به نام پروردگار مهربان

مهروماه

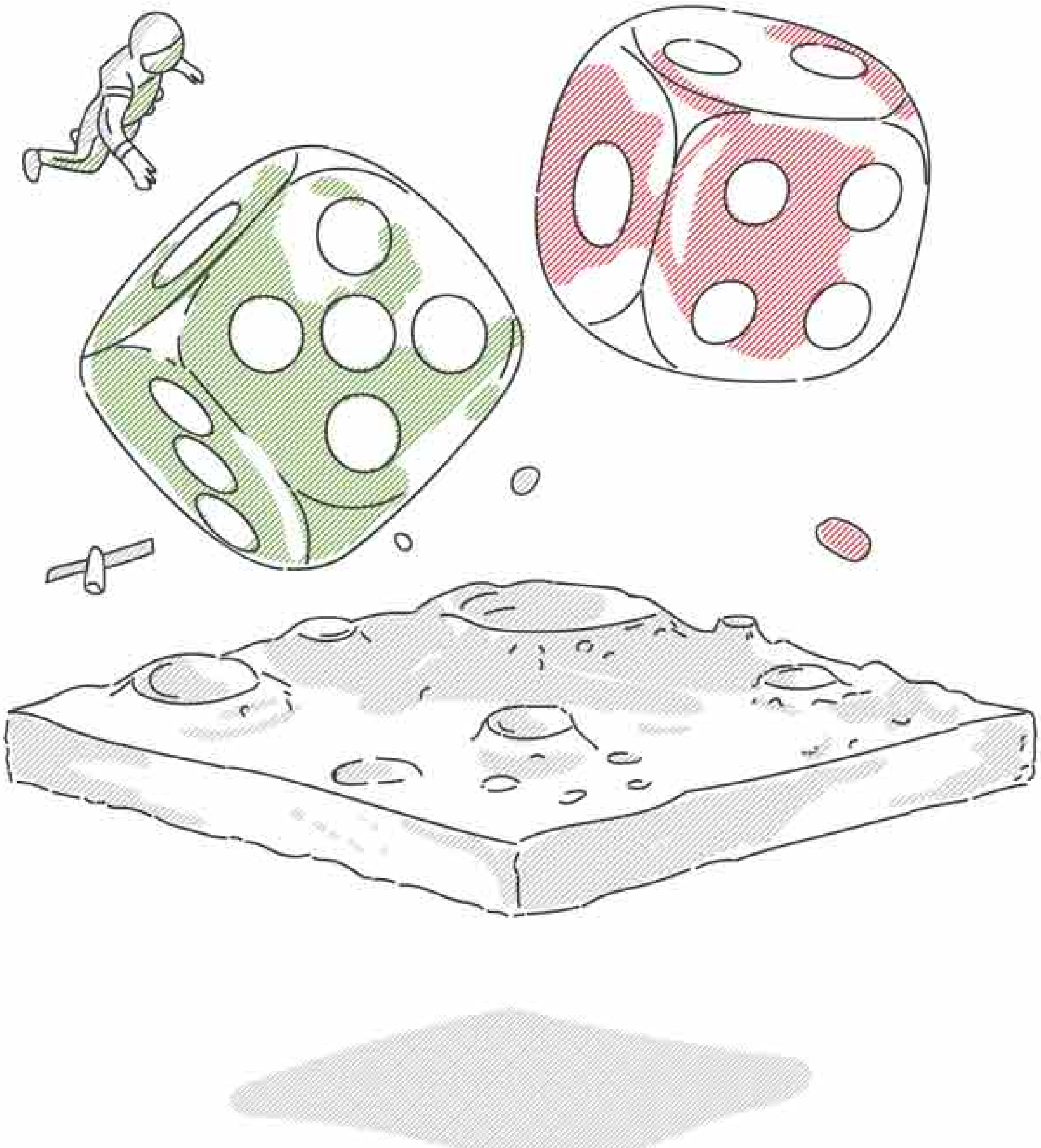
کنکور جدید

ریاضیات تجربی جامع کنکور

جلد دوم

پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم

• دکتر محمدرضا میرجلیلی • دکتر مهدی امیریان • دکتر منصور سعیدی



ماندەام حلقه‌ی مویت چه محیطی دارد...؟!

مگر این دایره «جزمی» چه ضریبی دارد...؟!

«سجاد شهیدی»

مقدمه

دوستِ خوب و همراهِ کنکوریِ مهروماه، این مجموعه جلد دوم کتاب ریاضی جامعِ خودته که داری می‌بینی. به خاطر تعداد زیاد سرفصل‌های ریاضی تجربی و اهمیتی که در آموزش هر کدام از آن‌ها وجود داره، کتاب ما به دو جلد تقسیم شده؛ اما جامع بودن آن کاملاً رعایت شده! تمام مطالبی را که برای کنکور می‌خواهی و به همدیگر مرتبط هستند، از پایه‌ی دهم تا پایه‌ی دوازدهم...

مباحث تابع و مثلثات دوازدهم را به خاطر حفظ انسجام و جامع بودن کتاب در جلد اول و در ادامه‌ی مباحثِ پایه آوردیم و در این جلد به فصل‌های مهمِ **حد و پیوستگی**، **مشتق**، **کاربرد مشتق**، **هندسه و احتمال** از پایه‌ی دوازدهم به همراه مباحث پایه‌ای لازم برای آن‌ها مثل حد مقدماتی، شمارش و... پرداخته‌ایم. اسکلت کلی کتاب کاملاً مشابه جلد اول است: **درسنامه‌های کامل و روان، تست‌های متنوع، دسته‌بندی شده و خلاق با پاسخ‌های کاملاً تشریحی، تست‌هایی برای آمادگی ۱۰۰٪ در کنکور سراسری، آزمون‌های هر فصل و آزمون‌های جامع! باز هم می‌توانی برای جمع‌بندی و مرور سریع هر فصل، خلاصه‌ها را در انتهای آن فصل ببینی.** توصیه‌ای جدید برای مطالعه‌ی جلد دوم این مجموعه برایتان نداریم؛ چون با خواندن جلد اول، حسابی مهروماهی شده‌ای...! اما تنها نکته‌ی مهم این است: مطالب جلد دوم حسابی کنکوری و مهم‌اند. تست‌های جدیدی مطابق با کتاب درسی برایت گذاشته‌ایم تا هم از مطالعه‌ی ریاضی لذت ببری و هم کنکور و ریاضی دانشگاهت را بیمه کنی...

کتابی را که می‌خوانی یک کتاب مقلد نیست! کتابی پیشرو، خلاق و نوآور است؛ ما به همراهی و انتخاب تو می‌بالیم... ☺

جلد دوم ریاضی تجربی جامع در مدتی محدود و با تلاش فراوان گروه مؤلفان، تیم تولید و ویراستاری و تیم هنری مهروماه آماده شده. از آنجا که با سنگینیِ این پروژه از نزدیک دست‌به‌گریبان بوده‌ایم، به رسم اخلاق و ادب از همه‌ی همکاران مهروماهی عزیز که در کنار ما بودند و در کارهای کوچک و بزرگ کتاب همراهی‌مان کردند، صمیمانه تشکر می‌کنیم و دست لطفشان را می‌بوسیم.

جا دارد تشکر ویژه‌ای کنیم از خانم‌ها نگین عباس‌پور، سمیرا صحرایی و کبری ملکی که در آماده‌سازی این جلد به تیم ما اضافه شدند.

این کتاب حاصل همدلی و دلسوزی دوستانی است که آرزومندند در ریاضی کنکورت موفق باشی؛ برقرار و پاینده...

