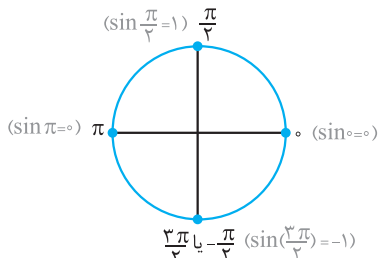
حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد:

$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

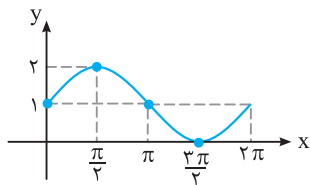
$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$



نکته مهم ریشه‌های معادلات $\sin u = 1$ و $\sin u = -1$ ، ریشه‌های مضاعف معادله مثلثاتی هستند و بقیه ریشه‌ها، جزء ریشه‌های ساده می‌باشند و در تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی، در دو طرف ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم و در دو طرف ریشه‌های ساده تغییر علامت داریم.

به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x) = 1 + \sin x$ به کمک انتقال در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، ریشه مضاعف معادله $f(x) = 0$ است و علامت $f(x)$ در دو طرف

$x = \frac{3\pi}{2}$ مثبت است.

معادله $(\sin x + 1)(\sin x - 5)(3 \sin x - 1) = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ:

$$(\sin x + 1) = 0 \text{ یا } \sin x - 5 = 0 \text{ یا } 3 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x + 1 = 0 \text{ یا } 4 \sin x - 5 = 0 \text{ یا } 3 \sin x - 1 = 0$$

معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} > 1$ ، معادله دو جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد. $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$

معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{3\pi}{2}$ است. $\Rightarrow \sin x = -1$

بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای سه ریشه است و در نتیجه، گزینه (۱) صحیح است.

نکته مهم برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$$

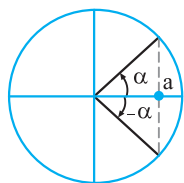
مثال: $\sin^2 x = \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

حل معادله $\cos x = a$

برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

نکته جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.



معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

(ب) $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$ (آ) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

(پاسخ: آ) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

(ب) با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، داریم:

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2 \cos^2 x - 1) - 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

با انتخاب $A = \cos x$ ، معادله به صورت $2A^2 - 3A + 1 = 0$ درمی‌آید: $2A^2 - 3A + 1 = 0 \rightarrow A = 1, A = \frac{1}{2}$ مجموع ضرایب برابر صفر است.

$$A = 1 = \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad , \quad A = \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

تست

جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

پاسخ: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ، داریم:

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$ ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

نکته ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm 1$ ، ریشه‌های مضاعف معادلات مثلثاتی هستند.

تست

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x + 3\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi$ (۲) $2k\pi$ (۳) $\frac{k\pi}{2}$ (۴) $(2k+1)\pi$

پاسخ: معادله $\cos x = -2$ جواب ندارد و داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos x \xrightarrow{\text{معادله}} \cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \cos x = -1, \cos x = -\frac{c}{a} = -2$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثال

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} (\sin x + 1) + \cos x(1 + \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x + 1)(1 + \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

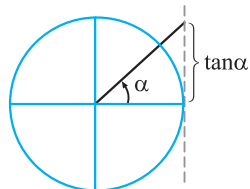
نکته مهم برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

مثال: $\cos^2 x = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

حل معادلات $\cot x = a$, $\tan x = a$

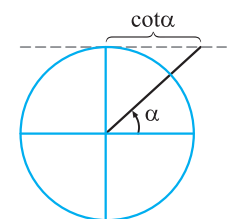
برای حل معادلهٔ $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$



برای حل معادلهٔ $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$



مثال

معادلات $\tan 2x = \cot x$ و $\tan x + \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

$$\tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ:

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tan 2x = \cot x \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

معادله $\cot 2x - 1 = 0$ را حل کنید.

$$\cot 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cot 2x = 1 = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ:

حل معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری باید ریشه‌های مخرج را از مجموعه جواب حذف کنیم.

