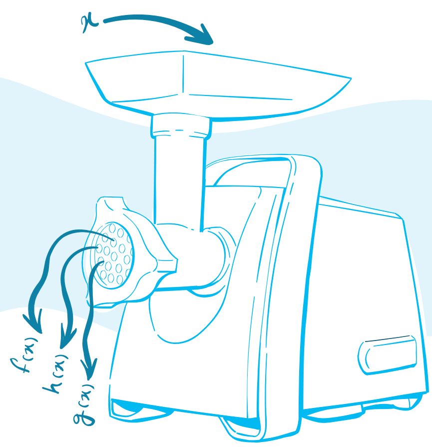
تابع

فصل اول

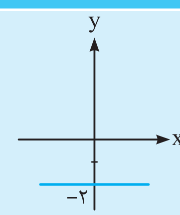
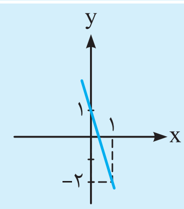
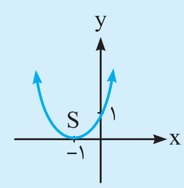
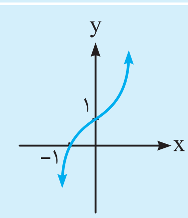


درسنامه ۱

توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ را که در آن $a_۰,a_۱,\dots,a_{n-۱},a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک تابع چندجمله‌ای می‌نامند. اگر $a_n\neq ۰$ باشد، چندجمله‌ای از درجهٔ n است. دامنهٔ تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است.

معروف‌ترین توابع چندجمله‌ای که با آن‌ها سروکار داریم در جدول زیر آمده‌اند.

نام تابع	درجه	ضابطهٔ کلی، دامنه و برد	مثال	
ثابت	۰	$f(x)=a$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\{a\}$	$f(x)=-۲$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\{-۲\}$	
خطی غیرثابت	۱	$f(x)=ax+b\ ;\ a\neq ۰$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$	$f(x)=-۳x+۱$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$	
درجه ۲	۲	$f(x)=ax^۲+bx+c\ ;\ a\neq ۰$ $D_f=\mathbb{R}$, نقطهٔ رأس: $S(-\frac{b}{۲a},f(-\frac{b}{۲a}))$ $\begin{cases}R_f=[f(-\frac{b}{۲a}),+\infty)\ ;\ a>۰\\ R_f=(-\infty,f(-\frac{b}{۲a})]\ ;\ a<۰\end{cases}$	$f(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$ نقطهٔ رأس: $S(-۱,۰)$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[۰,+\infty)$	
درجه ۳	۳	$f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d\ ;\ a\neq ۰$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$	$f(x)=x^۳+۱$ $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$	

سؤال *دانش‌پژوه (امیرحسین ذوالفقاری):* **آقا ببخشید به نظر میاد برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد که دامنه‌شون $\mathbb{R}$ هست، همیشه $\mathbb{R}$ میشه! درسته؟**

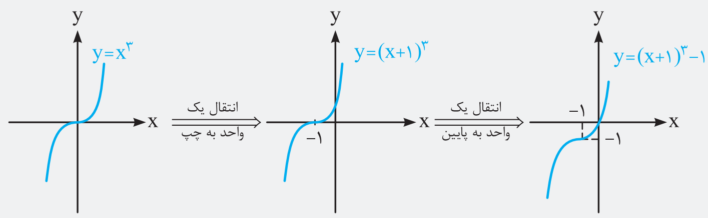
پاسخ *آفرین به این نظریه! بله درسته.*

مثال نمودار تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ را رسم کنید.

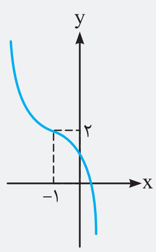
پاسخ برای استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱=(x+۱)^۳-۱$$

حال به کمک نمودار $y=x^۳$، نمودار تابع حاصل را رسم می‌کنیم:

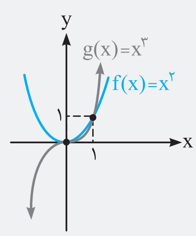


مثال اگر نمودار مقابل، مربوط به تابع $y=-(x+a)^۳+b$ باشد، a و b را بیابید.



پاسخ با توجه به شکل، مشخص است که این نمودار از روی تابع $y=-x^۳$ ساخته شده است، به این شکل که تابع $y=-x^۳$، ۱ واحد به چپ حرکت کرده است، پس $a=۱$. سپس این تابع ۲ واحد به بالا رفته است پس $b=۲$ می‌باشد.

رسم توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۳$ در یک دستگاه: کتاب درسی توجه خاصی به نمودار این دو تابع، به‌خصوص در فاصلهٔ (۰،۱) داشته است. همان‌طور که در سال دهم دیدید به ازای $۰<x<۱$، $x^۳<x^۲$ می‌باشد. (اگر یادتان باشد، هرچه توان x در این فاصله بیشتر می‌شد، مقدار آن کوچک‌تر می‌شد.) بنابراین نمودار تابع $f(x)=x^۲$ در فاصلهٔ (۰،۱) بالاتر از نمودار $g(x)=x^۳$ قرار می‌گیرد. نمودار این دو تابع را در حالت کلی ببینید:



۱- تابع $y=x^۳$ را ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال داده‌ایم. نمودار تابع حاصل از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲- کدام گزینه در مورد توابع $f(x)=x^۳-۴$ و $g(x)=-(x+۲)^۳+۱$ صحیح نیست؟

۱) نمودار تابع $g(x)$ از ربع اول دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.
۲) دامنهٔ هر دو تابع یکسان است.
۳) برد f با برد g یکسان نیست.
۴) نمودار تابع $f(x)$ از ربع دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

۳- در کدام‌یک از توابع چندجمله‌ای زیر، با قرینه‌کردن نمودار تابع نسبت به محور xها و سپس با قرینه‌کردن نمودار حاصل نسبت به محور yها، به نمودار تابع اولیه می‌رسیم؟

۱) $y=(x-۱)^۳$ ۲) $y=(x+۱)^۳$ ۳) $y=x^۳$ ۴) $y=x^۲$

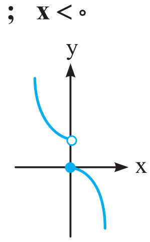
۴- نمودار تابع $y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۹$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

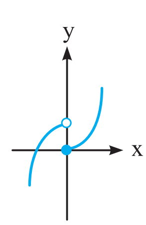
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

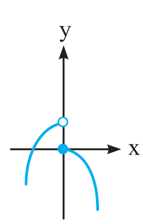
۵- اگر $f(x)=x^۳+۲$ و $g(x)=-(x-\frac{۱}{۳})^۳-\frac{۲۸}{۲۷}$ باشند، آن‌گاه نمودار تابع $(g+f)(x)$ از کدام ربع یا ربع‌های دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

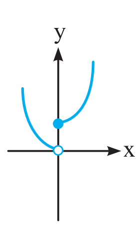
۱) فقط چهارم ۲) فقط دوم ۳) اول و دوم ۴) سوم و چهارم

۶- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۳ & ; \ x\geq ۰\\ x^۳+۱ & ; \ x<۰\end{cases}$ کدام است؟

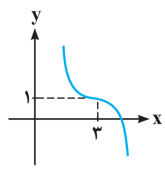
۱) 

۲) 

۳) 

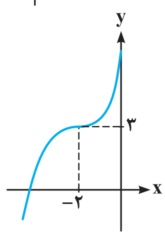
۴) 

۷- ضابطهٔ تابع مربوط به نمودار مقابل کدام است؟



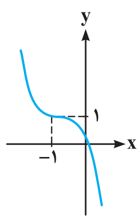
۱) $y=(x-3)^3+1$
۲) $y=(x+3)^3+1$
۳) $y=(3-x)^3+1$
۴) $y=(3-x)^3-1$

۸- اگر نمودار تابع $y=(x-a)^3+b$ به صورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



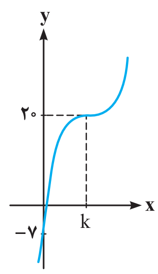
۱) ۵
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۵-

۹- اگر نمودار تابع $f(x)=(a-x)(x^2+bx+c)$ به صورت مقابل باشد، $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۶-
۳) ۳
۴) صفر

۱۰- اگر نمودار $f(x)=x^3-9x^2+ax+b$ به صورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۲۷
۳) ۴-
۴) ۲۰

۱۱- در چه بازه‌ای نمودار $f(x)=x^3$، بالاتر از نمودار $g(x)=x^2$ قرار دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$
۲) $(1,+\infty)$
۳) $(0,1)$
۴) $(-\infty,1)$

۱۲- در چه فاصله‌ای نمودار تابع $f(x)=x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x)=x|x|$ قرار می‌گیرد؟

۱) $(-1,0)\cup(0,1)$
۲) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
۳) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$
۴) $(0,1)$

۱۳- نمودار تابع $y=3-(x-1)^3$ خط $y=a^2x+b$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) بیش از ۲

درسنامه ۲

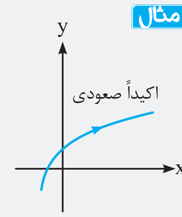
توابع صعودی و نزولی

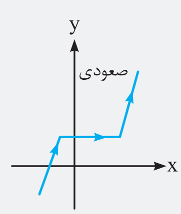
تعریف: تابع f را صعودی می‌گوییم، اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر yها کاهش نیابند. یعنی به ازای هر $x_1,x_2\in D_f$ که $x_1<x_2$ باشد، داشته باشیم:

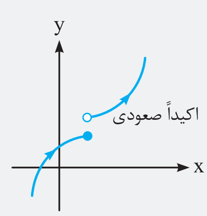
$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$

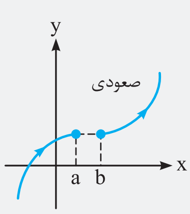
در این تعریف اگر $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ (علامت $\le$ به $<$ تبدیل شود)، آن‌گاه تابع f را اکیداً صعودی می‌گوییم.

مثال









سؤال دانش‌پژوه *(رها زندی)*: **آقا فرق اون دوتا شکل اول، سمت چپ، چیه که یکی صعودیه و یکی اکیداً صعودی؟**

پاسخ *ببین، توی شکل سمت چپ با این‌که $a<b$ ولی $f(a)=f(b)$، همین کافیه که بگیم تابع اکیداً صعودی نیست. بزار خیالت رو راحت کنم: فرق صعودی و اکیداً صعودی اینه که تابع صعودی می‌تونه دو یا چند نقطه هم عرض داشته باشه ولی اکیداً صعودی نمی‌تونه.*

نکته هر تابع اکیداً صعودی، صعودی نیز می‌باشد.

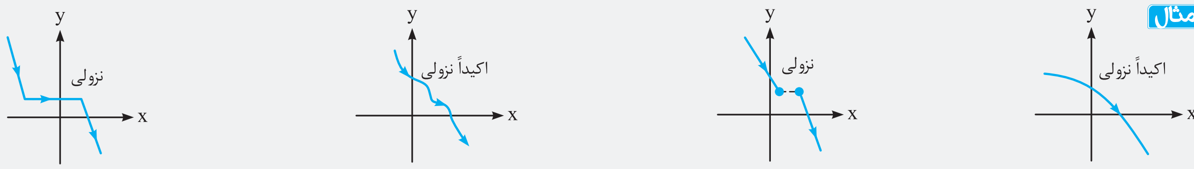
طریقهٔ شناخت توابع صعودی از روی نمودار: هرگاه در یک تابع پیوسته، از سمت چپ به راست روی نمودارها با فلش حرکت کنید و جهت حرکت فلش‌ها رو به پایین نباشد، (فلش‌ها در هر نقطه رو به بالا یا ثابت باشند) تابع صعودی است.

تعریف: تابع f را نزولی می‌گوییم، اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر yها افزایش نیابند. یعنی به‌ازای هر $x_۱, x_۲ \in D_f$ که $x_۱ < x_۲$ باشد، داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲)$$

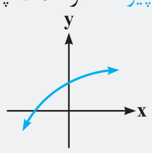
در این تعریف اگر $f(x_۱) > f(x_۲)$ شود (علامت $\geq$ به $>$ تبدیل شود)، آن‌گاه تابع f را اکیداً نزولی می‌گوییم.

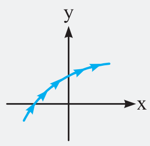
مثال



نکته هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز می‌باشد.

طریقهٔ شناخت توابع نزولی از روی نمودار: هرگاه در یک تابع پیوسته، از سمت چپ به راست روی نمودارها با فلش حرکت نمایید و جهت حرکت فلش‌ها رو به بالا نباشد (رو به پایین یا ثابت باشد) تابع نزولی است.

سؤال دانش‌پژوه *(بهرام چلچله)*: **آقا بعضی شکل‌ها این طوریه:**  **، الان این شکل خودش دو طرف فِلش داره، معلوم نیست که صعودیه یا نزولی!؟**

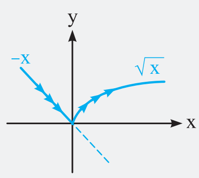
پاسخ *آقای بهرام خان، دقت کن، من گفتم خودتون از چپ به راست فلش بزنید. پس شکل شما باید این‌طوری فِلش بخوره:*  *، که مشخصه فلش‌ها از چپ به راست دارن مرتب رو به بالا میرن پس تابع صعودیه.*

نکته اگر تابعی در قسمتی از دامنه‌اش ثابت باشد، در آن قسمت هم صعودی و هم نزولی است. در حالت کلی، تابع ثابت، تابعی هم صعودی و هم نزولی است.

نکته اگر تابع f بر دامنه‌اش فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، به آن یکنوا می‌گوییم. به همین ترتیب، اگر f بر دامنه‌اش فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، به آن اکیداً یکنوا می‌گوییم.

