Mathematics

فصل ۱

قسمت اوّل

مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مفهوم مجموعه

در ابتدای این درس، قصد داریم مطالب و مفاهیمی را در مورد مجموعه‌ها که در سال نهم با آن آشنا شده‌اید، یادآوری کنیم:

در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای **مشخص** و دوبه‌دو **متمایز** (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود.

به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

قرارداد: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$

به‌عنوان مثال، اگر $A = \{۱، ۲، ۵\}$، آن‌گاه $۵ \in A$ و $۳ \notin A$

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

تذکر مجموعهٔ تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ که هرکدام دارای یک عضو هستند، اشتباه بگیریم.

مثال: اگر $A = \{\{\{۰\}\}، \{۰\}، \{-۱\}، \{-۱۰۰، -۱\}\}$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) $\{\{۰\}\} \in A$ ب) $\{-۱۰۰\} \in A$ پ) $\{\{-۱\}\} \notin A$ ت) $\{۰\} \notin A$

پاسخ: A یک مجموعهٔ ۵ عضوی است که اعضای آن -۱، ۰، $\{-۱\}$، $\{۰\}$ و $\{\{۰\}\}$ می‌باشند، بنابراین:

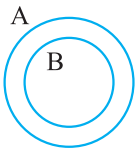
آ) درست است. ب) نادرست است. پ) درست است. ت) نادرست است.

دو مجموعهٔ مساوی: دو مجموعهٔ A و B برابرند هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$

نتیجه اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$

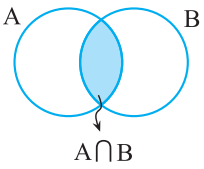
زیرمجموعه: اگر هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$

نمایش $B \subseteq A$ با نمودار وِن به‌صورت مقابل است:



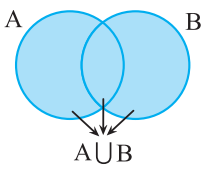
نکته تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر ۲^n می‌باشد. به‌عنوان مثال، یک مجموعهٔ ۳ عضوی، $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه دارد.

اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد:



$$A \cap B = \{x \mid x \in A ، x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعهٔ A و B را نشان می‌دهد:

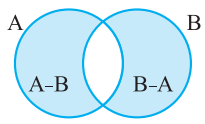


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعهٔ $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند.

$$A - B = \{x \mid x \in A ، x \notin B\}$$

در نمودار مقابل، مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ رنگی هستند:



مثال: اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -1\le x\le 4\}$ و $B=\{2x \mid x\in A, 0<x\le 3\}$، مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -1\le x\le 4\}=\{-1,0,1,2,3,4\} \quad , \quad B=\{2x \mid x\in A, 0<x\le 3\}=\{2,4,6\}$$

$$\Rightarrow A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4,6\} \quad , \quad A\cap B=\{2,4\}$$

$$\Rightarrow (A\cup B)-(A\cap B)=\{-1,0,1,\not{2},3,\not{4},6\}-\{2,4\}=\{-1,0,1,3,6\}$$

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C روابط زیر برقرار است:

۱) $\begin{cases} A\cup A=A \\ A\cap A=A \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{cases}$

۳) $\begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$

۴) $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$

۵) $\begin{cases} A, B\subseteq A\cup B \\ A\cap B\subseteq A, B \end{cases}$

۶) $A\subseteq B\Rightarrow \begin{cases} A\cup B=B \\ A\cap B=A \end{cases}$

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح که به ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\} \quad , \quad \mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\} \quad , \quad \mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$$

مجموعهٔ اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$$

تذکر اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد یا بسط اعشاری، نمایش داده می‌شوند. به‌طور مثال داریم $\frac{3}{5}=0/6$ که در آن $\frac{3}{5}$ کسر متعارفی و $0/6$ نماد اعشاری این عدد گویا است.

نمایش اعشاری عددهای گویا

نمایش اعشاری عددهای گویا به دو صورت است: ۱- مختوم (یا متناهی) ۲- نامتناهی و متناوب

۱) مختوم (تحقیقی یا پایان‌پذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده به صفر می‌رسد و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{3}{4}$، $\frac{1}{5}$ و $\frac{9}{20}$ مختوم هستند، زیرا در مخرج این کسرها فقط عامل ۲ یا ۵ وجود دارد و داریم $\frac{3}{4}=0/75$، $\frac{1}{5}=0/2$ و $\frac{9}{20}=0/45$

۲) متناوب (پایان‌ناپذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها حداقل یک شمارندهٔ اول به جز ۲ و۵ وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت برمخرج، باقی‌مانده هرگز به صفر نمی‌رسد و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{4}{33}$ و $\frac{7}{6}$ متناوب هستند، زیرا در مخرج این کسرها حداقل یک شمارندهٔ اول به‌جز ۲ و۵ وجود دارد و داریم:

$$\frac{4}{33}=0/1212\ldots=0/\overline{12} \quad , \quad \frac{7}{6}=1/1666\ldots=1/1\overline{6}$$

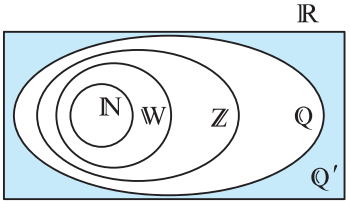
مجموعهٔ اعداد گنگ: مجموعهٔ اعدادی را که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد، مجموعهٔ اعداد گنگ می‌نامیم.

مجموعهٔ اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^C$ نشان می‌دهیم.

نکته در نمایش اعشاری عددهای گنگ، تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار بوده ولی متناوب نیست. به عنوان مثال، اعداد $\sqrt{2}=1/41421300\ldots$ و $0/0100100010000\ldots$ که نمایش اعشاری آن‌ها بی‌پایان و غیرمتناوب است، اعدادی گنگ هستند.

مجموعهٔ اعداد حقیقی: اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

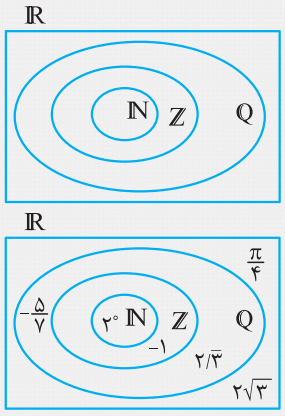
$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$$



رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ می‌باشد.

مثال: اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.

$$2\sqrt{3}\ ,\ -1\ ,\ -\frac{5}{7}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ 2^{\circ}\ ,\ 2/333\ldots$$

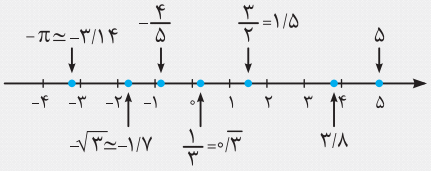


پاسخ: $2^{\circ}=1$ عددی طبیعی، -1 عددی صحیح، $-\frac{5}{7}$ و $2/\overline{3}$ اعدادی گویا و $2\sqrt{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ اعدادی گنگ هستند. بنابراین:

نکته هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و هم‌چنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال: هر یک از اعداد $3/8$، $-\pi$، $\frac{3}{2}$، 5، $-\sqrt{3}$، $-\frac{4}{5}$ و $\frac{1}{3}$ را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند؟

پاسخ:



اعداد $-\sqrt{3}$ و $-\pi$ گنگ هستند.

بازه (فاصله)

در ریاضیات با دسته‌ای از مجموعه‌ها سروکار داریم که به‌صورت برشی از محور اعداد حقیقی هستند. به چنین مجموعه‌هایی بازه یا فاصله می‌گوییم. در ادامه به معرفی انواع بازه‌ها می‌پردازیم.

بازه‌های محدود

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین -1 و 2 به صورت $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<2\}$ است. مجموعهٔ A شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین -1 و 2 می‌باشد. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی از نماد ساده‌تری استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ A را به صورت $(-1,2)$ می‌نویسیم و آن را بازهٔ باز از -1 تا 2 می‌نامیم.

در حالت کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، آن‌گاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول زیر خلاصه شده است:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	a ○——● b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	a ●——● b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	a ●——○ b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	a ○——● b

مثال: کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست می‌باشند؟ چرا؟

آ) $\frac{3}{2}\in(\frac{5}{4},\frac{8}{5}]$ ب) $\{-1,0\}\subseteq(-2,1)$ پ) $-\sqrt{5}\in[-3,-2)$ ت) $[-1,1]\subseteq(-1,1)$

پاسخ: آ) درست است، زیرا:

$$\frac{5}{4}=1/25\ ,\ \frac{8}{5}=1/6\ ,\ \frac{3}{2}=1/5\Rightarrow\frac{3}{2}\in(\frac{5}{4},\frac{8}{5}]$$

ب) درست است، زیرا بازهٔ $(-2,1)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 می‌باشد، پس بازهٔ $(-2,1)$ شامل دو عدد -1 و 0 می‌باشد. پس داریم:

$$\{-1,0\}\subseteq(-2,1)$$

پ) درست است، زیرا:

$$-\sqrt{5}\simeq-2/2\Rightarrow-\sqrt{5}\in[-3,-2)$$

ت) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $-1\in[-1,1]$ ولی $-1\notin(-1,1)$

مثال: اگر $A=[-۲,۳)$ و $B=(۰,۴)$ باشد:

آ) نمایش مجموعه‌ای A و B را بنویسید.

ب) نمایش هندسی هر یک از مجموعه‌های A و B را رسم کنید.