مثال

جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\frac{2\sin x + 1}{\sin x + 2} = 1$ را به دست آورید.

$$(\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -2 < -1)$$

پاسخ: مخرج کسر همواره مخالف صفر است، لذا هر جوابی که به دست آید قابل قبول است:

$$\frac{2\sin x + 1}{\sin x + 2} = 1 \Rightarrow 2\sin x + 1 = \sin x + 2 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

تست

جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

پاسخ:

$$\cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\left\{ \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

باید جواب‌های (1) را از جواب‌های (2) حذف کنیم:

$$= \left\{ \dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \right\} - \left\{ \dots, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \right\} = \left\{ \dots, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots \right\} = \left\{ k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

بنابراین گزینه (4) صحیح است.

خلاصه فصل دوم

(۱) دوره تناوب تابع‌های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و دوره تناوب تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

(۲) کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که به ازای آن تساوی $f(x + T) = f(x)$ برقرار باشد، دوره تناوب تابع f می‌گوییم.

(۳) اگر قطعه‌ای از نمودار با دوره تناوب T ، در بازه‌ای به طول l ، n بار تکرار شده باشد، آن‌گاه: $T = \frac{l}{n}$

(۴) اگر T دوره تناوب تابع f باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n ، تساوی $f(x + nT) = f(x)$ برقرار است.

(۵) در توابع $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos(bx) + c$ ، داریم: $|a| + c$ = مینیمم مقدار ، $-|a| + c$ = ماکزیمم مقدار

(۶) در تابع $y = a \sin(bx + c) + d$ ، با فرض مثبت بودن ab ، داریم:

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط بیش‌ترین مقدار را اختیار می‌کند: $bx + c = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند: $bx + c = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \sin(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع در آن نقاط محور x ها را قطع می‌کند:

$bx + c = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(۷) در تابع $y = a \sin(bx + c) + d$ ، با فرض منفی بودن ab ، داریم:

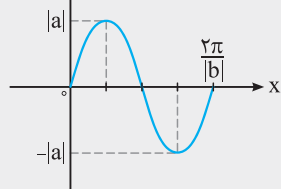
• طول نقاطی که تابع در آن نقاط مینیمم دارد: $bx + c = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط ماکزیمم دارد: $bx + c = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \sin(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع در آن نقاط محور x ها را قطع می‌کند:

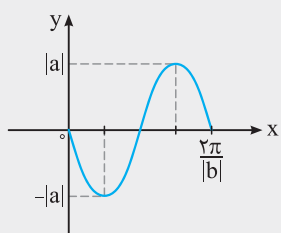
$bx + c = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(۸) نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ با فرض $ab > 0$ و در یک دوره تناوب به صورت $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab > 0$ ، آن‌گاه در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ تابع ابتدا اکیداً صعودی است.

(۹) نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ با فرض $ab < 0$ و در یک دوره تناوب به صورت $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab < 0$ ، آن‌گاه در بازه $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ نمودار تابع ابتدا اکیداً نزولی است.

(۱۰) در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$ ، با فرض منفی بودن ab ، داریم:

• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(۱۱) در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$ ، با فرض مثبت بودن ab ، داریم:

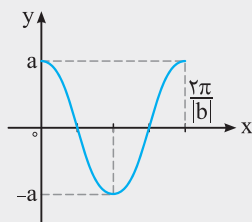
• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

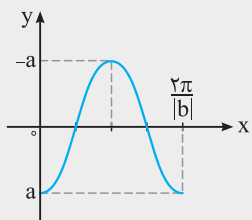
• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(۱۲) نمودار تابع $y = a \cos(bx)$ با فرض $a > 0$ و در یک دوره تناوب به صورت روبه‌رو می‌باشد:



نمودار تابع $y = a \cos(bx)$ با فرض $a < 0$ و در یک دوره تناوب (بازه) $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ به صورت روبه‌رو می‌باشد:



(۱۳) دامنه تابع $y = a + b \tan u$ به صورت $\mathbb{R} - \{u = k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ است.

(۱۴) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ، ... و $(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2})$ اکیداً صعودی می‌باشد، اما تابع در هر بازه‌ای که شامل این مقادیر باشد، غیریکنوا خواهد شد.

