فصل ۸ نمودار تابع درجه دوم (سهمی)

ویژگی‌های سهمی

۷۳۴. فاصلهٔ بین رأس‌های سهمی به معادلات $y=-x^2-4x-3$ و $y=3x^2-12x+10$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

☆**۷۳۵.** اگر طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=(x-k)(x+2)+3$ برابر ۲- باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

☆**۷۳۶.** بیش‌ترین مقدار سهمی $y=-3x^2+12x-1$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☆**۷۳۷.** برد تابع $y=x^2+2x+5$، بازهٔ $[a,+\infty)$ و برد تابع $y=-2x^2+8x+b$، بازهٔ $(-\infty,-6]$ می‌باشد. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۷۳۸. اگر بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۴- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۴

☆**۷۳۹.** نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-x^2+(m+1)x+2m-1$ روی محور Oy دارای ماکسیمم است. عرض نقطهٔ ماکسیمم کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۵

★**۷۴۰.** به ازای کدام مقدار a، نقطهٔ مینیمم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2-2\sqrt{2}x+a$ بر روی خط $y=1$ واقع است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۷۴۱. نقطهٔ مینیمم تابع با ضابطهٔ $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

☆**۷۴۲.** اگر نقطهٔ $S(1,1)$ نقطهٔ ماکسیمم سهمی $y=ax^2+bx$ باشد، مقادیر a و b کدام‌اند؟

۱) $a=-2$ ، $b=1$ ۲) $a=-1$ ، $b=2$ ۳) $a=-1$ ، $b=-2$ ۴) $a=-2$ ، $b=-1$

☆**۷۴۳.** معادلهٔ سهمی که $S(2,-1)$ رأس آن است و از نقطهٔ $(1,-4)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y=3x^2+12x-37$ ۲) $y=3x^2-12x+11$

۳) $y=-3x^2-12x+11$ ۴) $y=-3x^2+12x-13$

☆**۷۴۴.** اگر خط $x=1$ محور تقارن سهمی $y=2x^2+3mx+1$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۷۴۵. معادلهٔ محور تقارن منحنی $y=x^2+(x+2)^2+(x+4)^2$ کدام است؟

۱) $x=-2$ ۲) $x=2$ ۳) $x=0$ ۴) $x=-3$

☆**۷۴۶.** محور تقارن سهمی $y=-2x^2+5x-1$، خط به معادلهٔ $3x-2y=1$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{11}{8}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۷۴۷. اختلاف دو منحنی $y_1=x(x+k_1)+k_2$ و $y_2=-x(x+k_1)+k_2$ در چیست؟

۱) محور تقارن‌ها ۲) طول رأس‌ها ۳) ماکسیمم یا مینیمم داشتن ۴) محل برخورد با محور y ها

☆**۷۴۸.** اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

★**۷۴۹.** نقاط A و B با طول‌های ۴- و ۲ و عرض یکسان روی سهمی $f(x)=ax^2+4x+b$ قرار دارند. اگر سهمی از نقطهٔ $(1,2)$ بگذرد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۶- ۴) ۴-

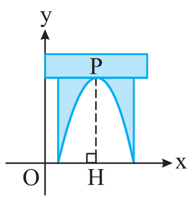
۷۵۰. اگر نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی $y=a(x-b)^2+c$ قرار داشته باشند، آن‌گاه b کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲-

☆**۷۵۱.** نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاط $x=-1$ و $x=3$ و محور yها را در نقطهٔ $y=-1$ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ مینیمم تابع کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

☆**۷۵۲.** مطابق شکل، معادلهٔ منحنی طاق به‌صورت $y=-x^2+6x-5$ است. طول ارتفاع طاق (PH) کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۷۵۳. سهمی به معادلهٔ $y=4x^2+bx+a$، خط $y=x+a$ را در نقطه‌ای به طول ۱- روی محور xها قطع می‌کند. طول رأس سهمی کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{5}{8}$

★**۷۵۴.** خط به معادلهٔ $y=mx+4$ با منحنی به معادلهٔ $y=-x^2+2x$، هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) $m<0$ ۲) $m>4$ ۳) $-1<m<4$ ۴) $-2<m<6$

۷۵۵. به ازای کدام مقدار k دو سهمی به معادلات $y=-x^2+x+k$ و $y=x^2-3x+1$ همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

صفرهای تابع

☆**۷۵۶.** کدام تابع زیر، فاقد صفر است؟

۱) $y=x^2+3x+2$ ۲) $y=-x^2+2x+3$ ۳) $y=-x^2+3x-4$ ۴) $y=x^2-4x-2$

۷۵۷. اگر منحنی $y=(x-a)^2-1$ محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های k_1 و k_2 قطع کند، مقدار k_1+k_2 کدام است؟

۱) a ۲) $2a$ ۳) $2a-2$ ۴) $2a+2$

☆**۷۵۸.** اگر تابع درجه دوم $f(x)=(m+2)x^2+4x+(m-1)$ محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، مقادیر m کدام است؟

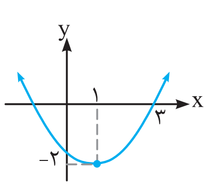
۱) $-1<m<4$ ۲) $1<m<2$ ۳) $-2<m<3$ ۴) $-3<m<2\ ,\ m\neq -2$

۷۵۹. منحنی به معادلهٔ $y=(x-1)(x^2-ax+a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعهٔ مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $-4<a<0$ ۲) $0<a<2$ ۳) $0<a<4$ ۴) $a>4$

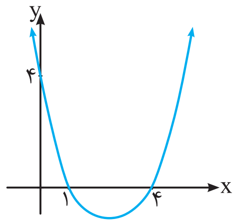
رسم نمودار تابع درجه ۲

۷۶۰. ضابطهٔ نمودار روبه‌رو کدام است؟



۱) $y=2(x-1)^2-2$ ۲) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$ ۳) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ ۴) $y=(x-1)^2-2$

☆**۷۶۱.** **معادلهٔ سهمی مقابل کدام است؟** (برگرفته از کتاب درسی)



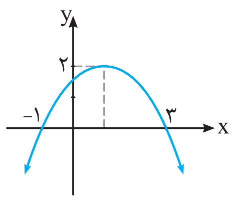
۱) $y = -x^{۲} - ۵x + ۴$

۲) $y = -x^{۲} + ۵x + ۴$

۳) $y = x^{۲} - ۵x + ۴$

۴) $y = x^{۲} - ۳x + ۴$

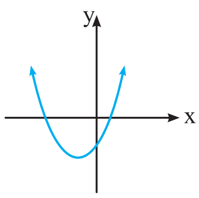
☆**۷۶۲.** **سهمی مقابل، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟** (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۴}$

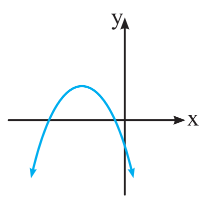
۷۶۳. **نمودار سهمی مقابل، کدام می‌تواند باشد؟**



۱) $f(x) = ۲x^{۲} + ۷x - ۵$ ۲) $f(x) = -۲x^{۲} + ۹x + ۵$

۳) $f(x) = ۲x^{۲} + ۸x + ۳$ ۴) $f(x) = ۲x^{۲} - ۷x - ۱$

۷۶۴. **نمودار سهمی مقابل، کدام می‌تواند باشد؟**



۱) $f(x) = x^{۲} + ۸x + ۱$ ۲) $f(x) = -۲x^{۲} - ۶x + ۳$

۳) $f(x) = -x^{۲} + ۴x - ۲$ ۴) $f(x) = -۵x^{۲} - ۱۲x - ۴$

☆**۷۶۵.** **نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^{۲} - ۳x - ۱۰$ را، حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟** (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

نمودارشناسی تابع $y = ax^{۲} + bx + c$

☆**۷۶۶.** **به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m + ۲)x^{۲} + ۳x + ۱ - m$، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟** (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $m < -۲$ یا $m > ۱$ ۲) $-۲ < m < ۱$

۳) فقط $m < -۲$ ۴) فقط $m > ۱$

★**۷۶۷.** **با کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m + ۲)x^{۲} - ۲x + ۱$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟** (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $m < -۲$ ۲) $m < -۱$ ۳) $-۲ < m < -۱$ ۴) $-۴ < m < -۲$

۷۶۸. **به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (۱ - m)x^{۲} + x + (m - ۲)$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکسیمم است؟** (سراسری تجربی)

۱) $m < ۱$ ۲) $m > ۲$ ۳) $۱ < m < ۲$ ۴) $-۱ < m < ۲$

۷۶۹. **به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع به معادلهٔ $y = (m - ۲)x^{۲} + mx + ۳ - m$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای مینیمم است؟**

۱) $m > ۳$ ۲) $۲ < m < ۳$ ۳) $۰ < m < ۲$ ۴) $۰ < m < ۳$

★**۷۷۰.** **به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + (a + ۳)x - ۱$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟** (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $a < -۹$ ۲) $a < -۳$

۳) $a > -۱$ ۴) $-۳ < a < ۰$

۷۷۱. **به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m - ۲)x^{۲} - ۲(m + ۱)x + ۱۲$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟** (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $m > ۲$ ۲) $-۱ < m < ۲$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

★۷۷۲. اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-3$، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $m>3$ ۲) $3<m<4$ ۳) $3<m<5$ ۴) $4<m<9$

★۷۷۳. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $a\le 2$ ۲) $0<a\le 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

۷۷۴. کدام سهمی زیر، فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد؟

۱) $y=3x^2+2x+1$ ۲) $y=x^2-7x+1$ ۳) $y=-x^2-5x+2$ ۴) $y=2x^2+9x-1$

☆۷۷۵. به ازای کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=mx^2+(m-3)x+m$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\in\mathbb{R}$ ۲) $m\in\varnothing$ ۳) $0<m<1$ ۴) $1<m<2$

★۷۷۶. به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $a\le -2$ ۲) $a>-2$ ۳) $a>0$ ۴) $-2\le a<0$

۷۷۷. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره بالای محور x ها است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

★۷۷۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$ بالای محور x هاست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $a<-1$ ۲) $a>1$ ۳) $a>2$ ۴) $1<a<2$

★۷۷۹. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور x هاست؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

۷۸۰. حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^2+mx-1$ همواره در زیر محور x ها باشد، کدام است؟

۱) $-4<m\le 0$ ۲) $m<0$ ۳) $m\le 0$ ۴) $m>-4$

★۷۸۱. نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+4x+a-3$ از طرف بالا بر محور x ها مماس شده است، طول نقطهٔ تماس کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

★۷۸۲. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ از طرف پایین بر محور x ها مماس می‌شود؟

۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3

☆۷۸۳. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(m+1)x^2-(m-2)x-3$ در سمت چپ محور y ها بر محور x ها مماس است؟

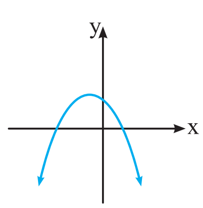
۱) 8 ۲) -6 ۳) -4 ۴) چنین mای وجود ندارد.

۷۸۴. منحنی‌های توابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+bx+3$ بر خط به معادلهٔ $y=7$ مماس‌اند. فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

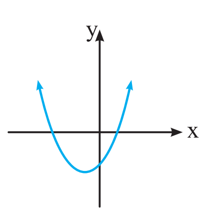
- در چهار تست بعدی، نمودار $f(x)=ax^2+bx+c$ رسم شده است.