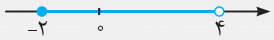
پ) $A\cap B$ ، $A\cup B$ و $A-B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: آ) $A=[-۲,۳)=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x<۳\}$ ، $B=(۰,۴)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۴\}$

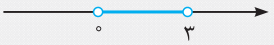
ب)

پ) مجموعه‌های A و B را روی یک محور نمایش می‌دهیم و سپس اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$A\cup B=[-۲,۴)$



$A\cap B=(۰,۳)$

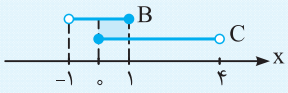


$A-B=[-۲,۰]$

تست: اگر $A=[-۲,۱)$ ، $B=(-۱,۱]$ و $C=[۰,۴)$ باشند، مجموعهٔ $A-(B\cap C)$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]$ ۲) $[-۲,-۱)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,۰)$

پاسخ:



$B\cap C=[۰,۱]\Rightarrow A-(B\cap C)=[-۲,۱)-[۰,۱]=[-۲,۰)$ گزینهٔ (۴) صحیح است. $\Rightarrow$

طول و نقطه میانی در بازه‌های محدود ویژهٔ علاقمندان

$$\text{طول بازه}=\text{انتهای بازه}-\text{ابتدای بازه}\quad ،\quad \text{طول نقطهٔ میانی}=\frac{\text{ابتدای بازه}+\text{انتهای بازه}}{۲}$$

تست: اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲\le -x+۳\le ۵\}$ باشد، طول بازهٔ $A\cup B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $۲\le -x+۳\le ۵$، حدود x و درنتیجه مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$$۲\le -x+۳\le ۵\xrightarrow{-۳}-۱\le -x\le ۲\xrightarrow{\div(-۱)}-۲\le x\le ۱\Rightarrow B=[-۲,۱]$$

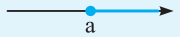
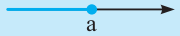
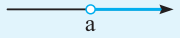
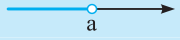
$A\cup B=[-۱,۲]\cup[-۲,۱]=[-۲,۲]\Rightarrow$ طول بازهٔ $A\cup B$ = انتهای بازه − ابتدای بازه $=۲-(-۲)=۴\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

بازه‌های بی‌کران (نامحدود)

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ به صورت $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le ۲\}$ است. از نماد $(-\infty,۲]$ برای نمایش مجموعهٔ A استفاده می‌کنیم و آن را بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم. اگر حداقل در یک طرف بازه یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ به‌کار رفته باشد، آن بازه را بی‌کران (نامحدود) می‌خوانیم.

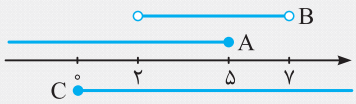
فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. انواع بازه‌های نامحدود، نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	$(a,+\infty)$	باز
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$	$(-\infty,a)$	باز

نکته بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

مثال: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 5\}$، $B=(2,7)$ و $C=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge 0\}$ باشد، حاصل $(A\cap B)\cup C$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

پاسخ: هریک از مجموعه‌های A، B و C را روی یک محور مشخص می‌کنیم و با توجه به آن، مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ را به‌صورت بازه می‌نویسیم:



$$A\cap B=(-\infty,5]\cap(2,7)=(2,5]\Rightarrow(A\cap B)\cup C=(2,5]\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$$

نمایش هندسی مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ به‌صورت مقابل است:

تست: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\le 3\}$، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{x}{2}>1\}$ و $C=[-4,+\infty)$ باشند، مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: مجموعهٔ B از حل نامعادلهٔ $-\frac{x}{2}>1$ به‌دست می‌آید:

$$-\frac{x}{2}>1\xrightarrow{\times 2}-x>2\xrightarrow{\div(-1)}x<-2\Rightarrow B=(-\infty,-2)$$

$$B\cap C=(-\infty,-2)\cap[-4,+\infty)=[-4,-2)\ ,\ A=(-2,3]\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(-2,3]\cup[-4,-2)=[-4,3]-\{-2\}$$

بنابراین مجموعهٔ اعداد صحیح واقع در مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ به صورت زیر است:

$$\{-4,-3,-1,0,1,2,3\}\Rightarrow \text{تعداد اعداد صحیح}=7$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: اگر $A=[-1,4]$، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-x+a}{2}\le 3\}$، $C=[0,4]$ و $C=A\cap B$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳- ۴) ۲-

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $\frac{-x+a}{2}\le 3$، مجموعهٔ B به‌دست می‌آید:

$$\frac{-x+a}{2}\le 3\xrightarrow{\times 2}-x+a\le 6\Rightarrow -x\le 6-a\xrightarrow{\times(-1)}x\ge a-6\Rightarrow B=[a-6,+\infty)\ ,\ A=[-1,4]\Rightarrow A\cap B=[a-6,4]$$

از طرفی $C=A\cap B=[0,4]$، پس $a-6=0$ و از آن‌جا $a=6$. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ متناهی (باپایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ متناهی می‌نامیم.

مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که درنظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم. به‌عبارت دیگر مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال: فرض کنید A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و B مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی ۴ باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های A و B متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

پاسخ: نمایش اعضای هر یک از مجموعه های A و B به صورت زیر می‌باشد:

$$A=\{1,2,3,4,6,12\}\ ,\ B=\{4,8,12,16,\ldots\}$$

مجموعهٔ A، ۶ عضو دارد بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است، اما تعداد عضوهای مجموعهٔ B را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس B یک مجموعهٔ نامتناهی است.

قرارداد: اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا تعداد عضوهای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی می‌باشد:

$$n(\varnothing)=0\ ,\ 0\in\mathbb{W}$$

تـذکـر تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد.

به عنوان مثال، مجموعهٔ درخت‌های شهر تهران، مجموعه‌ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعهٔ متناهی است.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی

ب) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱

پ) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های شمال

ت) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ < x \leq ۴\}$

ث) مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج

پاسخ: آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی به صورت $A = \{۱۶،۲۵،۳۶،۴۹،۶۴،۸۱\}$ می‌باشد که یک مجموعهٔ متناهی است.

ب) بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱، یک مجموعهٔ نامتناهی است.

پ) هرچند تعداد درخت‌های جنگل‌های شمال بسیار زیاد است ولی تعداد آن‌ها را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس این مجموعه یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ < x \leq ۴\} = \{-۴،-۳،\ldots،۳،۴\}$ یک مجموعهٔ متناهی ۹ عضوی است.

ث) تعداد دانش‌آموزان کشور را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، اگرچه مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور، مجموعه‌ای با تعداد اعضای بسیار زیاد است ولی متناهی می‌باشد.

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج $E = \{۲،۴،۶،\ldots\}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا تعداد اعضای آن را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان نمود.

تست: اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۲ - x \leq ۲x - ۱ < ۷\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{۱}{x} < ۰\}$ ، در این‌صورت کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟

۱) A ۲) $A - B$ ۳) $A \cap B$ ۴) $B - A$

پاسخ: هریک از مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$۲ - x \leq ۲x - ۱ < ۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ < ۷ \Rightarrow ۲x < ۸ \Rightarrow x < ۴ \\ ۲ - x \leq ۲x - ۱ \Rightarrow ۳ \leq ۳x \Rightarrow ۱ \leq x \end{cases} \Rightarrow ۱ \leq x < ۴ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} A = \{۱،۲،۳\}$$

$$\frac{۱}{x} < ۰ \xrightarrow{۱ > ۰} x < ۰ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{\ldots،-۳،-۲،-۱\}$$

مجموعه‌های A، $A - B = A$ و $A \cap B = \varnothing$ متناهی و مجموعهٔ $B - A = B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$، متناهی و مجموعه‌های $A \cup B$ و $B - A$، نامتناهی هستند.

نکته اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه:

۱) اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A حتماً متناهی است.

۲) اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B حتماً نامتناهی است.

Mathematics

فصل ۱

قسمت دوم

متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U یا M نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۵ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مرجع را می‌توانیم مجموعهٔ اعداد صحیح درنظر بگیریم:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$$

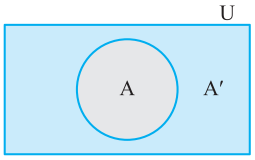
متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U - A$ را متمم مجموعهٔ A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

A' به بیان مجموعه‌ای به صورت مقابل است:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$$

نمودار وِن مجموعهٔ A' با مجموعهٔ مرجع U به صورت مقابل است:



مثال: فرض کنیم $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \le x \le 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x < 1\}$ باشند. متمم مجموعه‌های A و B را یک بار نسبت به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ و بار دیگر نسبت به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ مشخص کنید.

پاسخ: متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{Z}$:

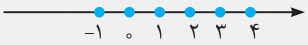
$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - A = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} - \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{\ldots, -3, -2, 5, 6, 7, \ldots\}$$

$$B = [-5, 1) \Rightarrow B' = \mathbb{Z} - B = \{\ldots, -7, -6, 1, 2, \ldots\}$$

متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{R}$:

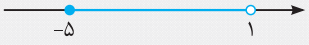
محور اعداد حقیقی را در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم. در هر مورد، قسمت‌های باقی مانده از محور، متمم مجموعه‌های A و B خواهد بود.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$



$$\Rightarrow A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$$

$B = [-5, 1)$



$$\Rightarrow B' = \mathbb{R} - B = \mathbb{R} - [-5, 1) = (-\infty, -5) \cup [1, +\infty)$$

مثال: فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{1, 2, 6, 10\}$ و $B = \{1, 3, 6, 8\}$ باشند. مجموعه‌های $A - B'$، $(A \cup B)'$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: با حذف عضوهای مجموعه‌های A و B از U مجموعه‌های A' و B' مشخص می‌شوند:

$$A' = U - A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\} - \{1, 2, 6, 10\} = \{3, 5, 8\}$$

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\} - \{1, 3, 6, 8\} = \{2, 5, 10\}$$

مجموعهٔ $A - B'$ به صورت مقابل است:

$$A - B' = \{1, 3, 6, 10\} - \{2, 5, 10\} = \{1, 6\}$$

برای مشخص کردن مجموعهٔ $(A \cup B)'$، ابتدا مجموعهٔ $A \cup B$ را به دست می‌آوریم و سپس متمم آن را مشخص می‌کنیم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\} - \{1, 2, 3, 6, 8, 10\} = \{5\}$$

با توجه به مجموعه‌های A' و B' داریم:

$$A' \cup B' = \{3, 5, 8\} \cup \{2, 5, 10\} = \{2, 3, 5, 8, 10\}$$

تست: اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی و $B=\{3k-1 \mid k \in A\} \subseteq A$ با مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشند، مجموعهٔ $B'-A'$ شامل چند عدد اول است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: مجموعه‌های A و B با اعضا به‌صورت زیر می‌باشند:

$$A=\{1,2,3,\ldots,9\} \quad , \quad B=\{3k-1 \mid k \in A\}=\{3k-1 \mid k \in \{1,2,\ldots,9\}\} \subseteq A \Rightarrow B=\{2,5,8\}$$

$$\Rightarrow B'-A'=\{\ldots,-10,-1,0,1,3,4,6,7,9,10,\ldots\}-\{\ldots,-10,0,10,11,\ldots\}=\{1,3,4,6,7,9\}$$

پس مجموعهٔ $B'-A'$، شامل دو عدد اول می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها): اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، آن‌گاه روابط زیر همواره برقرار است:

آ) $(A')'=A$ ب) $\varnothing'=U$ پ) $U'=\varnothing$

ت) $A \cap A'=\varnothing$ ث) $A \cup A'=U$ ج) $A-B=A \cap B'$

چ) $(A \cup B)'=A' \cap B'$ ح) $(A \cap B)'=A' \cup B'$ خ) $A-B=A-(A \cap B)$

تذکر روابط (چ) و (ح) به قوانین دمورگان معروف هستند.