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{یا} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad , \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad (15)$$

(۱۶) اگر مقدار $\sin x + \cos x$ یا $\sin x - \cos x$ را داشته باشیم، می‌توان مقدار $\sin 2x$ را با به توان رساندن تساوی‌های داده‌شده به دست آورد. هم‌چنین اگر مقدار $\cos 2x$ را بخواهیم به دست آوریم، باز هم ابتدا مقدار $\sin 2x$ را به دست می‌آوریم و سپس مقدار $\cos 2x$ را از رابطه $\cos 2x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2x}$ مشخص می‌کنیم.

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad , \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (17)$$

(۱۸) عبارت $1 + \sin 2x$ با عبارت $(\sin x + \cos x)^2$ و عبارت $1 - \sin 2x$ با عبارت $(\sin x - \cos x)^2$ برابر است.

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (19)$$

(۲۰) $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ را می‌توان با فرمول‌های زیر بر حسب $\cos 2x$ نوشت:

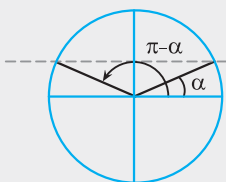
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (21)$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \quad (22)$$

(۲۳) برای حل معادله $\sin x = a$ و $1 \geq a \geq -1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:



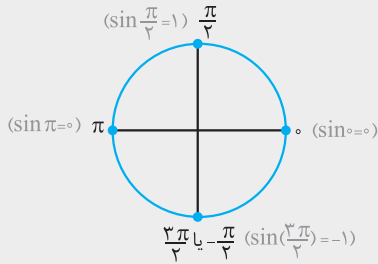
$$y = a \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(۲۴) اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

(۲۵) برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $10, \pm 20, \dots$ را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

(۲۶) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می توان سریع تر جواب معادله را به دست آورد:



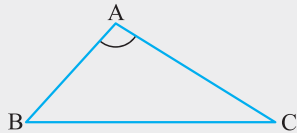
$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

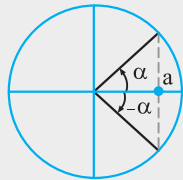
(۲۷) برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$ استفاده می کنیم.

(۲۸) مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

(۲۹) برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب های معادله از فرمول زیر به دست می آید:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

(۳۰) جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

(۳۱) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به دست آید، با حفظ روابط زیر می توان سریع تر جواب معادله را به دست آورد: $(k \in \mathbb{Z})$

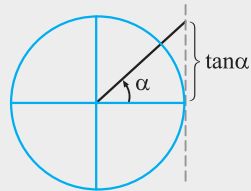
$$۱) \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$۲) \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$$

$$۳) \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

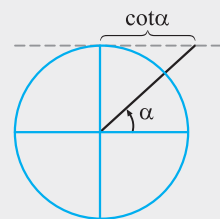
(۳۲) برای حل معادله مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$ استفاده می کنیم.

برای حل معادله $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا α را طوری پیدا می کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب های معادله از فرمول زیر به دست می آید:



$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

برای حل معادله $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا α را طوری پیدا می کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب های معادله از فرمول زیر به دست می آید:



$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

حل معادله مثلثاتی $\sin u = a$

(سراسری تجربی)

☆ ۲۶۷. یکی از جواب‌های معادله $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{7\pi}{6}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

☆ ۲۶۸. جواب‌های کلی معادله $0 = 1 - \cos(\frac{3\pi}{4} - x) + 3 \sin x + 5 \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ است. مجموعه مقادیر i کدام‌اند؟

- (۱) $\{1, 5\}$ (۲) $\{1, 7\}$ (۳) $\{5\}$ (۴) $\{1, 5, 7\}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۶۹. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{5\pi}{8}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۷۰. نمودار تابع $y = \sin 2x$ ، خط $y = -\frac{1}{4}$ را در بازه $[0, \pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

☆ ۲۷۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $0 = \cos(\frac{\pi}{4} + x) + \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x) - 1$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی - ۹۰)

☆ ۲۷۲. جواب کلی معادله $0 = \sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی - ۸۷)