☆۷۸۵. علامت a و c کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



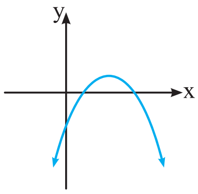
۱) $a , c>0$
۲) $a , c<0$
۳) $c<0$ ، $a>0$
۴) $c>0$ ، $a<0$

★۷۸۶. علامت a و b چگونه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $a , b>0$
۲) $a , b<0$
۳) $a>0$ ، $b<0$
۴) $b>0$ ، $a<0$

۷۸۷. علامت b و c چگونه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



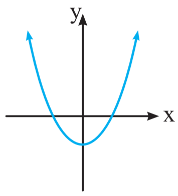
۱) $b, c > 0$

۲) $b, c < 0$

۳) $c < 0 \;,\; b > 0$

۴) $c > 0 \;,\; b < 0$

☆۷۸۸. کدام گزینه صحیح است؟



۱) $ac > 0 \;,\; b = 0$

۲) $ac < 0 \;,\; b = 0$

۳) $ac > 0 \;,\; b > 0$

۴) $ac < 0 \;,\; b < 0$

تست‌های V.I.P

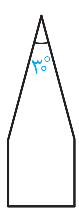
۷۸۹. به ازای کدام مقدار a، مجموع مجذورات ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - (a-2)x + a - 2 = 0$، کم‌ترین مقدار می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۷۹۰. خط به معادلهٔ $y = -\frac{5}{4}$، محور تقارن تابع با ضابطهٔ $y = x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{4}$

۷۹۱. پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 30° قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۸۴

۷۹۲. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$، بر نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات، مماس است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) -4 ۲) $-12 , 4$

۳) $12 , -4$ ۴) 12

۷۹۳. اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطهٔ تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $-1 , \frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2} , 1$ ۳) $-1 , \frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2} , 3$

۷۹۴. خط گذرنده از مبدأ مختصات، بر منحنی به معادلهٔ $y = (x+1)(x+4)$ در ناحیهٔ اول مماس است. شیب این خط کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۹

پاسخ فصل ۸ نمودار تابع درجه دوم (سهمی)

۷۳۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$، طول رأس سهمی از رابطهٔ $x_S=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید که با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ سهمی، عرض نقطهٔ رأس نیز مشخص می‌شود. از دستور $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$ نیز می‌توان عرض رأس را به‌دست آورد.

ابتدا مختصات رأس دو سهمی با معادلات داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-x^2-4x-3 \Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(-1)}=-2$$

$$y_S=-(-2)^2-4(-2)-3=-4+8-3=1 \Rightarrow S(-2,1)$$

$$y=3x^2-12x+10 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2(3)}=2$$

$$\Rightarrow y=3(2)^2-12(2)+10=-2 \Rightarrow S'(2,-2)$$

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ S و S' را از دستور $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$SS'=\sqrt{(-2-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

۷۳۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

ابتدا ضابطهٔ داده‌شده را به‌صورت $y=ax^2+bx+c$ می‌نویسیم:

$$y=(x-k)(x+2)+3=x^2+2x-kx-2k+3$$

$$=x^2+(2-k)x+3-2k$$

طول رأس سهمی برابر $-\frac{b}{2a}=-\frac{2-k}{2}$ است، از طرفی این مقدار برابر ۲- می‌باشد، بنابراین داریم:

$$-\frac{2-k}{2}=-2 \Rightarrow 2-k=4 \Rightarrow k=-2 \Rightarrow y=x^2+4x+7$$

با قرار دادن عدد ۲ به جای x در معادلهٔ سهمی، عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید:

$$x=2 \Rightarrow y=2^2+4(2)+7=19$$

۷۳۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: سهمی $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a<0$ و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$، بیش‌ترین مقدار را دارد.

$$y=-3x^2+12x-1 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2(-3)}=2$$

با قرار دادن عدد ۲ به جای x در ضابطهٔ سهمی، بیش‌ترین مقدار به‌دست می‌آید:

$$x=2 \Rightarrow y=-3(2)^2+12(2)-1=-12+24-1=11$$

۷۳۷ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

نکته: در سهمی $y=ax^2+bx+c$، اگر $a>0$، آن‌گاه برد تابع بازهٔ $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ و اگر $a<0$، آن‌گاه برد تابع بازهٔ $(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$ می‌باشد.

$$y=x^2+2x+5 \Rightarrow \text{کم‌ترین مقدار}=-\frac{\Delta}{4a}$$

$$=-\frac{(2)^2-4(1)(5)}{4(1)}=4=a$$

$$y=-2x^2+8x+b \Rightarrow \text{بیش‌ترین مقدار}=-6=-\frac{\Delta}{4a}$$

$$=-\frac{8^2-4(-2)(b)}{4(-2)}$$

$$\Rightarrow 6=\frac{64+8b}{-8}=\frac{\cancel{8}(8+b)}{\cancel{-8}_{-1}}=-(8+b) \Rightarrow 8+b=-6$$

$$\Rightarrow b=-6-8=-14 \Rightarrow a-b=4+14=18$$

۷۳۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

روش تستی: برای آن‌که تابع درجهٔ دوم بیش‌ترین مقدار را داشته باشد باید ضریب x^2 عددی منفی باشد، لذا:

$$k+3<0 \Rightarrow k<-3$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۱) صحیح است.

روش تشریحی: بیش‌ترین مقدار تابع درجه دوم برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. طبق فرض این مقدار برابر صفر است، پس:

$$-\frac{\Delta}{4a}=0 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow (-4)^2-4(k+3)(k)=0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} -4+(k+3)(k)=0 \Rightarrow k^2+3k-4=0$$

$$\Rightarrow (k+4)(k-1)=0 \Rightarrow k=-4\ ,\ k=1$$

همچنین $k+3$ باید عددی منفی باشد، لذا $k=-4$ قابل قبول است.

۷۳۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

طول هر نقطه روی محور yها برابر صفر است، لذا:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{m+1}{-2}=0 \Rightarrow m=-1 \quad \text{(طول ماکسیمم)}$$

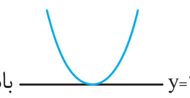
$$\Rightarrow y=-x^2-3 \xrightarrow{x=0} y_{max}=-3$$

۷۴۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته: در سهمی، اگر ضریب $x^۲$ مثبت باشد، آنگاه سهمی دارای مینیمم است.

پس: $x^۲$ ضریب $=a>۰$

نمودار تابع باید به‌صورت



باشد، لذا معادلهٔ $ax^۲-۲\sqrt{۲}x+a=۱$ دارای ریشهٔ مضاعف است، بنابراین:

$$ax^۲-۲\sqrt{۲}x+a-۱=۰ \xrightarrow[\text{ریشهٔ مضاعف}]{\text{شرط داشتن}} \Delta=۸-۴a(a-۱)=۰$$

$$\xrightarrow{\div(-۴)} a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰ \xrightarrow{a>۰} a=۲$$

۷۴۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{a}{۲}$ (طول مینیمم)

$$\Rightarrow y=(-\frac{a}{۲})^۲+a(-\frac{a}{۲})+۲=۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{۸-a^۲}{۴}$$

نقطهٔ $(-\frac{a}{۲},\frac{۸-a^۲}{۴})$ روی نیمساز ربع سوم $(y=x , x<۰)$ قرار دارد، لذا:

$$\frac{۸-a^۲}{۴}=-\frac{a}{۲} \xrightarrow{\times ۴} a^۲-۲a-۸=۰\Rightarrow(a-۴)(a+۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=۴\Rightarrow x=-\frac{a}{۲}=-۲<۰ \quad ✓\\ a=-۲\Rightarrow x=-\frac{a}{۲}=۱>۰ \quad ✗\end{cases}$$

۷۴۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نقطهٔ $S(۱,۱)$ در معادلهٔ سهمی $y=ax^۲+bx$ صدق می‌کند:

$$y=ax^۲+bx \xrightarrow{x=y=۱} ۱=a+b \qquad (۱)$$

از طرفی طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید. پس:

$$-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow -b=۲a\Rightarrow b=-۲a \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow ۱=a-۲a\Rightarrow ۱=-a\Rightarrow a=-۱\Rightarrow b=۲$$

۷۴۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

می‌دانیم معادلهٔ سهمی با رأس $S(\alpha,\beta)$ به‌صورت $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ می‌باشد. رأس سهمی به‌صورت $S(۲,-۱)$ است. پس معادلهٔ سهمی عبارت است از: $y=a(x-۲)^۲-۱$

نقطهٔ $(۱,-۴)$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند: $y=a(x-۲)^۲-۱ , A(۱,-۴)\Rightarrow -۴=a(۱-۲)^۲-۱$

$$\Rightarrow -۴=a-۱\Rightarrow a=-۳\Rightarrow y=-۳(x-۲)^۲-۱$$

$$=-۳(x^۲-۴x+۴)-۱=-۳x^۲+۱۲x-۱۳$$

۷۴۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ $(a\neq ۰)$، خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$، معادلهٔ محور تقارن سهمی است.

پس طبق فرض داریم:

$$-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow -\frac{۳m}{۴}=۱\Rightarrow -۳m=۴\Rightarrow m=-\frac{۴}{۳}$$

۷۴۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ می‌نویسیم:

$$y=x^۲+(x+۲)^۲+(x+۴)^۲$$

$$=x^۲+(x^۲+۴x+۴)+(x^۲+۸x+۱۶)=۳x^۲+۱۲x+۲۰$$

معادلهٔ محور تقارن سهمی: $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{۲(۳)}=-۲$

۷۴۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۵}{۴}$ معادلهٔ محور تقارن سهمی است:

$$\begin{cases}۳x-۲y=۱\\ x=\frac{۵}{۴}\end{cases}\Rightarrow \frac{۱۵}{۴}-۲y=۱\Rightarrow y=\frac{۱۱}{۸}$$

۷۴۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$y_۱=x(x+k_۱)+k_۲=x^۲+k_۱x+k_۲$$

طول رأس سهمی $=-\frac{k_۱}{۲}$ ، معادلهٔ محور تقارن : $x=-\frac{k_۱}{۲}$

$$y_۲=-x(x+k_۱)+k_۲=-x^۲-k_۱x+k_۲$$

طول رأس سهمی $=-\frac{k_۱}{۲}$ ، معادلهٔ محور تقارن : $x=-\frac{k_۱}{۲}$

بنابراین طول رأس و معادلهٔ محور تقارن در هر دو سهمی یکسان است. اما سهمی $y_۱=x^۲+k_۱x+k_۲$ دارای مینیمم و $y_۲=-x^۲-k_۱x+k_۲$ دارای ماکسیمم است. توجه کنید که محل برخورد هر دو سهمی با محور yها نقطهٔ $(۰,k_۲)$ می‌باشد.

۷۴۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

در سهمی $y=ax^۲+bx+c$، خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن است، لذا:

$$x=۲=-\frac{۱}{۲(a-۱)}\Rightarrow ۴(a-۱)=-۱\Rightarrow a-۱=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳ \ , \ y=۰\xrightarrow{\times(-۴)}x^۲-۴x-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰\xrightarrow{x>۰}x=۶$$

۷۴۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: اگر A و B دو نقطه با طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ و عرض یکسان روی سهمی باشند، آنگاه طول رأس سهمی برابر $\frac{x_۱+x_۲}{۲}$ است.