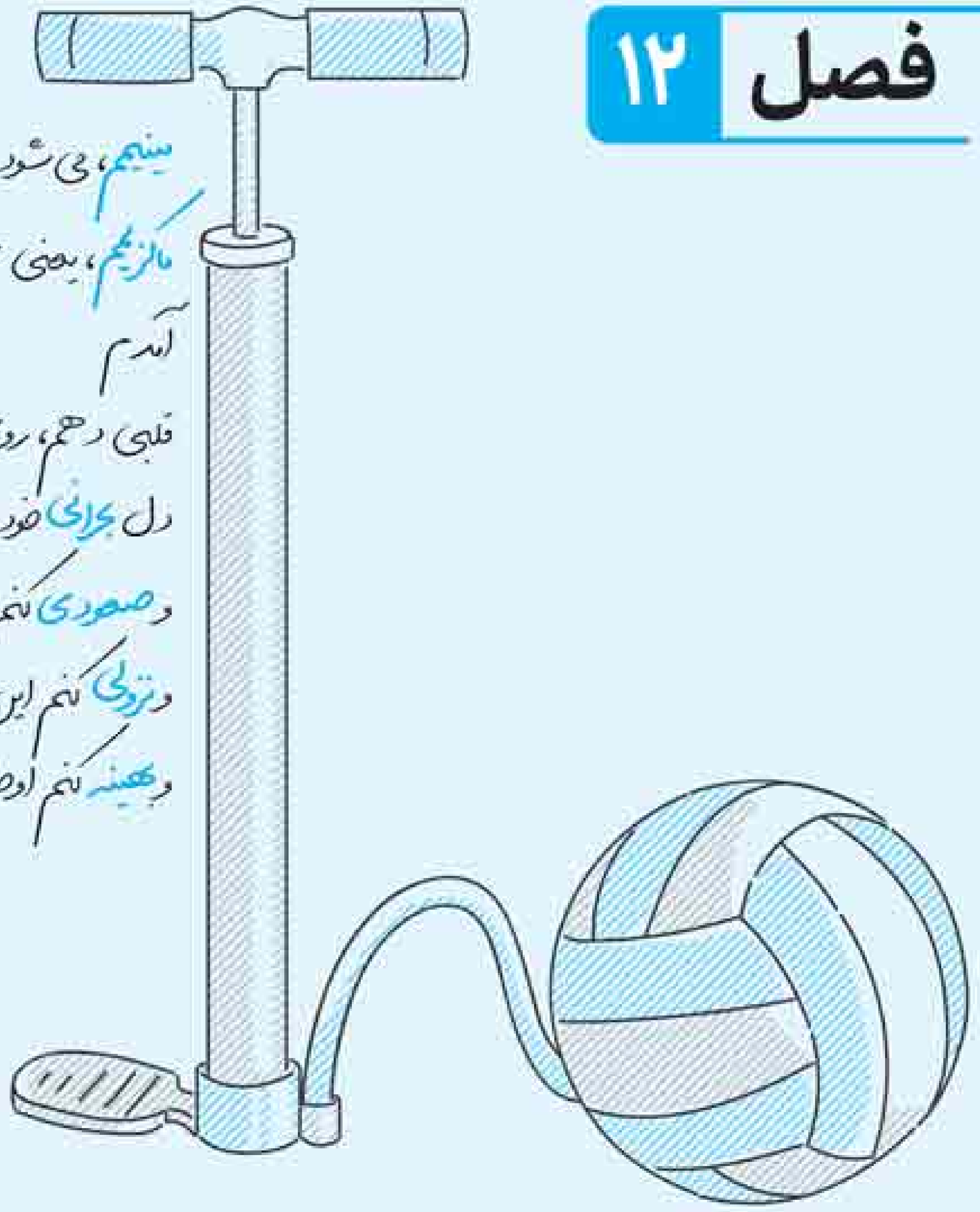
همکاران گرامی! با تمام وسواس و دقتی که در همه‌ی مراحل تألیف کتاب به خرج داده شده، قطعاً این مجموعه خالی از ایراد نیست. بنابراین از کلیه‌ی صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم این مجموعه را از نقد خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات ارزشمند خود را به نشانی الکترونیکی mr_mirjalili@yahoo.com ارسال یا از طریق پیامک (SMS) به سامانه‌ی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ اعلام فرمایید.

میرجلیلی، امیریان، سعیدی

فهرست

جلد دوم

عناوین جلد اول



مینیمم، می‌شود لبخند زیبای شبانت
ماکزیمم، یعنی غم سنگین روزت
آمدم
قلبی دهم، روحی بسازم
دل بحرانی خود ساز کنم،
و صعودی کنم احوال دلت را
و نزولی کنم این غصه و غم را
و بهینه کنم اوضاع خیالت...

فصل ۱۲

کاربرد مشتق

تمام این فصل به شناخت و پیدا کردنِ **اکسترمم‌های نسبی**، **اکسترمم‌های مطلق** و **نقاط بحرانی** می‌گذرد و در آخر استفاده‌ای ملموس از مشتق با عنوان **بهینه‌سازی** را خواهیم دید...

بدون شک یکی از اسکلت‌های اصلیِ کتاب ریاضی دوازدهم شما، همین فصل است که همراه با مشتق در آینده‌ی تحصیلی‌تان هم، نقش خواهند داشت. حتماً تست‌های این فصل را در کنکور با تعداد قابل ملاحظه‌ای می‌بینید، پس دو تا کار بکنید: مشتق را خوب بخوانید و بلد باشید، بعد هم کاربرد مشتق را به دقت و با صرف وقت مناسب خوانده و به آن مسلط شوید...

کاربرد مشتق، درسی شیک و خلاقانه است، کاربردی و جذاب، تسلط به آن یعنی هنرِ ریاضی خواندن را خوب بلدید...

ایستگاه ۱: توابع یکنوا و اکیداً یکنوا

بررسی صعودی و نزولی بودن یک تابع با استفاده از مشتق، اولین کاربرد و مبحث اصلی این ایستگاه است. تسلط به این بخش را هم برای تستِ خودش لازم دارید و هم برای اکسترمم نسبی! تست قطعیِ کنکور را در این ایستگاه یاد می‌گیرید...

بررسی صعودی و نزولی بودن تابع با کمک مشتق

در فصل تابع با مفهوم تابع‌های صعودی و نزولی آشنا شدیم. تابع صعودی اکید، تابعی است که با افزایش x مقادیرِ y هایش همواره زیاد می‌شوند و تابع نزولی اکید هم، تابعی بود که با افزایش x، شاهدِ کاهش y های متناظر آن‌ها بودیم...! بهترین مثال‌ها برای به خاطرسپاری تابعِ صعودی اکید، $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$ هستند و برای تابع نزولی هم $y=-x$ موردِ مناسبی است. اما با یاد گرفتنِ مشتق می‌خواهیم علاوه بر روش‌هایی که برای فهمیدن صعودی یا نزولی بودنِ تابع‌ها بلد بودیم، به‌طور ساده‌ای از طریق مشتق‌گیری، رفتار تابع را بررسی کنیم. اما آنچه مشتق را در این بحث، کارآمد و مؤثر می‌کند، **تعیین فاصله‌هایی است که در آن‌ها تابع صعودی یا نزولی است.**

در واقع فرض کنید ما یک تابعِ غیریکنوا را در اختیار داریم و می‌خواهیم بدانیم کجاها صعودی است و در چه فاصله‌هایی نزولی...

این‌جوری هم ببین: **اگر در مورد فواصلِ صعودی یا نزولی بودنِ تابعی، سؤال شد، یادِ مشتق بیفتید...!**

آزمون یکنوایی برای تعیین رفتار تابع

فرض کنید f، تابعی **پیوسته و بدون قدرمطلق** باشد، برای تعیین رفتار آن، مراحل زیر را اجرا می‌کنیم:

۱ از تابع مشتق بگیرید. ۲ مشتق را مساوی صفر گذاشته و ریشه‌های آن را پیدا کنید. ۳ عبارتِ مشتق را در یک جدول، تعیین علامت کنید.

اظهار نظرِ نهایی: در هر فاصله‌ای که مشتق، مثبت بود، تابعِ f صعودی اکید بوده و در آن خانه جلوی f' علامت مثبت و در سطرِ زیری آن مقابلِ f، فلش ↗ به معنای صعودی می‌گذاریم. همچنین در هر فاصله‌ای که مشتق منفی شده بود، تابع f نزولی اکید بوده و در سطرِ f جدول و زیر این خانه، علامت ↘ به معنای نزولی می‌گذاریم.

ببین:

x		☁		☁	
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

این‌جوری هم ببین: فهمیدنِ رفتار تابع‌های پیوسته‌ی بی‌قدرمطلق، این‌طوری است: مشتق بگیرید و آن را تعیین علامت کنید، در جدولی سه‌سطری که سطر اول آن برای x و ریشه‌های مشتق است، سطر دومش برای f' بوده و تنها علامتِ $+$ و $-$ در آن می‌گذاریم و سطرِ سومش برای f است که مقابلش فلش‌های ↗ و ↘ گذاشته می‌شود...

تست: **تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x^3-3x^2+1$ در بازه‌ی (a,b) نزولی اکید است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ:
$$f(x)=2x^3-3x^2+1\xrightarrow[\text{پیوسته و بدون قدرمطلق است}]{\text{مشتق بگیر}}f'(x)=6x^2-6x$$

$$\xrightarrow[\text{ریشه‌ها را پیدا کن}]{\text{برابر صفر بذار}}6x^2-6x=0\xrightarrow{\text{فاکتور}}6x(x-1)=0\Rightarrow x=0,1\xrightarrow[\text{جدول ۳ سطری}]{\text{مشتق را تعیین علامت کن}}$$

x		۰		۱	
$f'=6x^2-6x$	$+$		$-$		$+$
f	↗		↘		↗

پس این تابع در بازه‌ی $(0,1)$ و هر زیرمجموعه از آن، نزولی اکید است: $(a,b)=(0,1)\xrightarrow{b-a}1-0=1$

دُرست مانند تعیین علامت‌های معمولی که تا قبل از این انجام می‌دادیم، در تعیین علامتِ مشتق هم باید حواسمان باشد که ریشه‌ی عبارت‌های نامنفی، با فرم (☁)$^{\text{زوج}}$، مثل $(x-1)^2$ را در جدول نگذاریم! اگر هم گذاشتید، بدانید که دو طرفِ این ریشه تغییر علامت نداریم!