مثال: اگر $U=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{1,4,5\}$ و $B=\{1,2,3\}$ باشند، درستی تساوی‌های $A-B=A \cap B'$ و $(A \cap B)'=A' \cup B'$ را بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A' و B' را با اعضا می‌نویسیم:

$$A'=U-A=\{1,2,3,4,5\}-\{1,4,5\}=\{2,3\}$$

$$B'=U-B=\{1,2,3,4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\}$$

$$\begin{cases} A-B=\{1,4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\} \\ A \cap B'=\{1,4,5\} \cap \{4,5\}=\{4,5\} \end{cases} \Rightarrow A-B=A \cap B'$$

$$\begin{cases} A \cap B=\{1\} \Rightarrow (A \cap B)'=U-(A \cap B)=\{2,3,4,5\} \\ A' \cup B'=\{2,3\} \cup \{4,5\}=\{2,3,4,5\} \end{cases} \Rightarrow (A \cap B)'=A' \cup B'$$

تست: اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد صحیح، $A'=\{1,2,3\}$ و $B'=\{2,3,4,5\}$ باشند، آن‌گاه $(A \cup B)'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{2,3\}$ ۲) $\{2,4,5\}$

۳) $\{3,4,5\}$ ۴) $\{4,5\}$

پاسخ:

گزینهٔ (۱) صحیح است. $\Rightarrow \{2,3\}$ $(A \cup B)' \overset{\text{دمورگان}}{=\!=} A' \cap B'=\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\}=\{2,3\}$

مثال: اگر $U=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2\}$ باشد:

آ) آیا $B \subseteq A$ است؟ چرا؟

ب) با به دست آوردن A' و B'، چه رابطه‌ای بین A' و B' وجود دارد؟

پاسخ: آ) هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A است، بنابراین $B \subseteq A$

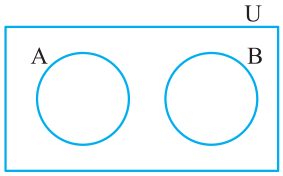
ب) $A'=U-A=\{1,2,3,4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\}$, $B'=U-B=\{3,4,5\}$

هر عضو A'، عضوی از B' است و در نتیجه $A' \subseteq B'$

نکته اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $A' \subseteq B'$

مجموعه‌های جدا از هم

دو مجموعهٔ جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

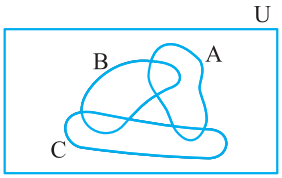


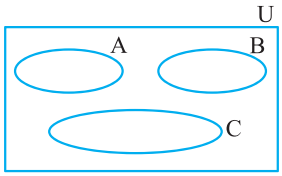
نمودار وِن برای دو مجموعهٔ جدا از هم به صورت مقابل است:

به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۵\}$ و $B=\{۳،۴،۶\}$، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند، زیرا:

$$A\cap B=\{۱،۲،۵\}\cap\{۳،۴،۶\}=\varnothing$$

نکته اگر A، B و C سه مجموعه و $A\cap B\cap C=\varnothing$ باشد، آن گاه لزوماً سه مجموعهٔ A، B و C دو به دو جدا از هم نمی‌باشند. به شکل مقابل توجه کنید:





در واقع سه مجموعهٔ A، B و C دو به دو مجزا هستند هرگاه $A\cap B=\varnothing, A\cap C=\varnothing, B\cap C=\varnothing$

نکته اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه $B\subseteq A'$ و $A\subseteq B'$

مثال: سه مجموعهٔ دو به دو مجزا و نامتناهی A، B و C از اعداد صحیح ارائه دهید که اجتماع آن‌ها برابر $\mathbb{Z}$ شود.

پاسخ: اگر $A=\{...،-۳،-۲،-۱،۰\}$، $B=\{۱،۳،۵،...\}$ و $C=\{۲،۴،۶،...\}$ باشند، آن‌گاه A، B و C سه مجموعهٔ نامتناهی دو به دو جدا از هم‌اند و داریم: $A\cup B\cup C=\mathbb{Z}$

نکته با توجه به این که باقی‌ماندهٔ عدد صحیح و دلخواه a بر عدد طبیعی n برابر عددی حسابی r است که در آن $0\le r<n$، بنابراین عدد صحیح a را می‌توان به‌صورت $a=nk+r$ نمایش داد که در آن $k\in\mathbb{Z}$ و $0\le r<n$. بر این اساس مجموعهٔ اعداد صحیح را می‌توان به‌صورت اجتماع n مجموعهٔ دوبه‌دو جدا از هم و نامتناهی نمایش داد.

مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح را به صورت اجتماع چهار مجموعهٔ نامتناهی دو به دو جدا از هم بنویسید.

پاسخ: با استفاده از نکتهٔ قبل می‌توان نوشت:

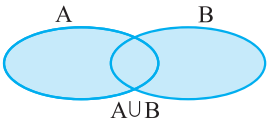
$$A=\{۴k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{...،-۸،-۴،۰،۴،۸،...\},\ B=\{۴k+۱\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{...،-۷،-۳،۱،۵،۹،...\}$$

$$C=\{۴k+۲\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{...،-۶،-۲،۲،۶،۱۰،...\},\ D=\{۴k+۳\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{...،-۵،-۱،۳،۷،...\}$$

A، B، C و D چهار مجموعهٔ دو به دو مجزا هستند و $A\cup B\cup C\cup D=\mathbb{Z}$ می‌باشد.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی

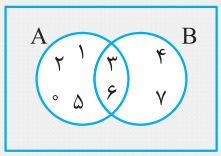
فرض کنید A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، می‌دانیم نمودار وِن اجتماع دو مجموعهٔ A و B به صورت مقابل است:



عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B، یعنی $A\cap B$، در هر یک از مجموعه‌های A و B قرار دارند. بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد عضوهایی که در هر دو مجموعه (A یا B یا هر دو) قرار دارند، باید تعداد عضوهای مشترک A و B که دو بار به حساب می‌آیند، یعنی $n(A\cap B)$ را از $n(A)+n(B)$، کم کنیم. پس:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

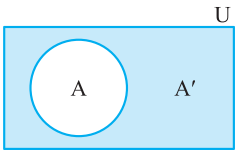
مثال: با توجه به نمودار وِن مقابل، $n(A\cup B)$ را به‌دست آورید.



پاسخ: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۴-۲=۸$

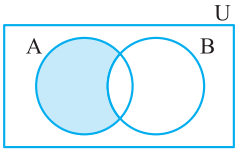
نکته اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع و متناهی U باشند، آن‌گاه:

۱) تعداد اعضایی که به مجموعهٔ A تعلق ندارند برابر است با:



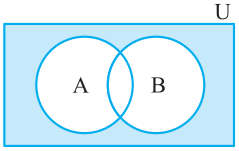
$$n(A') = n(U) - n(A)$$

۲) تعداد اعضایی که به مجموعهٔ A تعلق دارند و به مجموعهٔ B تعلق ندارند (فقط به مجموعهٔ A تعلق دارند)، برابر است با:



$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

۳) تعداد اعضایی که نه به مجموعهٔ A تعلق داشته باشند و نه به مجموعهٔ B، برابر است با:



$$n(A' \cap B') \overset{\text{قانون دمورگان}}{=\!=} n\big((A \cup B)'\big) = n(U) - n(A \cup B)$$

تذکر اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه:

۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ۲) $n(A - B) = n(A)$

مثال: **تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد هستند و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی، مرد باشند، در این‌صورت چند نفر از ۶۳ بیمار؛**

آ) یا مرد هستند و یا برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟ **ب) مرد هستند ولی برای عمل جراحی بستری نشده‌اند؟**

پ) نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟

پاسخ : مجموعهٔ تمام بیماران بیمارستان را با U، مجموعهٔ بیماران مرد را با A و مجموعهٔ افرادی که برای عمل جراحی بستری شده‌اند را با B نشان می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$n(U) = ۶۳ \ ، \ n(A) = ۳۷ \ ، \ n(B) = ۲۰ \ ، \ n(A \cap B) = ۱۲$$

آ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$ مطلوب است، پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۳۷ + ۲۰ - ۱۲ = ۴۵$$

ب) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A - B$ مدنظر است، پس:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۳۷ - ۱۲ = ۲۵$$

پ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A' \cap B' = (A \cup B)'$ مدنظر است. پس:

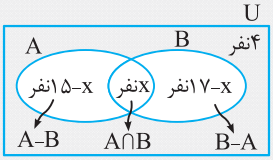
$$n(A' \cap B') = n\big((A \cup B)'\big) = n(U) - n(A \cup B) \overset{(آ)}{=\!=} ۶۳ - ۴۵ = ۱۸$$

مثال: **در یک کلاس ۲۷ نفری، تعداد ۱۵ نفر از دانش آموزان عضو گروه نقاشی و ۱۷ نفر آن‌ها عضو گروه طراحی هستند. اگر ۴ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو گروه نباشند، مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:**

آ) عضو هر دو گروه باشند. **ب) عضو گروه نقاشی باشند ولی عضو گروه طراحی نباشند.**

پاسخ : مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان عضو گروه نقاشی را با A، مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان عضو گروه طراحی را با B و مجموعهٔ مرجع را با U نمایش می‌دهیم.