☆ ۲۷۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $0 = \sin(\frac{5\pi}{6} + x) \sin(\pi + x) + \sin(\frac{\pi}{4} + x)$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆ ۲۷۴. جواب کلی معادله مثلثاتی $1 = \cot(\frac{\pi}{4} + x) (1 + \cos 2x)$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{3\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

☆ ۲۷۵. جواب کلی معادله مثلثاتی $1 = \tan x \cdot \cos^2 x + 2$ به کدام صورت است؟ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆ ۲۷۶. یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \sqrt{3}$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{3\pi}{4}$ (۳) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۷۷. یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $0 = \cos 2x + \sin x - 1$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

☆ ۲۷۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری ریاضی)

☆ ۲۷۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $0 = \sin 3x + \sin x$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری تجربی - ۹۳)

☆ ۲۸۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $1 = \frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{4} + x)}$ ، به کدام صورت است؟ (که $k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

- ★ ۲۸۱. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)
- ★ ۲۸۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)
- ★ ۲۸۳. چند مثلث با مساحت $4\sqrt{3}$ و اندازهٔ دو ضلع ۴ و ۶ وجود دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (برگرفته از کتاب درسی)

حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos u = a$

- ★ ۲۸۴. جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $4 \cos x (\cos x - 2) = -3$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (برگرفته از کتاب درسی)
- ★ ۲۸۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی- ۸۶)
- ★ ۲۸۶. نمودار تابع $y = x + 2 \cos 2x$ ، $y = x + 1$ را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{8}$ (نمودار تابع $f(x) = 2 \cos((2x-1)\pi)$ در بازهٔ $[-1, 1]$ ، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶)
- ★ ۲۸۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $k\pi$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ★ ۲۸۹. در معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟
 (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) دوزنقه (۴) مستطیل (سراسری ریاضی خارج از کشور)
- ★ ۲۹۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 2 \cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (سراسری تجربی- ۸۷)
- ★ ۲۹۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)
- ★ ۲۹۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{2} + x) \cos(-x)$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی)
- ★ ۲۹۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی)
- ★ ۲۹۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 x + 2 \cos x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی- ۹۵)
- ★ ۲۹۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (سراسری تجربی- ۹۶)

۲۹۶. معادله $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۹۷☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x - 5 \cos x + 4 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۹۸. مجموع جواب‌های معادله $\cos 3x - \sin x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{8}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $-\frac{3\pi}{8}$ (۴) $-\frac{5\pi}{8}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۲۹۹☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی- ۹۱)

۳۰۰☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(-\frac{3\pi}{4} + x)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۹۲)

۳۰۱☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳۰۲☆. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷)

۳۰۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 2x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

حل معادله مثلثاتی $\tan u = a$

(سراسری تجربی- ۹۷)

۳۰۴☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی)

۳۰۵☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

۳۰۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۹۴)

۳۰۷☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری ریاضی- ۸۶)

۳۰۸☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

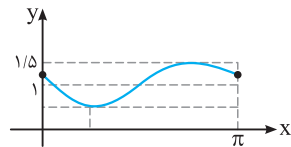
تست‌های V.I.P

۳۰۹. دوره تناوب تابع $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \cos(\pi x)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۱۰. دوره تناوب تابع $f(x) = \tan x \cdot \cot x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) 2π

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۳۱۱. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲



۳۱۲. حاصل $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳۱۳. حاصل $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) \sin^2(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{44}$ کدام است؟

(۱) $2(\sqrt{5} - 1)$ (۲) $\frac{1}{16}(\sqrt{3} + 2)$ (۳) $\frac{1}{16}(2 - \sqrt{3})$ (۴) $\sqrt{5} - 1$

(سراسری ریاضی)

۳۱۴. اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} - b)$ کدام است؟
 (۱) $\sin 4a$ (۲) $\cos 4a$ (۳) $\sin^2 2a$ (۴) $\cos^2 2a$

۳۱۵. حاصل $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۱۶. حاصل عددی $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۳۱۷. حاصل $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
 (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $-4\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۳۱۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۳۱۹. اگر $\tan x + \cot x = k - 1$ ، آن‌گاه حدود k برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، کدام است؟
 (۱) $-1 < k < 3$ (۲) $k \geq 3$ یا $k \leq -1$ (۳) $k > 2$ (۴) $k < -\frac{1}{2}$