تست: **تابع $f(x)=-3x^5+20x^3+17$ در بازه‌ی (a,b) صعودی اکید است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ:
$$f(x)=-3x^5+20x^3+17\xrightarrow[\text{پیوسته و بدون قدرمطلق است}]{\text{مشتق بگیر}}f'(x)=-15x^4+60x^2\xrightarrow[\text{ریشه‌ها را پیدا کن}]{\text{برابر صفر بذار}}-15x^4+60x^2=0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}}15x^2(-x^2+4)=0\Rightarrow x=\pm2\,,\,x=0\xrightarrow[\text{نامنفی است و ریشه‌اش مضاعف!}\ x^2]{x=0\ \text{را نادیده بگیر}}x=\pm2$$

$$\xrightarrow[\text{جدول ۳ سطری}]{\text{مشتق را تعیین علامت کن}}$$

x		-2		2	
$f'=\underbrace{15x^2}_{\geq0}(4-x^2)$	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

$$\xrightarrow[f'>0]{\text{فاصله‌ی صعودی اکید}}(-2,2)\xrightarrow[\max]{b-a}2-(-2)=4$$

تست: تابع f با ضابطه‌ی زیر در بازه‌ی (a,b) نزولی اکید است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+10 & x<1\\ 2x^3-15x^2+36x-10 & x\geq 1\end{cases}$$

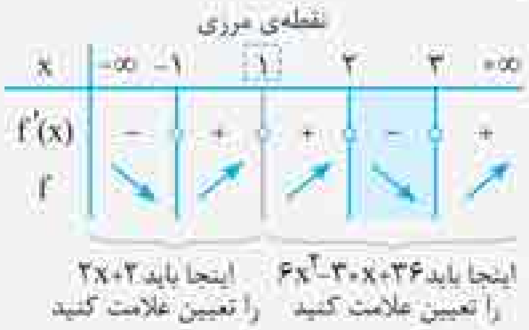
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰/۵

پاسخ: $x=1$ را به شاخه‌های بالا و پایین بدهید تا مطمئن شوید که حد چپ و راست و مقدار تابع در $x=1$، همگی ۱۳ است، این بررسی پیوستگی را که کاری ذهنی هم هست، به شما می‌سپاریم...

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+10 & x<1\\ 2x^3-15x^2+36x-10 & x\geq 1\end{cases}\xrightarrow[\text{پیوسته و بدون قدرمطلق است}]{\text{مشتق بگیر}}f'(x)=\begin{cases}2x+2 & x<1\\ 6x^2-30x+36 & x>1\end{cases}$$

$$f'(x)=0\xrightarrow{\text{ریشه‌ها را پیدا کن}}\begin{cases}2x+2=0\Rightarrow x=-1\xrightarrow{x<1}x=-1\\ 6x^2-30x+36=0\xrightarrow{\div 6}x^2-5x+6=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2,3\xrightarrow{x>1}x=2,3\end{cases}$$

می‌دانید که اگر ریشه‌ای در بیاید که به محدوده‌ی x مقابلش تعلق نداشته باشد، قابل قبول نخواهد بود.



$$\xrightarrow{\text{محدوده‌ی نزولی اکید}}(2,3)\xrightarrow{b-a}3-2=1$$

در بازه‌ی $(-\infty,-1)$ هم تابع نزولی اکید است که نمی‌تواند منظورِ طراح که بازه‌ی عددی (a,b) را خواسته، شامل شود!

علامتِ تساوی را برای مشتق بگذاریم یا نگذاریم؟ مسئله این است...!

در ابتدا توجه کنید که چهار جمله‌ی زیر در بازه‌ی I درست و برقرار هستند:

۱) اگر به ازای تمام x های بازه‌ی I، $\boxed{f'>0}$ باشد، در این‌صورت تابع f **صعودی اکید** است.

۲) اگر به ازای تمام x های بازه‌ی I، $\boxed{f'<0}$ باشد، در این‌صورت تابع f **نزولی اکید** است.

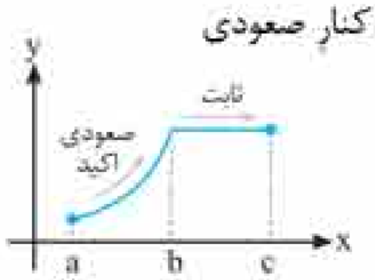
۳) اگر به ازای تمام x های بازه‌ی I، $\boxed{f'\geq 0}$ باشد، در این‌صورت تابع f **صعودی** است.

۴) اگر به ازای تمام x های بازه‌ی I، $\boxed{f'\leq 0}$ باشد، در این‌صورت تابع f **نزولی** است.

در واقع برداشتی که از این جمله‌ها می‌توان داشت این است که اگر مشتق مساوی صفر شود، حق نداریم کلمه‌ی اکید را کنارِ صعودی و نزولی بیاوریم! الان به‌دقت این مسئله را مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ چون بیشتر، عکسِ جمله‌های بالا را نیاز داریم:

اگر تابع f صعودی باشد (ولی اکید نه) در یک فاصله، مشتقِ آن صفر می‌شود، چراکه در این فاصله، تابع f ثابت شده بوده.

ببین: f' در (a,b) مثبت و در (b,c) صفر است:



اما تابعِ صعودی اکید، در هیچ فاصله‌ای تابع ثابت نمی‌شود، چون درجا نمی‌زند! و همیشه در حال بالا رفتن است. اما یک مطلبِ مهم وجود دارد: آیا تابع صعودیِ اکید، حق ندارد در هیچ نقطه‌ای مماس افقی داشته باشد و مشتقش صفر شود؟! جواب این است که ایرادی ندارد، نمونه‌ی بارزش $y=x^3$ است که صعودی اکید است و در $x=0$ مشتقِ آن صفر می‌شود. $f(x)=x^3\xrightarrow{\text{مشتق}}3x^2\xrightarrow{x=0}f'(0)=0$

خلاصه برای تابعِ صعودی اکید هم، اتفاقِ $f'\geq 0$ می‌افتد!! همین مطلب در مورد تابعِ نزولی اکید هم قابل بیان است. الان سؤال این است اگر بگویند تابع f صعودی اکید است ما باید قرار دهیم $f'>0$ یا $f'\geq 0$؟! همین‌طور نتیجه‌ی جمله‌ی f، نزولیِ اکید است، $f'<0$ خواهد بود یا $f'\leq 0$؟...

جواب علمی جمله‌های بالا، برمی‌گردد به این‌که تابع f در یک محدوده، ثابت می‌شود یا نه، اما ما خیالتان را در کنکور با جمله‌های طلایی زیر راحت می‌کنیم:

۱) اگر بگویند تابعِ f، **صعودی یا صعودی اکید** است و f **چندضابطه‌ای با یک ضابطه‌ی ثابت نباشد و قدرمطلق هم نداشته باشد**، نتیجه بگیرید: $\boxed{f'\geq 0}$.

۲) اگر بگویند تابعِ f، **نزولی یا نزولی اکید** است و f **چندضابطه‌ای با یک ضابطه‌ی ثابت نباشد و قدرمطلق هم نداشته باشد**، نتیجه بگیرید: $\boxed{f'\leq 0}$.

ببین: برای این‌ها، مساوی نمی‌گذاریم:

الف) تابع $y=x-|x|$، برای x های مثبت، می‌شود: $y=0$. **ب)** تابع $y=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ 1 & x<1\end{cases}$، برای $x<1$ ضابطه‌ی ثابت دارد...

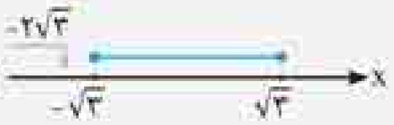
تست: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+2mx^2+4x+1$ همواره صعودی اکید است. m کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $-2\sqrt{3}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: $f(x)=x^3+2mx^2+4x+1 \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=3x^2+4mx+4 \xrightarrow[f'\ge 0]{\text{صعودی اکید}} \underbrace{3x^2+4mx+4\ge 0}_{\text{همواره}}$

$$\xrightarrow{\text{لازم است که}} \begin{cases}\Delta\le 0 \xrightarrow{\Delta\ \text{را پیدا کن}} \Delta=(4m)^2-4(3)(4)=16m^2-48\le 0 \Rightarrow 16m^2\le 48 \xrightarrow{\div 16} m^2\le 3 \xrightarrow[\text{با قدرمطلق}]{\text{جذر بگیر}} |m|\le\sqrt{3} \\ a>0 \xrightarrow{m=3} 3>0 \ \checkmark\end{cases}$$

پس برای m داریم: $\Rightarrow -\sqrt{3}\le m\le\sqrt{3} \xrightarrow{\text{روی محور}}$



تعیین رفتار تابع‌های گویا

تا الان یاد گرفتید که رفتارِ تابع‌های پیوسته و بدون قدرمطلق را با مشتق تعیین کنید، یکی از معروف‌ترین تابع‌های ناپیوسته، تابع‌های کسری هستند که روی ریشه‌های مخرج، پیوستگی ندارند. **تابع کسری که مخرجش ریشه داشته باشد، هیچ‌گاه یکنوا نیست؛ نه صعودی و نه نزولی...** مگر این‌که برای x یک بازه بدهند؛ بازه‌ای که ریشه‌ی مخرج عضوِ آن نباشد، آن‌وقت ممکن است تابع گویا بتواند یکنوا باشد...! حالا مشتق می‌تواند کمکتان کند. **ببین:**

فرمِ تابع	بازه‌ی داده‌شده برای x	شرط لازمِ بررسیِ یکنوایی	وضعیت علامت y' در بازه	نتیجه‌ای که می‌گیرید
$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ (بدون قدرمطلق)	$(a\,,b)$	ریشه‌ی مخرج عضو بازه نباشد. این‌جوری هم ببین: $g(\alpha)=0\Rightarrow\alpha\notin(a\,,b)$	$y'\ge 0$	تابع صعودی اکید بوده...
			$y'\le 0$	تابع نزولی اکید بوده...