طول نقاط A و B، $x_۱=-۴$ و $x_۲=۲$ می‌باشند، بنابراین طول رأس سهمی برابر $x=\frac{-۴+۲}{۲}=-۱$ است. از طرفی رأس سهمی برابر $-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲a}$ است، پس داریم:

$$-\frac{۴}{۲a}=-۱\Rightarrow ۴=۲a\Rightarrow a=۲\Rightarrow y=۲x^۲+۴x+b$$

سهمی از نقطهٔ $(۱,۲)$ گذشته، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند: $۲=۲(۱)^۲+۴(۱)+b\Rightarrow ۲=۶+b\Rightarrow b=-۴$

$$\Rightarrow y=۲x^۲+۴x-۴$$

عرض رأس سهمی به ازای $x=-۱$ (طول رأس سهمی) به‌دست می‌آید:

$$x=-۱\Rightarrow y=۲(-۱)^۲+۴(-۱)-۴=۲-۸=-۶$$

۷۵۰ (گزینهٔ ۱)

دو نقطهٔ A و B با عرض یکسان، نسبت به خط $x=\frac{-3+1}{2}=-1$ قرینه‌اند، لذا خط $x=-1$ محور تقارن سهمی است و در نتیجه طول رأس سهمی برابر -1 می‌باشد، پس $b=-1$

۷۵۱ (گزینهٔ ۴)

روش اول: مختصات نقاط $(-1,0)$، $(3,0)$ و $(0,-1)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$(0,-1) \Rightarrow -1=c \Rightarrow y=ax^2+bx-1$ روی منحنی قرار دارد.

$(-1,0) \Rightarrow 0=a-b-1 \Rightarrow a-b=1$ روی منحنی قرار دارد.

$(3,0) \Rightarrow 0=9a+3b-1 \Rightarrow 9a+3b=1$ روی منحنی قرار دارد.

$$\begin{cases} 3a-3b=3 \\ 9a+3b=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{3}, b=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

رأس سهمی، مینیمم نمودار تابع است، لذا:

$$x=-\frac{b}{2a}=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1=-\frac{4}{3}$$ (طول رأس سهمی)

روش دوم: سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های $\alpha=-1$ و $\beta=3$ قطع کرده است، پس طول رأس سهمی برابر $x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$ و در نتیجه معادلهٔ آن به‌صورت $y=a(x-1)^2+y_0$ است. سهمی از دو نقطهٔ $(-1,0)$ و $(0,-1)$ عبور کرده است، پس مختصات این دو نقطه در معادله صدق می‌کند:

$(-1,0) \Rightarrow 0=a(-1-1)^2+y_0 \Rightarrow 4a+y_0=0$ روی سهمی است.

$(0,-1) \Rightarrow -1=a(0-1)^2+y_0 \Rightarrow a+y_0=-1$ روی سهمی است.

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a}+y_0=0 \\ -\cancel{4a}-4y_0=4 \end{cases} \Rightarrow -3y_0=4 \Rightarrow y_0=-\frac{4}{3}$$

y_0 همان عرض نقطهٔ رأس سهمی است.

۷۵۲ (گزینهٔ ۳)

طول ارتفاع طاق با عرض رأس P، یعنی عرض رأس سهمی برابر است:

$$x=-\frac{b}{2a}=3 \Rightarrow y=-(3)^2+6(3)-5=4$$

۷۵۳ (گزینهٔ ۴)

مختصات نقطه‌ای به طول -1 روی محور xها به‌صورت $A(-1,0)$ می‌باشد. مختصات نقطهٔ A در هر دو معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$A(-1,0), y=x+a \Rightarrow 0=-1+a \Rightarrow a=1$$

$$A(-1,0), y=4x^2+bx+a \Rightarrow 0=+4-b+a \xrightarrow{a=1} b=5$$

$$\Rightarrow y=4x^2+5x+1$$

طول رأس سهمی، $x=-\frac{b}{2a}$ است، بنابراین:

$$x=-\frac{5}{2(4)}=-\frac{5}{8}$$

۷۵۴ (گزینهٔ ۴)

اگر معادلهٔ $-x^2+2x=mx+4$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، آن‌گاه خط و منحنی هیچ نقطهٔ مشترکی نخواهند داشت:

$$-x^2+2x=mx+4 \Rightarrow -x^2+(2-m)x-4=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(2-m)^2-16<0 \Rightarrow (2-m)^2<16 \Rightarrow -4<2-m<4$$

$$\Rightarrow -6<-m<2 \Rightarrow -2<m<6$$

۷۵۵ (گزینهٔ ۳)

برای این‌که دو سهمی $y=-x^2+x+k$ و $y=x^2-3x+1$ همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، باید معادلهٔ $x^2-3x+1=-x^2+x+k$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد:

$$x^2-3x+1+x^2-x-k=0 \Rightarrow 2x^2-4x+1-k=0, \ \Delta=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-4)^2-4(2)(1-k)=0$$

$$\Rightarrow \Delta=16-8+8k=0 \Rightarrow k=-1$$

۷۵۶ (گزینهٔ ۳)

معادلهٔ محور xها به‌صورت $y=0$ است. برای آن‌که مشخص کنیم کدام سهمی محور xها را قطع نمی‌کند، باید معادلهٔ $y=0$ را در هر یک از گزینه‌ها تشکیل دهیم و Δی معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌دست آوریم. اگر $\Delta<0$ باشد، آن‌گاه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد و در نتیجه نمودار سهمی مربوطه محور xها را قطع نمی‌کند:

$$1)\ y=x^2+3x+2, \ y=0 \Rightarrow x^2+3x+2=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(3)^2-4(1)(2)=1>0$$

$$2)\ y=-x^2+2x+3, \ y=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(2)^2-4(-1)(3)=16>0$$

$$3)\ y=-x^2+3x-4, \ y=0 \Rightarrow -x^2+3x-4=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(3)^2-4(-1)(-4)=-7<0$$

$$4)\ y=x^2-4x-2, \ y=0 \Rightarrow x^2-4x-2=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-4)^2-4(1)(-2)=24>0$$

۷۵۷ (گزینهٔ ۲)

روش اول: منحنی $y=(x-a)^2-1$ محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های k_1 و k_2 قطع کرده است، لذا در این نقاط y برابر صفر است:

$$y=0 \Rightarrow (x-a)^2-1=0 \Rightarrow (x-a)^2=1$$

$$\Rightarrow x-a=1 \quad \text{یا} \quad x-a=-1$$

$$\Rightarrow x=a+1 \quad \text{یا} \quad x=a-1 \Rightarrow k_1=a+1, \ k_2=a-1$$

$$\Rightarrow k_1+k_2=(a+1)+(a-1)=2a$$

روش دوم: در معادلهٔ $y=0$ کافی است مجموع ریشه‌ها، یعنی $S=-\frac{b}{a}$ را بیابیم:

$$y=0 \Rightarrow (x-a)^2-1=0 \Rightarrow x^2-2ax+a^2-1=0$$

$$\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=-\frac{-2a}{1}=2a$$

۷۵۸ (گزینهٔ ۴)

شرط آن‌که معادلهٔ $f(x)=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، آن است که $\Delta>0$ باشد $(m+2\neq 0 \Rightarrow m\neq -2)$:

$$\Delta=16-4(m+2)(m-1)>0 \xrightarrow{\div(-4)} (m+2)(m-1)-4<0$$

$$\Rightarrow m^2+m-6<0 \Rightarrow (m+3)(m-2)<0 \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}} -3<m<2$$

۷۵۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$x=1$ ریشهٔ معادلهٔ $y=0$ است. برای آن‌که منحنی محور xها را فقط در یک نقطه قطع کند باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

حالت اول: معادلهٔ $x^2-ax+a=0$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، لذا:

$$\Delta=a^2-4a<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0<a<4$$

حالت دوم: معادلهٔ $x^2-ax+a=0$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=1$ باشد.

لذا: $\Delta=0\ ,\ x=-\frac{b}{2a}=1$

$\Delta=a^2-4a=0\Rightarrow a=0\ ,\ a=4\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=0\ ,\ 2$ ✗

بنابراین این حالت امکان‌پذیر نمی‌باشد.

۷۶۰ ۱ **۲** ۳ ۴

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ است که $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی است. بنابر فرض $S(1,-2)$ رأس سهمی است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-1)^2-2$ درمی‌آید. همچنین نمودار سهمی از نقطهٔ $(3,0)$ می‌گذرد، لذا این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$y=a(x-1)^2-2 \xrightarrow{x=3,y=0} 0=a(3-1)^2-2$$

$$\Rightarrow 4a-2=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$ خواهد بود.

۷۶۱ ۱ ۲ **۳** ۴

نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۴ قطع کرده است. بنابراین ضابطهٔ سهمی به‌صورت $f(x)=a(x-1)(x-4)$ است. از طرفی $f(0)=4$ می‌باشد. بنابراین: $f(0)=a(0-1)(0-4)=4a=4\Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$$

۷۶۲ ۱ **۲** ۳ ۴

صفرهای تابع اعداد ۱- و ۳ می‌باشند، پس ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=a(x+1)(x-3)$ می‌باشد. طول رأس سهمی $x=\frac{-1+3}{2}=1$ و عرض آن ۲ می‌باشد، پس نقطهٔ $(1,2)$ رأس سهمی است. مختصات رأس سهمی در ضابطهٔ آن صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(1)=a(1+1)(1-3)=2\Rightarrow -4a=2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)\xrightarrow{x=0} f(0)=\frac{3}{2}$$

۷۶۳ **۱** ۲ ۳ ۴

سهمی رو به بالا است، پس ضریب x^2 عددی مثبت است. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. از طرفی سهمی محور xها را در دو طرف مبدأ قطع کرده است، پس معادلهٔ $f(x)=0$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است، بنابراین $\frac{c}{a}$ باید عددی منفی باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است $(\frac{c}{a}=\frac{3}{2}>0)$. طبق نمودار ریشهٔ منفی را با ریشهٔ مثبت جمع می‌کنیم، حاصل عددی منفی می‌شود، پس $-\frac{b}{a}$ (جمع دو ریشه) باید عددی منفی باشد که گزینهٔ (۱) صحیح است.

۷۶۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

سهمی رو به پایین است، بنابراین ضریب x^2 باید عددی منفی باشد، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. همچنین سهمی محور xها را در دو نقطه با طول‌های منفی قطع کرده است. بنابراین در معادلهٔ $f(x)=0$ باید شرایط $\Delta>0$ (شرط داشتن دو ریشه)، $P=\frac{c}{a}>0$ (حاصل‌ضرب دو عدد منفی، مثبت است.) و $S=-\frac{b}{a}<0$ (حاصل جمع دو عدد منفی، منفی است.) برقرار باشند که در بین گزینه‌ها، فقط سهمی با ضابطهٔ $f(x)=-5x^2-12x-4$ در شرایط خواسته‌شده صدق می‌کند:

۱) $a=-5<0$

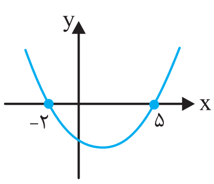
۲) $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4(-5)(-4)=144-80=64>0$

۳) $P=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}>0$

۴) $S=-\frac{b}{a}=-\frac{12}{5}<0$

۷۶۵ ۱ ۲ **۳** ۴

ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=(x-5)(x+2)$ و نمودار آن به‌صورت مقابل است. اگر نمودار حداقل ۲ واحد به سمت راست منتقل شود، آن‌گاه نمودار تابع محور xها را در سمت چپ محور yها قطع نمی‌کند.