(سراسری ریاضی- ۹۵)

۳۲۰. ☆ مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$ ، در بازه $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۳۲۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۳۲۲. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2\sqrt{3}$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) 2π (۳) $\frac{7\pi}{3}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

۳۲۳. در معادله مثلثاتی $\sin 2x (\sin x + \cos x) = \cos 2x (\cos x - \sin x)$ ، مجموع تمام جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴) $\frac{9\pi}{4}$

با قرار دادن اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به جای k ، x هایی که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند را مشخص می‌کنیم:

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{\lambda}, \frac{3\pi}{\lambda}$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{\lambda} \notin (0, \pi), x = \frac{11\pi}{\lambda} \notin (0, \pi)$$

به ازای سایر مقادیر k نیز، x های به‌دست آمده در بازه $(0, \pi)$ قرار ندارند.

بنابراین معادله در بازه $(0, \pi)$ دارای دو جواب $\frac{\pi}{\lambda}$ و $\frac{3\pi}{\lambda}$ است و در نتیجه:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{3\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

۲۶۷

با حل معادله مثلثاتی $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ ، طول نقاط تلاقی دو نمودار در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌شود:

$$\sin(3x) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 3x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi - \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{12k\pi - \pi}{18} \\ x = \frac{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{6(2k+1)\pi + \pi}{18} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

با قرار دادن اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به جای k ، x های بین $[0, \pi]$ را مشخص می‌کنیم:

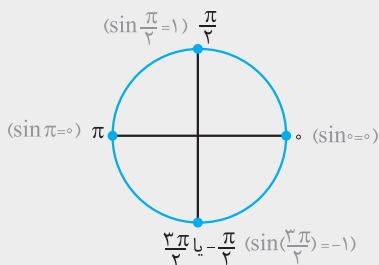
$$k=1 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{18} \checkmark, k=0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{18} \checkmark$$

دو مقدار برای x به‌دست می‌آید و در نتیجه نمودار دو تابع همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۲۶۸

نکته: هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = \pm 1$ و $\sin u = 0$

به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:



$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow -\sin x + \sin x - \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = 1$$

حالت خاص $\rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲۶۸

با انتخاب $\sin x = A$ ، معادله به صورت $2A^2 - 3A - 2 = 0$ درمی‌آید:

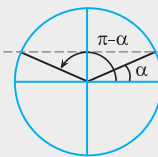
$$2A^2 - 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 = \sin x \text{ (غیرممکن)} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2} = \sin x, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

۲۶۸



نکته: برای حل معادله $\sin x = a$

و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری

پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا

معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$

درآید. در این صورت تمام جواب‌های

معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\Delta \sin x + 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \Delta \sin x - 3 \sin x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}, i \in \{1, 5\}$$

۲۶۹

نکته: اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آن‌گاه

تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

نکته: برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد

جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را قرار می‌دهیم و

برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر

بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

عبارت $\sin x \cos x$ با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{\lambda k\pi + \pi}{\lambda} \\ x = k\pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{\lambda k\pi + 3\pi}{\lambda} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ -2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۸

نکته: برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha$ ، ($k \in \mathbb{Z}$) استفاده می‌کنیم.

با توجه به اتحاد جبری $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ و اتحاد مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۹

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin \frac{2x}{u} = -\sin x = \sin \frac{-x}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع $\rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۸۰

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x, \frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

توجه کنیم که $x = k\pi$ غیر قابل قبول است، زیرا منجر کسر را صفر می‌کند.

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۸۱

$$\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + \cos \pi = 0 \Rightarrow \sin \Delta x = -\sin \epsilon x$$

$$\Rightarrow \sin \Delta x = \sin(-\epsilon x) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi - \epsilon x \\ \Delta x = 2k\pi + (\pi - (-\epsilon x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$x \in [0, 2\pi] \rightarrow \begin{cases} x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \dots, \frac{18\pi}{9} \\ x = \pi \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌های معادله} = (0 + \frac{2\pi}{9} + \dots + \frac{18\pi}{9}) + \pi = 11\pi$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۲

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۳

$$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x \cos x = 0 \xrightarrow{\times 2} 1 - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۴

$$\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x, 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$(1 + \cos 2x) \cot(\frac{\pi}{2} + x) = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x \times (-\tan x) = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x \times \frac{-\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow -\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۵

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \tan x \cdot \cos^2 x = 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} (*)$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(*)} x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به ازای هیچ مقدار k ، $k\pi + \frac{\pi}{4}$ برابر $k\pi + \frac{\pi}{2}$ نمی‌شود.