روش اول: در نمودار ون زیر، دو مجموعهٔ A و B سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که ۴ نفر طبق فرض در خارج مجموعهٔ $A \cup B$ قرار دارند. فرض کنیم x نفر در اشتراک دو مجموعهٔ A و B باشند، در این صورت $۱۵ - x$ نفر در مجموعهٔ $A - B$ و $۱۷ - x$ نفر در مجموعهٔ $B - A$ هستند. بنابراین:



$$n(U) = ۲۷ \Rightarrow (۱۵ - x) + x + (۱۷ - x) + ۴ = ۲۷ \Rightarrow ۳۶ - x = ۲۷ \Rightarrow x = ۹$$

آ) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند، برابر $x = ۹$ نفر می‌باشد.

ب) تعداد اعضای مجموعهٔ $A - B$ مطلوب است، پس

$$n(A - B) = ۱۵ - x = ۱۵ - ۹ = ۶$$

روش دوم:

طبق فرض $n(A) = ۱۵$ ، $n(B) = ۱۷$ و $n(A \cup B) = ۲۷ - ۴ = ۲۳$ می‌باشد.

آ) $n(A \cap B)$ جواب مسئله است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۲۳ = ۱۵ + ۷ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۳۲ - ۲۳ = ۹$$

ب) $n(A - B)$ جواب مسئله است:

$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = ۱۵ - ۹ = ۶$$

تست: اگر $n(A)=۱۷$، $n(A\cap B)=۴$ و $n(A\cup B)=۳۰$ باشند، $n(B)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۰=۱۷+n(B)-۴$$

$$\Rightarrow n(B)+۱۳=۳۰\Rightarrow n(B)=۳۰-۱۳=۱۷\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست: اگر $۳n(A\cap B)=۲n(A)=n(B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A\cup B)}{n(A)-n(A\cap B)}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: تعداد عضوهای هریک از مجموعه‌های A ، B و $A\cup B$ را بر حسب تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ به دست می‌آوریم:

$$۲n(A)=n(B)=۳n(A\cap B)\Rightarrow n(A)=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)\ ,\ n(B)=۳n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)+۳n(A\cap B)-n(A\cap B)=\frac{۷}{۲}n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(A)-n(A\cap B)}=\frac{\frac{۷}{۲}n(A\cap B)}{\frac{۳}{۲}n(A\cap B)-n(A\cap B)}=\frac{\frac{۷}{۲}\cancel{n(A\cap B)}}{\frac{۱}{۲}\cancel{n(A\cap B)}}=۷\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تعداد عضوهای اجتماع سه مجموعه متناهی | ویژهٔ علاقمندان

اگر A ، B و C سه مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

تست: اگر $n(A\cap B)=۴$، $n(A\cap C)=n(B\cap C)=۰$، $n(A)=۱۰$، $n(B)=۴$ و $n(C)=۷$ باشد، مقدار $n(A\cup B\cup C)$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۷ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

پاسخ: A و C و نیز B و C مجموعه‌های جدا از هم می‌باشند، بنابراین: $A\cap B\cap C=\varnothing\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۰$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=۱۰+۴+۷-۴-۰-۰+۰=۱۷\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال: در یک نظرسنجی از ۱۵۰ نفر، مشخص شده است که:

۷۴ نفر مجلهٔ A، ۷۰ نفر مجلهٔ B و ۶۳ نفر مجلهٔ C را می‌خوانند. هم‌چنین ۳۲ نفر مجله‌های A و B، ۲۶ نفر مجله‌های B و C، ۲۷ نفر مجله‌های A و C و ۱۵ نفر هر سه مجلهٔ A، B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعیین تعداد افرادی از این مجموعه که:

آ) دقیقاً یکی از سه مجلهٔ A یا B یا C را می‌خوانند.

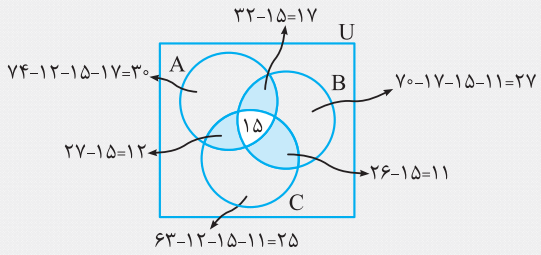
ب) دقیقاً دو مجله می‌خوانند.

پ) مجلهٔ A را می‌خوانند ولی مجلهٔ B را نمی‌خوانند.

ت) هیچ‌یک از این سه مجله را نمی‌خوانند.

پاسخ: مجموعه‌های A، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : افرادی که مجلهٔ A را می‌خوانند. B : افرادی که مجلهٔ B را می‌خوانند. و C : افرادی که مجلهٔ C را می‌خوانند. نمودار وِن سه مجموعهٔ A، B و C به‌صورت زیر است که با توجه به اطلاعات مسئله، تعداد عضوهای هر قسمت را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا تعداد اعضای اشتراک سه مجموعه، سپس اشتراک دوبه‌دوی مجموعه‌ها و درنهایت باقی‌ماندهٔ مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:



با توجه به نمودار داریم:

آ) $۳۰+۲۷+۲۵=۸۲$

ب) $۱۲+۱۷+۱۱=۴۰$

پ) $۳۰+۱۲=۴۲$

ت) $۱۵۰-(۳۰+۲۷+۲۵+۱۲+۱۷+۱۱+۱۵)=۱۵۰-۱۳۷=۱۳$

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها

۱. اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\emptyset \subseteq A$ ۲) $\{\emptyset\} \in A$ ۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ ۴) $n(A) = ۲$

۲. اگر مجموعهٔ C به صورت $\{x + ۲ \mid x \in P, ۴ \leq x - ۱ < ۳۰\}$ تعریف شده باشد که در آن منظور از P مجموعهٔ اعداد اول می‌باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $۳۱ \in C$ ۲) $۵ \in C$ ۳) $۱۳ \notin C$ ۴) $۲۹ \in C$

۳. کدام‌یک از اعداد زیر به مجموعهٔ $A = \{۲^x \times ۳^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = ۵\}$ متعلق است؟

۱) ۸۱ ۲) ۴۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۴۴

۴. کدام‌یک از اعداد زیر به مجموعهٔ $A = \{۵, -۱۰, -۷, \ldots, -۴۳\}$ متعلق نیست؟

۱) -۲۵ ۲) -۱۳ ۳) -۳۷ ۴) -۲۱

۵. هرگاه $X \cup \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$، برای مجموعهٔ X چند جواب وجود دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۶. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۳, ۵\}$ باشد، به جای X در رابطهٔ $A \cup B \subseteq X \subseteq A \cap B$ چند مجموعهٔ متفاوت می‌توان قرار داد؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

بازه‌ها

۷. حاصل عبارت $(-۱, ۲] \cap [-۲, ۱)$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۱]$ ۲) $(-۱, ۲)$ ۳) $[-۲, -۱]$ ۴) $(-۲, ۲]$

۸. حاصل عبارت $[۰, ۲) - (-۲, ۳]$ کدام است؟

۱) $[-۲, -۱] \cup [۲, ۳)$ ۲) $[-۲, ۰) \cup (۲, ۳)$ ۳) $[-۲, ۰) \cup [۲, ۳]$ ۴) $[-۲, ۰] \cup (۲, ۳)$

۹. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq ۲x - ۱ < ۷\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳x + ۲ < ۸\}$ باشد، حاصل $A - B$ کدام است؟

۱) $(۲, ۴)$ ۲) $[۲, ۴)$ ۳) $(-\infty, ۱)$ ۴) $(-\infty, ۱]$

۱۰. اگر $A = (-۲, ۵]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$، در این صورت مجموعهٔ $A - B$ برابر کدام است؟

۱) $\emptyset$ ۲) $(-۲, ۲)$ ۳) $(۲, ۵]$ ۴) $[۲, ۵]$

۱۱. اگر $A = (-\infty, ۲]$، $B = [-۳, ۱)$ و $C = (-۱, +\infty)$ باشد، حاصل $B \cup (A \cap C)$ کدام است؟

۱) $[-۳, ۲]$ ۲) $(-۳, ۲)$ ۳) $(-۱, ۱)$ ۴) $[-۳, ۱)$

۱۲. اگر $۲m + ۱ \in [-۱, ۵]$، حدود m کدام است؟

۱) $۰ \leq m \leq ۳$ ۲) $-۱ \leq m \leq ۲$ ۳) $-۳ \leq m \leq ۰$ ۴) $۱ \leq m \leq ۴$

۱۳. اگر عدد ۱ به بازهٔ $[۴m + ۱, ۳m - ۲)$ تعلق داشته باشد، آن‌گاه:

۱) $m \in [-۲, ۴)$ ۲) $m \in [-۱, ۱)$ ۳) $m \in (۰, ۴]$ ۴) $m \in (-۲, ۰]$

۱۴. بازهٔ $(۵, b]$ شامل سه عدد مربع کامل است. حداکثر مقدار طبیعی b کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷

۱۵. اگر بازهٔ $(-۱۰۲a-۱)$ شامل پنج عدد صحیح باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $۲/۵ \leq a \leq ۳$ ۲) $۲/۵ < a < ۳$ ۳) $۲/۵ < a \leq ۳$ ۴) $۲/۵ \leq a < ۳$

۱۶. اگر $[-۱۰۷) = [۱۰a] \cup [b۰۵)$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱۷. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) مجموعهٔ سلول‌های عصبی مغز یک انسان
۲) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون
۳) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۱
۴) مجموعهٔ مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی

۱۸. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر بی‌پایان است؟

۱) مجموعهٔ تمام افراد روی کرهٔ زمین
۲) مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های موجود در جهان
۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵
۴) مجموعهٔ تمام اعداد اول زوج

۱۹. اگر $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ به‌ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح باشند، کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{W}\cap\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}$ ۴) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$

۲۰. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعهٔ نامتناهی باشد، مجموعهٔ $A-B$ چگونه است؟

۱) باپایان ۲) بی‌پایان ۳) تهی ۴) غیرقابل تعریف

۲۱. کدام مجموعه متناهی (باپایان) است؟

۱) $\{x \mid x \in \mathbb{N} ; x^۲ > ۱۶\}$ ۲) $\{x \mid x \in \mathbb{N} ; x \leq ۲^{۱۲}\}$ ۳) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} ; x > ۱۰۰۰\}$ ۴) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} ; x < ۱۰۰۰\}$

۲۲. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A = \left\{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
۲) مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ (۱۰۲)
۳) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ < ۱۰۰۰\}$
۴) مجموعهٔ اعداد اول فرد

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و ...