۷۶۶ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر نمودار تابع، محور xها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع کند، باید معادلهٔ $y=0$ دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت داشته باشد. پس باید $\frac{c}{a}<0$ باشد: $\frac{c}{a}=\frac{1-m}{m+2}<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-2$ یا $m>1$

۷۶۷ **۱** ۲ ۳ ۴

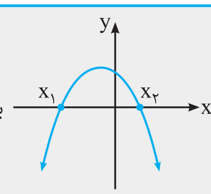
نکته: اگر معادلهٔ $y=0$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه نمودار تابع از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

شرط آن‌که معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد آن است که:

$$P=\frac{c}{a}<0\Rightarrow \frac{1}{m+2}<0\Rightarrow m+2<0\Rightarrow m<-2$$

۷۶۸ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر سهمی به‌صورت



باشد، آن‌گاه سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد و دارای ماکسیمم است. پس در تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$، اگر $a<0$ و $P=\frac{c}{a}<0$ باشد، آن‌گاه سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکسیمم است.

اگر ضریب x^2 منفی باشد، آن‌گاه نمودار دارای ماکسیمم است، لذا:

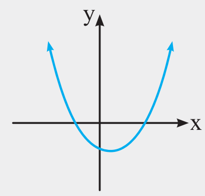
$$1-m<0\Rightarrow m>1 \qquad (*)$$

همچنین اگر معادلهٔ $y=0$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد، آن‌گاه نمودار سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$P=\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{m-2}{1-m}<0\xrightarrow{1-m<0} m-2>0\Rightarrow m>2\xrightarrow{(*)} m>2$$

۷۶۹
۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر سهمی به‌صورت



باشد، آن‌گاه سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد و دارای مینیمم است. پس در تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$، اگر $a>0$ و $P=\frac{c}{a}<0$ باشد، آن‌گاه سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای مینیمم است.

اگر $m-2>0$ و $\frac{c}{a}=\frac{3-m}{m-2}<0$، آن‌گاه نمودار تابع به معادلهٔ $y=(m-2)x^2+mx+3-m$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد و دارای مینیمم است:

$m-2>0 \Rightarrow m>2$ (۱)

$\frac{3-m}{\underbrace{m-2}_{\text{مثبت}}}<0 \Rightarrow 3-m<0 \Rightarrow m>3$ (۲)

$(1)\bigcap(2) \Rightarrow m>3$

۷۷۰
۱ ۲ ۳ ۴

نکته: برای آن‌که نمودار f محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند، باید معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشهٔ منفی داشته باشد، لذا: $S=-\frac{b}{a}<0 \quad , \quad P=\frac{c}{a}>0 \quad , \quad \Delta>0$

$P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{a}>0 \Rightarrow a<0 \;,\; S=-\frac{b}{a}=-\frac{a+3}{a}<0$

$\xrightarrow{a<0} a+3<0 \Rightarrow a<-3$

$\Delta=(a+3)^2+4a>0 \Rightarrow a^2+10a+9=(a+9)(a+1)>0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-9$ یا $a>-1$

بنابراین: حدود a: $a<-9$

۷۷۱
۱ ۲ ۳ ۴

برای آن‌که نمودار، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند، باید معادلهٔ $y=0$، دو ریشهٔ حقیقی منفی داشته باشد (شرط داشتن دو ریشهٔ منفی : $\Delta>0 , P>0 , S<0$)

$P=\frac{c}{a}=\frac{12}{m-2}>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2$ (۱)

$S=-\frac{b}{a}=\frac{2(m+1)}{m-2}<0 \xrightarrow{m-2>0} m+1<0 \Rightarrow m<-1$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم به ازای هیچ مقداری از m، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی نمی‌باشد.

۷۷۲
۱ ۲ ۳ ۴

نکته: برای آن‌که منحنی تابع درجه دوم، محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، باید معادلهٔ $y=0$ دو ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد.

برای آن‌که معادلهٔ درجه دوم $2x^2-4x+m-3=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد، باید داشته باشیم:

$P=\frac{c}{a}>0 \;,\; S=-\frac{b}{a}>0 \;,\; \Delta>0$

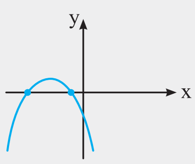
$P=\frac{c}{a}=\frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m>3 \;,\; S=-\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2>0$

$\Delta=16-8(m-3)>0 \Rightarrow m-3<2 \Rightarrow m<5$

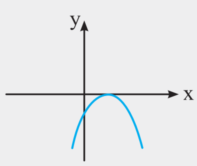
$\xrightarrow{m>3} 3<m<5$

۷۷۳
۱ ۲ ۳ ۴

نکته: برای آن‌که نمودار تابع f از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نگذرد باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

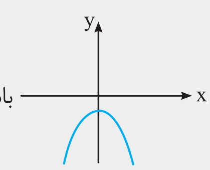


حالت اول: نمودار تابع f باید به‌صورت مقابل باشد، یعنی معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشهٔ حقیقی منفی داشته باشد.



حالت دوم: نمودار تابع f به یکی از دو صورت

یا



باشد.

برای آن‌که حالت اول برقرار باشد، باید شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $a-3<0$ (سهمی رو به پایین) $\Rightarrow a<3$

۲) $P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3}>0 \Rightarrow a-3<0 \Rightarrow a<3$

۳) $S=-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3}<0 \xrightarrow{a-3<0} -a>0 \Rightarrow a<0$

۴) $\Delta>0 \Rightarrow a^2+4(a-3)=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)>0$

$\Rightarrow a>2$ یا $a<-6$

$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow a<-6 \quad (*)$

برای آن‌که حالت دوم برقرار باشد، باید شرایط زیر برقرار باشند:

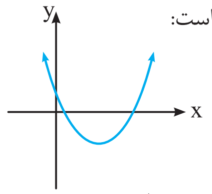
$\Delta\leq 0 \;,\; a-3<0$

$\Rightarrow \Delta=a^2+4(a-3)=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)\leq 0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -6\leq a\leq 2 \xrightarrow{\text{اجتماع با } (*)} a\leq 2$

۷۷۴ ۱ **۲** ۳ ۴

نمودار هیچ‌یک از سهمی‌های داده‌شده از مبدأ مختصات نمی‌گذرد، بنابراین سهمی که فقط از ناحیهٔ سوم نگذرد به‌صورت زیر است:



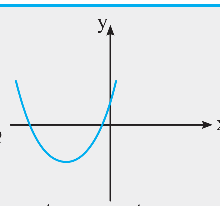
با توجه به نمودار، ضریب $x^۲$ باید عددی مثبت باشد و در ضمن معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد، پس شرایط زیر باید برقرار باشند: $a>۰\ ,\ \Delta>۰\ ,\ P>۰\ ,\ S>۰$

در بین گزینه‌ها، سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۷x+۱$ در هر چهار شرط بالا صدق می‌کند: $a=۱>۰\ ,\ \Delta=(-۷)^۲-۴(۱)(۱)=۴۵>۰$

$$P=\frac{c}{a}=۱>۰\ ,\ S=-\frac{b}{a}=۷>۰$$

۷۷۵ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر نمودار تابع به‌صورت



باشد، آن‌گاه نمودار تابع فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد. در واقع معادلهٔ $y=۰$ باید دو ریشهٔ حقیقی منفی داشته باشد، لذا:

$$P=\frac{c}{a}>۰\ ,\ S=-\frac{b}{a}<۰\ ,\ \Delta>۰\ ,\ a>۰$$

$$a=m>۰$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m}{m}=۱>۰\ ,\ S=-\frac{b}{a}=-\frac{m-۳}{m}<۰$$

$$\xrightarrow{m>۰} m-۳>۰\Rightarrow m>۳$$

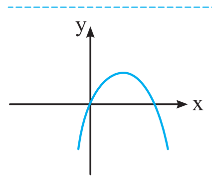
$$\Delta=(m-۳)^۲-۴m^۲=-۳m^۲-۶m+۹=-۳(m^۲+۲m-۳)$$

$$=-۳(m+۳)(m-۱)>۰\xrightarrow[m+۳>۰]{m>۰} m-۱<۰\Rightarrow m<۱$$

$$m>۰\ ,\ m>۳\ ,\ m<۱\Rightarrow m\in\varnothing$$

اگر $m=۰$، آن‌گاه معادله به‌صورت $y=-۳x$ درمی‌آید که نمودار آن از ناحیه‌های دوم و چهارم می‌گذرد.

۷۷۶ **۱** ۲ ۳ ۴



$x=۰$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $y=۰$ می‌باشد و برای آن‌که نمودار از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نگذرد، نمودار تابع باید به‌صورت مقابل باشد، لذا ریشهٔ دیگر معادلهٔ $y=۰$ باید مثبت باشد، پس: $y=۰\Rightarrow x(ax-(a+۲))=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{a+۲}{a}>۰\xrightarrow{a<۰}a+۲<۰\Rightarrow a<-۲\end{cases}$$

از طرفی اگر $a=-۲$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=-۲x^۲$ درمی‌آید که نمودار تابع در مبدأ مختصات بر محور xها مماس است و سهمی رو به پایین است. لذا اگر $a\le -۲$، آن‌گاه نمودار تابع از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد.

۷۷۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: برای آن‌که نمودار همواره بالای محور xها باشد، باید داشته باشیم:

$$x^۲\ \text{ضریب}>۰\ ,\ \Delta<۰$$

$$x^۲\ \text{ضریب}=m+۲>۰\Rightarrow m>-۲\quad (*)$$

$$\Delta=۴m^۲-۴(m+۲)<۰\xrightarrow{\div ۴}m^۲-m-۲=(m-۲)(m+۱)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۱<m<۲\xrightarrow{(*)}-۱<m<۲$$

۷۷۸ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر ضریب $x^۲$ عددی مثبت و $\Delta<۰$، آن‌گاه نمودار تابع همواره بالای محور xها قرار دارد: $a-۱>۰\Rightarrow a>۱\ ,\ \Delta=۸-۴a(a-۱)<۰$

$$\Rightarrow -۴a^۲+۴a+۸<۰\xrightarrow{\div(-۴)}a^۲-a-۲>۰$$

$$\Rightarrow (a+۱)(a-۲)>۰$$

$$\xrightarrow{a+۱>۰}a-۲>۰\Rightarrow a>۲$$

۷۷۹ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر ضریب $x^۲$ عددی منفی و $\Delta<۰$، آن‌گاه نمودار تابع درجه دو همواره پایین محور xها قرار می‌گیرد.