تذکر دقت کنید اگر تابعی در قسمتی از دامنه‌اش اکیداً صعودی و در قسمتی دیگر اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است یا به عبارتی اکیداً یکنوا **نیست**.

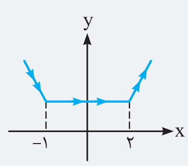
مثال **وضعیت تابع** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x \geq ۰ \\ -x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$ **را از لحاظ صعودی و نزولی بودن مشخص نمایید.**



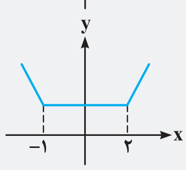
پاسخ ابتدا تابع داده‌شده را در بازه‌های مربوط رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که تابع به ازای $x < ۰$، اکیداً نزولی و به ازای $x \geq ۰$، اکیداً صعودی است. دقت کنید، با توجه به این‌که تابع در قسمتی از دامنهٔ خود اکیداً نزولی و در قسمتی دیگر اکیداً صعودی است، این تابع اکیداً یکنوا **نیست**.

مثال **با توجه به شکل مقابل، بزرگ‌ترین بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، اکیداً صعودی، نزولی یا اکیداً نزولی است را مشخص نمایید.**

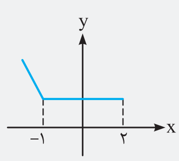


پاسخ با توجه به مطالب گفته شده، تابع فوق در بازهٔ $(-\infty, ۲]$ نزولی و در بازهٔ $[-۱, +\infty)$ صعودی است.



سؤال دانش‌پژوه *(سعیده آزاد)*: **آقا اشتباه نکردید! به نظر بزرگ‌ترین بازهٔ نزولی بودن، $(-\infty, -۱]$ و بزرگ‌ترین بازهٔ صعودی بودن $[۲, +\infty)$ میشن.**

پاسخ *نه خانم! گفتیم تابع ثابت هم صعودی و هم نزولیه. پس با توجه به شکل و فلش‌ها، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع نزولیه، به صورت شکل مقابل میشه. یعنی از $-\infty$ تا ۲. به همین ترتیب از ۱− تا $+\infty$ تابع صعودیه. یعنی قسمت ثابت در هر دو جواب میاد.*



هم‌چنین با توجه به مطالب گفته‌شده، تابع در بازه‌های $(-\infty, -۱]$ و $[۲, +\infty)$ به ترتیب اکیداً نزولی و اکیداً صعودی است.

نکات

۱) مجموع دو تابع صعودی (اکیداً صعودی)، تابعی صعودی (اکیداً صعودی) است. هم‌چنین مجموع یک تابع صعودی و یک تابع اکیداً صعودی نیز اکیداً صعودی است.

۲) مجموع دو تابع نزولی (اکیداً نزولی)، تابعی نزولی (اکیداً نزولی) است. هم‌چنین مجموع یک تابع نزولی و یک تابع اکیداً نزولی نیز، اکیداً نزولی است.

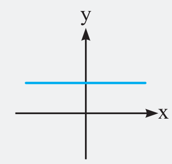
۳) اگر تابع f، تابعی صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه تابع $-f$، تابعی نزولی(صعودی) خواهد بود.

مثال تابع $y=x^3+x$ تابعی اکیداً صعودی است. زیرا $y_1=x^3$ و $y_2=x$ هر دو توابعی اکیداً صعودی هستند و لذا مجموع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است.

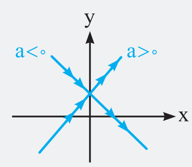
مثال تابع $y=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین تابع $y=-x^3$ تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

بررسی یکنوایی توابع مهم که در کتاب درسی آمده‌اند:

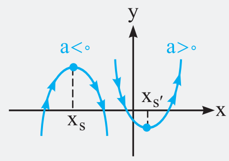
۱) توابع چندجمله‌ای مهم:



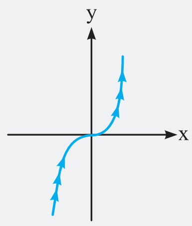
تابع ثابت $f(x)=a$: هم صعودی و هم نزولی است.



تابع خطی $y=ax+b$ با شرط $a>0$ اکیداً صعودی و با شرط $a<0$ اکیداً نزولی است.

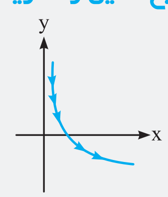


تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$، به شرط $a>0$ ابتدا نزولی (در بازهٔ $(-\infty, x_{S'}]$) و سپس صعودی (در بازهٔ $[x_{S'},+\infty)$) است. با شرط $a<0$ این تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

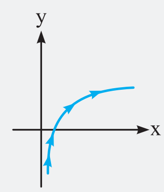


تابع $y=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است.

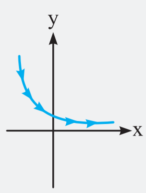
۲) توابع نمایی و لگاریتمی:



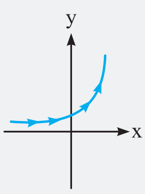
تابع $y=\log_a x$ با شرط $0<a<1$، اکیداً نزولی است.



تابع $y=\log_a x$ با شرط $a>1$، اکیداً صعودی است.



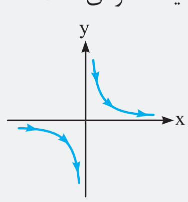
تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $0<a<1$، اکیداً نزولی است.



تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>1$، اکیداً صعودی است.

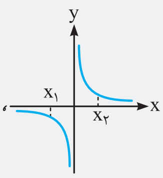
۳) تابع کسری $y=\frac{1}{x}$:

این تابع در بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ به صورت جداگانه نزولی است اما در کل دامنه‌اش، نه نزولی و نه صعودی است.



سؤال دانش‌پژوه (جلال شریف‌زاده): **آقا چرا آخه؟**

پاسخ *بچه این جور که تو سؤال پرسیدی من فکر کردم زلزله اومده! ببین تو شکل*

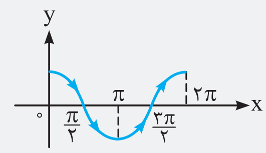


، با این‌که $x_1<x_2$ ولی $f(x_1)<f(x_2)$ میشه که این خلاف تعریف نزولی بودنه. (یادتونه که برای نزولی بودن، با شرط $x_1<x_2$، باید $f(x_1)\geq f(x_2)$ می‌شد.)

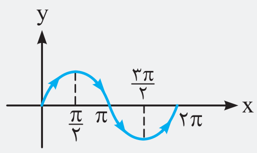
سؤال همون قبلی: **آقا، پس قضیهٔ فلش‌ها چی! مرتب رو به پایین هستن!**

پاسخ *پسر خوب، گفتیم اگه تابع پیوسته بود و فلش‌ها رو به پایین اون قضیه درسته. این‌جا هم تو بازه‌هایی که تابع پیوسته هست مثل $(0,+\infty)$ یا $(-\infty,0)$ اون قضیه درسته و می‌گیم تابع در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ یا $(-\infty,0)$ نزولیه ولی در کل، نه صعودی نه نزولیه.*

۴) توابع مثلثاتی:

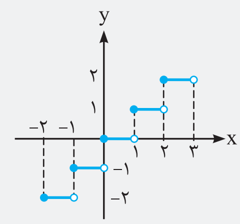


تابع $y=\cos x$، تابعی نوسانی است و مرتباً از نزولی به صعودی و برعکس تغییر وضعیت می‌دهد. مثلاً در فاصلهٔ $[0,\pi]$ اکیداً نزولی و در فاصلهٔ $[\pi,2\pi]$ اکیداً صعودی است.



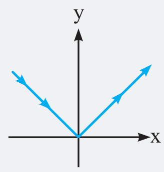
تابع $y=\sin x$، تابعی نوسانی است و مرتباً از نزولی به صعودی و صعودی به نزولی تغییر وضعیت می‌دهد. مثلاً در فاصلهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.

۵) تابع جزءصحیح:



تابع $y=[x]$ تابعی صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

۶) تابع قدرمطلق:



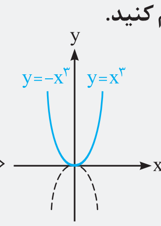
تابع $y=|x|$ در فاصلهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی و در فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است. اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است.

نکته برای رسم توابع شامل قدرمطلق، کافی است با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق، ابتدا آن را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس آن را رسم کنیم.

مثال نمودار $f(x)=x^۲|x|$ را رسم کنید.

پاسخ

$$f(x)=x^۲|\underbrace{x}_{\text{ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق: } x=۰}| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲.x & : \ x\geq ۰ \\ x^۲(-x) & ; \ x<۰ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۳ & ; \ x\geq ۰ \\ -x^۳ & ; \ x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$



تعیین صعودی یا نزولی بودن از روی زوج مرتب‌ها: طبق تعریف اگر به ازای افزایش مقادیر x (مؤلفه‌های اول) مقادیر y (مؤلفه‌های دوم) مرتباً زیاد شوند، تابع اکیداً صعودی است و اگر کاهش نیابند صعودی است. به همین ترتیب نزولی و اکیداً نزولی تعریف می‌شوند. مثلاً:

$f=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۵)\} \Rightarrow$ مؤلفه‌های دوم: $۴ \nearrow ۵ \rightarrow ۵ \Rightarrow$ f صعودی غیر اکید

$f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۰)\} \Rightarrow$ مؤلفه‌های دوم: $۲ \searrow ۱ \searrow ۰ \Rightarrow$ f اکیداً نزولی

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\} \Rightarrow$ مؤلفه‌های دوم: $۲ \nearrow ۳ \searrow ۱ \Rightarrow$ f نه صعودی و نه نزولی است

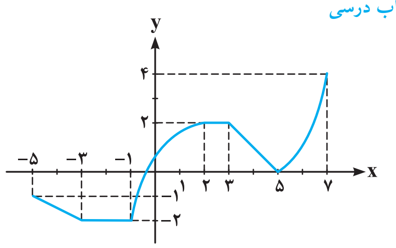
۱۴- تابع $f(x)=-\sin x$ در کدام بازهٔ زیر اکیداً صعودی است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $[۰,\pi]$ ۲) $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ ۳) $[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ ۴) $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$

۱۵- تابع $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ در کدام بازهٔ زیر صعودی است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳})$ ۲) $(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۷\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳})$ ۴) $(\pi,۲\pi)$

● **با توجه به نمودار تابع f که به صورت مقابل می‌باشد، به چهار سؤال زیر پاسخ دهید.** برگرفته از کتاب درسی



۱۶- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد، کدام است؟

۱) $[-۱,۲]$
۲) $[۴,۶]$
۳) $[-۳,۲]$
۴) $[-۳,۳]$

۱۷- اجتماع بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی می‌باشد، کدام است؟

۱) $[-۱,۵]$ ۲) $[-۱,۲]\cup[۳,۵]$ ۳) $[-۵,۳]$ ۴) $[-۵,۵]$

۱۸- چند نقطه وجود دارد که تابع، قبل از آن نقطه اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹- چند نقطه با طول صحیح نامنفی وجود دارد که تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰- تابع $f(x)=\cos x$ مفروض است. در کدام بازهٔ زیر، برای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو این بازه، رابطهٔ $x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$ برقرار است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ ۲) $(۲\pi,۳\pi)$ ۳) $(\pi,۲\pi)$ ۴) $(\frac{۵\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲})$

۲۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟ برگرفته از کتاب درسی

الف) هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک است.

ب) هر تابع یک به یک، حتماً اکیداً یکنوا است.

پ) تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد، وجود ندارد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲- تابع $f(x)=۳-۲\sqrt{x}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) همواره مثبت ۴) همواره منفی

۲۳- وضعیت تابع $y=۲^{x-۱}$ کدام است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی

۳) برای $x>۱$ صعودی و برای $x<۱$ نزولی ۴) برای $x>۱$ نزولی و برای $x<۱$ صعودی

۲۴- اگر $y=(\frac{m+۲}{۳})^x$ تابعی نزولی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $۰<m<۱$ ۲) $۰\le m\le ۱$ ۳) $-۲<m<۱$ ۴) $-۲\le m\le ۱$

۲۵- کدام تابع زیر در دامنهٔ خود، تابعی نزولی است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $y=۵^x$ ۲) $y=\sqrt[۳]{x}$ ۳) $y=-\log_{\frac{۱}{۵}} x$ ۴) $y=-\sqrt{x-۳}$

۲۶- کدام گزینه در مورد تابع $y=\frac{۱}{x}$ صحیح است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) در بازهٔ $(۰,+\infty)$، اکیداً صعودی است.

۲) در بازهٔ $(۰,+\infty)$، صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

۳) در بازهٔ $(-\infty,۰)$، اکیداً نزولی است.

۴) در بازهٔ $(-\infty,۰)$، نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

۲۷- چه تعداد از توابع زیر بیانگر تابعی اکیداً یکنوا می‌باشند؟ برگرفته از کتاب درسی

الف) $y=\sqrt[۳]{-x}$ ب) $y=\frac{۱}{x}$ پ) $y=x^۳$ ت) $y=|x|$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸- از بین توابع $f(x)=|x|$، $g(x)=\frac{۱}{x}$، $h(x)=-x^۳$ و $i(x)=\log_{۰/۵} x$، تابعی که یک‌به‌یک و غیریکنوا بوده را انتخاب کرده و آن را با تابعی که در کل $\mathbb{R}$ نزولی می‌باشد، جمع کرده‌ایم. مقدار تابع حاصل به ازای $x=۲$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $-۷/۵$ ۲) $-۰/۵$ ۳) -۶ ۴) ۱

۲۹- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & ; x\le -۴\\ ۳ & ; -۴<x<۲\\ ۳x-۲ & ; x\ge ۲\end{cases}$ صحیح <u>نیست</u>؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) تابع در بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است $(-\infty,-۴]$ می‌باشد.