مجموعه‌های مرجع و متمم

۲۳. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، E مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و O مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشد، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $E \cap O = O$ ۲) $E \cup O = \mathbb{N}$ ۳) $(E \cup O)' = \varnothing$ ۴) $E' \cap O = O$

۲۴. اگر مجموعه‌های A و B هردو زیرمجموعهٔ اعداد صحیح باشند به‌طوری‌که A مجموعه‌ای نامتناهی، B مجموعه‌ای متناهی و $C \subseteq A$ باشد، در این صورت کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) $A \cap B'$ ۲) $B-A$ ۳) $B \cup C$ ۴) $A \cap C'$

۲۵. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $A \cup B$ ۲) $A' \cup B$ ۳) $A \cap B'$ ۴) $A' \cap B$

۲۶. اگر A بازهٔ متناظر با مجموعه جواب نامعادلهٔ $x-۶ \leq ۳+۲x < x$ و $B = (-\infty,-۲) \cup [۴,+\infty)$ و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، حاصل $A \cap B'$ کدام است؟

۱) $(-۳,۴)$ ۲) $(-۳,-۲)$ ۳) $[-۲,۱]$ ۴) $(-۲,۱]$

۲۷. اگر مجموعهٔ اعداد حسابی $(\mathbb{W})$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۲x \mid x \in \mathbb{W}\}$، آن‌گاه A' برابر کدام است؟

۱) $\{۲x \mid x \in \mathbb{W}'\}$ ۲) $\{۲x-۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$ ۳) $\{۲x+۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$ ۴) $\{x-۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$

۲۸. اگر $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < ۴۰\}$ و $A = \{x \in U \mid ۷ \leq x \leq ۲۵\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A' \cup U$ چند عضو دارد؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۹ ۳) ۲۳ ۴) ۱۹

۲۹. اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، $A' = \{x \mid x \geq ۲\}$ و $B' = \{x \mid x \geq ۵\}$ باشد، مجموعهٔ $A \cup B$ کدام است؟

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $\{۱,۲,۳,۴\}$ ۳) $\{۲,۳,۴,۵\}$ ۴) $\varnothing$

۳۰. اگر $A' = \{1,2,4\}$ ، $B' = \{2,3\}$ و مجموعهٔ مرجع اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه $(A \cap B)'$ کدام است؟

۱) $\{1,2,3,4\}$ ۲) $\{1,4,3\}$ ۳) $\{1,4\}$ ۴) $\{2\}$

۳۱. اگر مجموعهٔ $\mathbb{N}$ مرجع، $A = \{x \mid x \geq 4\}$ و $B = \{x \mid x < 2\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A \cup B)'$ برابر کدام است؟

۱) $\{1,2\}$ ۲) $\{3\}$ ۳) $\{2,3\}$ ۴) $\{1,2,3\}$

جبر مجموعه‌ها

۳۲. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $A - (A \cap B')$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) $\varnothing$

۳۳. حاصل $[A \cup (A' \cap U)] \cup B$ در کدام گزینه آمده است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) A ۲) U ۳) B ۴) $\varnothing$

۳۴. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و $B - A = B$ باشد، حاصل $(A \cap B)' \cup (A - B)$ کدام است؟

۱) B ۲) U ۳) $\varnothing$ ۴) A

۳۵. متمم مجموعهٔ $[(A \cap B') \cup (A' \cup B)]$ کدام است؟

۱) $A - B$ ۲) U ۳) $B - A$ ۴) $\varnothing$

۳۶. متمم مجموعهٔ $A - (B - A)'$، نسبت به مجموعهٔ مرجع کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) A ۴) B

۳۷. اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ریاضی- ۷۷)

۱) $B' \subseteq A'$ ۲) $A' \cup B = U$ ۳) $A \cap B' = \varnothing$ ۴) $A' \cap B = \varnothing$

شمارش اعضای مجموعه‌ها

۳۸. اگر $n(A) + n(B) = 3n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

۳۹. اگر $n(A - B) = 2n(A \cap B)$ و $n(B) = 2n(A \cap B)$ باشند، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(B - A)}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۴

۴۰. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۴ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمندند و ۴ نفر نیز به هیچ‌یک از دو بازی علاقه‌ای ندارند. در این کلاس چند نفر فقط به والیبال علاقمند هستند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶ ۴) ۲

۴۱. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟ (سراسری ریاضی- ۸۲)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۲. از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۳ نفر عضو تیم والیبال می‌باشند. با فرض آن‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد، چند نفر دقیقاً عضو یکی از این دو تیم هستند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۴۳. مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ به‌ترتیب ۵، ۲ و ۲ عضو دارند. مجموعهٔ $B - A$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۴. اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، تعداد اعضای $A \cup B$ سه برابر تعداد اعضای B ، تعداد اعضای A ، $\frac{5}{2}$ برابر تعداد اعضای B و تعداد اعضایی که به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق دارند برابر ۳ باشد، آن‌گاه تعداد اعضایی که حداقل به یکی از دو مجموعهٔ A یا B تعلق دارد کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۴۵. اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعهٔ اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

پاسخ فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ A دارای سه عضو ∅ ، {∅} و {{∅}} می‌باشد. یعنی تعداد اعضای A برابر ۳ است پس $n(A)=۳$. می‌دانیم مجموعهٔ ∅ (تهی) زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است، پس گزینهٔ (۱) درست است و چون {∅} عضوی از مجموعهٔ A است، پس گزینهٔ (۲) نیز درست است و چون اعضای ∅ و {∅} به A تعلق دارند، پس $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\subseteq A$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ C را می‌توان به صورت $C=\{x+۲\mid x\in P\ ,\ ۵\le x<۳۱\}$ نوشت. برای نوشتن اعضای مجموعهٔ C ابتدا تمام اعداد اول که در رابطهٔ $۵\le x<۳۱$ صدق می‌کنند را می‌نویسیم و سپس به هر یک از آن‌ها ۲ واحد اضافه می‌کنیم. اما اعداد اولی که در رابطهٔ $۵\le x<۳۱$ صدق می‌کنند عبارتند از: ۵،۷،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۹

در نتیجه مجموعهٔ C عبارت است از: $C=\{۷,۹,۱۳,۱۵,۱۹,۲۱,۲۵,۳۱\}$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها رابطهٔ $۳۱\in C$ درست است و بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

تمام اعداد طبیعی که مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد، عبارتند از:

$$\begin{cases}x=۱\\y=۴\end{cases}\quad و\quad \begin{cases}x=۲\\y=۳\end{cases}\quad و\quad \begin{cases}x=۳\\y=۲\end{cases}\quad و\quad \begin{cases}x=۴\\y=۱\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ A عبارت است از:

$$A=\{۲^۱\times۳^۴\ ,\ ۲^۲\times۳^۳\ ,\ ۲^۳\times۳^۲\ ,\ ۲^۴\times۳^۱\}=\{۱۶۲,۱۰۸,۷۲,۴۸\}$$

با توجه به گزینه‌ها، عدد ۴۸ در مجموعهٔ A قرار دارد.

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ A شامل مضارب ۶ منهای یک، از ۵ تا ۴۳- می‌باشد. لذا مجموعهٔ A عبارت است از:

$$A=\{۵,-۱,-۷,-۱۳,-۱۹,-۲۵,-۳۱,-۳۷,-۴۳\}$$

بنابراین عدد ۲۱- متعلق به مجموعهٔ A نیست.

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

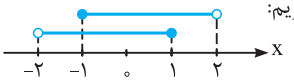
مجموعهٔ X باید عضو ۶ را داشته باشد و اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را نیز می‌تواند اختیار کند یا نه، لذا برای هر یک از اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دو حالت وجود دارد که به X تعلق داشته باشند یا خیر. لذا تعداد مجموعه‌های X که در معادلهٔ داده شده صدق کنند برابر تعداد زیر مجموعه‌های {۱،۲،۳،۴،۵}، یعنی $۲^۵=۳۲$ می‌باشد.

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ X باید اعضای مجموعهٔ $A\cap B$ یعنی ۳ را شامل باشد. همچنین هریک از اعضای $A\cup B$، یعنی ۱، ۲، ۴،۳ و۵ به جز ۳ می‌توانند در X باشند، لذا تعداد مجموعه‌هایی مانند X که در رابطهٔ مذکور صدق می‌کنند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ {۱،۲،۴،۵} می‌باشد که برابر $۲^۴=۱۶$ است.

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با نمایش هندسی هریک از دو بازه، داریم:



$$\Rightarrow (-۲,۱]\cap[-۱,۲)=[-۱,۱]$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

تمام اعضای بازهٔ (۰،۲] را باید از بازهٔ [۲-،۳] حذف کنیم. توجه کنید که عدد صفر عضو مجموعهٔ (۰،۲] نیست، پس صفر را از [۲-،۳] حذف نمی‌کنیم ولی چون $۲\in(۰,۲]$، پس عدد ۲ را باید از بازهٔ [۲-،۳] حذف کنیم، پس:

$$[-۲,۳)-(۰,۲]=[-۲,۰]\cup(۲,۳)$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا هریک از مجموعه‌های A و B را به صورت بازه نمایش داده و سپس حاصل A - B را می‌یابیم:

$$۱\le ۲x-۱<۷\Rightarrow ۲\le ۲x<۸\Rightarrow ۱\le x<۴\Rightarrow A=[۱,۴)\quad (۱)$$

$$۳x+۲<۸\Rightarrow ۳x<۶\Rightarrow x<۲\Rightarrow B=(-\infty,۲)\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A-B=[۱,۴)-(-\infty,۲)=[۲,۴)$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابر تعریف مجموعهٔ B، اعضای آن، قرینهٔ اعضای مجموعهٔ A هستند. پس:

$$x\in B\Rightarrow -x\in A\Rightarrow -x\in(-۲,۵]\Rightarrow -۲<-x\le ۵$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۵\le x<۲\Rightarrow x\in[-۵,۲)\Rightarrow B=[-۵,۲)$$

$$A-B=(-۲,۵]-[-۵,۲)=[۲,۵]$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A\cap C=(-\infty,۲]\cap(-۱,+\infty)=(-۱,۲]$$

$$B\cup(A\cap C)=[-۳,۱)\cup(-۱,۲]=[-۳,۲]$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۲m+۱\in[-۱,۵]\Rightarrow -۱\le ۲m+۱\le ۵$$

$$\xrightarrow{-۱} -۲\le ۲m\le ۴\xrightarrow{\div ۲} -۱\le m\le ۲$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۱\in(۲m-۱,۳m+۴]\Rightarrow ۲m-۱<۱\leq ۳m+۴\Rightarrow \begin{cases}۱\leq ۳m+۴\\ ,\\ ۲m-۱<۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۳\leq ۳m\\ ,\\ ۲m<۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱\leq m\\ ,\\ m<۱\end{cases}\xrightarrow{\cap}-۱\leq m<۱\Rightarrow m\in[-۱,۱)$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

اولین سه عدد مربع کامل بزرگ‌تر از ۵ عبارتند از ۹، ۱۶ و ۲۵. پس بازهٔ $[۵,b)$ باید شامل این سه عدد بوده و شامل هیچ عدد مربع کامل دیگری نباشد و نیز b بیش‌ترین مقدار را داشته باشد. چون عدد مربع کامل بعدی برابر ۳۶ بوده و بازه از طرف b باز است، پس بیش‌ترین مقدار b برابر ۳۶ است. در واقع بازهٔ $[۵,۳۶)$ دارای سه عدد مربع کامل بوده و انتهای بازه بیش‌ترین مقدار ممکن را دارا است.