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۶

مقدار $\sin x$ باید عددی مخالف صفر باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ ، داریم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin x} = 2\sin x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{3}) = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۲۷۷

برای حل معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ ، از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم تا معادله‌ای درجه دوم بر حسب $\sin x$ به دست آید:

$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (1 - 2\sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sin x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \sin x(-2\sin x + 1) = 0$$

۲۸۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

با اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:
 $2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$
 $\xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{-3 \pm 5}{4}$
 $\Rightarrow A = \frac{1}{4}, -2 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} A = \cos x = \frac{1}{4} = \cos \frac{\pi}{3}$
 $\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۸۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

با حل معادله $x + 2 \cos 3x = x + 1$ ، طول نقاط تلاقی دو نمودار به دست می‌آید:
 $x + 2 \cos 3x = x + 1 \Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$
 $\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$

۲۸۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = \pm 1$ و $\cos u = 0$ به دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)
 ۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$
 ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$
 ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

با حل معادله $f(x) = 0$ ، طول نقاط تلاقی نمودار تابع با محور x ‌ها مشخص می‌شود. همچنین با قرار دادن اعداد صحیح $0, \pm 1, \dots$ به جای k ، x ‌های بازه $[-1, 1]$ را مشخص می‌کنیم.

$2 \cos((3x-1)\pi) = 0 \Rightarrow (3x-1)\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $\xrightarrow{\div \pi} 3x-1 = k + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{k}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2k+3}{6}, k \in \mathbb{Z}$
 $\xrightarrow{x \in [-1, 1]} x = -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$
 بنابراین نمودار f ، محور x ‌ها را در ۶ نقطه قطع می‌کند.

۲۸۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

با اتحاد مثلثاتی $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ، همه نسبت‌ها به کسینوس تبدیل می‌شود:

$2(1 - \cos^2 2x) - \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 2x - \cos 2x + 3 = 0$
 مجموع ضرایب $\rightarrow \cos 2x = 1, \cos 2x = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} < -1$ برابر صفر است.
 معادله $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ جواب ندارد و در نتیجه:

$\cos 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

۲۸۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + A - 1 = 0$
 $\Rightarrow A = -1, A = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

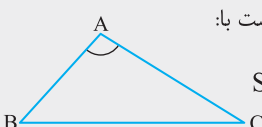
۲۸۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sin x$
 معادله: $\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ ، $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ و 2π است. داریم:
 مجموع جواب‌ها $= 0 + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$

۲۸۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

یادآوری: مساحت مثلث ABC برابر است با:

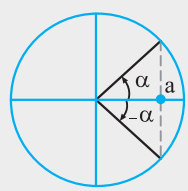


$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

طبق فرض اگر $AB = 4, AC = 6$ و $S = 4\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه داریم:
 $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A \Rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin A$
 $\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 A یک زاویه مثلث است و در نتیجه $0^\circ < A < 180^\circ$. در این محدوده دو مقدار برای A وجود دارد که $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ شود. پس دو مثلث با فرض‌های داده شده وجود دارد.

۲۸۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته ۱: برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول روهرو به دست می‌آید:



$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

نکته ۲: جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

با تغییر متغیر $\cos x = t$ ، معادله به صورت $f(t) = -3$ درمی‌آید:
 $f(t) = t^2 - 8t - 3 = -3 \Rightarrow 4t^2 - 8t = 0 \Rightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0$
 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(4)(3) = 16 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm 4}{2(4)}$

$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} = \cos x \text{ (غیرممکن)} \\ t = \frac{1}{4} = \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$
 معادله $\cos x = \frac{3}{4}$ جواب ندارد، زیرا $\frac{3}{4}$ عددی بزرگ‌تر از یک است.