۳) طول بازه‌ای که تابع در آن ثابت می‌باشد، ۶ است.

۴) تابع در بازهٔ $[۱,۵]$ صعودی می‌باشد.

۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۳ & ; x\ge ۰\\ x^۲ & ; x<۰\end{cases}$ تابعی:

۱) اکیداً نزولی است. ۲) اکیداً صعودی است. ۳) غیریکنوا ولی یک‌به‌یک است. ۴) غیریکنوا و غیر یک‌به‌یک است.

۳۱- کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & ; x\le ۰\\ \sqrt{x-۱} & ; x\ge ۱\end{cases}$ صحیح است؟

۱) تابع در دامنهٔ f اکیداً صعودی است.

۲) تابع در دامنهٔ f صعودی است.

۳) تابع در دامنهٔ f اکیداً نزولی است.

۴) تابع در دامنهٔ f نزولی است.

۳۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & ; \frac{\pi}{۲}\le x<\pi\\ \cos x & ; \pi\le x<\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$:

۱) نزولی است. ۲) صعودی است. ۳) غیریکنوا ولی یک‌به‌یک است. ۴) غیریکنوا و غیر یک‌به‌یک است.

۳۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}-2x-3$ با دامنهٔ $\{x:|x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) نزولی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) منفی

۳۴- نمودار تابع $y=\dfrac{|x|}{x^{2}}$:

۱) اکیداً یکنوا است.
۲) در $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.
۳) در $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی و در $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است.
۴) یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نیست.

۳۵- تابع $y=x|x|$: برگرفته از کتاب درسی

۱) در فاصلهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی و در $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است.
۲) در فاصلهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً نزولی و در $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی است.
۳) در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.
۴) در کل $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

۳۶- اگر $f+g$ و $g-f$ توابعی صعودی در $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع زیر نیز حتماً در $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$

۳۷- تابع $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=x+|x|$ به ترتیب: ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) اکیداً صعودی و صعودی غیر اکید هستند.
۲) اکیداً صعودی و اکیداً صعودی هستند.
۳) صعودی غیر اکید و اکیداً صعودی هستند.
۴) صعودی غیر اکید و صعودی غیر اکید هستند.

۳۸- اگر تابع $f(x)=x^{2}+6x-7$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) 1 ۴) صفر

۳۹- حدود a برای آن‌که تابع $y=(a-2)x^{2}-x$ در فاصلهٔ $[1,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\geq\frac{5}{2}$ ۲) $2<a\leq\frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

۴۰- اگر بازهٔ $(-\infty,-1]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $y=kx^{2}+\frac{8}{k}x+c$ در آن اکیداً صعودی است، k کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) ±2 ۴) 1

۴۱- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع درجه دوم $y=ax^{2}+bx+c$ در آن صعودی می‌باشد، $(-\infty,3]$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(1,-6)$ ۲) $(-2,12)$ ۳) $(-3,12)$ ۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

۴۲- بازهٔ $[2,+\infty)$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x)=ax^{2}+2x+1$ در آن نزولی است. در این صورت نمودار f خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳- تابع $f=\{(a^{2},b),(a+b,2b-1),(2,a-1)\}$ تابعی هم صعودی و هم نزولی است. مجموع اعضای دامنهٔ f، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۴۴- اگر تابع $f=\{(-1,3),(4,8),(3,m^{2}-1),(5,14)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $2\leq|m|\leq3$ ۲) $2<|m|<3$ ۳) $3<|m|<8$ ۴) $8<|m|<14$

۴۵- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & ; x\geq6\\ a\times3^{x} & ; x\leq1\end{cases}$ به ازای چند مقدار صحیح a، صعودی اکید است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۶- تابع $f(x)=2|x-4|+a(x+2)$ صعودی اکید است. حدود a کدام است؟

۱) $a>4$ ۲) $a>-2$ ۳) $a>-4$ ۴) $a>2$

۴۷- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=|x+1|+|x-3|$ در آن نزولی است، کدام است؟

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(-\infty,3]$ ۳) $[-1,3]$ ۴) این تابع هیچ‌گاه نزولی نمی‌شود.

۴۸- در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|+|x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار $g(x)=2x^{2}-x-10$ در چند نقطه مشترک هستند؟ تجربی داخل ۹۷

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۴۹- تابع f صعودی بوده و از مبدأ مختصات می‌گذرد. دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq0\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) D_f

۵۰- تابع f، صعودی اکید بوده و $f(۲)=۰$ است. دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{(x+۳)f(۵-x)}$ کدام است؟

۱) $[-۳,۲]$ ۲) $[-۳,۳]$ ۳) $[۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۵۱- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & ; x<k\\ x^۲+x & ; x\ge k\end{cases}$ صعودی اکید است. حداقل مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۱

درسنامه ۳

ترکیب دو تابع به‌صورت ضابطه‌ای

ترکیب دو تابع f و g به‌صورت $(fog)(x)$ یا $f(g(x))$، یعنی این‌که در تابع $f(x)$ به جای همهٔ xها، $g(x)$ را قرار دهیم. مثلاً اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^۲$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))\xlongequal{g(x)=x^۲}f(x^۲)\xlongequal[\text{قرار می‌دهیم } x^۲]{\text{به‌جای xها در تابع f،}}۲(x^۲)+۱=۲x^۲+۱$$

به‌طور مشابه اگر بخواهیم $(gof)(x)$ یا $g(f(x))$ را بیابیم، در تابع $g(x)$، به‌جای تمام xها، $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))\xlongequal{f(x)=۲x+۱}g(۲x+۱)\xlongequal[\text{قرار می‌دهیم } ۲x+۱]{\text{به‌جای xها در تابع g،}}(۲x+۱)^۲=۴x^۲+۴x+۱$$

تذکر از این به بعد هر وقت صحبت از ترکیب دو تابع مثل $f(g(۵))$ شد، سریع دوتا فلش می‌کشیم و ورودی و خروجی تابع‌های f و g را مشخص می‌کنیم. نگاه کنید:

$$f(g(۵)):\ \underset{\text{ورودی g}}{۵}\xrightarrow{g}\underset{\text{ورودی f}}{g(۵)}\xrightarrow{f}f(g(۵))$$

ابتدای فلش‌ها یعنی ورودی و انتهای فلش‌ها یعنی خروجی تابعی که بالای فلش‌ها نوشته‌ایم.

سؤال *دانش‌پژوه (اکرم مهتابی):* **آقا اجازه! یعنی الان $g(۵)$ که اون وسط گیر کرده، هم انتهای فلش اولیه و هم ابتدای فلش دومی! قضیه چیه؟**

پاسخ *ببین خانم، به نکتهٔ خوبی اشاره کردی، $g(۵)$ چون انتهای فلش اولی است میشه خروجی تابع g و چون ابتدای فلش دومی است میشه ورودی تابع f. یعنی در ترکیب دو تابع همواره خروجی تابع اولی به عنوان ورودی برای تابع بعدی محسوب می‌شه و باید حتماً در دامنهٔ اون تابع قرار داشته باشه وگرنه ترکیب دو تابع غلط میشه.*

مثال اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، مقدار $(gof)(\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۱

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ **راه اول:**

$$(gof)(\frac{\pi}{۴})=g(f(\frac{\pi}{۴}))\xlongequal[\text{قرار می‌دهیم } \frac{\pi}{۴}\text{ به‌جای x،}]{f(x)=\sin x}g(\sin(\frac{\pi}{۴}))=g(\frac{\sqrt{۲}}{۲})\xlongequal[\text{قرار می‌دهیم } \frac{\sqrt{۲}}{۲}\text{ به‌جای x،}]{g(x)=x\sqrt{۱-x^۲}}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\cancel{\sqrt{۲}}}{۲}\times\frac{۱}{\cancel{\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{۲}$$

راه دوم: سریع دوتا فلش می‌کشیم و کار را ادامه می‌دهیم:

$$\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{f(x)=\sin x}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\xrightarrow{g(x)=x\sqrt{۱-x^۲}}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}\xlongequal{\text{طبق محاسبهٔ فوق}}\frac{۱}{۲}$$

مثال در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{۱-x}} & ; x<۱\\ ۲x-\frac{۳}{۴} & ; x\ge ۱\end{cases}$، مقدار $(fof)(\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ چون تابع f دوضابطه‌ای است، باید حواسمان باشد که ورودی تابع f، در شرط کدام ضابطه، صدق می‌کند ($x<۱$ یا $x\ge ۱$)؟ بنابراین:

$$\frac{۳}{۴}\xrightarrow[f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x}}]{\frac{۳}{۴}<۱\Rightarrow\text{ وارد ضابطهٔ بالایی می‌شود.}}\frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow[f(x)=۲x-\frac{۳}{۴}]{\frac{۳}{۲}\ge۱\Rightarrow\text{ وارد ضابطهٔ پایینی می‌شود.}}۲(\frac{۳}{۲})-\frac{۳}{۴}=۳-\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

ترکیب دو تابع از روی زوج‌مرتب‌ها

اگر $(a,b)\in g$ و $(b,c)\in f$ باشد و بخواهیم fog را بسازیم، سریع دوتا فلش به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم:

$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \qquad a \xrightarrow{fog} c$$

در این‌صورت زوج مرتب (a,c) عضو تابع fog خواهد بود. در حقیقت فقط ابتدا و انتهای مسیر مهم است. مثل جابه‌جایی در فیزیک!

سؤال *دانش‌پژوه (لیلا سیام)*: **آقا اجازه، چرا اول تابع g رو روی فلش گذاشتین؟**

پاسخ *ببین در تابع fog خب اول عدد وارد تابع g میشه و بعد وارد تابع f میشه. مثلاً اگه تابع gof رو می‌خواستیم اول تابع f رو روی فلش قرار می‌دادیم و بعد تابع g رو.*

مثال **اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۲,۴)\}$ باشد، تابع fog را بیابید.**

پاسخ

$$۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \qquad ۱ \xrightarrow{fog} ۳$$

$$\Rightarrow fog=\{(۱,۳)\}$$

$۲ \xrightarrow{g} ۴$ ۴ نمی‌تواند وارد تابع f شود چون در دامنهٔ f قرار ندارد.

مثال **اگر $f=\{(۵,۲),(۰,۳),(۴,۵),(۱,۶)\}$ و $g(x)=x-\sqrt{x+۲}$ باشد، از رابطهٔ $f(g(a))+g(f(۵))=۵$ عدد a کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ ابتدا $g(f(۵))$ را حساب کرده و در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$g(f(۵)) \xrightarrow[۵ \xrightarrow{f} ۲]{(۵,۲)\in f} g(۲) \xrightarrow{g(x)=x-\sqrt{x+۲}} ۲-\sqrt{۲+۲}=۲-\sqrt{۴}=۲-۲=۰ \quad (*)$$

بنابراین:

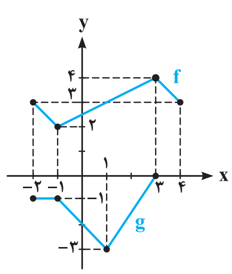
$$f(g(a))+g(f(۵))=۵ \xrightarrow{(*)} f(g(a))+۰=۵ \Rightarrow f(g(a))=۵$$

از طرفی با توجه به تابع f می‌دانیم $f(۴)=۵$. پس داریم:

$$\begin{cases} f(g(a))=۵ \\ f(۴)=۵ \end{cases} \Rightarrow g(a)=۴ \xrightarrow{g(x)=x-\sqrt{x+۲}} a-\sqrt{a+۲}=۴$$

به جای حل کردن معادلهٔ فوق، کافی است گزینه‌ها را به جای a در معادلهٔ فوق قرار دهیم که در این‌صورت $a=۷$ جواب است.

۵۲- با توجه به نمودار توابع f و g، حاصل $\dfrac{(fog)(-۱)+(gof)(-۲)}{(fof)(۳)}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) صفر

۴) $-\frac{۳}{۲}$

۵۳- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۵),(۱,۰),(۴,۱)\}$ باشد، تابع $fof-gof$ کدام است؟

۱) $\{(-۲,۱),(۱,-۲)\}$ ۲) $\{(۱,-۲)\}$ ۳) $\{(-۲,۱)\}$ ۴) $\{(۲,۵),(۱,-۲)\}$

۵۴- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f=\{(x,۲x-۱)\mid x\in A\}$، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟ تجربی داخل ۸۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۵- توابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند، اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۴,۵)$ ۳) $(۴,۳)$ ۴) $(۵,۴)$

۵۶- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g(f(a))=۵$ باشد، عدد a کدام است؟ تجربی داخل ۹۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۷- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \ x\geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & ; \ x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(-۲,۳),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟ ریاضی خارج ۹۳ با تغییر

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۸- اگر $fog=\{(۱,۲),(-۱,۳),(-۲,۱)\}$ و $g=\{(۱,۰),(-۱,۲),(-۲,۵)\}$ باشد، حاصل $\frac{(fof)(۰)}{f(۵)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) -۳ ۴) ۲

۵۹- اگر $f=\{(-۱,۲),(۰,۱),(۱,۴)\}$ و $fog=\{(-۲,۲),(-۱,۱),(۰,۴)\}$ باشد، $g(g(۰)-۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۰- اگر $f(x)=\sqrt{۱+x}$ و $g=\{(-۲,۰),(-۱,۱),(۰,۲),(۱,۴)\}$ باشد، تابع gof کدام است؟

۱) $\{(-۱,۱),(۰,۴),(۳,۰)\}$ ۲) $\{(۲,-۱),(۴,۰)\}$

۳) $\{(-۱,۲),(۰,۴)\}$ ۴) $\{(-۲,۱),(-۱,\sqrt{۲}),(۰,\sqrt{۳}),(۱,\sqrt{۵})\}$

۶۱- اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ باشد، حاصل $(fog)(x)$ کدام است؟ $(x\neq -۱)$