بنابراین:

$$x^۲\ \text{ضریب}=m-۱<۰\Rightarrow m<۱\quad (۱)$$

$$\Delta=۳-۴m(m-۱)<۰\Rightarrow -۴m^۲+۴m+۳<۰$$

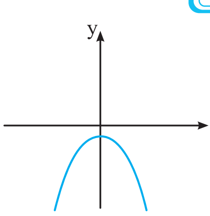
$$-۴m^۲+۴m+۳=۰\Rightarrow m=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۴۸}}{-۸}\Rightarrow\begin{cases}m_۱=-\frac{۱}{۲}\\ m_۲=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Delta<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}m>\frac{۳}{۲}\ \text{یا}\ m<-\frac{۱}{۲}\quad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲)\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}$$

۷۸۰ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر نمودار f به‌صورت



باشد، آن‌گاه نمودار f همواره در زیر محور xها قرار می‌گیرد و باید داشته باشیم:

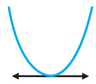
$$x^۲\ \text{ضریب}=m<۰\ ,\ \Delta<۰\Rightarrow m^۲+۴m<۰\xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}}-۴<m<۰$$

اگر $m=۰$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=-۱$ در می‌آید که پایین محور xها قرار دارد، بنابراین به ازای $-۴<m\le ۰$، نمودار پایین محور xها قرار می‌گیرد.

۷۸۱ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر ضریب x^2 عددی مثبت و $\Delta=0$، آن‌گاه نمودار بالای محور x ها و مماس بر آن است.

نمودار تابع نسبت به محور x ها باید به‌صورت مقابل باشد. لذا:



$$x^2 \text{ ضریب } = a>0\ ,\ \Delta=16-4a(a-3)=0 \xrightarrow{\div 4} 4-a^2+3a=0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} a^2-3a-4=0 \Rightarrow (a-4)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$a>0 \Rightarrow a=4 , x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(4)}=-\frac{1}{2}$$

۷۸۲ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر ضریب x^2 عددی منفی و $\Delta=0$، آن‌گاه نمودار تابع درجه دوم از طرف پایین بر محور x ها مماس است.

$$x^2 \text{ ضریب } = m-2<0 \Rightarrow m<2$$

$$\Delta=9-4(m-2)(m+2)=0 \Rightarrow 9=4(m^2-4)$$

$$\Rightarrow m^2-4=\frac{9}{4} \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \Rightarrow m=\pm\frac{5}{2} \xrightarrow{m<2} m=-\frac{5}{2}$$

۷۸۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: شرط مماس بودن سهمی بر محور x ها آن است که معادلهٔ $y=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد و شرط آن‌که نمودار $y=ax^2+bx+c$ در سمت چپ محور y ها بر محور x ها مماس باشد، آن است که $x=-\frac{b}{2a}<0$ باشد.

$$(m+1)x^2-(m-2)x-3=0$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4(m+1)(-3)=0$$

$$\Rightarrow (m^2-4m+4)+12m+12=0 \Rightarrow m^2+8m+16=0$$

$$\Rightarrow (m+4)^2=0 \Rightarrow m=-4$$

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-(m-2)}{2(m+1)}=\frac{m-2}{2m+2} \overset{m=-4}{=} \frac{-6}{-6}=1>0$$

پس $m=-4$ غیرقابل قبول است و در نتیجه چنین m ای وجود ندارد.

۷۸۴ ۱ **۲** ۳ ۴

شرط مماس بودن منحنی تابع درجه ۲ با خط آن است که معادلهٔ حاصل از تقاطع آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف باشد. بنابراین:

$$-x^2+bx+3=7 \Rightarrow -x^2+bx-4=0$$

$$\Delta=b^2-16=0 \Rightarrow b=\pm 4$$

$$b=4 \Rightarrow -x^2+4x-4=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow A(2,7)$$

$$b=-4 \Rightarrow -x^2-4x-4=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=-2 \Rightarrow B(-2,7)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(2+2)^2+(7-7)^2}=4$$

۷۸۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ ، $(a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن، علامت ضرایب a ، b و c را با توجه به توضیحات داده‌شده مشخص کنیم.

علامت a: اگر سهمی رو به بالا باشد، $a>0$ و اگر رو به پایین باشد، $a<0$ می‌باشد.

علامت b: طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ است. با توجه به علامت a و علامت x ، علامت b تعیین می‌شود.

علامت c: محل برخورد سهمی با محور y ها، $f(0)=c$ است. با توجه به محل برخورد، علامت c تعیین می‌شود.

سهمی رو به پایین است، پس a عددی منفی است. همچنین سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض مثبت قطع کرده است. پس c عددی مثبت می‌باشد.

۷۸۶ **۱** ۲ ۳ ۴

سهمی رو به بالا است، پس a عددی مثبت است. همچنین رأس سهمی در ناحیهٔ سوم قرار دارد، پس طول آن عددی منفی است:

$$x=-\frac{b}{\underbrace{2a}_{\text{مثبت}}}<0 \Rightarrow b>0$$

۷۸۷ ۱ ۲ **۳** ۴

سهمی رو به پایین است، پس a عددی منفی است. از طرفی طول رأس سهمی عددی مثبت است:

$$x=-\frac{b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b>0$$

$$f(0)=c<0$$

۷۸۸ ۱ **۲** ۳ ۴

رأس سهمی روی محور y ها قرار دارد، بنابراین طول آن برابر صفر است:

$$x=-\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow b=0$$

سهمی رو به بالا است، پس a عددی مثبت می‌باشد و همچنین سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض منفی قطع کرده است، بنابراین:

$$f(0)=c<0\ ,\ a>0 \Rightarrow ac<0$$

۷۸۹ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده باشند، آن‌گاه داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=a-2\ ,\ P=\frac{c}{a}=a-2$$

$\alpha^2+\beta^2$ مجموع مجذورات ریشه‌های معادله است و داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=(a-2)^2-2(a-2)=a^2-6a+8$$

عبارت درجه دوم a^2-6a+8 به ازای $3=-\frac{-6}{2(1)}=-\frac{b}{2a}$ کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند.

۷۹۰ ۱ ۲ **۳** ۴

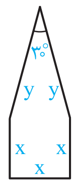
محور تقارن سهمی، نمودار سهمی را در رأس سهمی قطع می‌کند. بنابراین عرض رأس سهمی باید برابر $-\frac{۵}{۴}$ باشد.

$x_S = -\frac{b}{۲a} = \frac{۳}{۲}$ (طول رأس سهمی) $\Rightarrow$ رأس سهمی: $S(\frac{۳}{۲}, -\frac{۵}{۴})$

مختصات S در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، لذا:

$$-\frac{۵}{۴} = \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۲} + a \Rightarrow a = ۱$$

۷۹۱ ۱ ۲ **۳** ۴



اگر پنجره کم‌ترین مساحت را داشته باشد، آن‌گاه دارای کم‌ترین نوردهی است. فرض کنیم x طول ضلع مربع و y طول ساق مثلث متساوی‌الساقین باشد، در این صورت:

$$x^۲ = \text{مساحت مربع} \quad , \quad \text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} y \times y \times \underbrace{\sin ۳۰}_{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴} y^۲$$

$$\Rightarrow \text{مساحت پنجره} = S = x^۲ + \frac{۱}{۴} y^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی محیط پنجره برابر $۳x + ۲y$ می‌باشد. داریم:

$$۳x + ۲y = ۶ \Rightarrow ۲y = ۶ - ۳x \Rightarrow y = ۳ - \frac{۳}{۲} x \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow S = x^۲ + \frac{۱}{۴}(۳ - \frac{۳}{۲}x)^۲ = x^۲ + \frac{۱}{۴}(۹ - ۹x + \frac{۹}{۴}x^۲)$$

$$= x^۲ + \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۴}x + \frac{۹}{۱۶}x^۲ = (۱ + \frac{۹}{۱۶})x^۲ - \frac{۹}{۴}x + \frac{۹}{۴}$$

$$= \frac{۲۵}{۱۶}x^۲ - \frac{۹}{۴}x + \frac{۹}{۴}$$

معادلهٔ S، معادلهٔ یک سهمی با ضریب $x^۲$ مثبت است، این سهمی به ازای $x = -\frac{b}{۲a}$ کم‌ترین مقدار را دارد، بنابراین:

$$x_{min} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-\frac{۹}{۴}}{۲(\frac{۲۵}{۱۶})} = \frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۲۵}{۸}} = \frac{۸ \times ۹}{۲۵ \times ۴} = ۰/۷۲ m$$

۷۹۲ **۱** ۲ ۳ ۴

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول خط $y = x$ با شرط $x > ۰$ است. برای مماس بودن نمودار تابع با خط $y = x$ باید معادلهٔ $۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ = x$ دارای ریشهٔ مضاعف مثبت (ناحیهٔ اول) باشد، لذا:

$$۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰ \xrightarrow[\text{و مثبت}]{\text{شرط ریشهٔ مضاعف}} \Delta = ۰, x = -\frac{b}{۲a} > ۰$$

$$\Delta = m^۲ - ۴(۲)(m+۶) = m^۲ - ۸m - ۴۸ = (m - ۱۲)(m + ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۱۲ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{m}{۴} = -۳ < ۰ \\ m = -۴ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} = ۱ > ۰ \end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m = -۴$، نمودار تابع بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است.

۷۹۳ ۱ ۲ **۳** ۴

نمودار تابع f، محور xها را در $x = ۲$ قطع کرده است. بنابراین $x = ۲$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ است، پس داریم:

$$f(۲) = ۰ \Rightarrow ۲(۲)^۳ - ۵(۲)^۲ - ۲ + m = ۰ \Rightarrow m = ۶$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - x + ۶$$

با تقسیم $f(x)$ بر $x - ۲$، $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = (x-۲)(۲x^۲ - x - ۳), f(x) = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} x = -۱ \ , \ x = \frac{۳}{۲}$$

تذکر: با مشخص شدن ضابطهٔ $f(x)$، می‌توان با امتحان کردن اعداد گزینه‌ها نیز جواب را مشخص کرد.

۷۹۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

معادلهٔ خط گذرنده از مبدأ مختصات $y = mx$ است. برای آن‌که $y = (x+۱)(x+۴)$ بر خط $y = mx$ مماس باشد، باید معادلهٔ $(x+۱)(x+۴) = mx$ دارای ریشهٔ مضاعف مثبت (ناحیهٔ اول) باشد، لذا:

$$x^۲ + ۵x + ۴ = mx \Rightarrow x^۲ + (۵ - m)x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = (۵ - m)^۲ - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵ - m = ۴ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۲ < ۰ \ \times \\ ۵ - m = -۴ \Rightarrow m = ۹ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲ > ۰ \ \checkmark \end{cases}$$

فصل ۸ نمودار تابع درجه دوم (سهمی)

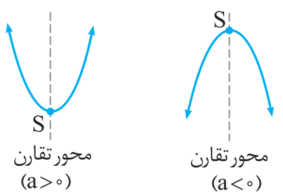
نمودار تابع درجه دوم

سهمی و ویژگی‌های آن

سهمی: نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$، یک سهمی قائم و یا به اختصار یک سهمی می‌گوییم. به طور مثال، نمودار معادلهٔ $y = 2x^2 + 3x - 1$ یک سهمی می‌باشد.

سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$، همواره به یکی از دو صورت مقابل است:

در شکل‌های روبه‌رو به نقطهٔ S **رأس سهمی** می‌گوییم.



اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای **پایین‌ترین نقطه** یا **مینیمم** و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای **بالاترین نقطه** یا **ماکزیمم** می‌باشد که در هر صورت نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم سهمی همان رأس سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، **خط تقارن** یا **محور تقارن** سهمی نامیده می‌شود.