تست: رفتار تابع $y=\frac{x}{x^2-1}$ در بازه‌ی $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ چگونه است؟

۱) صعودی اکید ۲) نزولی اکید ۳) غیر یکنوا ۴) ابتدا صعودی و سپس نزولی

پاسخ: $y=\frac{x}{x^2-1} \xrightarrow{\text{ریشه‌های مخرج}} x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1 \xrightarrow{\text{در بازه‌ی داده‌شده نیستند}} \pm1\notin(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$\xrightarrow[\text{قالب کسری}]{\text{مشتق بگیر}} y'=\frac{1(x^2-1)-2x(x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{\text{عبارتِ همواره منفی}}{\text{عبارتِ همواره مثبت}}<0 \xrightarrow{\text{رفتار}} \text{نزولی اکید}$$

حالا برعکسِ جمله‌های بالا را بررسی می‌کنیم؛ اگر تست به شما بگوید یک تابعِ کسری، (مثلاً) صعودی اکید است و یک بازه هم برای x داده باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ جواب این است که مشتق باید بزرگ‌تر مساویِ صفر بوده و ریشه‌ی مخرج هم عضو بازه نباشد؛ به این معنا که ریشه‌های مخرج به عددِ اولِ بازه نرسیده باشد و یا از عددِ آخرِ بازه رد شده باشد...! **ببین:** مثل ۲ برای (۳ , ۷) یا ۴ برای (۱ , ۲-).

این‌جوری هم ببین:

۱) **اگر y کسری با ریشه‌ی مخرجِ α، صعودی یا صعودی اکید بود و بازه هم $(a\,,b)$ داده شده باشد، باید: $y'\ge 0$ بوده و $\alpha<a$ یا $\alpha>b$ باشد.**

۲) **اگر y کسری با ریشه‌ی مخرجِ α، نزولی یا نزولی اکید بود و بازه هم $(a\,,b)$ داده شده باشد، باید: $y'\le 0$ بوده و $\alpha<a$ یا $\alpha>b$ باشد.**

تست: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{3x+6}{x-a}$ در بازه‌ی $(-\infty\,,-4)$ صعودی اکید است، چند جواب صحیح برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

۱ $x-a=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مخرج}} x=a \xrightarrow{\text{درون بازه نباشد}} \begin{cases} a<-\infty & \text{امکان ندارد} \\ a>-4 \end{cases}$

۲ $f(x)=\frac{3x+6}{x-a} \xrightarrow[\text{تابع هموگرافیک}]{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=\frac{-3a-6}{(x-a)^2} \xrightarrow[f'\ge 0]{\text{صعودی اکید است}} \underbrace{-3a-6\ge 0}_{\text{مخرج همواره مثبت}} \Rightarrow -3a\ge 6 \xrightarrow[\text{تغییر جهت}]{\div(-3)} a\le -2$

اشتراک شرط‌های ۱ و ۲ می‌شود: $-4<a\le -2$ و تعداد عددهای صحیح این بازه هم، ۲ تاست: $a=-3$ و $a=-2$.

تعیین رفتار تابع‌های ناپیوسته یا قدرمطلق‌دار

آنچه را که تا حالا مُدام می‌گفتیم، برای تابع پیوسته و بی قدرمطلق بود! و در مورد تابع‌های گویا هم نکته‌ای را اشاره کردیم. اما بدانید **برای تابع‌های ناپیوسته یا قدرمطلق‌دار، بهترین راهِ فهمیدنِ فاصله‌های یکنوایی، رسم تابع است...**

تست: در مورد وضعیت یکنوایی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x^3+1|$ کدام گزینه درست است؟

۱) صعودی اکید است. ۲) برای $x>-1$ صعودی اکید است.

۳) برای $x<-1$، صعودی اکید است. ۴) نزولی اکید است.

فصل در یک نگاه

یکنوایی و رفتار تابع

- **مفهوم:** تابع f در بازه‌ی (a,b)
  - صعودی اکید است
    - با افزایش x در بازه، y های نظیر هم زیاد می‌شوند.
    - در کل بازه $\boxed{f'>0}$ و امکان دارد در تعدادی از نقاط $f'=0$ هم بشود...
  - نزولی اکید است
    - با افزایش x در بازه، مقدار y های آنها کمتر می‌شود.
    - در تمام بازه $\boxed{f'<0}$ و امکان دارد در چند نقطه از این بازه، $f'=0$ هم بشود...
  - صعودی غیراکید است
    - با افزایش x، y ها زیاد شده و در بخشی هم تابع ثابت می‌شود.
    - $\boxed{f'>0}$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$ ؛ $\boxed{f'\geq 0}$
  - نزولی غیراکید است
    - با افزایش x، y ها کم شده و در بخشی از بازه، تابع ثابت می‌شود.
    - $\boxed{f'>0}$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$ ؛ $\boxed{f'\geq 0}$
- **ارتباط دقیق مشتق و رفتار**
  - از مشتق به رفتار تابع برسیم
    - اگر $\boxed{f'>0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **صعودی اکید** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'<0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **نزولی اکید** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'\geq 0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **صعودی** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'\leq 0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **نزولی** بوده است.
  - از رفتار تابع به مشتق آن برسیم
    - اگر **f صعودی یا صعودی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $\boxed{f'\geq 0}$.
    - اگر **f نزولی یا نزولی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $\boxed{f'\leq 0}$.
    - استثنای کم کاربرد ← اگر تابع چند ضابطه‌ای با شاخه‌ی ثابت یا قدرمطلق‌دار باشد، برای اکیدها مساوی نذار...
- **تعیین رفتار**
  - تابع پیوسته و بدون قدرمطلق است $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق بگیر و آن را تعیین علامت کن و برای f فلش بزن
    - جدول ←

x		x_0	
f'	+	0	−
f	↗		↘

    - ریشه مضاعف ← قبل و بعد ریشه‌ی مضاعف علامت عوض نمی‌شود!
  - تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد $\xrightarrow{\text{روش}}$ رسم کن و از مفهوم صعودی نزولی استفاده کن.
  - تابع کسری
    - مخرج کسر ریشه ندارد $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق
    - مخرج کسر ریشه دارد $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ قطعاً تابع یکنوا نیست $\xrightarrow{\text{بازه‌ای داده که ریشه‌ی مخرج در آن نیست}}$ روش مشتق
      - $\boxed{f'\geq 0}$ صعودی
      - $\boxed{f'\leq 0}$ نزولی
    - گفته شده که در یک بازه یکنوا است $\xrightarrow{\text{روش}}$ علامت مشتق را مطابق رفتار تابع تنظیم کنید و کاری کنید که ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی داده نشده نیفتد!