۱) x ۲) $-x$ ۳) ۱ ۴) -۱

۶۲- اگر $f(x)=۳x+a$، $g(x)=۲-x$ و $(fog)(x)-(gof)(x)=۶$، a چه‌قدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۳- اگر $f(x)=۲x+۲a$، $g(x)=x^۲+bx+c$ و $(fog)(x)=۲x^۲+x+۱$، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۳

۶۴- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$ باشد، حاصل $(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

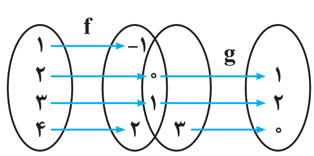
۶۵- اگر $f(\frac{۱}{x})=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}$ و $g(x)=۲\cos^۲ x$، مقدار $(fog)(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۲

۶۶- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $g(x)=\tan x$، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ برابر کدام است؟ تجربی داخل ۸۰

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۶۷- با توجه به شکل مقابل، تابع gof کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



۱) $\{(۱,-۱),(۴,۲)\}$

۲) $\{(۲,۱),(۳,۲)\}$

۳) $\{(۴,۲),(۳,۰),(۱,-۱)\}$

۴) $\{(۴,۰),(۱,۱),(۳,۲)\}$

۶۸- اگر $f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}$، مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۸

۱) تعریف نشده ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۶۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & ; \ x>۳ \\ ۲x+۳ & ; \ x\leq ۳\end{cases}$، مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۰- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=\frac{x}{۱-x}$، آن‌گاه $(fog)(\sqrt{۲})$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.) تجربی داخل ۸۶

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۷۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲[x]$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}))$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.) تجربی خارج ۹۰

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

۷۲- اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^۴ x$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ تجربی خارج ۹۲ با تغییر

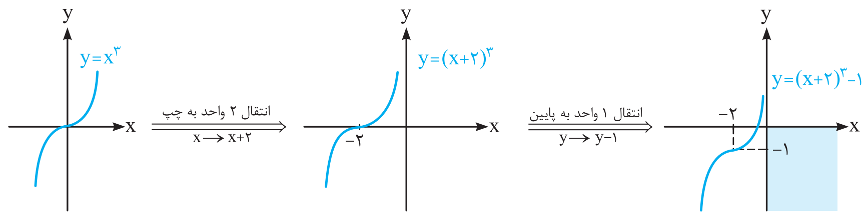
۱) $-\sin^۲ x\cos^۲ x$ ۲) $\frac{۱}{۴}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)^۲$ ۳) $-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)^۲$

۷۳- اگر $f(x)=|x|-x$، ضابطهٔ تابع $(fof)(x)$ برابر کدام است؟ تجربی داخل ۸۳

۱) x ۲) $|x|$ ۳) $x+|x|$ ۴) صفر

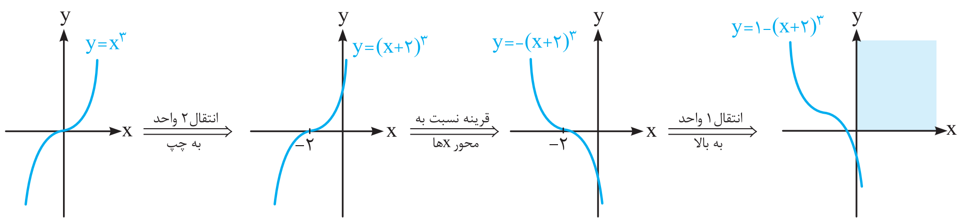
پاسخ تشریحی

۱ **۴**

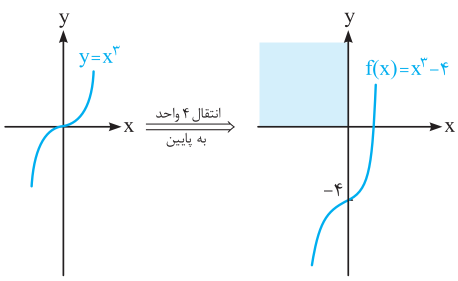


۲ **۳** دامنهٔ تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. هم‌چنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. پس گزینهٔ (۲) صحیح و گزینهٔ (۳) نادرست است. با رسم توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌توان درستی گزینه‌های (۱) و (۴) را نیز نشان داد:

رسم $g(x)$:



رسم $f(x)$:



۳ **۳** بررسی گزینه‌ها:

$$1)\ y=(x-1)^3 \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-(x-1)^3 \xRightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x-1)^3 \Rightarrow y=(x+1)^3 \quad \times$$

$$2)\ y=(x+1)^3 \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-(x+1)^3 \xRightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x+1)^3 \Rightarrow y=(x-1)^3 \quad \times$$

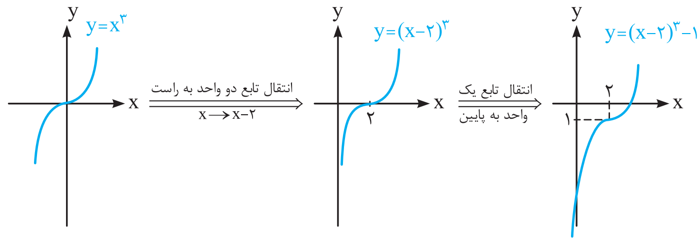
$$3)\ y=x^3 \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-x^3 \xRightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x)^3 \Rightarrow y=x^3 \quad \checkmark$$

$$4)\ y=x^2 \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-x^2 \xRightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x)^2 \Rightarrow y=-x^2 \quad \times$$

۴ **۲**

$$y=x^3-6x^2+12x-9=x^3-6x^2+12x-8-1=(x-2)^3-1$$

حال به کمک نمودار $y=x^3$ تابع موردنظر را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است، این نمودار از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند.

۵ ۴

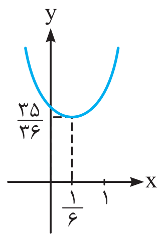
$$(g+f)(x)=g(x)+f(x)=-(x-\frac{۱}{۳})^{۳}-\frac{۲۸}{۲۷}+x^{۳}+۲=-(x^{۳}-x^{۲}+\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۲۷})-\frac{۲۸}{۲۷}+x^{۳}+۲$$

$$=-\cancel{x^{۳}}+x^{۲}-\frac{۱}{۳}x+\underbrace{\frac{۱}{۲۷}-\frac{۲۸}{۲۷}}_{-۱}+\cancel{x^{۳}}+۲=x^{۲}-\frac{۱}{۳}x+۱$$

برای رسم این تابع نقطهٔ رأس آن را می‌یابیم:

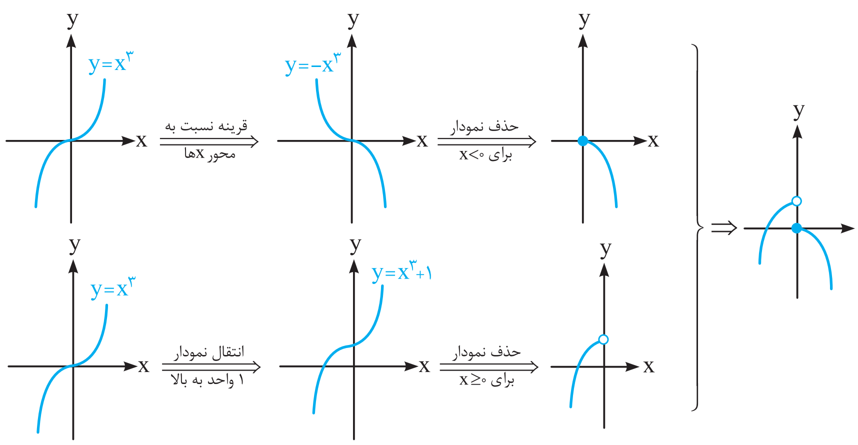
$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-\frac{۱}{۳}}{۲(۱)}=\frac{۱}{۶}\ ,\ y_S=(\frac{۱}{۶})^{۲}-\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۶})+۱=\frac{۱}{۳۶}-\frac{۱}{۱۸}+۱=\frac{۳۵}{۳۶}$$

پس نمودار تابع به صورت زیر است:



$\Rightarrow$ نمودار این تابع از ربع‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند.

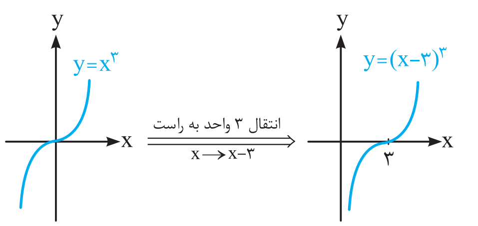
۶ ۳



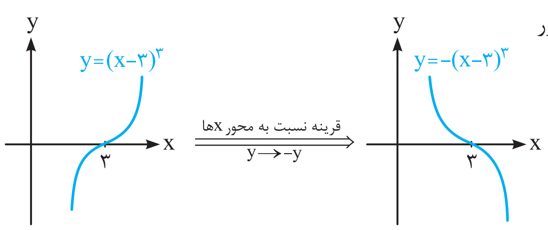
$\Rightarrow$ گزینه (۳) صحیح است.

۷ ۳

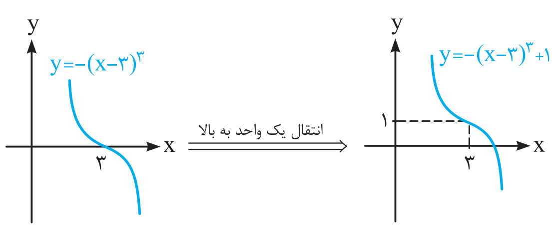
با توجه به نمودار داده‌شده و گزینه‌ها، مشخص است که نمودار داده‌شده مربوط به یک تابع درجه ۳ می‌باشد. مشخص است که نمودار اولیهٔ $y=x^{۳}$، ۳ واحد به راست انتقال یافته است. داریم:



هم‌چنین با توجه به نمودار داده‌شده مشخص است که تابع نسبت به محور xها قرینه شده است:

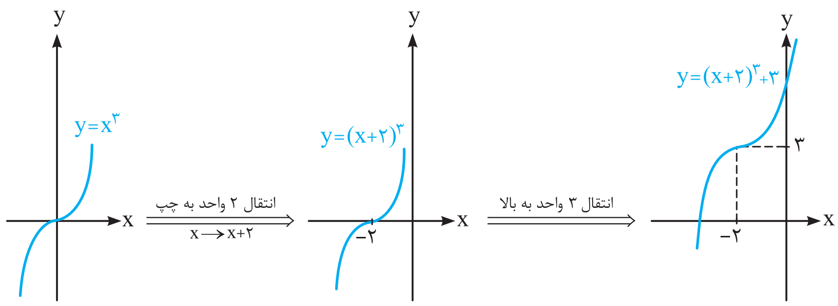


در نهایت نمودار یک واحد به بالا برده شده است:



می‌دانیم $-(x-۳)^{۳}=(۳-x)^{۳}$ پس ضابطهٔ داده شده در گزینهٔ (۳) صحیح است.

۸ **۳** نمودار تابع داده‌شده از انتقال نمودار تابع $y=x^۳$ به اندازهٔ دو واحد به چپ و سه واحد به بالا حاصل شده است:



با مقایسهٔ $y=(x-a)^۳+b$ و $y=(x+۲)^۳+۳$ نتیجه می‌گیریم: $b=۳$ و $a=-۲$ بنابراین $a+b=(-۲)+۳=۱$.

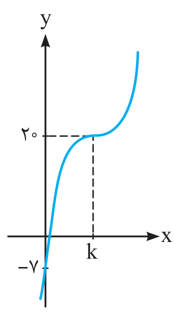
۹ **۱** با توجه به نمودار، مشخص است که نمودار فوق مربوط به تابع $y=-(x+۱)^۳+۱$ می‌باشد. داریم:

$$y=-(x+۱)^۳+۱=-(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)+۱=-x^۳-۳x^۲-۳x-۱+۱=-x^۳-۳x^۲-۳x \Rightarrow y=-x(x^۲+۳x+۳)$$

با مقایسهٔ y با $f(x)=(a-x)(x^۲+bx+c)$ و برابر قرار دادن ضرایب متناظر داریم:

$$a=۰\ ,\ b=۳\ ,\ c=۳ \Rightarrow a+b+c=۰+۳+۳=۶$$

۱۰ **۴** با توجه به نمودار، داده شده مشخص است که $f(۰)=-۷$. پس:



$$f(۰)=-۷ \Rightarrow -۷=۰^۳-۹(۰)^۲+a(۰)+b \Rightarrow b=-۷ \Rightarrow f(x)=x^۳-۹x^۲+ax-۷$$

از طرفی با توجه به شکل داده‌شده مشخص است که نمودار فوق به صورت $y=(x-k)^۳+۲۰$ می‌باشد. داریم:

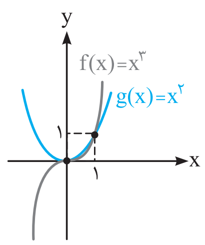
$$y=(x-k)^۳+۲۰ \Rightarrow y=x^۳-۳kx^۲+۳k^۲x-k^۳+۲۰$$

تمام ضرایب دو تابع $f(x)$ و y باید با هم برابر باشند پس:

ضریب ثابت: $-k^۳+۲۰=-۷ \Rightarrow -k^۳=-۲۷ \Rightarrow k^۳=۲۷ \Rightarrow k=۳$

ضریب x: $۳k^۲=a \xRightarrow{k=۳} a=۳(۳)^۲=۲۷ \Rightarrow a+b=۲۷+(-۷)=۲۰$

۱۱ **۲** کافی است نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنیم:



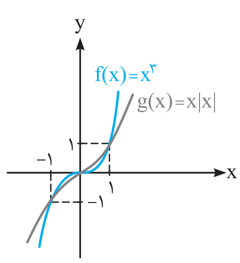
با توجه به نمودار مشخص است که نمودار $f(x)$ فقط به ازای $x>۱$، بالاتر از نمودار $g(x)$ قرار دارد. ⇐