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

پنج عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱-، عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴. با توجه به باز بودن بازه، برای این‌که این بازه شامل پنج عدد مذکور باشد، $۲a-۱$ باید از ۴ بیش‌تر ولی کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم: $۴<۲a-۱\leq ۵\Rightarrow ۵<۲a\leq ۶\Rightarrow ۲/۵<a\leq ۳$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

چون اجتماع دوبازهٔ $[۱,a]$ و $[b,۵)$ برابر یک بازه شده است، پس این بازه‌ها حتماً با هم اشتراک دارند. هم‌چنین چون اجتماع این بازه‌ها برابر هیچ یک از آن‌ها نشده است، پس هیچ کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیستند.

از طرفی چون ابتدای بازهٔ جواب، $۱>-۱$ است، پس قطعاً $b<۱$ می‌باشد.

پس نمایش هندسی این بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی می‌بایست به‌صورت روبه‌رو باشد:

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$[۱,a]\cup[b,۵)=[b,a]$$

پس بنابر فرض داریم:

$$[b,a]=[-۱,۷]\Rightarrow b=-۱,a=۷\Rightarrow a-b=۷-(-۱)=۸$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

در مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت کسر ۱، در مخرج کسر می‌توان هر عدد طبیعی قرار داد و چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی است، این مجموعه نامتناهی است.

تعداد اعضای بقیهٔ مجموعه‌های ارائه شده در سایر گزینه‌ها برابر یک عدد حسابی بوده و در نتیجه همگی آن‌ها مجموعهٔ متناهی‌اند.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ تمام افراد روی کرهٔ زمین و هم‌چنین مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های موجود در جهان متناهی هستند گرچه تعداد آن‌ها زیاد است. هم‌چنین مجموعهٔ تمام اعداد اول زوج، یک مجموعهٔ تک عضوی $\{۲\}$ است، لذا متناهی می‌باشد ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵، بی‌شمار عضو دارد و در نتیجه نامتناهی (بی‌پایان) است.

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

بدیهی است که $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$ و مجموعهٔ تک عضوی $\{۰\}$ متناهی است.

توجه کنید که: $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\ldots,-۳,-۲,-۱\}$

$$\mathbb{W}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{Z}\cap\mathbb{W}=\mathbb{W}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $A-B\subseteq A$ و چون مجموعهٔ A متناهی است، پس مجموعهٔ $A-B$ نیز همواره متناهی خواهد بود. توجه کنید که ممکن است $A-B=\varnothing$ باشد که در این صورت نیز مجموعهٔ $A-B$ متناهی است. زیرا تعداد اعضای $A-B$ در این حالت نیز برابر یک عدد حسابی می‌باشد.

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

هریک از مجموعه‌های داده شده در گزینه‌ها را با اعضا نمایش می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $\{۵,۶,۷,۸,\ldots\}$ گزینهٔ (۲): $\{۱,۲,\ldots,۲^{۱۲}\}$

گزینهٔ(۳): $\{۱۰۰۱,۱۰۰۲,۱۰۰۳,\ldots\}$ گزینهٔ (۴): $\{۹۹۷,۹۹۸,۹۹۹,\ldots\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تنها مجموعهٔ مذکور در گزینهٔ (۲) متناهی است.

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

داریم: $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^{۲}<۱۰۰۰\}=\{-۳۱,-۳۰,\ldots,۳۰,۳۱\}$

بنابراین مجموعهٔ ارائه شده در گزینهٔ (۳) متناهی است. مجموعهٔ ارائه شده در سایر گزینه‌ها، نامتناهی هستند.

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد هیچ اشتراکی با هم ندارند و بنابراین $E\cap O=\varnothing$ خواهد بود.

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $A\cap B'=A-B$ و از آن جایی که اگر از مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای متناهی کم شود، حاصل مجموعه‌ای نامتناهی خواهد بود، پس مجموعهٔ $A\cap B'=A-B$ قطعاً مجموعه‌ای نامتناهی است.

در گزینهٔ (۲)، چون $B-A\subseteq B$ و مجموعهٔ B متناهی است، پس $B-A$ نیز متناهی است.

در گزینهٔ (۳)، اگر مجموعهٔ C که $C\subseteq A$ است، متناهی باشد، مجموعه $B\cup C$ متناهی خواهد بود. بنابراین این مجموعه الزاماً نامتناهی نیست.

در گزینهٔ (۴)، اگر مجموعهٔ C' متناهی باشد، از آن جایی که اشتراک یک مجموعهٔ متناهی و یک مجموعهٔ نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی است، پس این مجموعه نیز متناهی خواهد بود.

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این که $A\cap B'\subseteq A$ است و مجموعهٔ A مجموعه‌ای متناهی می‌باشد، پس مجموعهٔ $A\cap B'$ نیز متناهی است.

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x<۲x+۳\leq ۶-x\Rightarrow\begin{cases}x<۲x+۳\\ ,\\ ۲x+۳\leq ۶-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۳<x\\ ,\\ ۳x\leq ۳\Rightarrow x\leq ۱\end{cases}\Rightarrow -۳<x\leq ۱\Rightarrow A=(-۳,۱]$$

$$B=(-\infty,-۲)\cup[۴,+\infty)\Rightarrow B'=[-۲,۴)$$

$$\Rightarrow A\cap B'=(-۳,۱]\cap[-۲,۴)=[-۲,۱]$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$A=\{0,2,4,6,\ldots\}$ $\quad\mathbb{W}=\{0,1,2,3,4,\ldots\}$

چون مجموعهٔ $\mathbb{W}$ را مرجع گرفته‌ایم، بنابراین متمم مجموعهٔ A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{W}$ است که اعضای A در آن نباشد، بنابراین $A'=\{1,3,5,7,\ldots\}$، بنابراین A' تمام اعداد فرد با شروع از یک را شامل است که می‌توان آن را با نماد ریاضی به صورت $A'=\{2x+1 \mid x\in\mathbb{W}\}$ نمایش داد. توجه کنید که در گزینهٔ (۲) اعداد فرد از ۱- شروع می‌شوند و چون A و A' باید در داخل مجموعهٔ مرجع باشند، این گزینه نادرست است.

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}U=\{1,2,3,\ldots,39\}\\ A'=U-A=\{1,2,3,4,5,6,26,27,\ldots,39\}\end{array}\right\}\Rightarrow A'\cup U=U$$

بنابراین $A'\cup U$ دارای ۳۹ عضو می‌باشد.

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به مجموعهٔ مرجع که برابر مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌باشد، ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A'=\{2,3,4,\ldots\}\Rightarrow A=\{1\},B'=\{5,6,7,\ldots\}\Rightarrow B=\{1,2,3,4\}$$

بنابراین: $A\cup B=\{1,2,3,4\}$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(A\cap B)'\overset{\text{دمورگان}}{=\!=\!=}A'\cup B'=\{1,2,4\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3,4\}$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از قوانین دمورگان می‌دانیم $(A\cup B)'=A'\cap B'$، داریم:

$$A'=\{1,2,3\}\ ,\ B'=\{2,3,4,\ldots\}\Rightarrow A'\cap B'=\{2,3\}$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A\cap B')-A=(A\cap B')\cap A'=(A\cap A')\cap B'=\varnothing\cap B'=\varnothing$$

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

چون U مجموعهٔ مرجع می‌باشد، لذا $A'\subseteq U$ و درنتیجه $A'\cap U=A'$، بنابراین $A\cup(A'\cap U)=A\cup A'=U$، پس:

$$[A\cup(A'\cap U)]\cup B=U\cup B=U$$

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

چون A و B ناتهی هستند و $B-A=B$، لذا A و B جدا از هم می‌باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$. بنابراین:

$$(A\cap B)'\cup(A-B)=\varnothing'\cup A=U\cup A=U$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴

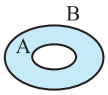
$$[(A\cap B')\cup(A'\cup B)]=[(A\cap B')\cup((A'\cup B)')']$$
$$=[(A\cap B')\cup(A\cap B')']=U$$

بنابراین متمم مجموعهٔ فوق، یعنی U برابر $\varnothing$ می‌باشد.

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'=(B'\cup A)\cap A'$$
$$=(A'\cap B')\cup(A'\cap A)=(A'\cap B')\cup\varnothing=A'\cap B'$$
$$\Rightarrow((B-A)'-A)'=(A'\cap B')'=A\cup B$$

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار ون 

، لزومی ندارد مجموعهٔ $B-A=B\cap A'$ یک مجموعهٔ تهی باشد.