انواع معادلات سهمی

معادلهٔ سهمی به یکی از دو صورت $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ یا $y = ax^2 + bx + c$، $(a \neq 0)$ نوشته می‌شود.

خواص سهمی به معادلهٔ $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ ، $(a \neq 0)$

۱) نقطهٔ $S(\alpha, \beta)$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادلهٔ $x = \alpha$ معادلهٔ خط تقارن (محور تقارن) سهمی است.

۳) اگر $a > 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

نکته از خاصیت (۲) فوق، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر دو نقطهٔ دلخواه از سهمی، اگر عرض این دو نقطه با هم برابر باشند، آن‌گاه طول این دو نقطه نسبت به خط $x = \alpha$ قرینهٔ یکدیگرند. پس اگر دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_1)$ (دو نقطه با عرض‌های یکسان) روی سهمی f باشند، آن‌گاه $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ محور تقارن سهمی f است و در نتیجه طول رأس سهمی f برابر $\frac{x_1 + x_2}{2}$ است.

نکته در حالت خاص، اگر سهمی محور طول‌ها را در α و β قطع کند، آن‌گاه $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$، طول رأس سهمی می‌باشد.

تست: اگر $(-3, 4)$ و $(5, 4)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟

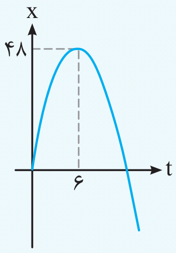
۱) $x = 2$ ۲) $x = 1$ ۳) $x = -1$ ۴) $x = -2$

پاسخ: با توجه به این‌که عرض دو نقطهٔ $(-3, 4)$ و $(5, 4)$ برابر هستند، پس معلوم می‌شود این دو نقطه نسبت به محور تقارن که طول آن با طول رأس سهمی برابر است، متقارن هستند. بنابراین برای یافتن طول رأس سهمی و نیز معادلهٔ محور تقارن سهمی، کافی است وسط طول‌های این نقاط را به‌دست آوریم. وسط طول‌های این نقاط همان میانگین طول‌های آن‌ها است، پس معادلهٔ محور تقارن برابر است با:

$x = \frac{5 + (-3)}{2} = 1 \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

در تست بعد، یک مسئله از فیزیک و مربوط به بحث حرکت‌شناسی آورده شده است که با توجه به نکتهٔ قبل به سادگی قابل حل است:

تست: نمودار مکان ــ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند مطابق شکل مقابل به‌صورت سهمی است. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=۳$ تا $t=۹$ برابر ۱۲ متر باشد، جابه‌جایی متحرک در این بازه چند متر است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۳)



۱) ۳　　۲) ۶

۳) صفر　　۴) ۱۲

پاسخ: $t=۶$ محور تقارن سهمی داده‌شده است، پس $t=۳$ و $t=۹$ دارای عرض‌های یکسان هستند، بنابراین مکان متحرک در این دو لحظه یکسان است و در نتیجه جابه‌جایی متحرک برابر صفر است، پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست: اگر $x=۲$ معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=۲(x+m-۱)^۲+۲m$ باشد، مختصات رأس این سهمی کدام است؟

۱) $(۳,۶)$　　۲) $(۲,-۲)$　　۳) $(۳,-۶)$　　۴) $(۲,۲)$

پاسخ: با توجه به مطالب ذکرشده، ریشهٔ عبارت داخل پرانتز در معادلهٔ سهمی، همان معادلهٔ محور تقارن سهمی است، پس:

$x+m-۱=۰\Rightarrow x=-m+۱$　،　محور تقارن : $x=۲\Rightarrow -m+۱=۲\Rightarrow m=-۱$

با قرار دادن $m=-۱$، معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=۲(x-۲)^۲-۲$ درمی‌آید که در این صورت نقطه به مختصات $S(۲,-۲)$ رأس آن می‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

رسم سهمی به معادلهٔ $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ ، $(a\neq ۰)$

برای رسم سهمی به معادلهٔ $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ و $(a\neq ۰)$ فرآیند زیر را انجام می‌دهیم:

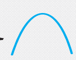
۱) با توجه به علامت a، مشخص می‌کنیم که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود یا رو به پایین.

۲) مختصات رأس سهمی، یعنی نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ را مشخص می‌کنیم.

۳) دو نقطه با طول‌های دلخواه در طرفین رأس (ترجیحاً دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس) را مشخص می‌کنیم.
می‌دانیم که مزیت انتخاب دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس در این است که عرض این نقاط همواره برابر یکدیگر خواهد بود.

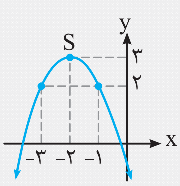
۴) نقاط مشخص‌شده را به‌صورت منحنی به یکدیگر وصل کرده و با توجه به علامت a نمودار را امتداد می‌دهیم.

مثال: نمودار سهمی $y=-(x+۲)^۲+۳$ را رسم کنید.

پاسخ: چون $a=-۱$، پس سهمی به‌صورت  خواهد بود.

مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(-۲,۳)$ است. نقاط به طول‌های $x=-۳$ و $x=-۱$ را که طول آن‌ها نسبت به طول رأس سهمی یعنی $x=-۲$ متقارن است، در جدول مشخص نموده و سهمی را رسم می‌کنیم:

x	-۳	-۲	-۱
y	۲	۳	۲



خواص سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ ، $(a\neq ۰)$

با توجه به سؤالاتی که در کنکور سراسری مشاهده می‌شود کم‌تر حالت $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ را مشاهده می‌کنیم که در آن یافتن رأس سهمی $S(\alpha,\beta)$ کار چندان سختی نیست و بیش‌تر با حالت رایج معادلات درجه دوم به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ روبه‌رو هستیم که علامت ضریب $x^۲$ بیانگر این است که اگر $a>۰$ باشد دهانهٔ سهمی رو به بالا بوده و اگر $a<۰$ باشد دهانهٔ سهمی رو به پایین خواهد بود. اما موضوع اصلی یافتن مختصات رأس سهمی است که می‌توان از $S(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ استفاده کرد. هم‌چنین $x=-\frac{b}{۲a}$، معادلهٔ محور تقارن سهمی می‌باشد.

تست: مختصات رأس سهمی $y = 2x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

۱) $(2,19)$ ۲) $(1,9)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-1,1)$

پاسخ: طول رأس سهمی را از رابطهٔ $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن را از رابطهٔ $y = -\frac{\Delta}{4a}$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times 2} = -1 \quad , \quad y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4(2)(3)}{4(2)} = 1 \Rightarrow$$ مختصات رأس : $S(-1,1) \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست: نقاط A و B به طول‌های ۲- و ۳ و عرض یکسان روی سهمی $y = x^2 + ax + b$ قرار دارند. اگر سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، مقدار b کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۷-

پاسخ: عرض نقاط A و B یکسان است، پس میانگین طول‌های این دو نقطه، طول رأس سهمی است، بنابراین:

$$x = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$ (طول رأس سهمی)

از طرفی طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{1}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

طبق فرض، سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، پس مختصات نقطهٔ $(3,0)$ در معادله صدق می‌کند:

$$0 = 3^2 + a(3) + b \xrightarrow{a=-1} 9 - 3 + b = 0 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته اگر سهمی رو به بالا باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار آن برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است و در نتیجه برد تابع بازهٔ $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ است. هم‌چنین اگر سهمی رو به پایین باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار آن برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است و در نتیجه برد تابع بازهٔ $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ است.

کم‌ترین مقدار

بیش‌ترین مقدار

تست: برد تابع $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ بازهٔ $[a, +\infty)$ و برد تابع $g(x) = -x^2 + 6x + 7$ بازهٔ $(-\infty, b]$ می‌باشد. حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۹ ۳) ۹- ۴) ۲۳-

پاسخ: در هر دو تابع، عدد $-\frac{\Delta}{4a}$ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار آن‌ها می‌باشد:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 1 \Rightarrow \text{کم‌ترین مقدار} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-8)^2 - 4(2)(1)}{4(2)} = -\frac{56}{8} = -7 \Rightarrow a = -7$$

$$g(x) = -x^2 + 6x + 7 \Rightarrow \text{بیش‌ترین مقدار} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(6)^2 - 4(-1)(7)}{4(-1)} = -\frac{64}{-4} = 16 \Rightarrow b = 16$$

$$\Rightarrow a + b = -7 + 16 = 9$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: دو بار الکتریکی q و $2q$ در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند و نیروی دافعهٔ F را به هم وارد می‌کنند. چه کسری از بار $2q$ را برداشته و به بار q اضافه کنیم تا در همان فاصله، بیش‌ترین نیرو را به یکدیگر وارد کنند؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: نیرویی که دو بار q_1 و q_2 که در فاصلهٔ r از همدیگر قرار دارند برابر $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ است. فرض کنیم x واحد از بار $2q$ را برداشته و به بار q اضافه کنیم، در این‌صورت بارهای q' و q'' را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$q' = 2q - x(2q) = 2q(1-x) \quad , \quad q'' = q + x(2q) = q(1+2x)$$

نیرویی که دو بار q' و q'' بر هم وارد می‌کنند برابر است با:

$$F' = \frac{kq'q''}{r^2} = \frac{k\times 2q(1-x)\times q(1+2x)}{r^2} = \frac{k\times 2q\times q}{r^2}(1-x)(1+2x) = F\times(-2x^2 + x + 1)$$

برای آن‌که F' بیش‌ترین مقدار شود، باید عبارت $-2x^2 + x + 1$ بیش‌ترین مقدار شود و این عبارت به ازای $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}$ بیش‌ترین مقدار را اختیار می‌کند. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

صفرهای تابع درجه ۲

نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم. بنابراین برای پیدا کردن صفرهای تابع f باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم. در تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$، می‌توان تعداد صفرهای تابع را به کمک علامت Δ مشخص کرد.

مثال: صفرهای تابع $f(x)=۳x^۲+۴x+۱$ را مشخص کنید.

پاسخ: ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$، صفرهای تابع f می‌باشند:

$$f(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۴x+۱=۰ \quad , \quad a=۳\,,\,b=۴\,,\,c=۱$$

روش اول:

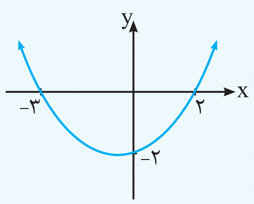
$$a+c=b \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-۱ \\ \beta=-\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۱۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۴+۲}{۲a}=\frac{-۲}{۶}=-\frac{۱}{۳} \\ \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۴-۲}{۶}=-\frac{۶}{۶}=-۱ \end{cases}$$

نکته اگر α و β صفرهای تابع درجه ۲ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ است که با داشتن یک فرض دیگر می‌توان مقدار a را نیز به‌دست آورد.

تست: سهمی مقابل، از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟



۱) $(۳,۱)$ ۲) $(۱,-۱)$
۳) $(-۱,-۲)$ ۴) $(-۲,-۱)$

پاسخ: سهمی محور x ها را در نقاطی با طول‌های ۳- و ۲ قطع کرده است، پس ۳- و ۲ صفرهای تابع هستند، بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x)=a(x+۳)(x-۲)$ می‌باشد. طبق نمودار، $f(۰)=-۲$ است، بنابراین:

$$f(۰)=a(۰+۳)(۰-۲)=-۶a=-۲ \Rightarrow a=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۳}(x+۳)(x-۲)$$

با توجه به گزینه‌ها، مختصات نقطهٔ $(-۱,-۲)$ در معادلهٔ $y=\frac{۱}{۳}(x+۳)(x-۲)$ صدق می‌کند و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور y ها، برابر $f(۰)=c$ می‌باشد.