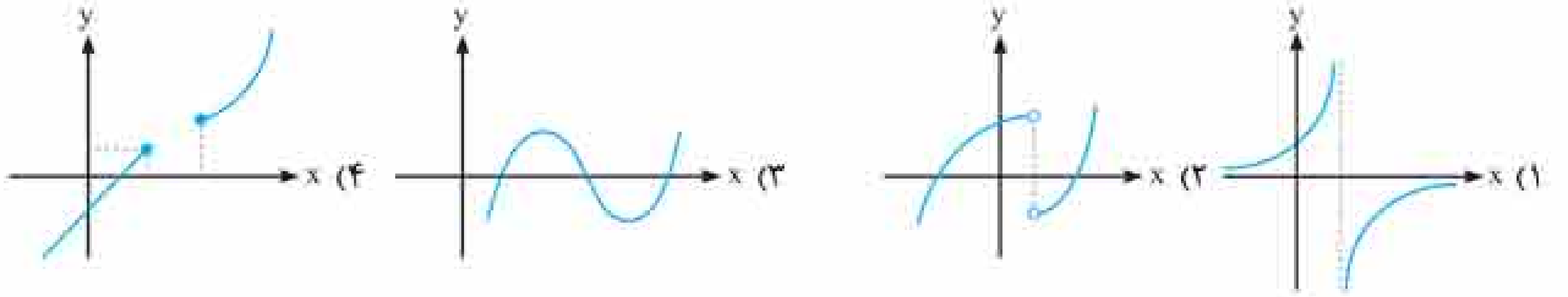
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

ایستگاه ۱: توابع یکنوا و اکیداً یکنوا

آموزش %30+

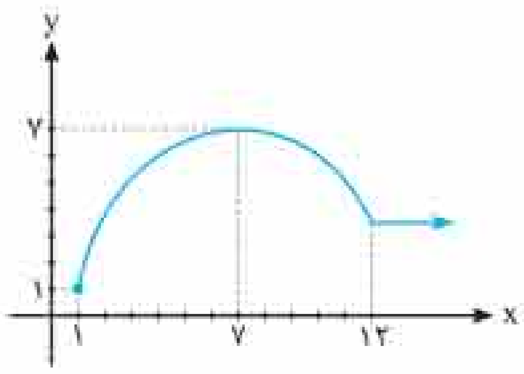
۵۸۶. کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به یک تابع اکیداً یکنواست؟



۵۸۷. در رابطه با توابع $g(x)=-2x+1$ ، $h(x)=\sqrt{x}$ ، $u(x)=-\sqrt{x}$ و $k(x)=x^2$ کدام بیان درست نیست؟ (کتاب درسی)

۱) تابع g روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.
۲) تابع h روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.
۳) u' روی $(0,+\infty)$ همواره منفی است.
۴) k' روی $(-\infty,0)$ منفی و روی $(0,+\infty)$ مثبت است.

۵۸۸. با توجه به نمودار تابع f، کدام گزاره به‌درستی بیان نشده است؟



۱) در بازه‌ی $(1,7)$ تابع f اکیداً صعودی و شیب خط‌های مماس بر نمودار، مثبت است.
۲) در بازه‌ی $(1,7)$ شیب خطوط مماس بر منحنی، مثبت و رو به کاهش است.
۳) در بازه‌ی $(7,12)$ تابع f اکیداً نزولی و شیب خط‌های مماس بر نمودار، منفی است.
۴) در بازه‌ی $(7,+\infty)$ تابع f مقداری ثابت دارد و حاصل f'، صفر است.

۵۸۹. کدام گزینه در رابطه با تابع درجه‌ی سوم $f(x)=3x^3-18x$ به‌درستی بیان شده است؟ (کتاب درسی)

۱) f روی بازه‌ی $(-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.
۲) f روی بازه‌ی $(-2,2)$ اکیداً نزولی است.
۳) f روی بازه‌ی $(-\sqrt{2},+\infty)$ اکیداً نزولی است.
۴) f روی بازه‌ی $(-\infty,-\sqrt{2})$ اکیداً صعودی است.

۵۹۰. بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ روی آن اکیداً نزولی می‌باشد، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $[-4,4]$
۲) $[-2,2]$
۳) $(-2,2)$
۴) $(-4,4)$

۵۹۱. تابع $y=\dfrac{3x-5}{2-x}$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty,+\infty)$
۲) $(0,+\infty)$
۳) $(2,+\infty)$
۴) $(-2,3)$

۵۹۲. تابع $f(x)=x^4-8x^5$ در بازه‌ی (a,b) صعودی اکید است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 10
۲) $\frac{1}{10}$
۳) $\frac{1}{5}$
۴) 5

تثبیت %50+

۵۹۳. نمودار تابع $y=(x-1)^3(x+1)$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(-\infty,1]$
۲) $(-\infty,-\frac{1}{2}]$
۳) $[1,+\infty)$
۴) $[-\frac{1}{2},+\infty)$

۵۹۴. به ازای کدام مقدار k، نمودار تابع $f(x)=(k+1)x^3+(2k-1)x^2+3$ همواره نزولی است؟

۱) 2
۲) -1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) هیچ مقدار k

۵۹۵. تابع $f(x)=x^3-3x^2-45x+9$ در بزرگ‌ترین بازه‌ی ممکن به‌صورت (a,b) نزولی اکید است. شیب خط مماس بر نمودار این تابع در $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ کدام است؟

۱) -45
۲) -48
۳) -42
۴) -54

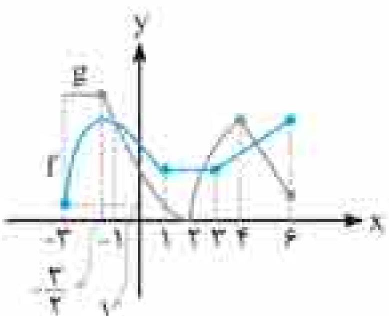
۵۹۶. کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}-2$ درست است؟

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی
۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی
۳) صعودی
۴) نزولی

۵۹۷. نمودار تابع $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $(-3,1)$
۳) $(-1,3)$
۴) $(3,+\infty)$

۵۹۸. در شکل مقابل، نمودار توابع f و g رسم شده است. در کدام بازه مشتق تابع $(fog)(x)$ منفی است؟



۱) $(-3,1)$
۲) $(4,6)$
۳) $(-1,1)$
۴) $(-1,2)$

۵۹۹. تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است. در این‌صورت تابع $(fof)(x)$:

۱) نزولی اکید است. ۲) صعودی اکید است. ۳) غیریکنواست. ۴) ممکن است یکنوا یا غیریکنوا باشد.

٪۸۰⁺ تسلط

۶۰۰. کدام گزاره درباره‌ی تابع $g(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$ به‌درستی بیان شده است؟ (کتاب درسی)

۱) روی بازه‌ی $(۰,+\infty)$ همواره صعودی و روی بازه‌ی $(-\infty,۰)$ همواره نزولی است.

۲) روی بازه‌ی $(۰,+\infty)$ همواره نزولی و روی بازه‌ی $(-\infty,۰)$ همواره صعودی است.

۳) روی $\mathbb{R}$ همواره صعودی است.

۴) روی $\mathbb{R}$ همواره نزولی است.

۶۰۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(x^۲-۳x)|x|$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(-\infty,۲)$ ۳) $(۲,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

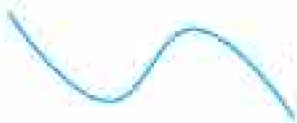
۶۰۲. کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x+۲}{۲x^۲+۴x+۵}$ درست است؟

۱) صعودی اکید ۲) نزولی اکید ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۶۰۳. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=\frac{x+a}{x^۲+۵}$ در آن صعودی است، به‌صورت $[-۵,b]$ می‌باشد. مقدار b کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۱-

۶۰۴. کدام گزینه نمایش تابع $y=-x^۳+۳x^۲+۹x+۴$ را نشان می‌دهد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶۰۵. اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی باشد، چه تعداد از توابع $f^۳(x)$، $f(x^۲)$، $f(-x)$ و $f(\frac{۱}{x})$ همواره نزولی هستند؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) صفر

۶۰۶. به ازای چند مقدار صحیح از a تابع $y=\frac{ax+۲}{x+a-۱}$ در بازه‌ی $(۰,۳)$ نزولی اکید است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۶۰۷. تابع $f(x)=(a-۱)x^۲-(۲a-۳)x+۱$ به ازای چند مقدار صحیح a در بازه‌ی $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ صعودی است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۶۰۸. اگر تابع $y=۲^{\frac{۲x^۳}{۳}-۴x^۲+۱۱}$ در بازه‌ی (a,b) نزولی باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰۹. اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=x^۳-(m+۲)x^۲+۳x$ همواره صعودی باشند، آن‌گاه ریشه‌ی معادله‌ی $f''(x)$ در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

ایستگاه ۲: اکسترمم‌های نسبی و مطلق

٪۳۰⁺ آموزش

۶۱۰. اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c اکسترمم نسبی داشته باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱) f در همسایگی c تعریف شده است. ۲) f در c مشتق‌ناپذیر است.

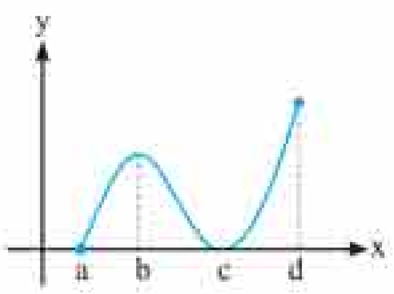
۳) f در c پیوسته است. ۴) $f'(c)$ برابر صفر است.

۶۱۱. اگر $x=c$ طول نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن بوده و همچنین در همسایگی آن تعریف شده باشد، تابع f در c الزاماً .... است.