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\overset{n(A)+n(B)=3n(A\cap B)}{=\!=\!=}3n(A\cap B)-n(A\cap B)=2n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{2n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=2$$

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\ ,\ n(A-B)=2n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A)-n(A\cap B)=2n(A\cap B)\Rightarrow n(A)=3n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=3n(A\cap B)+2n(A\cap B)-n(A\cap B)=4n(A\cap B)\quad(1)$$
$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$
$$=2n(A\cap B)-n(A\cap B)=n(A\cap B)\qquad(2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(B-A)}=\frac{4n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=4$$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

در این مسئله اگر A مجموعهٔ افرادی که به فوتبال و B مجموعهٔ افرادی که به والیبال علاقه دارند باشد، آن گاه داریم $n(A)=24$ و $n(B)=18$ و چون از ۳۰ نفر ۴ نفر به هیچ یک از این دو ورزش علاقمند نیستند، لذا $n(A\cup B)=26$. بنابراین داریم:

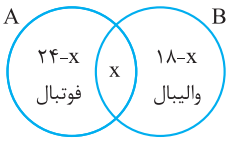
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 26=24+18-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=16$$

در نتیجه تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند برابر است با:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=18-16=2$$

روش دوم:

به کمک نمودار ون نیز می‌توان این مسئله را حل کرد:



$$24-x+x+18-x=26\Rightarrow x=16$$
$$\Rightarrow \text{تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند.}=18-x=18-16=2$$

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم A و B به‌ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشند که در کلاس‌های ادبیات و عربی شرکت کرده‌اند. می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم. داریم: $n(A)=35\ ,\ n(B)=31\ ,\ n(A\cap B)=23$

$$\Rightarrow n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=51-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=51-(35+31-23)=8$$

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ ب) $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}'$ پ) $-\sqrt{۴} \notin \mathbb{Q}$

ت) $\pi - ۳/۱۴ \in \mathbb{Q}$ ث) $-۴ \in \{-۵, ۱\}$ ج) $۰ \in \{۰, ۱\}$

چ) $-۱ \in (-۱, ۲]$ ح) $\frac{۲}{۳} \in (۰, ۱)$ خ) $\sqrt{۳} \in (۲, ۳)$

د) $(n \in \mathbb{N})\ \frac{n}{n+۱} \in (۰, ۱)$ ذ) $(۰, ۱] = [۰, ۱)$ ر) $\varnothing \subseteq (-\infty, ۰]$

ز) $[-۱, ۲) \subseteq [-۱, ۱]$ ژ) $\{۰, ۱, ۲\} \subseteq [-۱, ۴)$ س) $(-۱, ۱) \subseteq \mathbb{Q}$

ش) $۶/۰۲۳ \times ۱۰^{۲۳} \in (۱۰۰, +\infty)$ ص) $-۶ \times ۱۰^{-۴} \in (-۱, ۰)$ ض) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -۱ < x < ۰\} = (-۱, ۰)$

۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.

$$-\frac{۷}{۲},\ \sqrt{۵},\ \frac{\sqrt{۱۶}}{۲},\ -\frac{\pi}{۲},\ \sqrt{۲} - ۱/۱۴,\ ۱/۰۵۱۲۱۲۱۲۰۰\ldots,\ -۱/۰۲ \times ۱۰^{۴}$$

۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.

آ) $[-۱, ۴)$ ب) $(۰, ۲]$ پ) $(۰, ۲)$ ت) $[-۲, -۱]$

ث) $(-۲, +\infty)$ ج) $(-\infty, ۱]$ چ) $(۱, +\infty)$ ح) $(-\infty, ۲)$

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.

آ) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x < ۲\}$ ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -۲\}$ پ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -۱ \le x < ۲\}$ ت) $\{x \in \mathbb{Q}' \mid x < ۱\}$

۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.

آ) $(-۱, ۷) \cap (-۲, ۵]$ ب) $[-۱, +\infty) \cap [-۴, ۰]$ پ) $[-۲, ۴) \cup (۰, ۵]$ ت) $(-\infty, -۱) \cup [-۱, +\infty)$

ث) $(-\infty, ۲) - (۰, ۳)$ ج) $(۰, ۵] - [۲, +\infty)$ چ) $(-۱, ۰] \cap [۰, ۲)$ ح) $(-\infty, -۱) \cup (-\infty, ۳)$

۶. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۳\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -۱\}$، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x \le ۳\}$ و $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x+۳}{۲} \le ۱\right\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

آ) C ب) $A \cup B$ پ) $B \cap C$

ت) $A - B$ ث) $B - (A \cup C)$ ج) $(A \cap B) \cup C$

۸. مجموعه‌های $\{۰\} - \mathbb{R}$، $\mathbb{R} - \{-۱, ۲\}$، $\{۳, ۴\} - [۲, ۵]$ و $(۰, ۱] - [-۱, ۴)$ را روی محور نشان دهید و سپس هریک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۹. اگر $\frac{۲x+۱}{۳} \in [-۲, ۱)$ باشد، حدود x را مشخص کنید.

۱۰. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲

ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی پنج رقمی

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰

ت) مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

ث) مجموعهٔ ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{5}$

ج) مجموعهٔ روستاهای ایران

چ) مجموعهٔ اعداد اول

ح) بازهٔ $(-1,2)$

خ) مجموعهٔ کسرها با مخرج ۲

د)مجموعهٔ اعداد اول زوج و دو رقمی

ذ) مجموعهٔ مولکول‌های آب در یک مول آب

۱۱. فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی ۶ باشد.

آ) مجموعهٔ U را با اعضای آن نمایش دهید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی و یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند A و B بنویسید که $A \subseteq B$ باشد.

ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند C و D بنویسید که $U = C \cup D$ و $C \cap D = \varnothing$

۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

آ) مجموعهٔ $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ متناهی است یا نامتناهی؟

ب) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

پ) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ متناهی باشد.

ت) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ نامتناهی باشد.

ث) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟

ج) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟

چ) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

ح) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۱۳. اگر $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{1,2,4,5\}$، $B = \{2,3,6\}$ و $C = \{1,5,6\}$، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

آ) $A \cap B'$ ب) $A' \cup C'$ پ) $B \cap (A \cup C)'$ ت) $A' - B'$

۱۴. مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و۱۵ را به‌ترتیب A و B بنامید. اگر $U = \{1,2,\dots,25\}$ باشد، ابتدا هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هریک را به‌دست آورید.

آ) A' ب) $A \cup B$ پ) $B \cap A'$

ت) $A' \cup B'$ ث) $A' \cap B'$

۱۵. $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ) $(-1,0]$ ب) $\mathbb{W}$ پ) $(-\infty,2)$ ت) $(-1,+\infty)$

ث) $(1,2] - [0,4]$ ج) $(-1,3) \cup (5,+\infty)$

۱۶. $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید.

آ) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A ارائه کنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B ارائه کنید که B' متناهی باشد.

پ) اگر C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، C' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) اگر D مجموعه‌ای متناهی باشد، D' متناهی است یا نامتناهی؟

۱۷. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند به‌طوری‌که $n(U)=۸۰$، $n(A)=۲۱$، $n(B)=۳۵$ و $n(A\cap B)=۱۲$. مطلوب است:

آ) $n(B')$ ب) $n(A\cup B)$ پ) $n(A-B)$ ت) $n(B\cap A')$

ث) $n(A'\cup B')$ ج) $n(A'\cap B')$ چ) $n((A-B)\cup(B-A))$

۱۸. اگر $۶n(A\cap B)=۲n(B)=۳n(A)$ باشد، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ ب) $\frac{n(A\cup B)-n(A\cap B)}{n(A-B)}$

۱۹. به‌وسیلهٔ نمودار وِن نشان دهید:

آ) اگر $A\subseteq B\subseteq U$، آن‌گاه $B'\subseteq A'\subseteq U$ ب) $A'-B'=B-A$

۲۰. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سریال‌های طنز و ۶۰ نفر به سریال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر به حداقل یکی از این دو نوع سریال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

آ) به هر دو نوع سریال علاقمند باشند.

ب) به سریال‌های طنز علاقمندند ولی به سریال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

پ) نه به سریال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سریال‌های خانوادگی.

۲۱. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند. ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

پ) چند نفر فوتبال بازی می‌کنند ولی والیبال بازی نمی‌کنند. ت) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی

۲۲. به تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:

شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

اگر a_n تعداد چوب کبریت‌های شکل nاُم باشد، آن گاه:

آ) $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ را بنویسید.

ب) تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در مرحلهٔ nاُم را بر حسب n بنویسید.

پ) در شکل سی‌اُم چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۲۳. دریک الگوی خطی، جملات پنجم ویازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می باشند.

آ) جملهٔ عمومی الگو را بنویسید. ب) جملهٔ سی‌اُم را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد؟

۲۴. پنج دنباله و پنج جملهٔ عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جملهٔ عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

- $t_n=\frac{۲+(-۱)^n n^۲}{n^۲+۱}$ ۴ ، $\frac{۸}{۳}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$ ، ...
- $d_n=۲-n$ ۳ ، ۸ ، ۱۵ ، ...
- $c_n=n^۲+۲n$ $\frac{۱}{۲},\frac{۶}{۵},-\frac{۷}{۱۰},...$
- $b_n=\frac{(-۱)^n}{n+۲}$ $-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۵},...$
- $a_n=\frac{۴n}{۲n-۱}$ ۱ ، ۰ ، -۱ ، ...

۲۵. جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $a_n=\frac{۳n+۲}{n+۴}$ است.

آ) چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید. ب) چند جملهٔ این دنباله کوچک‌تر از ۲ می‌باشند؟

پ) جملهٔ چندم دنباله، برابر $\frac{۵}{۲}$ است؟

ژ) درست است، زیرا مجموعهٔ $[-1,4)$ شامل اعداد صحیح ۰ ، ۱ و ۲ می‌باشد.

س) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $(-1,1)$ شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۱- و ۱ می‌باشد و اعداد گنگ واقع در این بازه متعلق به $\mathbb{Q}$ نیستند.

به عنوان مثال $\frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1,1)$ ولی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یک عدد گویا نمی‌باشد.

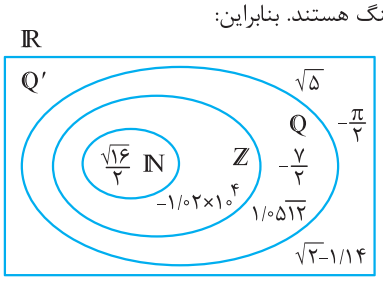
ش) درست است، زیرا $۶/۰۲۳ \times ۱۰^{۲۳} > ۱۰۰$

ص) درست است، زیرا $-۰/۰۰۰۶ = -۶ \times ۱۰^{-۴} > -۱$ می‌باشد.