۱۲ **۲**

یادآوری برای رسم توابع شامل قدرمطلق، بهتر است با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق آن را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای نوشته و سپس آن را رسم نماییم.

$$g(x)=x\underbrace{|x|}_{x=۰\ :\ \text{ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق}} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} x(x) & ;\ x\geq ۰ \\ x(-x) & ;\ x<۰ \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} x^۲ & ;\ x\geq ۰ \\ -x^۲ & ;\ x<۰ \end{cases}$$

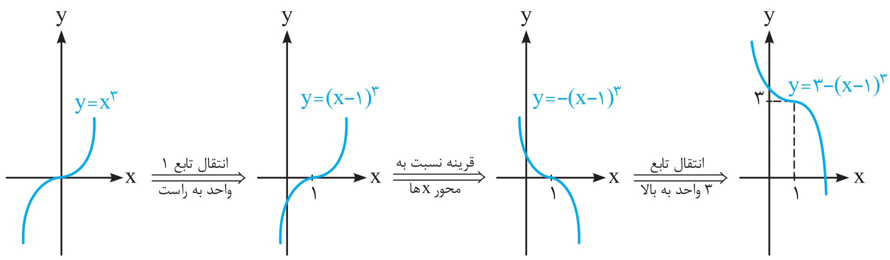
می‌دانیم به ازای $۰<x<۱$، $x^۲>x^۳$، همچنین به ازای $-۱<x<۰$ داریم:



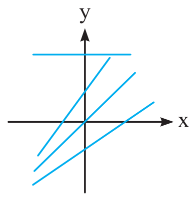
$$-۱<x<۰ \xRightarrow{\times x^۲} -x^۲<x^۳<۰ \Rightarrow$$ در فاصلهٔ $(-۱,۰)$ نمودار $x^۳$ بالاتر از نمودار $-x^۲$ قرار می‌گیرد

پس با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مشخص است که در بازه‌های $(۰,۱)$ و $(-\infty,-۱)$ نمودار $f(x)$ پایین‌تر از $g(x)$ قرار دارد.

۱۳ ۳

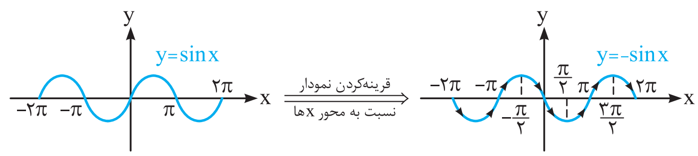


خط $y = a^۲x + b$ خطی با شیب نامنفی است که فرم کلی آن به صورت



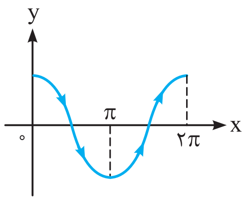
می‌باشد. در هر حالت، این خطوط و تابع فوق، تنها یک نقطهٔ برخورد با یک‌دیگر دارند.

۱۴ ۳ با رسم نمودار $f(x) = -\sin x$ و استفاده از فلش‌ها، بازه یا بازه‌های اکیداً صعودی را می‌یابیم:



با توجه به گزینه‌ها مشخص است که تابع در بازهٔ $\left[-\pi,-\frac{\pi}{۲}\right]$ اکیداً صعودی است.

۱۵ ۲ نمودار تابع $y = \cos x$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت مقابل است:



بنابراین تابع $y = \cos x$ در فاصلهٔ $(۰,\pi)$ نزولی و در فاصلهٔ $(\pi,۲\pi)$ صعودی است. نمودار تابع $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{۳}\right)$ با انتقال تابع $y = \cos x$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به راست حاصل می‌شود. پس ابتدا و انتهای بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد نیز به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به راست حرکت می‌کنند:

$$\begin{cases} \text{سر بازه}: \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳} \\ \text{انتهای بازه}: ۲\pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۷\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \text{بازهٔ صعودی بودن}: \left(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۷\pi}{۳}\right)$$

۱۶ ۴ با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه‌ای که در تابع در آن صعودی می‌باشد $[-۳,۳]$ است.

سؤال دانش‌پژوه *(اصغر بالازاده)*: **آقا اشتباه نکردید! جواب $[-۱,۲]$ نمیشه؟!**

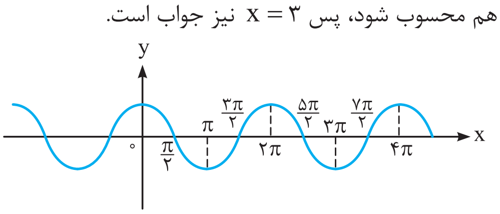
پاسخ *درود بر تو! معلومه خوب درسنامه رو نخوندی. پس دقت کن در بازهٔ $[-۱,۲]$ تابع اکیداً صعودی هست. از ما بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع توی اون صعودی هست رو خواسته. در این حالت باید جاهایی که تابع ثابت هم هست جزء جواب باشه. پس بزرگ‌ترین بازهٔ صعودی $[-۳,۳]$ میشه. تو در واقع بزرگ‌ترین بازه‌ای رو پیدا کردی که تابع توش اکیداً صعودیه.*

۱۷ ۳ با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی می‌باشد، $[-۵,-۱]$ است. همچنین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد، $[-۳,۳]$ است، بنابراین اجتماع این دو بازه، $[-۵,۳]$ می‌شود.

۱۸ ۲ با توجه به نمودار تنها در $x = ۵$ است که نمودار تابع، قبل از این نقطه اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی می‌باشد. دقت کنید، در نقاط دیگر مثلاً $x = -۳$ قبل از آن تابع اکیداً نزولی است اما بعد از آن ثابت است.

۱۹ ۳ تابع قبل از $x = ۲$ صعودی و بعد از آن ثابت می‌باشد. چون تابع ثابت، تابعی نزولی نیز محسوب می‌شود. پس $x = ۲$ جواب است. همچنین قبل از $x = ۳$ تابع ثابت و بعد از آن نزولی است. چون تابع ثابت، می‌تواند صعودی هم محسوب شود، پس $x = ۳$ نیز جواب است.

۲۰ ۲ نمودار $f(x) = \cos x$ به صورت مقابل است:



رابطهٔ داده‌شده بیانگر این است که در کدام بازه، تابع اکیداً نزولی می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها بازهٔ $(۲\pi,۳\pi)$ جواب است.

۲۱ | ۲ بررسی گزاره‌ها:

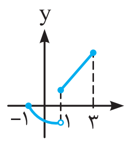
الف) هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک‌به‌یک است، زیرا داریم:

به ازای هیچ x_1 و x_2 متمایزی $f(x_1)=f(x_2)$ نمی‌شود $\Rightarrow f: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$ اکیداً صعودی

به ازای هیچ x_1 و x_2 متمایزی $f(x_1)=f(x_2)$ نمی‌شود. $\Rightarrow f: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow$ اکیداً نزولی

پس (الف) صحیح است.

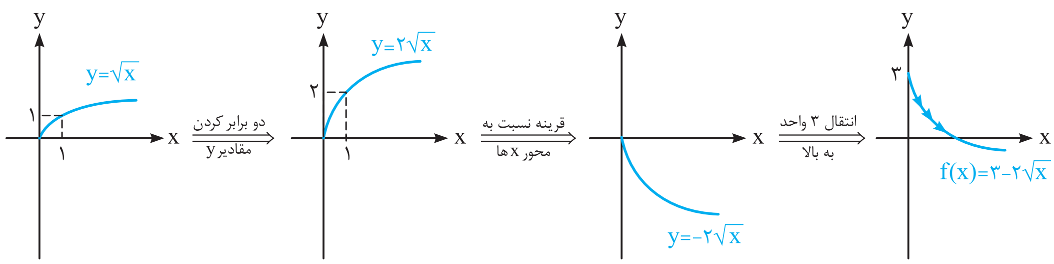
ب) این گزاره الزاماً صحیح نیست. مثلاً اگر نمودار f به صورت



باشد، این تابع یک‌به‌یک است، ولی اکیداً یکنوا نیست. زیرا در فاصلهٔ $(-۱,۱]$ اکیداً نزولی و در فاصلهٔ $[۱,۳]$ اکیداً صعودی است.

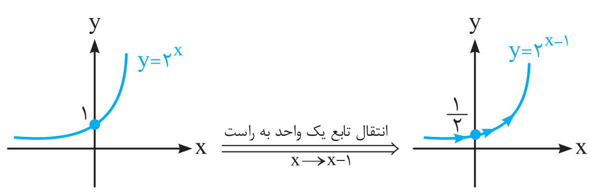
پ) تابع ثابت تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. پس این گزینه نادرست است. دقت کنید اگر بیان می‌شد «تابعی که هم اکیداً صعودی و هم اکیداً نزولی باشد، وجود ندارد.» آن‌گاه این گزاره صحیح بود.

۲۲ | ۲ نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار مشخص است که تابع فوق اکیداً نزولی می‌باشد.

۲۳ | ۱ تابع $y=۲^{x-۱}$ را از روی تابع $y=۲^x$ رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از نمودار مشخص است، این تابع همواره صعودی است.

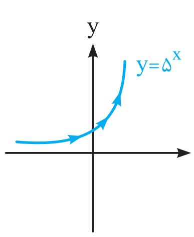
۲۴ | ۴ می‌دانیم تابع $y=a^x$ به ازای $۰ \le a \le ۱$ نزولی است.

سؤال دانش‌پژوه (وحید رحیمیان): **آقا نباید $۰<a<۱$ باشه؟**

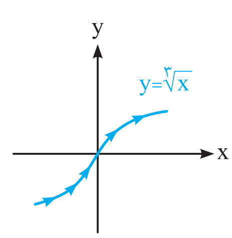
پاسخ *ببین اگه بخواهیم تابع اکیداً نزولی باشه حرفت درسته؛ ولی وقتی $a=۱$ یا $a=۰$ تابع به تابعی ثابت تبدیل می‌شه که هم نزولی و هم صعودیه.*

$$۰ \le a \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \frac{m+۲}{۳} \le ۱ \Rightarrow ۰ \le m+۲ \le ۳ \Rightarrow -۲ \le m \le ۱$$

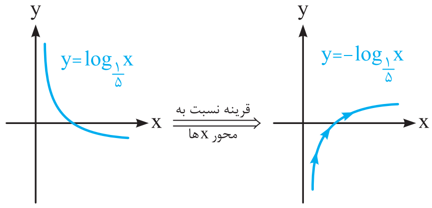
۲۵ | ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) 

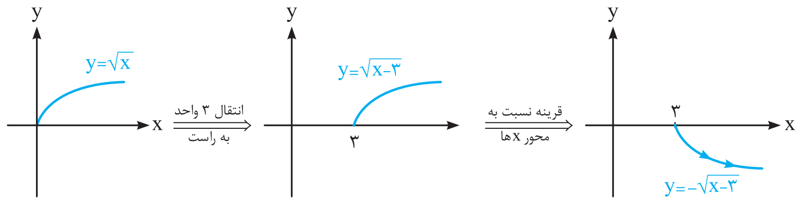
$\Rightarrow$ همواره صعودی ×

۲) 

$\Rightarrow$ همواره صعودی ×

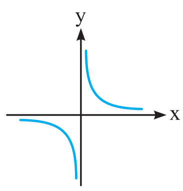
۳) 

$\Rightarrow$ همواره صعودی ×

۴) 

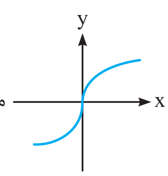
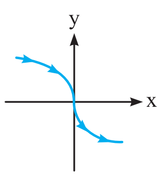
$\Rightarrow$ همواره نزولی $\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) جواب است.

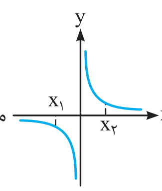
۲۶ | ۳ نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ به صورت مقابل است:



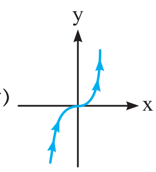
همان‌طور که از نمودار مشخص است این تابع در بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است. پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

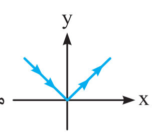
۲۷ | ۲ **بررسی توابع داده‌شده:**

الف) نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ به صورت  می‌باشد. پس نمودار $y=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$ به صورت  بوده و اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی) است.

ب) نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ به صورت  می‌باشد. این تابع برخلاف ظاهرش که به نظر اکیداً نزولی می‌رسد، اکیداً نزولی نیست.

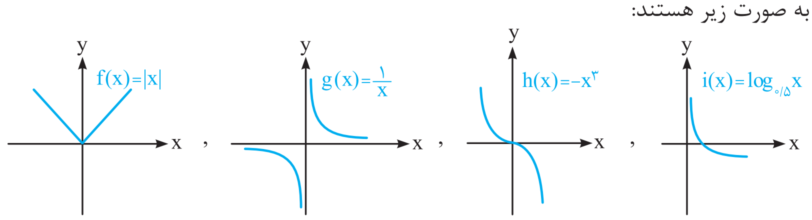
زیرا با توجه به شکل $x_1<x_2$ می‌باشد، ولی $f(x_1)<f(x_2)$ است (در حالی‌که باید $f(x_1)>f(x_2)$ می‌شد). پس این تابع در دامنه‌اش یکنوا نیست.

پ) نمودار $y=x^3$ به صورت  (تابع لُر) می‌باشد که اکیداً صعودی و در نتیجه اکیداً یکنواست.

ت) نمودار $y=|x|$ به صورت  می‌باشد که مشخص است اکیداً یکنوا نیست. (ابتدا نزولی و سپس صعودی است.)

پس دو تابع از توابع فوق، اکیداً یکنوا بودند.