۱) دارای min یا max نسبی ۲) مشتق‌ناپذیر

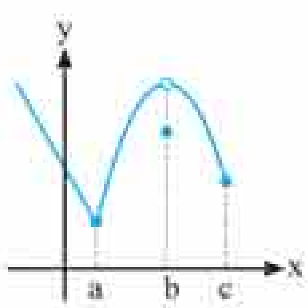
۳) پیوسته ۴) مشتق‌پذیر

۶۱۲. نقطه‌ای با کدام طول در نمودار تابع مقابل، اکسترمم نسبی است، اما مطلق نیست؟



۱) a
۲) b
۳) c
۴) d

۶۱۳. در شکل داده‌شده، وضعیت نقاط a، b و c از نظر اکسترمم نسبی به‌ترتیب (از راست به چپ) چگونه است؟



۱) min ـ max ـ عادی
۲) عادی ـ max ـ عادی
۳) min ـ min ـ عادی
۴) max ـ min ـ min

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & x<0\\ \dfrac{x-1}{x+1} & x\geq 0\end{cases}$$

چالش تابع دوضابطه‌ای در نقطه‌ی مرزی است، پس مشتق راست و چپ تابع را در $x=0$، حساب می‌کنیم. در حقیقت نقطه‌ی گوشه‌ای تابع $x=0$ است، چون مشتق راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر نیستند.

$$\xrightarrow[\text{تابع هموگرافیک}]{\text{مشتق}} f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1-1}{(x-1)^2} & x<0\\ \dfrac{1-(-1)}{(x+1)^2} & x>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_-(0)=\dfrac{-2}{(0-1)^2}=-2=m_1 & \text{(شیب نیم‌مماس چپ)}\\ f'_+(0)=\dfrac{2}{(0+1)^2}=2=m_2 & \text{(شیب نیم‌مماس راست)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-2-2}{1+(-2)(2)}\right|=\left|\frac{-4}{1-4}\right|=\frac{4}{3}$$

۵۸۱. گزینه ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع را در همسایگی $x_0=-3$ ساده می‌کنیم و سپس مشتق راست و چپ تابع را می‌یابیم: $x\to -3^+ \simeq -2/99$

$$\Rightarrow\begin{cases}[-x^2]=[-(2/99)^2]=[-8/94]=-9\\ |x+3|=x+3\end{cases}$$

بنابراین: $x\to -3^+ : f(x)=x(-9)(x+3)=-9x^2-27x$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=-18x-27$$

$$\xrightarrow{x=-3} f'_+(-3)=-18(-3)-27=54-27=27$$

$$\Rightarrow f'_+(-3)=27 \quad \boxed{1}$$

و اما مشتق چپ:

$$x\to -3^- \simeq -3/01 \Rightarrow \begin{cases}[-x^2]=[-9/1]=-10\\ |x+3|=-(x+3)\end{cases}$$

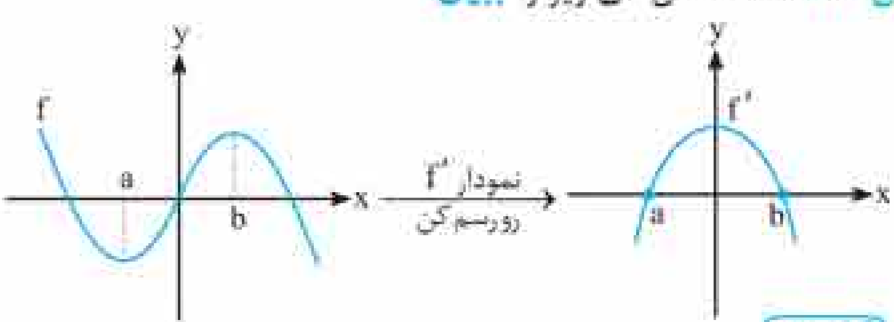
$$\Rightarrow x\to -3^- : f(x)=x(-10)(-(x+3))=10x^2+30x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=20x+30$$

$$\xrightarrow{x=-3} f'_-(-3)=20(-3)+30=-30 \Rightarrow f'_-(-3)=-30$$

$$\xrightarrow{\boxed{1}\text{ و }\boxed{2}} |f'_+(-3)-f'_-(-3)|=|27-(-30)|=57$$

۵۸۲. گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، ملاحظه می‌کنیم که تابع در بازه‌ی $(-\infty,a)$ و $(b,+\infty)$ نزولی است، پس نمودار مشتق آن باید زیر محور xها باشد. همچنین در بازه‌ی (a,b)، تابع f صعودی است و در نتیجه نمودار مشتق آن باید بالای محور xها باشد پس پاسخ درست **گزینه‌ی «۳»** است. شکل‌های زیر را **ببین:**



۵۸۳. گزینه ۲

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{تعریف مشتق}} f'(2)=-\frac{1}{3} \quad \boxed{*}$$

هدف، محاسبه‌ی مشتق تابع $y=f(\sqrt{|x|+3})$ در نقطه‌ی $x=-1$ است. چون در همسایگی $x=-1$، مقادیر x منفی است، پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$x<0 \xrightarrow{|x|=-x} y=f(\sqrt{-x+3})$$

$$\xrightarrow[(f(u))'=u'f'(u)]{\text{مشتق}} y'=\frac{-1}{2\sqrt{-x+3}}f'(\sqrt{-x+3})$$

$$\xrightarrow{x=-1} y'=\frac{-1}{2\sqrt{1+3}}f'(\sqrt{1+3})=\frac{-1}{4}f'(2)$$

$$\xrightarrow{\boxed{*}} y'=-\frac{1}{4}\times\frac{-1}{3}=\frac{1}{12}$$

۵۸۴. گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-2x^2+1}{x^3-\sqrt{x}}=\frac{1-2+1}{1-1}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

$$\xrightarrow[\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}]{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{4}}-2x^2+1}{x^3-x^{\frac{1}{2}}} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-4x+0}{3x^2-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-4}{3-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1-16}{4}}{\frac{6-1}{2}}=\frac{-\frac{15}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{-15\times 2}{5\times 4}=\frac{-3}{2}$$

۵۸۵. گزینه ۳

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}=\frac{f(2+0)-9}{0}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=}\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\infty\neq\frac{3}{2} & f(2)-9\neq 0\to \text{غ ق ق}\\ \frac{0}{0} & f(2)-9=0\end{cases}$$

بنابراین: $f(2)-9=0\Rightarrow f(2)=9 \quad \boxed{1}$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}\overset{\boxed{1}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$$\xrightarrow{\text{فرض تست}} f'(2)=\frac{3}{2} \quad \boxed{2}$$

و اما خواسته‌ی تست:

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)=1\times\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\times x$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2)=\sqrt{f(2)}+\frac{f'(2)\times 2}{2\sqrt{f(2)}}$$

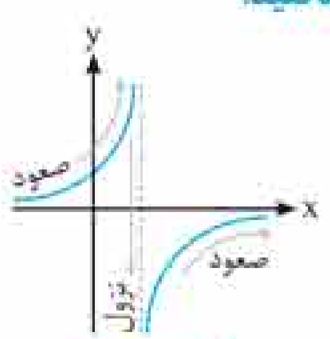
$$\xrightarrow{\boxed{1}\text{ و }\boxed{2}} g'(2)=\sqrt{9}+\frac{\frac{3}{2}\times 2}{2\sqrt{9}}=3+\frac{3}{2\times 3}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3/5$$

فصل ۱۲ کاربرد مشتق

۵۸۶. گزینه ۴ پاسخ درست **گزینه‌ی «۴»** است، زیرا با افزایش x، مقدار تابع دائماً در حال افزایش است. اما گزینه‌های دیگر:

در **گزینه‌ی «۱»** هر شاخه از نمودار، اکیداً صعودی است، ولی در جایی که منحنی از هم جدا شده است، یک تغییر جهت داریم. در **گزینه‌ی «۲»** هم در نقطه‌ی ناپیوستگی تابع همین تغییر جهت رخ داده است **نگاه کنید:**

گزینه‌ی «۲»



گزینه‌ی «۱»

در **گزینه‌ی «۳»** هم که تغییر جهت از صعودی به نزولی و دوباره از نزولی به صعودی کاملاً مشخص است.

۵۸۷. (گزینه ۲) • **روش اول** تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

«۱» گزینه‌ی: $g(x)=-2x+1 \xrightarrow[\text{و مشتق‌پذیره}]{\text{تابع همواره پیوسته}} g'(x)=-2<0$

$\Rightarrow$ اکیداً نزولی ✓

«۲» گزینه‌ی: $h(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$

دامنه‌ی تابع h، بازه‌ی $[0,+\infty)$ است؛ پس تابع در این بازه اکیداً صعودی است، نه روی $\mathbb{R}$. ×

«۳» گزینه‌ی: $u(x)=-\sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} u'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}}<0$

u' روی دامنه‌ی خودش، یعنی $(0,+\infty)$ همواره منفی است. ✓

«۴» گزینه‌ی: $k(x)=x^2 \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} k'(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

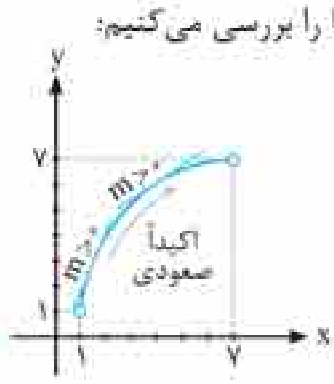
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		−	0	+	
$k(x)$		↘		↗	

پس k' روی $(-\infty,0)$ منفی و روی $(0,+\infty)$ مثبت است. ✓

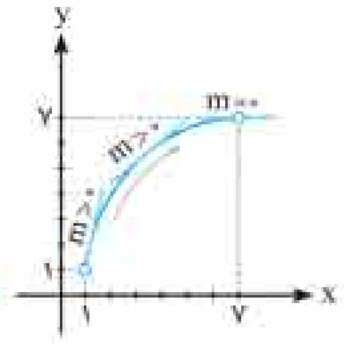
• **روش دوم** با رسم نمودار هر یک از توابع، آن‌ها را بررسی کنید (به‌عهده‌ی خودتون.)