رسم نمودار تابع درجه دوم

نکته برای رسم نمودار معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ و $(a\neq ۰)$، ابتدا مختصات رأس سهمی یعنی نقطهٔ $S(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ را می‌یابیم.

آن‌چه که در نمودار تابع درجه دوم (سهمی) برای ما مهم است، رأس سهمی و محل برخورد نمودار با محورهای مختصات (مخصوصاً محور x ها) می‌باشد، بنابراین برای مشخص کردن نقطه‌های کمکی، می‌توان از نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات نیز استفاده کرد.

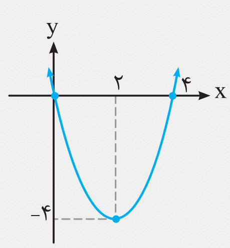
نکتهٔ مهم به جای یافتن عرض نقطهٔ رأس سهمی به کمک رابطهٔ $-\frac{\Delta}{۴a}$، می‌توان طول رأس یعنی $x=-\frac{b}{۲a}$ را در معادلهٔ سهمی قرار داد تا عرض آن به‌دست آید. اگر طول رأس سهمی پارامتری باشد، بهتر است عرض آن را از فرمول $-\frac{\Delta}{۴a}$ به‌دست آوریم.

مثال: سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۴x$ را رسم کنید.

پاسخ: چون $a=۱>۰$، پس دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود. همچنین:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲ \Rightarrow y_S=(۲)^۲-۴(۲)=-۴ \Rightarrow \text{رأس سهمی}: S(۲,-۴)$$

$$\text{نقطه‌های کمکی}: \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۰ \\ y=۰ \Rightarrow x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۰\,،\,x=۴ \end{cases}$$



تست: سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۲،-۱)$ نیز بگذرد، طول رأس سهمی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۳-

پاسخ: سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ از نقاط $(۰،۳)$، $(۳،۰)$ و $(۲،-۱)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این سه نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

$(۰،۳)$ روی سهمی قرار دارد. $\Rightarrow ۳ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow y = ax^۲ + bx + ۳$

$(۳،۰)$ روی سهمی قرار دارد. $\Rightarrow ۰ = a(۳)^۲ + b(۳) + ۳ \Rightarrow ۹a + ۳b + ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} ۳a + b = -۱ \qquad (۱)$

$(۲،-۱)$ روی سهمی قرار دارد. $\Rightarrow -۱ = a(۲)^۲ + b(۲) + ۳ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۴ \xrightarrow{\div ۲} ۲a + b = -۲ \qquad (۲)$

$$(۱)\ ،\ (۲) \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = -۲ \\ ۳a + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - b = ۲ \\ ۳a + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ \xrightarrow{۲a+b=-۲} ۲ + b = -۲ \Rightarrow b = -۴$$

طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲} = ۲$ می‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

تذکر مهم اگر گفته شود تابعی ماکسیمم یا مینیممی برابر b دارد، آن‌گاه عرض نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم برابر b است.

تست: به ازای کدام مقدار m، سهمی به معادلهٔ $y = mx^۲ + (m+۲)x - ۱$ مینیممی برابر ۳- دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: در سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، اگر $a > ۰$، آن‌گاه سهمی دارای مینیمم است و مقدار مینیمم برابر عرض رأس سهمی است. عرض رأس سهمی برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. طبق فرض این مقدار برابر ۳- می‌باشد، بنابراین داریم:

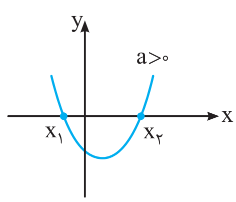
$a = m \ ،\ b = m + ۲ \ ،\ c = -۱$

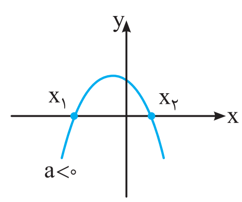
$$-\frac{\Delta}{۴a} = -۳ \Rightarrow \Delta = ۱۲a \Rightarrow (m+۲)^۲ - ۴(m)(-۱) = ۱۲m \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ + ۴m = ۱۲m \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ = ۰$$

$\Rightarrow (m-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

نمودارشناسی تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$

اگر معادلهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c = ۰$، دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه نمودار تابع f به یکی از دو حالت زیر است:





اگر به هر دو نمودار توجه کنید، نمودار سهمی از هر چهار ناحیه عبور کرده است. پس اگر معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد، نمودار از هر چهار ناحیه می‌گذرد. پس:

نکته اگر $\frac{c}{a} < ۰$، آن‌گاه نمودار از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

تست: به ازای چه مقادیری از m، نمودار تابع $f(x) = (m-۱)x^۲ + ۴x + (m+۲)$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۰،۳)$ ۲) $(-۱،۲)$ ۳) $(-۲،۱)$ ۴) $(-۳،۰)$

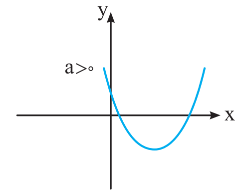
پاسخ: اگر P (حاصل‌ضرب دو ریشه) منفی باشد، آن‌گاه نمودار تابع از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+۲}{m-۱} < ۰ \ ،\ m + ۲ = ۰ \ ،\ m - ۱ = ۰ \Rightarrow m = -۲ \ ،\ m = ۱$$

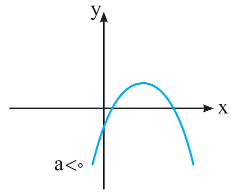
m		-۲		۱	
m+۲	−	۰	+		+
m-۱	−		−	۰	+
P	+	۰	−	تعریف نشده	+

با توجه به جدول، اگر $-۲ < m < ۱$، آن‌گاه P عددی منفی است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

اگر معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت باشد، آن‌گاه نمودار f به یکی از دو صورت زیر است:



(آ)



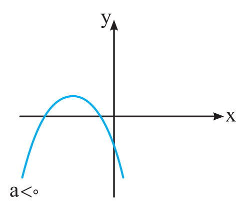
(ب)

توجه کنید که نمودار (آ)، **فقط** از ناحیهٔ سوم **نمی‌گذرد** و نمودار (ب)، **فقط** از ناحیهٔ دوم **نمی‌گذرد**. پس:

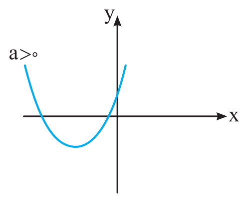
نکته اگر $a>0$ ، $\Delta>0$ ، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ ، آن‌گاه نمودار تابع درجه دوم فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد (نمودار (آ)).

نکته اگر $a<0$ ، $\Delta>0$ ، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ ، آن‌گاه نمودار تابع درجه دوم فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد (نمودار (ب)).

اگر معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ منفی باشد، آن‌گاه نمودار f به یکی از دو صورت زیر است:



(آ)



(ب)

توجه کنید که نمودار (آ)، **فقط** از ناحیهٔ اول **نمی‌گذرد** و نمودار (ب)، **فقط** از ناحیهٔ چهارم **نمی‌گذرد**. پس:

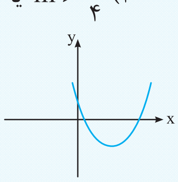
نکته اگر $a<0$ ، $\Delta>0$ ، $-\frac{b}{a}<0$ و $\frac{c}{a}>0$ ، آن‌گاه نمودار تابع درجه دوم فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد (نمودار (آ)).

نکته اگر $a>0$ ، $\Delta>0$ ، $-\frac{b}{a}<0$ و $\frac{c}{a}>0$ ، آن‌گاه نمودار تابع درجه دوم فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد (نمودار (ب)).

تست: به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $f(x)=x^2-x+m$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\geq 0$ ۲) $0\leq m<\frac{1}{4}$ ۳) $m<\frac{1}{4}$ ۴) $m>\frac{1}{4}$ یا $m<0$

پاسخ: با توجه به این‌که ضریب x^2 عددی مثبت است (سهمی رو به بالا)، نمودار تابع f باید به‌صورت



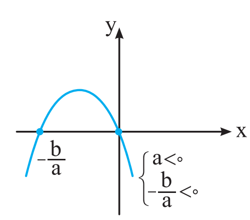
باشد، در واقع معادلهٔ $f(x)=0$ باید دو ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$P=\frac{c}{a}>0 \quad , \quad S=-\frac{b}{a}>0 \quad , \quad \Delta>0$$

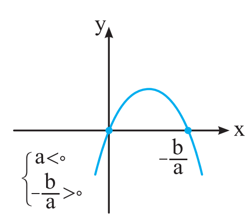
$$P=m>0 \quad , \quad S=-\frac{b}{a}=1>0 \quad , \quad \Delta=1-4m>0\Rightarrow m<\frac{1}{4}$$

از طرفی اگر $m=0$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=x^2-x$ درمی‌آید که نمودار آن نیز از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد. پس حدود m باید به‌صورت $0\leq m<\frac{1}{4}$ باشد تا نمودار تابع فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نگذرد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

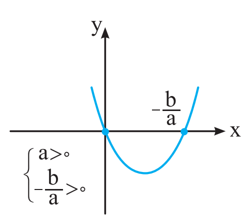
نکته اگر $P=0$ ، آن‌گاه $c=0$ می‌باشد و در نتیجه ریشه‌ها $\alpha=0$ و $\beta=-\frac{b}{a}$ است و نمودار f به یکی از چهار حالت زیر می‌باشد: (نمودار f حتماً از مبدأ مختصات می‌گذرد.)



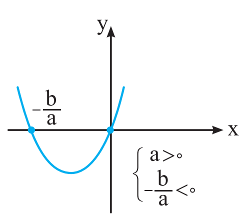
نمودار فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.



نمودار فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



نمودار فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد.

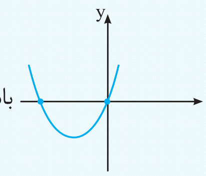


نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

تست: به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^۲+(m+۱)x$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-۱<m<۲$ ۲) $-۲<m<۰$ ۳) $m>۰$ ۴) $m<۰$

پاسخ : $c=۰$ می‌باشد، لذا نمودار f از مبدأ مختصات می‌گذرد. برای آن‌که نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نگذرد، نمودار آن باید

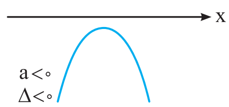
به‌صورت 

باشد، لذا سهمی باید رو به بالا و ریشهٔ دیگر معادله باید منفی باشد، پس:

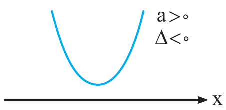
گزینهٔ (۳) صحیح است. $x=-\frac{b}{a}=-\frac{m+۱}{m}<۰\ ,\ a=m>۰\Rightarrow m+۱>۰\Rightarrow m>-۱\xrightarrow{m>۰}m>۰\Rightarrow$

در ادامه، نمودار $f(x)=ax^۲+bx+c$ را در حالت‌هایی که معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد و یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر $\Delta<۰$، در این صورت معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. در واقع تابع $y=ax^۲+bx+c$، محور x ها را قطع نمی‌کند و نمودار تابع به یکی از دو صورت مقابل است:



نمودار همواره پایین محور x ها قرار دارد.