۲۸ | ۱ نمودار توابع داده شده به صورت زیر هستند:



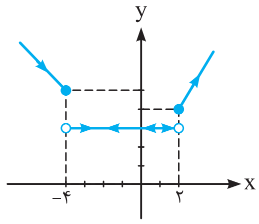
غیریک‌به‌یک و غیریکنوا ، یک‌به‌یک ولی غیریکنوا ، یکنوا و نزولی ، یکنوا و نزولی در فاصلهٔ $(0,+\infty)$

بنابراین توابع موردنظر $g(x)=\frac{1}{x}$ (یک‌به‌یک و غیریکنوا) و $h(x)=-x^3$ (در کل $\mathbb{R}$ نزولی) هستند. داریم:

$$h(x)+g(x)=-x^3+\frac{1}{x}\xRightarrow{x=2}\text{حاصل}=-2^3+\frac{1}{2}=-8+0/5=-7/5$$

۲۹ **۲** ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس گزینه‌ها را بررسی می‌نماییم:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & ; \quad x\le -4\\ 3 & ; \quad -4<x<2\\ 3x-2 & ; \quad x\ge 2\end{cases} \Rightarrow$$



بررسی گزینه‌ها:

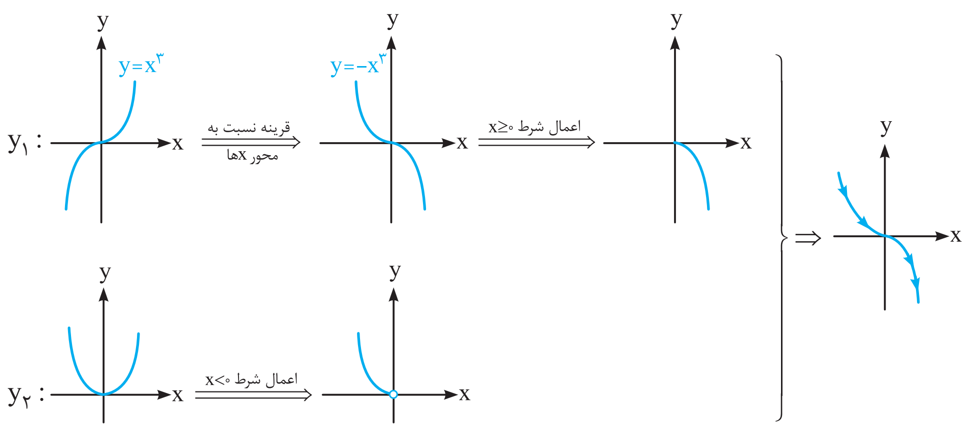
۱) با توجه به نمودار، مشخص است که تابع در فاصلهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲) با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,-4]$ اکیداً نزولی است. اما در بازهٔ $(-\infty,2)$ نزولی می‌باشد. پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است $(-\infty,2)$ می‌باشد و این گزینه نادرست است.

۳) طول بازهٔ ثابت، $2-(-4)=6$ می‌باشد.

۴) با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-4,+\infty)$ صعودی می‌باشد. پس در بازهٔ $[1,5]$ نیز صعودی است.

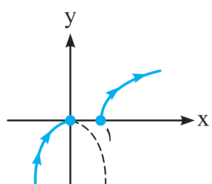
۳۰ **۱** توابع $y_1=-x^3$ و $y_2=x^2$ را رسم کرده و سپس آن‌ها را در بازه‌های خواسته شده، برش می‌زنیم:



نمودار فوق بیانگر تابعی اکیداً نزولی است.

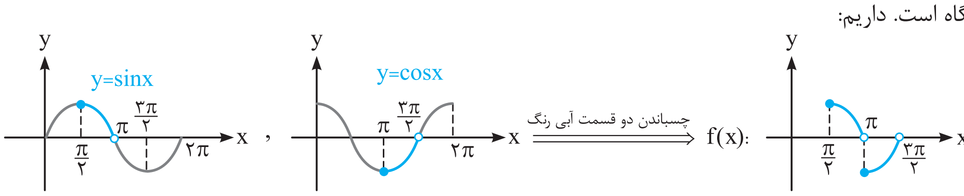
۳۱ **۲**

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ \sqrt{x-1} & x\ge 1\end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به نمودار مشخص است که تابع f در دامنهٔ تعریف خود، تابعی صعودی است. اما چون $f(0)=f(1)=0$، پس تابع طبق تعریف، اکیداً صعودی نبوده و تنها صعودی است.

۳۲ **۳** راحت‌ترین کار برای رسم تابع $f(x)$، رسم توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ و بریدن قسمت‌های موردنظر و رسم آن‌ها در یک دستگاه است. داریم:

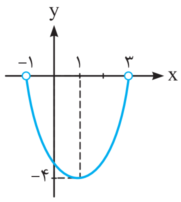


با توجه به نمودار، مشخص است که تابع $f(x)$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{2},\pi)$ نزولی و در بازهٔ $[\pi,\frac{3\pi}{2})$ صعودی است، پس یکنوا نیست. همچنین مشخص است که این تابع یک‌به‌یک است (هیچ خطی موازی محور xها نمی‌توان یافت که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نماید.) پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳۳ **۴** ابتدا دامنهٔ تابع را به صورت مرتب‌تر یافته و سپس تابع را در دامنهٔ داده شده رسم می‌کنیم.

$$D_f : |x-۱|<۲ \Rightarrow -۲<x-۱<۲ \Rightarrow -۱<x<۳$$

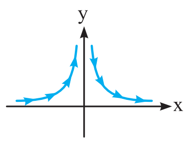
$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱) \Rightarrow$$



با توجه به این‌که نمودار تابع در فاصلهٔ $(-۱،۳)$ زیر محور xها قرار دارد، این تابع در دامنهٔ خود همواره منفی است.

۳۴ **۳**

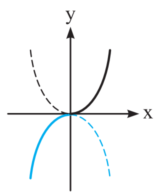
$$y=\frac{|x|}{x^۲}=\begin{cases}\frac{x}{x^۲} & ; x>۰ \\ \frac{-x}{x^۲} & ; x<۰\end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ; x>۰ \\ -\frac{۱}{x} & ; x<۰\end{cases} \xRightarrow{\text{رسم تابع}}$$



این تابع در بازهٔ $(-\infty,۰)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی می‌باشد.

۳۵ **۳** بهترین روش برای معلوم کردن وضعیت توابع شامل قدرمطلق، نوشتن آن‌ها به صورت چندضابطه‌ای و رسم آن‌ها می‌باشد. داریم:

$$y=x|x|=\begin{cases}x^۲ & ; x\geq ۰ \\ -x^۲ & ; x<۰\end{cases} \xRightarrow{\text{رسم}}$$



با توجه به نمودار فوق، مشخص است که $y=x|x|$ در کل دامنه‌اش ($\mathbb{R}$) تابعی اکیداً صعودی می‌باشد.

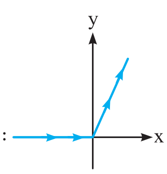
۳۶ **۲** می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است. پس:

$$\underbrace{(f+g)}_{\text{صعودی}}+\underbrace{(g-f)}_{\text{صعودی}}=۲\underbrace{g}_{\text{صعودی}} \Rightarrow \text{تابعی صعودی است. } g$$

دقت کنید که ضرب کردن عددی مثبت در ضابطهٔ یک تابع یکنوا تأثیری در یکنوایی آن ندارد.

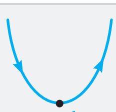
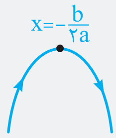
۳۷ **۱** تابع $f(x)=x+[x]$ از مجموع دو تابع $y_۱=[x]$ و $y_۲=x$ حاصل شده است. تابع $y_۱=[x]$ تابعی صعودی (غیر اکید) و تابع $y_۲=x$ تابعی اکیداً صعودی هستند. طبق نکات درسنامه می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی و اکیداً صعودی یک تابع اکیداً صعودی است، پس $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. برای مشخص کردن وضعیت تابع $g(x)=x+|x|$ بهتر است از رسم استفاده کنیم، زیرا تابع $y=|x|$ تابعی نه صعودی و نه نزولی است و از نکات درسنامه نمی‌توان به نتیجهٔ خاصی رسید:

$$g(x)=x+|x| \Rightarrow g(x)=\begin{cases}x+x & ; x\geq ۰ \\ x-x & ; x<۰\end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases}۲x & ; x\geq ۰ \\ ۰ & ; x<۰\end{cases} \Rightarrow \text{رسم تابع :}$$



با توجه به شکل مشخص است که $g(x)$ تابعی صعودی (غیر اکید) است. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۳۸ **۱**

> **نکته** در تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$، با توجه به علامت a دو حالت زیر را داریم:
>
> الف) $a>۰:$
>
> 
>
>
> $$\Rightarrow \underbrace{\left(-\infty,-\frac{b}{۲a}\right]}_{\text{بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است.}} \quad , \quad \underbrace{\left[-\frac{b}{۲a},+\infty\right)}_{\text{بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است.}}$$
>
> ب) $a<۰:$
>
> 
>
>
> $$\Rightarrow \underbrace{\left(-\infty,-\frac{b}{۲a}\right]}_{\text{بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است.}} \quad , \quad \underbrace{\left[-\frac{b}{۲a},+\infty\right)}_{\text{بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است.}}$$

با توجه به نکتهٔ فوق، چون در تابع $f(x)=x^۲+۶x-۷$، $a=۱>۰$ می‌باشد، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، به صورت $\left(-\infty,-\frac{۶}{۲}\right]=(-\infty,-۳]$ می‌باشد. پس بیشترین مقدار a، برابر -۳ است.

۳۹ | **۱** دقت کنید برای این‌که تابع $y=(a-۲)x^{۲}-x$ در فاصلهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد، باید ضریب $x^{۲}$ (در این‌جا $a-۲$) مثبت باشد، پس:

$$a-۲>۰\Rightarrow a>۲\quad (I)$$

هم‌چنین نقطهٔ رأس سهمی نباید در بازهٔ $(۱,+\infty)$ باشد، پس $-\frac{b}{۲a}\le ۱$:

$$\frac{۱}{۲(a-۲)}\le ۱\xRightarrow{a>۲} ۲(a-۲)\ge ۱\Rightarrow a\ge\frac{۵}{۲}\quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $a\ge\frac{۵}{۲}$ می‌رسیم.

۴۰ | **۲** ابتدا طول نقطهٔ رأس تابع را می‌یابیم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{\frac{-۸}{k}}{۲k}=-\frac{۴}{k^{۲}}$$

با توجه به بازهٔ داده‌شده، داریم:

$$-\frac{۴}{k^{۲}}=-۱\Rightarrow k^{۲}=۴\Rightarrow k=\pm ۲$$

اما طبق نکتهٔ بیان‌شده در تست‌های قبل می‌دانیم اگر $a<۰$ باشد، تابع در بازهٔ $\left(-\infty,-\frac{b}{۲a}\right]$ اکیداً صعودی خواهد بود. پس تنها $k=-۲$ قابل‌قبول است.

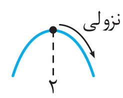
۴۱ | **۲** یک‌سر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع درجه دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ در آن صعودی (نزولی) باشد، نقطهٔ رأس می‌باشد. پس ابتدا طول نقطهٔ رأس را می‌یابیم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}\xRightarrow[\text{است } (-\infty,۳]]{\text{بزرگ‌ترین بازهٔ صعودی}}-\frac{b}{۲a}=۳\Rightarrow b=-۶a$$

دقت کنید؛ چون تابع در بازهٔ $(-\infty,۳]$ صعودی می‌باشد، پس فرم کلی آن به صورت  می‌باشد و لذا $a<۰$ است. پس تنها گزینهٔ (۲) با توجه به رابطهٔ $b=-۶a$ و شرط $a<۰$، می‌تواند جواب باشد.

۴۲ | **۳** چون $[۲,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $y=ax^{۲}+۲x+۱$ در آن نزولی می‌باشد، پس:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}\xRightarrow[\text{ضابطهٔ تابع}]{\text{با توجه به}}\frac{-۲}{۲(a)}\xRightarrow[\text{بازهٔ } [۲,+\infty)]{\text{با توجه به}}۲\Rightarrow\frac{-۲}{۲a}=۲\Rightarrow -۲=۴a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$



تذکر اگر a مثبت به دست می‌آمد، مسأله جواب نداشت، زیرا حالت (الف) نکتهٔ بیان‌شده در تست‌های قبل رخ می‌داد که در $[۲,+\infty)$ نمی‌تواند نزولی باشد!

در ادامه تعداد نقاط برخورد سهمی f با خط $y=x$ را می‌خواهیم، لذا باید معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$ax^{۲}+۲x+۱=x\xRightarrow{a=-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}x^{۲}+x+۱=۰\Rightarrow\Delta>۰\Rightarrow \text{معادله ۲ جواب متمایز دارد.}$$

بنابراین سهمی در ۲ نقطه، خط $y=x$ را قطع می‌کند.

۴۳ | **۴** چون تابع f تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد، پس f تابع ثابت است. در تابع ثابت تمام مقادیر برد، یکسان هستند. پس داریم:

$$b=۲b-۱\Rightarrow b=۱\,,\ a-۱=b\xRightarrow{b=۱}a-۱=۱\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow D_f=\{۲^{۲},۲+۱,۲\}=\{۴,۳,۲\}\Rightarrow \text{مجموع اعضای دامنه}=۲+۳+۴=۹$$

۴۴ | **۲** با توجه به این‌که f تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-۱<۳<۴\Rightarrow f(-۱)<f(۳)<f(۴)\Rightarrow ۳<m^{۲}-۱<۸\Rightarrow ۴<m^{۲}<۹\Rightarrow ۲<|m|<۳$$

۴۵ | **۱** دقت کنید؛ اگر یک تابع چندضابطه‌ای، صعودی اکید باشد، حتماً باید در تمام زیربازه‌های موجود، ضابطه‌های تعریف‌شده، خود صعودی اکید باشند.