۵۸۸. (گزینه ۴) تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

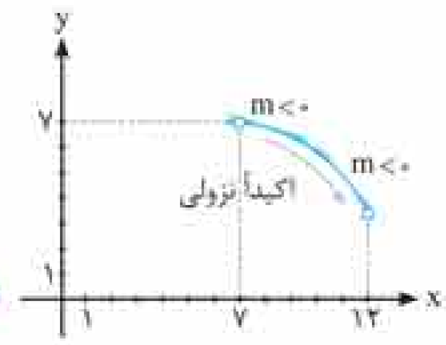
«۱» گزینه‌ی:



«۲» گزینه‌ی:



«۳» گزینه‌ی:



گزینه‌ی «۴»: تابع داده‌شده در بازه‌ی $(12,+\infty)$ ثابت است، نه در بازه‌ی $(7,+\infty)$؛ پس پاسخ تست، گزینه‌ی «۴» است.

۵۸۹. (گزینه ۴) با توجه به گزینه‌های داده‌شده، باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم؛ پس:

$f(x)=3x^3-18x \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=9x^2-18=0$

$\Rightarrow 9(x^2-2)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

با توجه به گزینه‌های داده‌شده، عددهای ۲ و ۲− را هم وارد جدول تغییرات می‌کنیم تا به‌راحتی به گزینه‌ی درست برسیم.

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

پس پاسخ درست، گزینه‌ی «۴» است.

۵۹۰. (گزینه ۲) تابع f اکیداً نزولی باشد، یعنی نامعادله‌ی $f'(x)\le 0$ را حل کن؛ پس: $f(x)=x^3-12x+4 \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=3x^2-12$

$=3(x^2-4)=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

تابع f در بازه‌ی $[-2,2]$ اکیداً نزولی است.

۵۹۱. (گزینه ۳) خب! یک تابع گویا داریم و می‌دانیم شرط یکنوایی این‌گونه توابع در یک بازه این است که ریشه‌ی مخرج متعلق به آن بازه نباشد و مشتق هم در آن بازه تغییر علامت ندهد؛ پس: ریشه‌ی مخرج: $2-x=0 \Rightarrow x=2$

با این اوصاف پاسخ درست گزینه‌ی «۳» است، زیرا سه گزینه‌ی دیگر شامل ریشه‌ی مخرج‌اند. حالا برای راحتی خیال شما مشتق تابع را هم محاسبه می‌کنیم که ببینید $f'(x)$ در دامنه‌ی خود همواره مثبت است:

$$f(x)=\frac{3x-5}{-x+2} \xrightarrow{\text{مشتق تابع هموگرافیک}} f'(x)=\frac{3\times 2-(-5)(-1)}{(-x+2)^2}$$

$$=\frac{6-5}{(-x+2)^2}=\frac{1}{(-x+2)^2}>0$$

۵۹۲. (گزینه ۲) برای یافتن بازه‌ی (a,b) باید نامعادله‌ی $f'(x)>0$ را حل کنیم، پس: $f(x)=x^4-8x^5$

$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=4x^3-40x^4=4x^3(1-10x)$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} 4x^3=0 \Rightarrow x=0 \\ 1-10x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

تابع در بازه‌ی $(0,\frac{1}{10})$ اکیداً صعودی است؛ بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{10}$ است.

۵۹۳. (گزینه ۲) باید نامعادله‌ی $y'\le 0$ را حل کنیم:

$y=(x-1)^3(x+1)$

$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3\times 1$

$\xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} y'=(x-1)^2(3(x+1)+x-1)$

$\xrightarrow{\text{ساده کن}} y'=(x-1)^2(3x+3+x-1)=(x-1)^2(4x+2)$

$\xrightarrow{y'\le 0} \overbrace{\underbrace{(x-1)^2}_{\text{همواره نامنفی}}(4x+2)\le 0}^{*} \Rightarrow 4x+2\le 0$

$\Rightarrow 4x\le -2 \xrightarrow{\div 4} x\le -\frac{1}{2}$

توجه: در نامعادله‌ی *، عدد $x=1$ هم صدق می‌کند؛ ولی در جواب ما تأثیری ندارد.

۵۹۴. (گزینه ۴) باید $f'(x)\le 0$ باشد، پس:

$f(x)=(k+1)x^3+(2k-1)x^2+3$

$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=3(k+1)x^2+2(2k-1)x\le 0$ ①

شرط آن‌که سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم ax^2+bx+c کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد، آن است که: $\{a<0$ و $\Delta\le 0$

در نامعادله‌ی ① داریم:

$$\begin{cases} a=3(k+1)<0 \Rightarrow k+1<0 \Rightarrow k<-1 \quad ② \\ b=2(2k-1) \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4(2k-1)^2 - 0 \le 0 \Rightarrow \underbrace{(2k-1)^2}_{\text{همواره نامنفی}} \le 0$$

$$\xrightarrow{(2k-1)^2<0 \text{ غ ق ق}} (2k-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{1} \cap \boxed{2} = \varnothing$$

یعنی هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

۵۹۵. گزینه ۲ باید نامعادله‌ی $f'(x)<0$ را حل کنیم، پس:

$$f(x)=x^3-3x^2-45x+9 \xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{مشتق}} f'(x)=3x^2-6x-45<0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2-2x-15<0 \xrightarrow{\text{نامعادله رو حل کن}} x^2-2x-15=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-3 \end{cases}$$

$\xrightarrow[\text{جدول تغییرات}]{\text{تشکیل}}$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

تابع در بازه‌ی $(-3,5)$ اکیداً نزولی است؛ پس:

$$(a,b)=(-3,5) \Rightarrow x_0=\frac{a+b}{2}=\frac{-3+5}{2}=1$$

مشتق تابع در $x_0=1$ همان شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه است، پس:

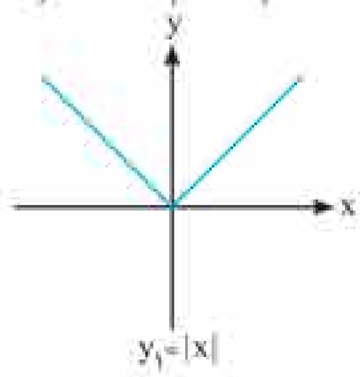
$$f'(x)=3x^2-6x-45 \xrightarrow{x=1} f'(1)=3-6-45=-48$$

۵۹۶. گزینه ۲ عبارت زیر رادیکال خیلی آشناست، پس ابتدا تابع رو ساده کن:

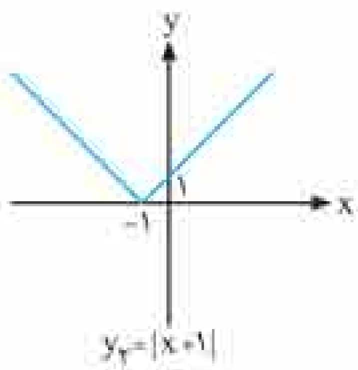
$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{(x+1)^2}-2=|x+1|-2$$

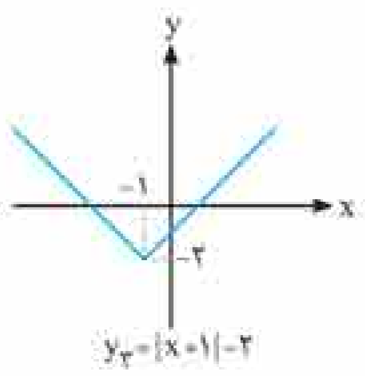
$\xrightarrow[\text{رسم کن}]{\text{نمودار تابع رو}}$



$\xrightarrow[x \to x+1]{\text{۱واحد برو چپ}}$



$\xrightarrow{\text{۲واحد برو پایین}}$



پس با توجه به نمودار تابع $f(x)$، این تابع ابتدا نزولی، سپس صعودی است.

۵۹۷. گزینه ۴ با یک تابع گویا مواجه هستیم، پس حواستون به ریشه‌های مخرج باشه:

$1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (ریشه‌های مخرج)

با این اوصاف گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» رد می‌شوند، چون هر سه گزینه ریشه‌ی مخرج را در بر می‌گیرند؛ پس پاسخ درست گزینه‌ی «۴» است. این هم مشتق تابع که همواره مثبت است:

$$y=\frac{x}{1-x^2} \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=\frac{1\times(1-x^2)-(-2x)(x)}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}>0$$

دقت کنید که اگر در این تست، مشتق را حساب نکنید، مشکلی پیش نمی‌آید.