نمودار همواره بالای محور x ها قرار دارد.

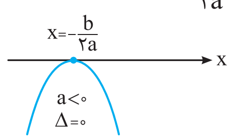
مثال: حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^۲+۲mx+m+۱$ همواره بالای محور x ها قرار گیرد را مشخص کنید.

پاسخ : در سهمی اگر $m>۰=$ ضریب $x^۲$ و $\Delta<۰$، آن‌گاه نمودار سهمی همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد:

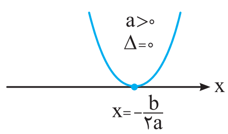
$$\Delta=b^۲-۴ac=۴m^۲-۴m(m+۱)=۴m(m-(m+۱))=۴m(-۱)<۰\Rightarrow m>۰$$

از طرفی اگر $m=۰=$ ضریب $x^۲$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۱$ درمی‌آید که خط $y=۱$ بالای محور x ها قرار دارد، پس به ازای $m\geq ۰$، نمودار تابع f همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد.

حالت دوم: اگر $\Delta=۰$، در این صورت معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{b}{۲a}$ است. در این حالت نمودار تابع، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و می‌گوییم نمودار f در $x=-\frac{b}{۲a}$ بر محور x ها مماس است. نمودار کلی تابع در این حالت به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار تابع زیر محور x ها و بر آن مماس است.



نمودار تابع بالای محور x ها و بر آن مماس است.

تست: به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $f(x)=۴x^۲+۴(m-۲)x+m$، محور x ها را فقط در یک نقطه و در سمت چپ محور y ها قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۴

پاسخ : برای به‌دست آوردن مقدار m باید دو شرط خواسته‌شده را بررسی کنیم.

شرط اول: نمودار محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کند. شرط دوم: نمودار محور x ها را در سمت چپ محور y ها قطع کند.

برای آن‌که نمودار تابع، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کند، باید معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، لذا:

$$۴x^۲+۴(m-۲)x+m=۰\ ,\ \Delta=۰\Rightarrow \Delta=(۴(m-۲))^۲-۴(۴)(m)=۰\Rightarrow ۱۶(m-۲)^۲-۱۶m=۰\Rightarrow ۱۶((m-۲)^۲-m)=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)^۲-m=۰\Rightarrow (m^۲-۴m+۴)-m=۰\Rightarrow m^۲-۵m+۴=۰\Rightarrow (m-۴)(m-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}m-۴=۰\\ \text{یا}\\ m-۱=۰\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}m=۴\\ \text{یا}\\ m=۱\end{cases}$$

در سمت چپ محور y ها، x عددی منفی است. بنابراین ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x)=۰$ $(x=-\frac{b}{۲a})$ باید عددی منفی باشد:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴(m-۲)}{۸}=-\frac{m-۲}{۲}$$

اگر $m=۴$، آن‌گاه $-\frac{m-۲}{۲}$ عددی منفی است و در نتیجه قابل قبول است و اگر $m=۱$، آن‌گاه $-\frac{m-۲}{۲}$ عددی مثبت است و در نتیجه غیرقابل قبول است. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

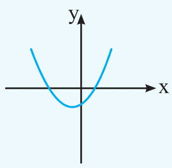
نکته اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، $(a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن، علامت ضرایب a، b و c را با توجه به توضیحات داده‌شده مشخص کنیم.

علامت a: اگر سهمی رو به بالا باشد، $a>0$ و اگر رو به پایین باشد، $a<0$ می‌باشد.

علامت b: طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}$ است. با توجه به علامت a و علامت x، علامت b تعیین می‌شود.

علامت c: محل برخورد سهمی با محور y ها، $f(0)=c$ است. با توجه به محل برخورد، علامت c تعیین می‌شود.

تست: سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت مقابل رسم شده است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) $a>0$، $b<0$ و $c<0$
۲) $a>0$، $b>0$ و $c>0$
۳) $a<0$، $b>0$ و $c<0$
۴) $a>0$، $b>0$ و $c<0$

پاسخ: سهمی رو به بالاست، پس ضریب x^2 عددی مثبت است: $a>0$

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کرده است، پس: $f(0)=c<0$

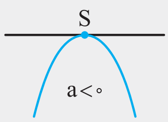
همچنین طول رأس سهمی منفی است، پس: $x=-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} -b<0 \Rightarrow b>0$

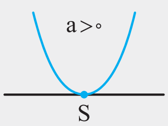
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

خلاصه مطالب فصل

نمودار تابع درجه دوم

نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$، $(a\neq 0)$ به یکی از دو صورت مقابل است:





۱) S رأس سهمی است که طول آن $x=-\frac{b}{2a}$ است. با قرار دادن x در معادلهٔ سهمی، عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید. همچنین می‌توان از دستور $-\frac{\Delta}{4a}$، عرض رأس سهمی را به‌دست آورد.

۲) خط $x=-\frac{b}{2a}$، محور تقارن سهمی است.

۳) اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_1)$ (دو نقطه با عرض‌های یکسان) دو نقطه روی سهمی باشند، آن‌گاه معادلهٔ محور تقارن سهمی، $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ است.

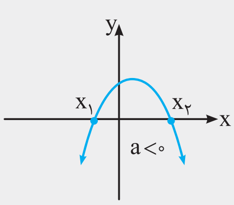
۴) اگر $a>0$، آن‌گاه سهمی دارای مینیمم و اگر $a<0$، آن‌گاه سهمی دارای ماکسیمم است.

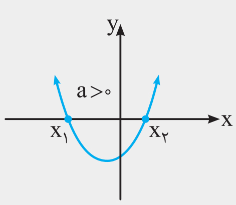
نکته اگر معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-x_0)^2+y_0$ باشد، آن‌گاه:

۱) مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(x_0,y_0)$ است.
۲) خط $x=x_0$، محور تقارن سهمی است.

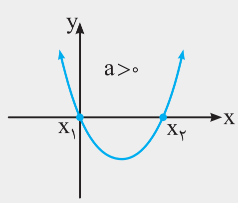
نمودارشناسی تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$

۱) اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد، آن‌گاه سهمی $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه می‌گذرد. پس اگر $\frac{c}{a}<0$، آن‌گاه سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

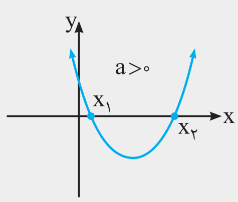




۲) اگر سهمی رو به بالا و دو ریشهٔ مثبت یا یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر داشته باشد، آن‌گاه سهمی فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد.

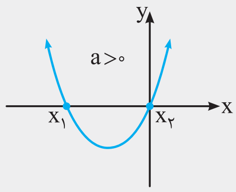


$P=0\ ,\ S=-\frac{b}{a}>0$

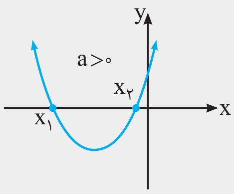


$\Delta>0\ ,\ P=\frac{c}{a}>0\ ,\ S=-\frac{b}{a}>0$

۳) اگر سهمی رو به بالا و دو ریشهٔ منفی یا یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ صفر داشته باشد، آن‌گاه سهمی فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

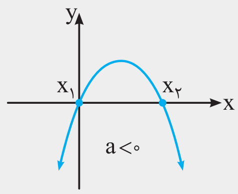


$P=0\ ,\ S=-\dfrac{b}{a}<0$

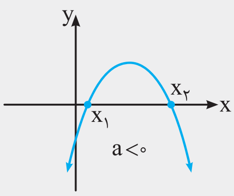


$\Delta>0\ ,\ P>0\ ,\ S<0$

۴) اگر سهمی رو به پایین و دو ریشهٔ مثبت یا یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر داشته باشد، آن‌گاه سهمی فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

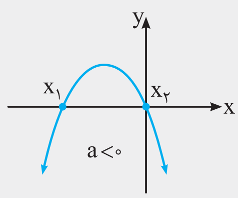


$P=0\ ,\ S=-\dfrac{b}{a}>0$

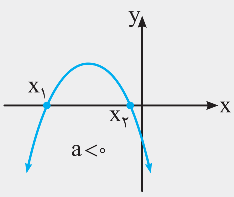


$\Delta>0\ ,\ P>0\ ,\ S>0$

۵) اگر سهمی رو به پایین و دو ریشهٔ منفی یا یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ صفر داشته باشد، آن‌گاه سهمی فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.

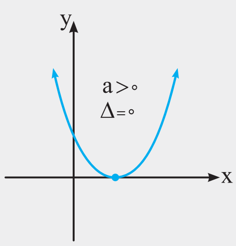


$P=0\ ,\ S=-\dfrac{b}{a}<0$

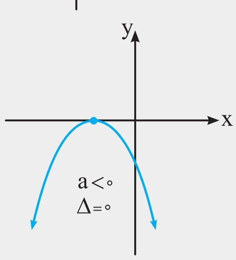


$\Delta>0\ ,\ P>0\ ,\ S<0$

۶) اگر سهمی یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه سهمی بر محور x ها مماس است.

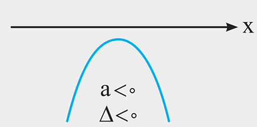


آ) اگر $a>0$، آن‌گاه سهمی از بالا بر محور x ها مماس است و نمودار از ناحیه‌های سوم و چهارم نمی‌گذرد. اگر سهمی در سمت راست محور y ها بر محور x ها مماس باشد، $x_S=-\dfrac{b}{2a}>0$ و اگر سهمی در سمت چپ محور y ها بر محور x ها مماس باشد، $x_S=-\dfrac{b}{2a}<0$ است.

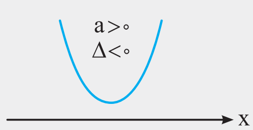


ب) اگر $a<0$، آن‌گاه سهمی از پایین بر محور x ها مماس است و در این حالت نمودار از ناحیه‌های اول و دوم نمی‌گذرد. اگر سهمی در سمت راست محور y ها بر محور x ها مماس باشد، $x_S=-\dfrac{b}{2a}>0$ و اگر در سمت چپ محور y ها، بر محور x ها مماس باشد، $x_S=-\dfrac{b}{2a}<0$ است.

۷) اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، آن‌گاه نمودار همواره پایین محور x ها یا همواره بالای محور x ها قرار دارد.



نمودار همواره پایین محور x ها قرار دارد و نمودار از ناحیه‌های اول و دوم نمی‌گذرد.



نمودار همواره بالای محور x ها قرار دارد و نمودار از ناحیه‌های سوم و چهارم نمی‌گذرد.

نکته اگر سهمی $y=ax^2+bx+c$ داده شده باشد، علامت ضرایب b، a و c به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

۱) اگر سهمی رو به بالا، آن‌گاه $a>0$ و اگر سهمی رو به پایین باشد، آن‌گاه $a<0$ است.

۲) علامت b با توجه به علامت طول رأس سهمی $(x=-\dfrac{b}{2a})$ و علامت a تعیین می‌گردد.

۳) علامت c به علامت عرض از مبدأ سهمی (محل تلاقی سهمی با محور y ها) بستگی دارد.