ض) نادرست است، زیرا بازهٔ $(-1,0)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۱- و ۰است، نه فقط شامل اعداد گویای بین ۱- و ۰

۲

عدد ۲ $= \frac{۴}{۲} = \frac{\sqrt{۱۶}}{۲}$ یک عدد طبیعی، عدد $-۱/۰۲ \times ۱۰^{۴} = -۱۰۲۰۰$ یک عدد صحیح منفی، اعداد $-\frac{۷}{۲}$ و $۱/۰۵\overline{۱۲}$ گویا و اعداد $\sqrt{۵}$، $-\frac{\pi}{۲}$ و $\sqrt{۲}-۱/۱۴$ گنگ هستند. بنابراین:



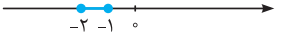
۳

آ) $[-1,4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 4\}$

ب) $(0,2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 2\}$

پ) $(0,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

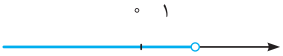
ت) $[-2,-1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le -1\}$



ث) $[-2,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -2\}$

ج) $(-\infty,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$

چ) $(1,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$



ح) $(-\infty,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

۴

آ) $[-1,2)$ ب) $(-2,+\infty)$

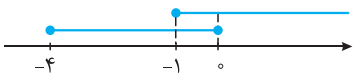
پ و ت) امکان‌پذیر نیست. زیرا بازه شامل تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشد نه فقط اعداد گویا یا گنگ. توجه کنید که مجموعهٔ (پ) را می‌توان به‌صورت $[-1,2) \cap \mathbb{Q}$ و مجموعهٔ (ت) را می‌توان به‌صورت $(-\infty,1) \cap \mathbb{Q}'$ نمایش داد اما هیچ یک از این‌ها، یک بازه نیستند.

۵

آ)

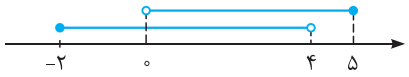
$(-2,5] \cap (-1,7) = (-1,5]$

ب)



$[-4,0] \cap [-1,+\infty) = [-1,0]$

پ)

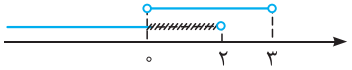


$[-2,4) \cup (0,5] = [-2,5]$

ت)

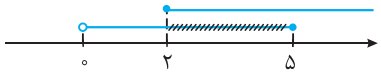
$(-\infty,-1) \cup [-1,+\infty) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

ث)



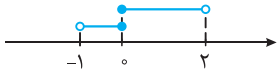
$(-\infty,2) - (0,3) = (-\infty,0]$

ج)



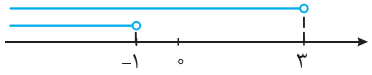
$(0,5] - [2,+\infty) = (0,2)$

چ)



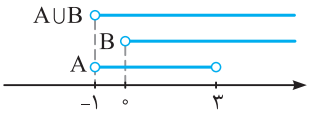
$(-1,0] \cap [0,2) = \{0\}$

ح)

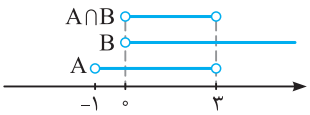


$(-\infty,-1) \cup (-\infty,3) = (-\infty,3)$

۶



$A = (-1,3), B = (0,+\infty) \Rightarrow A \cup B = (-1,3) \cup (0,+\infty) = (-1,+\infty)$



$A \cap B = (-1,3) \cap (0,+\infty) = (0,3)$

۷

آ) با حل نامعادلهٔ درجه اول $\frac{-x+3}{2} \le 1$ ، حدود x و درنتیجه مجموعهٔ C را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{-x+3}{2} \le 1 \Rightarrow -x+3 \le 2 \Rightarrow -x \le -1 \Rightarrow x \ge 1$$

$$\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\} = [1,+\infty)$$

ب) $A \cup B = (-\infty,-1] \cup [-2,3] = (-\infty,3]$

پ) $B \cap C = [-2,3] \cap [1,+\infty) = [1,3]$

ت) $A - B = (-\infty,-1] - [-2,3] = (-\infty,-2)$

ث) $A \cup C = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$$\Rightarrow B - (A \cup C) = (-1,1)$$

ج) $A \cap B = (-\infty,-1] \cap [-2,3] = [-2,-1]$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = [-2,-1] \cup [1,+\infty)$$

۸

در نمایش هندسی مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$$\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

با حذف اعداد -1 و 2 از روی محور، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ به‌دست می‌آید:

$$\mathbb{R}-\{-1,2\}=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$$

با حذف اعداد ۳ و ۴ از بازهٔ $[2,5]$، مجموعهٔ $[2,5]-\{3,4\}$ به‌دست می‌آید:

$$[2,5]-\{3,4\}=[2,3)\cup(3,4)\cup(4,5]$$

با حذف بازهٔ $[0,1)$ از بازهٔ $[-1,4]$، مجموعهٔ $[-1,4]-[0,1)$ به‌دست می‌آید:

$$[-1,4]-[0,1)=[-1,0)\cup[1,4]$$

۹

$$\frac{2x+1}{3}\in[-2,1)\Rightarrow -2\le\frac{2x+1}{3}<1\xrightarrow{\times 3}-6\le 2x+1<3$$

$$\xrightarrow{-1}-7\le 2x<2\xrightarrow{\div 2}-\frac{7}{2}\le x<1\Rightarrow x\in\left[-\frac{7}{2},1\right)$$

۱۰

آ) مجموعهٔ $\{\dots,-1,0,1\}$ بی‌شمار عضو دارد، بنابراین یک مجموعهٔ نامتناهی است.

ب) مجموعهٔ $\{10000,10001,\dots,99999\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰، یعنی مجموعهٔ $\{1,2,4,5,10,20\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) بی‌شمار عدد گنگ بین ۰ و ۱ مثل $\frac{\sqrt{2}}{2}$، $\frac{\sqrt{2}}{3}$، $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و ... وجود دارد. بنابراین مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱ نامتناهی است.

ث) مجموعهٔ ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{5}$، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,9\}$ می‌باشد که یک مجموعهٔ متناهی است. توجه کنیم که تعداد ارقام بعد از ممیز در اعداد گنگ نامتناهی است.

ج) متناهی است، زیرا تعداد روستاهای ایران را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد.

چ) نامتناهی است، زیرا بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

ح) نامتناهی است، زیرا بازه‌ها شامل بی‌شمار عدد گویا و گنگ می‌باشند.

خ) نامتناهی است، زیرا بی‌شمار کسر با مخرج ۲ مثل $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{2}$، $\frac{3}{2}$ و ... وجود دارد.

د) متناهی است، زیرا هیچ عدد اول زوج و دو رقمی وجود ندارد. بنابراین مجموعهٔ اعداد اول زوج و دو رقمی مجموعهٔ تهی است و مجموعهٔ تهی یک مجموعهٔ متناهی است.

ذ) متناهی است، زیرا تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب برابر $6/022\times10^{23}$ است که با داشتن امکانات و ابزار لازم و صرف وقت کافی می‌توان آن را شمرد.

۱۱

آ) $U=\{6,12,18,24,\dots\}$

ب) مجموعهٔ U بی‌شمار عضو دارد، پس U مجموعه‌ای نامتناهی است.

پ) $A=\{6,12\}\subseteq U$ (متناهی) و $B=\{18,24,30,\dots\}\subseteq U$ (نامتناهی)

ت) $B=\{6,18,24,30,\dots\}\subseteq U$ و $A=\{18,24,30,\dots\}$.

A و B دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $A\subseteq B$

ث) می‌توان مجموعه‌های C و D را به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$C=\{12,24,36,\dots\},\ D=\{6,18,30,\dots\}\Rightarrow U=C\cup D$$

۱۲

آ) متناهی است، زیرا: $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}-\{1,2,3,\dots\}=\{0\}$

ب) $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ دو مجموعهٔ متمایز نامتناهی‌اند و $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$

پ) $A=\mathbb{N},\ B=\mathbb{W}\Rightarrow A\subseteq B,\ B-A=\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$

ت) $A=\mathbb{N},\ B=\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow A\subseteq B,\ B-A=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1,0\}$$

ث) A متناهی است، زیرا B متناهی است و درنتیجه تعداد عضوهای هر زیرمجموعهٔ آن که کم‌تر یا مساوی تعداد عضوهای B است نیز متناهی خواهد بود.

ج) A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. به‌عنوان مثال اگر $B=\mathbb{Z}$، آن‌گاه $A=\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ نامتناهی است و $A=\{-1,0,1\}\subseteq\mathbb{Z}$ متناهی است.

چ) B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. با فرض $A=\{1,2\}$، اگر $B=\{1,2,3\}$، آن‌گاه B متناهی و اگر $B=\mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه B نامتناهی است.

ح) B نامتناهی است، زیرا B، تمام بی‌شمار عضو مجموعهٔ A را دارد.

۱۳

ابتدا متمم هریک از مجموعه‌های A، B و C را مشخص می‌کنیم:

$$A'=U-A=\{1,2,3,4,5,6\}-\{1,2,4,5\}=\{3,6\}$$

$$B'=U-B=\{1,2,3,4,5,6\}-\{2,3,6\}=\{1,4,5\}$$

$$C'=U-C=\{1,2,3,4,5,6\}-\{1,5,6\}=\{2,3,4\}$$

آ) $A\cap B'=\{1,2,4,5\}\cap\{1,4,5\}=\{1,4,5\}$

ب) $A'\cup C'=\{3,6\}\cup\{2,3,4\}=\{2,3,4,6\}$

پ) $A\cup C=\{1,2,4,5,6\}\Rightarrow(A\cup C)'=U-(A\cup C)=\{3\}$

$$\Rightarrow B\cap(A\cup C)'=\{2,3,6\}\cap\{3\}=\{3\}$$

ت) $A'-B'=\{3,6\}-\{1,4,5\}=\{3,6\}$

۱۴

$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$: مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی ۲۴

$B=\{1,3,5,15\}$: مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی ۱۵

آ) $A'=U-A=\{1,2,\dots,25\}-\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$$=\{5,7,9,10,11,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,25\}$$

$$\Rightarrow n(A')=17$$

ب) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,12,15,24\}\Rightarrow n(A\cup B)=10$

پ) $B\cap A'=\{5,15\}\Rightarrow n(B\cap A')=2$