با توجه به این امر، اگر $a\le ۰$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ پایین صعودی اکید نیست. پس $a>۰$.

هم‌چنین حداکثر مقدار ضابطهٔ پایین باید از حداقل مقدار ضابطهٔ بالا کم‌تر باشد. می‌دانیم حداقل مقدار $\sqrt[۳]{x}$ به‌ازای $x\ge ۶$، برابر $\sqrt[۳]{۶}$ می‌باشد. هم‌چنین حداکثر مقدار $a\times ۳^{x}$ در بازهٔ $x\le ۱$ به‌ازای $x=۱$ حاصل می‌شود. پس داریم:

$$a\times ۳^{۱}<\sqrt[۳]{۶}\Rightarrow ۳a<\sqrt[۳]{۶}\Rightarrow a<\frac{\sqrt[۳]{۶}}{۳}$$

با توجه به دو شرط $a>۰$ و $a<\frac{\sqrt[۳]{۶}}{۳}$، نتیجه می‌گیریم که هیچ مقدار صحیحی برای a یافت نمی‌شود.

۴۶ **۴** ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

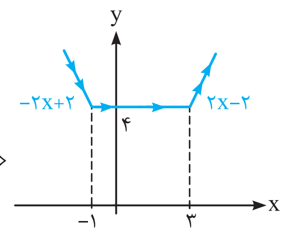
$$f(x)=\begin{cases}۲(x-۴)+a(x+۲) & ; x\ge ۴\\ ۲(۴-x)+a(x+۲) & ; x<۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(۲+a)x+۲a-۸ & ; x\ge ۴\\ (a-۲)x+۲a+۸ & ; x<۴\end{cases}$$

اگر تابع دوضابطه‌ای f صعودی‌اکید باشد، هر یک از ضابطه‌ها باید بیانگر تابعی صعودی‌اکید در آن ضابطه باشند. می‌دانیم توابع خطی صعودی اکید هستند، اگر شیب خط مثبت باشد. پس:

$$\begin{cases}۲+a>۰\Rightarrow a>-۲\\ a-۲>۰\Rightarrow a>۲\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}} a>۲$$

۴۷ **۲** ابتدا تابع را به کمک پیدا کردن ریشه‌های قدرمطلق‌ها و حالت‌بندی رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-(x+۱)-(x-۳) & ; x<-۱\\ x+۱-(x-۳) & ; -۱\le x<۳\\ x+۱+x-۳ & ; x\ge ۳\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & ; x<-۱\\ ۴ & ; -۱\le x<۳\\ ۲x-۲ & ; x\ge ۳\end{cases}\xRightarrow{\text{رسم}}$$

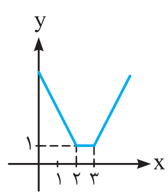


با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی می‌باشد، بازهٔ $(-\infty,۳]$ می‌باشد.

۴۸ **۱** ابتدا تابع را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و با رسم آن می‌یابیم در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است:

$$f(x)=|x-۲|+|x-۳|\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-۲+x-۳ & ; x\ge ۳\\ x-۲-(x-۳) & ; ۲\le x<۳\\ -(x-۲)-(x-۳) & ; x<۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۲x-۵ & ; x\ge ۳\\ ۱ & ; ۲\le x<۳\\ -۲x+۵ & ; x<۲\end{cases}$$



پس مشخص شد که تابع به ازای $x<۲$ با ضابطهٔ $-۲x+۵$ اکیداً نزولی می‌باشد. برای به دست آوردن نقاط مشترک با $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، معادلهٔ $۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵$ را با شرط $x<۲$ حل می‌کنیم:

$$۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵\Rightarrow ۲x^۲+x-۱۵=۰$$

$$\xRightarrow{\Delta=۱-۴(۲)(-۱۵)=۱۲۱} x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۲۱}}{۲(۲)}=\frac{-۱\pm ۱۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵ \text{ یا } x=\frac{-۱۲}{۴}=-۳$$

با توجه به شرط $x<۲$، تنها جواب $x=-۳$ قابل قبول می‌باشد و گزینهٔ (۱) جواب تست است.

۴۹ **۴** چون تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $f(۰)=۰$ و چون تابع صعودی است به‌ازای $x\ge ۰$، $f(x)\ge ۰$ و به‌ازای $x<۰$، $f(x)\le ۰$ می‌شود. داریم:

$x\in D_f$		۰	
x	−		+
$f(x)$	−		+
$xf(x)$	+		+

پس با توجه به جدول تعیین علامت می‌توان گفت عبارت زیر رادیکال به‌ازای تمام $x\in D_f$، همواره نامنفی است. پس دامنهٔ تابع $g(x)$ با دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر است.

سؤال *دانش‌پژوه (رادوین بابایی)*: **آقا ببخشید مگه به‌ازای تمام xها، عبارت زیر رادیکال نامنفی نشد؟! پس $D_g=\mathbb{R}$ می‌شه.**

پاسخ *درود بر $\mathbb{R}$! ببین دانش‌پژوه! درسته ما جدول تعیین علامت کشیدیم و همه‌چی به خوبی پیش رفت ولی دقت کن تمام این موارد به ازای $x\in D_f$ درسته. یعنی اگه جاهایی باشه که $f(x)$ تعریف‌نشده باشه، اون‌وقت توی اون جاها $xf(x)$ هم تعریف‌نشده است. پس در اصل صحبت کلی ما روی D_f هست نه $\mathbb{R}$.*

۵۰ **۲** تابع $f(x)$ تابعی صعودی بوده و $f(۲)=۰$ می‌باشد. بنابراین به‌ازای $x>۲$، $f(x)$ مثبت و به‌ازای $x<۲$، $f(x)$ منفی می‌باشد. با توجه به صعودی بودن f، دو حالت زیر را برای $f(۵-x)$ داریم:

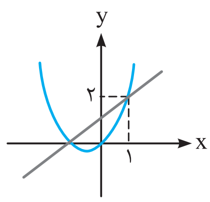
$$(۱):\ f(۵-x)>۰ \xRightarrow{f(۲)=۰} f(۵-x)>f(۲) \xRightarrow{\text{صعودی } f} ۵-x>۲ \Rightarrow x<۳$$

$$(۲):\ f(۵-x)<۰ \xRightarrow{f(۲)=۰} f(۵-x)<f(۲) \xRightarrow{\text{صعودی } f} ۵-x<۲ \Rightarrow x>۳$$

دقت کنید به ازای $x=۳$، $f(۵-x)=f(۲)=۰$ می‌شود. حال به کمک جدول تعیین علامت، علامت عبارت زیر رادیکال را می‌یابیم:

x		-۳		۳	
$x+۳$	$-$	۰	$+$		$+$
$f(۵-x)$	$+$		$+$	۰	$-$
$(x+۳)f(۵-x)$	$-$	۰	$+$ جواب	۰	$-$

با توجه به جدول تعیین علامت فوق، مشخص است که تابع y، تنها در بازهٔ $[-۳,۳]$ تعریف‌شده است.



۵۱ **۴** رأس سهمی $y=x^۲+x$، $x=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. داریم:

با توجه به شکل مقابل، اگر $k\geq ۱$ باشد، $f(x)$ صعودی اکید خواهد شد. پس کم‌ترین (حداقل) مقدار برای k، عدد ۱ می‌باشد.

۵۲ **۲** با توجه به نمودار توابع f و g داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(-۱)=۲\\ (gof)(-۲)=g(f(-۲))=g(۳)=۰\\ (fof)(۳)=f(f(۳))=f(۴)=۳\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{(fog)(-۱)+(gof)(-۲)}{(fof)(۳)}=\frac{۲+۰}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۵۳ **۲** ابتدا توابع fof و gof را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$fof:\begin{cases}۱\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{f}۳\\ ۲\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{f}۴\\ ۳\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{f}f(۴)\ \text{:وجود ندارد}\end{cases}\quad \Rightarrow fof=\{(۱,۳),(۲,۴)\}\qquad (*)$$

$$gof:\begin{cases}۱\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g}۵\\ ۲\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}g(۳)\ \text{:وجود ندارد}\\ ۳\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}۱\end{cases}\quad \Rightarrow gof=\{(۱,۵),(۳,۱)\}\qquad (**)$$

حال دامنهٔ تابع $fof-gof$ را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{fof-gof}=D_{fof}\cap D_{gof}=\{۱,۲\}\cap\{۱,۳\}=\{۱\}$$

در نتیجه تابع $fof-gof$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(fof-gof)(۱)=(fof)(۱)-(gof)(۱)\xlongequal{(**)\,,\,(*)}۳-۵=-۲\Rightarrow fof-gof=\{(۱,-۲)\}$$

۵۴ **۳** با توجه به مجموعهٔ A، تابع f را به‌صورت زوج مرتبی به‌دست می‌آوریم:

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\Rightarrow f=\{(x,۲x-۱)\mid x\in A\}=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷),(۵,۹)\}$$

حال تابع $f(f(x))$ یا همان $(fof)(x)$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۱\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{f}۱\\ ۲\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{f}۵\\ ۳\xrightarrow{f}۵\xrightarrow{f}۹\\ ۴\xrightarrow{f}۷\xrightarrow{f}f(۷)\ \text{:وجود ندارد}\\ ۵\xrightarrow{f}۹\xrightarrow{f}f(۹)\ \text{:وجود ندارد}\end{cases}\quad \Rightarrow fof=\{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۹)\}$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی است.

۵۵ **۲**

$$f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}\ ,\ g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$$

$$(۴,۱)\in gof \Rightarrow g(f(۴))=۱ \xrightarrow[(۴,۵)\in f \Rightarrow f(۴)=۵]{\text{با توجه به تابع } f} g(۵)=۱ \Rightarrow (۵,۱)\in g$$

با توجه به زوج‌های مرتب موجود در تابع g می‌توان نتیجه گرفت:

$$(b,۱)=(۵,۱)\Rightarrow b=۵$$

و تابع g برابر می‌شود با:

$$g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(۵,۱)\} \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$(۴,۲)\in fog \Rightarrow f(g(۴))=۲ \ :\ ۴ \xrightarrow{g} g(۴) \xrightarrow{f} ۲$$

با توجه به تعریف تابع fog، $x=۴$ باید عضو دامنهٔ تابع g (یعنی عضو $D_g=\{۱,۳,a,۵\}$) باشد. پس باید $a=۴$ باشد و در نتیجه $(a,b)=(۴,۵)$.

۵۶ **۴**

$$g(f(a))=۵ \Rightarrow (f(a),۵)\in g \xrightarrow[\text{مرتب‌های تابع } g]{\text{مقایسه با زوج}} (f(a),۵)=(۶,۵)\Rightarrow f(a)=۶$$

از طرفی با توجه به آن‌که ضابطهٔ تابع $f(x)$ داده شده است، $f(a)$ را یافته و برابر ۶ قرار می‌دهیم:

$$f(a)=۶ \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x}} a+\sqrt{a}=۶ \Rightarrow \sqrt{a}=۶-a \xrightarrow[۶-a\ge ۰]{\text{به توان ۲}} a=(۶-a)^۲ \Rightarrow a=۳۶+a^۲-۱۲a \Rightarrow a^۲-۱۳a+۳۶=۰$$

$$\Rightarrow (a-۴)(a-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ a=۹\ (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

$a=۹$ غیرقابل قبول است زیرا به‌ازای آن تساوی $a+\sqrt{a}=۶$ برقرار نمی‌شود، پس $a=۴$ است.

تذکر برای یافتن جواب معادلهٔ $a+\sqrt{a}=۶$ کافی است از گزینه‌ها کمک بگیریم. فقط گزینهٔ (۴) یعنی عدد ۴ در معادله صدق می‌کند. پس همین گزینه جواب است و نیازی به حل معادله نیست!

$$۴+\sqrt{۴}=۶ \Rightarrow ۴+۲=۶ \Rightarrow ۶=۶ \quad \checkmark$$

۵۷ **۱** **راه اول:**

$$g(f(a))=۳ \Rightarrow (f(a),۳)\in g \xrightarrow{\text{مقایسه با زوج مرتب‌های تابع } g} (f(a),۳)=(-۲,۳) \Rightarrow f(a)=-۲ \qquad (*)$$

حال با توجه به ضابطهٔ f، $f(a)$ را یافته و برابر -۲ قرار می‌دهیم:

اگر $a\ge ۰$ باشد $\Rightarrow f(a)=\underbrace{\sqrt{a}}_{\text{نامنفی}} \overset{(*)}{=} \underbrace{-۲}_{\text{منفی}} \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

اگر $a<۰$ باشد $\Rightarrow f(a)=-\sqrt{-a} \overset{(*)}{=} -۲ \Rightarrow \sqrt{-a}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} -a=۴ \Rightarrow a=-۴$

راه دوم (روش تستی): بعد از آن‌که فهمیدیم $f(a)=-۲$، کافی است اعداد داده شده در گزینه‌ها را در تابع f با توجه به شرط دامنه قرار داده و ببینیم جواب کدامشان -۲ می‌شود که گزینهٔ (۱) صحیح است:

$$\text{گزینهٔ (۱)}: a=-۴<۰ \xrightarrow{\text{ضابطهٔ پایینی } f} -\sqrt{-(-۴)}=-\sqrt{۴}=-۲ \ \checkmark$$

۵۸ **۱** با توجه به توابع fog و g داریم:

$$fog=\{(۱,۲),(-۱,۳),(-۲,۱)\} \Rightarrow \begin{cases} (fog)(۱)=۲ \Rightarrow f(g(۱))=۲ \xrightarrow{(۱,۰)\in g \Rightarrow g(۱)=۰} f(۰)=۲ \\ (fog)(-۱)=۳ \Rightarrow f(g(-۱))=۳ \xrightarrow{(-۱,۲)\in g \Rightarrow g(-۱)=۲} f(۲)=۳\ (*) \\ (fog)(-۲)=۱ \Rightarrow f(g(-۲))=۱ \xrightarrow{(-۲,۵)\in g \Rightarrow g(-۲)=۵} f(۵)=۱ \end{cases}$$

حال حاصل عبارت مورد نظر را با توجه به رابطهٔ $(*)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{(fof)(۰)}{f(۵)}=\frac{f(f(۰))}{f(۵)} \overset{(*)}{=} \frac{f(۲)}{۱}=\frac{۳}{۱}=۳$$

۵۹ **۱** با توجه به توابع fog و f داریم:

$$fog=\{(-۲,۲),(-۱,۱),(۰,۴)\}\Rightarrow\begin{cases}(fog)(-۲)=۲\Rightarrow f(g(-۲))=۲\xRightarrow{(-۱,۲)\in f\Rightarrow f(-۱)=۲}g(-۲)=-۱\\(fog)(-۱)=۱\Rightarrow f(g(-۱))=۱\xRightarrow{(۰,۱)\in f\Rightarrow f(۰)=۱}g(-۱)=۰\\(fog)(۰)=۴\Rightarrow f(g(۰))=۴\xRightarrow{(۱,۴)\in f\Rightarrow f(۱)=۴}g(۰)=۱\end{cases}$$

حال عبارت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$g(g(۰)-۲)\xlongequal{g(۰)=۱}g(۱-۲)=g(-۱)=۰$$

۶۰ **۳** خروجی تابع f یعنی $\sqrt{۱+x}$، به عنوان ورودی تابع g (یعنی دامنهٔ تابع g) محسوب می‌شود پس کافی است $\sqrt{۱+x}$ را مساوی تک‌تک اعضای دامنهٔ g قرار دهیم:

$\underbrace{\sqrt{۱+x}}_{\oplus \text{ یا صفر}}=\underbrace{-۱}_{\ominus}$ معادله جواب ندارد. و $\underbrace{\sqrt{۱+x}}_{\oplus \text{ یا صفر}}=\underbrace{-۲}_{\ominus}$ معادله جواب ندارد.

$\sqrt{۱+x}=۱\xRightarrow{\text{توان ۲}}۱+x=۱\Rightarrow x=۰$ و $\sqrt{۱+x}=۰\xRightarrow{\text{توان ۲}}۱+x=۰\Rightarrow x=-۱$

با جایگذاری جواب‌های به‌دست آمده در رابطهٔ (*) داریم:

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in[-۱,+\infty)\mid x\in\{-۱,۰\}\}=\{-۱,۰\}$$

بنابراین با توجه به دامنهٔ به‌دست آمده، تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=-۱:(gof)(-۱)=g(f(-۱))\xlongequal{f(x)=\sqrt{۱+x}}g(\sqrt{۱+(-۱)})=g(۰)\xlongequal{(۰,۲)\in g}۲\\x=۰:(gof)(۰)=g(f(۰))\xlongequal{f(x)=\sqrt{۱+x}}g(\sqrt{۱+۰})=g(۱)\xlongequal{(۱,۴)\in g}۴\end{cases}\Rightarrow gof=\{(-۱,۲),(۰,۴)\}$$

تمرین اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g=\{(-۲,۰),(-۱,۱),(۰,۲),(۱,۴)\}$ باشد، تابع fog را بیابید.

پاسخ

$$-۲\xrightarrow{g}۰\xrightarrow{f}\sqrt{۱-۰}=۱\ \checkmark\quad,\quad ۰\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}\sqrt{۱-۲}=\sqrt{-۱}\ \times$$

$$-۱\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}\sqrt{۱-۱}=۰\ \checkmark\quad,\quad ۱\xrightarrow{g}۴\xrightarrow{f}\sqrt{۱-۴}=\sqrt{-۳}\ \times$$

$$\Rightarrow fog=\{(-۲,۱),(-۱,۰)\}$$

۶۱ **۲**

$$(fog)(x)=f(g(x))\xlongequal{g(x)=\frac{x-۱}{x+۱}}f\Big(\underbrace{\frac{x-۱}{x+۱}}_{\text{جایگذاری به جای x در ضابطهٔ f}}\Big)=\frac{\frac{x-۱}{x+۱}+۱}{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}=\frac{\frac{x-۱+x+۱}{\cancel{x+۱}}}{\frac{x-۱-(x+۱)}{\cancel{x+۱}}}=\frac{۲x}{-۲}=-x$$

۶۲ **۳**

$$(*)\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))\xlongequal{g(x)=۲-x}f(\underbrace{۲-x}_{\text{جایگذاری به جای x در ضابطهٔ f}})\xlongequal{f(x)=۳x+a}۳(۲-x)+a=-۳x+۶+a\\(gof)(x)=g(f(x))\xlongequal{f(x)=۳x+a}g(\underbrace{۳x+a}_{\text{جایگذاری به جای x در ضابطهٔ g}})\xlongequal{g(x)=۲-x}۲-(۳x+a)=-۳x+۲-a\end{cases}$$

با جایگذاری توابع به‌دست آمده در معادلهٔ داده شده در صورت تست داریم:

$$(fog)(x)-(gof)(x)=۶\xRightarrow{(*)}(-۳x+۶+a)-(-۳x+۲-a)=۶\Rightarrow\cancel{-۳x}+۶+a\cancel{+۳x}-۲+a=۶$$

$$\Rightarrow ۴+۲a=۶\Rightarrow ۲a=۲\Rightarrow a=۱$$

۶۳ **۱** ابتدا با توجه به ضابطه‌های توابع $f(x)$ و $g(x)$، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))\xlongequal{g(x)=x^۲+bx+c}f(x^۲+bx+c)\xlongequal{f(x)=۲x+۲a}۲(x^۲+bx+c)+۲a=۲x^۲+۲bx+۲c+۲a$$

از طرفی طبق فرض تست $(fog)(x)=۲x^۲+x+۱$ است، بنابراین داریم:

$$۲x^۲+۲bx+(۲c+۲a)=۲x^۲+x+۱$$

برای آن‌که تساوی فوق به‌ازای هر x برقرار باشد، باید ضرایب $x^۲$، ضرایب x و اعداد ثابت در دو طرف تساوی با هم برابر باشند. لذا:

$$\begin{cases}۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\\ ۲c+۲a=۱\xRightarrow{\div ۲} c+a=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow b+c+a=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

۶۴ **۱** ابتدا ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(x)=|x|\\ g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=f((x+۱)^۲)=|(x+۱)^۲|\xlongequal{(x+۱)^۲\geq ۰}(x+۱)^۲ \qquad (*)\\ (gof)(x)=g(f(x))=g(|x|)=(|x|+۱)^۲ \qquad (**)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}(fog)(۱-\sqrt{۲})\xlongequal{(*)}((۱-\sqrt{۲})+۱)^۲=(۲-\sqrt{۲})^۲=۴-۴\sqrt{۲}+۲=۶-۴\sqrt{۲}\\ (gof)(۱-\sqrt{۲})\xlongequal{(**)}(|۱-\sqrt{۲}|+۱)^۲\xlongequal{۱-\sqrt{۲}<۰}(-(۱-\sqrt{۲})+۱)^۲=(-۱+\sqrt{۲}+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=(۶-۴\sqrt{۲})-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۶۵ **۳**

$$(fog)(\frac{\pi}{۳})=f(g(\frac{\pi}{۳}))\xlongequal{g(x)=۲\cos^۲ x}f(۲\cos^۲\frac{\pi}{۳})=f(۲(\frac{۱}{۲})^۲)=f(۲(\frac{۱}{۴}))=f(\frac{۱}{۲})$$

حال با توجه به ضابطهٔ $f(\frac{۱}{x})=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}$، برای محاسبهٔ $f(\frac{۱}{۲})$ کافی است در این ضابطه به جای x، عدد ۲ قرار دهیم. لذا داریم:

$$f(\frac{۱}{x})=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}\xRightarrow{x=۲}f(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۲(۲)-۱}{۲^۲}}=\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow(fog)(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

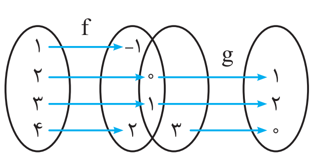
۶۶ **۳** ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ را با توجه به محدودهٔ x داده شده یعنی بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ می‌یابیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))\xlongequal[f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}]{g(x)=\tan x}f(\tan x)=\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{|\cos x|}}$$

جایگذاری به جای x در ضابطهٔ f

$$\xlongequal[\text{ناحیهٔ ۲ و ۳} : \cos x<۰]{\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}}\frac{\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{۱}{-\cancel{\cos x}}}=-\sin x\Rightarrow(fog)(x)=-\sin x$$

۶۷ **۲** برای حل این سؤال کافی است، ابتدا و انتهای مسیرهایی که از ۲ فلش تشکیل شده است را بنویسیم:



$$\begin{matrix}۲\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{g}۱ : (۲,۱)\in gof\\ ۳\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{g}۲ : (۳,۲)\in gof\end{matrix}\Rightarrow gof=\{(۲,۱),(۳,۲)\}$$

سؤال *دانش‌پژوه (زهرا خالقی):* **آقا چرا $۱\xrightarrow{f}-۱$ و $۴\xrightarrow{f}۲$ را اصلاً در نظر نگرفتی گناه دارنا.**

پاسخ *ببین در $(۱\xrightarrow{f}-۱)$، عدد خروجی f، عدد ۱- است که چون توی دامنهٔ g قرار نداره نمی‌تونه وارد تابع g بشه! در مورد $(۴\xrightarrow{f}۲)$ نیز قضیه به‌همین ترتیبه. کلن زوج‌های مرتبی از f رو در نظر می‌گیریم که خروجی f توی دامنهٔ g باشه و بتونه وارد تابع g بشه.*

۶۸ **۱**

$$f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}\Rightarrow f(-۱)=\sqrt{۲-(-۱)-(-۱)^۲}=\sqrt{۲+۱-۱}=\sqrt{۲}\quad(*)$$

$$\Rightarrow f(f(-۱))\xlongequal{(*)}f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-۲}=\sqrt{\underbrace{-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}}$$:تعریف‌نشده

۶۹ | ۴

$$\begin{cases} f(5) \xrightarrow[\text{ضابطهٔ بالایی}]{5>3} 5-\sqrt{5+4}=5-\cancel{\sqrt{9}}^{\,3}=2 \Rightarrow f(f(5))=f(2) \xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایینی}]{2<3} 2(2)+3=7 \\ f(1) \xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایینی}]{1<3} 2(1)+3=5 \Rightarrow f(f(1))=f(5)=2 \end{cases} \Rightarrow f(f(5))+f(f(1))=7+2=9$$

۷۰ | ۱

$$fog(\sqrt{2})=f(g(\sqrt{2})) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در } g \text{ به جای } x\text{، } \sqrt{2}} f\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در } f \text{ به جای } x\text{، } \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}} \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج}} \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2})^2}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}+2}{\underbrace{1-2}_{-1}}\right]=[-\sqrt{2}-2] \xrightarrow{\sqrt{2}\simeq 1/4} [-1/4-2]=[-3/4]=-4$$

۷۱ | ۲

$$f(x)=x^2-2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2[\sqrt{3}]=3-2=1 \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}f(\sqrt{3})\right) \xrightarrow{f(\sqrt{3})=1} f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-2(-1)=2/25$$

۷۲ | ۱

$$fog(x)=f(g(x)) \xrightarrow{g(x)=\sin^4 x} f(\sin^4 x)=\sin^4 x-\sqrt{\sin^4 x}=\sin^4 x-\sin^2 x=\sin^2 x\,(\underbrace{\sin^2 x-1}_{-\cos^2 x})=-\sin^2 x\cos^2 x$$

ترفندویژه با قرار دادن $x=\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=f\left(\sin^4\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}$$

به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ فقط گزینهٔ (۱) برابر $-\frac{1}{4}$ می‌شود!

۷۳ | ۴

$$fof(x)=f(f(x))=f(|x|-x)=||x|-x|-(|x|-x)$$

می‌دانیم $|x|\ge x$ است، پس $|x|-x\ge 0$ می‌باشد، بنابراین $||x|-x|=|x|-x$ بوده و داریم:

$$fof(x)=|\cancel{x}|-\cancel{x}-|\cancel{x}|+\cancel{x}=0$$

ترفندویژه

فرض می‌کنیم: $x=1 \Rightarrow f(f(1)) \xrightarrow[f(1)=|1|-1=0]{f(x)=|x|-x} f(0)=|0|-0=0 \Rightarrow$ فقط گزینهٔ (۴) به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود.

۷۴ | ۱

$$\begin{cases} f(x)=x^2+3x \\ g(x)=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Rightarrow gof(x) \xrightarrow[f(x) \text{ قرار می‌دهیم.}]{\text{به جای } x\text{، در تابع } g\text{،}} -\frac{1}{2}f(x)+2=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2 \quad (*)$$

برای آن که تابع gof در بالای محور xها قرار گیرد، باید مقدار آن را مثبت قرار دهیم. داریم:

$$gof(x)>0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود.}]{\times(-2)} \underbrace{x^2+3x-4}_{(x+4)(x-1)}<0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{به کمک جدول}} -4<x<1$$

۷۵ | ۳ با فرض $f(x)=2x-2$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$، خروجی در شکل همان تابع $(gof)(x)$ است. بنابراین داریم:

جایگذاری به جای x در ضابطهٔ g

$$\text{خروجی}=(gof)(x)=g(f(x)) \xrightarrow{g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+1} \xrightarrow[\text{خروجی}=\frac{4}{3}]{\text{طبق فرض}} \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+1}=\frac{4}{3}$$

با کمی دقت در معادلهٔ فوق، متوجه می‌شویم که اگر $f(x)=4$ باشد، تساوی برقرار می‌شود. از طرفی $f(x)=2x-2$ است. لذا:

$$2x-2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$