۵۹۸. گزینه ۲

یادآوری: در فصل تابع آموختیم که ترکیب دو تابع صعودی (یا دو تابع نزولی)، تابعی صعودی و ترکیب یک تابع صعودی با یک تابع نزولی، تابعی نزولی است. **اینم دلیلش** (به کمک مشتق):

$$\begin{cases} f \text{ نزولی است} \Rightarrow f'(x)\le 0 \\ g \text{ نزولی است} \Rightarrow g'(x)\le 0 \end{cases} \quad *$$

$$y=(fog)(x) \xrightarrow[\text{طبق } *]{\text{مشتق بگیر}} y'=\underbrace{g'(x)}_{\text{منفی}}\times\underbrace{f'(g(x))}_{\text{منفی}}$$

$$\xrightarrow{\text{منفی در منفی می‌شود، مثبت}} y'\ge 0$$

یعنی تابع fog صعودی است. برای حالت‌های دیگر نیز به همین ترتیب.

اما در این تست دنبال بازه‌ای هستیم که $(fog)'(x)<0$ باشد، یعنی باید یکی از توابع f یا g صعودی و دیگری نزولی باشد.

گزینه‌ی «۱»: در بازه‌ی $(-3,-\frac{3}{2}]$ تابع g ثابت و $g'(x)=0$ و در نتیجه $(fog)'(x)=0$ است. در بازه‌ی $(-\frac{3}{2},1)$ هم g' و f' هر دو منفی‌اند و $(fog)'(x)>0$ است.

گزینه‌ی «۲»: در بازه‌ی $(4,6)$ تابع g نزولی و $g'(x)<0$ و f صعودی و $f'(x)>0$ است، در نتیجه $(fog)'(x)<0$ است. ✓

گزینه‌ی «۳»: در بازه‌ی $(-1,1)$ هر دو تابع نزولی هستند و در نتیجه $(fog)'(x)>0$ است.

گزینه‌ی «۴»: در بازه‌ی $(-1,1)$ همان طور که بیان شد، $(fog)'(x)>0$ است. در بازه‌ی $(1,2)$ نیز تابع f ثابت و $f'(x)=0$ و در نتیجه $(fog)'(x)=0$ است.

۵۹۹. گزینه ۲ ترکیب دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً صعودی است.

۶۰۰. گزینه ۲

$$g(x)=\frac{1}{x^2+1} \xrightarrow[\text{پس مشتق رو بررسی کن}]{\text{مخرج ریشه نداره،}} g'(x)=\frac{0-2x}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{\text{همواره مثبت}}}$$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x=0$$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗		↘	

→ گزینه‌ی «۲»

۶۰۱. گزینه ۲ ابتدا به کمک ویژگی‌های قدرمطلق، تابع داده‌شده را ساده می‌کنیم و آن را به شکل یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=(x^2-3x)|x|=\begin{cases}(x^2-3x)(x) & x\ge 0 \\ (x^2-3x)(-x) & x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} y=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge 0 \\ -x^3+3x^2 & x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=\begin{cases}3x^2-6x & x>0 \\ -3x^2+6x & x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{تعیین علامت کن}]{\text{مشتق رو}} 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2\end{cases}$$

توجه کنید که تفاوت ضابطه‌های بالایی و پایینی در مشتق در یک منفی است که این منفی تأثیری در ریشه‌های $y'=۰$ ندارد، ولی موقعی که y' رو تعیین علامت می‌کنید، باید حواستون به محدوده‌ی x باشه.

تذکر: در تعیین علامت توابع چندضابطه‌ای، علاوه بر ریشه‌ها باید نقاط مرزی هم در جدول تعیین علامت وارد شوند.

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$+$	
y		↘		↘		↗	

ضابطه‌ی پایینی — ضابطه‌ی بالایی

$\xrightarrow[y'<۰]{\text{باید تابع نزولی باشد}} x\in(-\infty,۲)$

۶۰۲. گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x+۲}{۲x^۲+۴x+۵}\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}$$

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(۲x^۲+۴x+۵)-\overbrace{(۴x+۴)}^{۲(۲x+۲)}(x^۲+۲x+۲)}{(۲x^۲+۴x+۵)^۲}$$

$$\xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{فاکتور}}f'(x)=\frac{(۲x+۲)(\cancel{۲x^۲}+\cancel{۴x}+۵-\cancel{۲x^۲}-\cancel{۴x}-۴)}{(۲x^۲+۴x+۵)^۲}$$

$$=\frac{۲x+۲}{\underbrace{(۲x^۲+۴x+۵)^۲}_{\text{همواره مثبت}}}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow ۲x+۲=۰$$

$\Rightarrow x=-۱ \xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	

پس تابع f، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۶۰۳. گزینه ۳ نامعادله‌ی $f'(x)\geq ۰$ را حل کن:

$$f(x)=\frac{x+a}{x^۲+۵}\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}f'(x)=\frac{۱\times(x^۲+۵)-۲x(x+a)}{(x^۲+۵)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}}f'(x)=\frac{x^۲+۵-۲x^۲-۲ax}{(x^۲+۵)^۲}=\frac{-x^۲-۲ax+۵}{\underbrace{(x^۲+۵)^۲}_{\text{همواره مثبت}}}\geq ۰$$

$$\Rightarrow -x^۲-۲ax+۵\geq ۰\xrightarrow{\text{نامعادله رو حل کن}}-x^۲-۲ax+۵=۰ \quad ۱$$

اگر در معادله‌ی ۱، $\Delta\leq ۰$ باشد، سه‌جمله‌ای $-x^۲-۲ax+۵$ همواره منفی و در نتیجه تابع روی $\mathbb{R}$ همواره اکیداً نزولی می‌شود در حالی‌که در صورت تست گفته شده است که تابع در بازه‌ی $[-۵,b]$ صعودی است، پس باید $\Delta>۰$ باشد تا مشتق تغییر علامت بدهد. با فرض $\Delta>۰$ معادله دو ریشه دارد: $x_۱$ ، $x_۲$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$\xrightarrow[f'\geq ۰]{\text{باید تابع f صعودی باشه}}x\in[x_۱,x_۲] \quad ۲$

پس با توجه به رابطه‌ی ۲ نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases}x_۱=-۵\\ x_۲=b\end{cases} \quad ۳$$

$x_۱=-۵$ ریشه‌ی معادله‌ی ۱ است، پس در آن صدق می‌کند:

$$-(-۵)^۲-۲a(-۵)+۵=۰\Rightarrow -۲۵+۱۰a+۵=۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a=۲۰\Rightarrow a=۲$$

با جای‌گذاری $a=۲$ در معادله‌ی ۱ داریم:

$$-x^۲-۴x+۵=۰\xrightarrow{\times(-۱)}x^۲+۴x-۵=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x_۱=\frac{c}{a}=-۵\\ x_۲=۱\end{cases}\xrightarrow{۳}x_۲=b=۱$$

برای به‌دست آوردن b می‌توانید از رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دو هم کمک بگیرید:

$$-x^۲-۲ax+۵=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۵\\ x_۲=b\end{cases}$$

$$\text{حاصل‌ضرب ۲ ریشه}=\frac{c}{a}=\frac{۵}{-۱}=-۵b\Rightarrow b=۱$$

۶۰۴. گزینه ۳ با توجه به شکل‌های داده‌شده جهت تغییرات هر چهار گزینه متفاوت است؛ پس با تعیین علامت مشتق می‌توانیم گزینه‌ی درست را انتخاب کنیم: $y=-x^۳+۳x^۲+۹x+۴$

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}y'=-۳x^۲+۶x+۹=-۳(x^۲-۲x-۳)$$

$$y'=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x_۱=-۱\\ x_۲=\frac{-c}{a}=۳\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y		↘		↗		↘	

با توجه به جدول تغییرات، مشاهده می‌کنیم که تابع، دو بار تغییر جهت داده و این تغییر جهت در ابتدا از نزولی به صعودی و بعد از صعودی به نزولی است و این مطلب فقط در گزینه‌ی «۳» مشاهده می‌شود.

۶۰۵. گزینه ۱ فرض تست این است که $f(x)$ اکیداً صعودی است، یعنی: $f'(x)>۰$

حال همه‌ی توابع داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

$$y_۱=f^۳(x)\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}y_۱'=۳\underbrace{f^۲(x)}_{\text{مثبت}}\underbrace{f'(x)}_{\text{مثبت}}$$

$\Rightarrow y_۱'>۰\Rightarrow$ صعودی است.

$y_۲=f(x^۲)\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}y_۲'=\underbrace{۲x}_{\text{نامعلوم}}\underbrace{f'(x^۲)}_{\text{مثبت}}\Rightarrow$ غیر یکنوا است.

$y_۳=f(-x)\xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{مشتق}}y_۳'=-\underbrace{f'(-x)}_{\text{مثبت}}\Rightarrow y_۳'<۰\Rightarrow$ نزولی است. ✓

$y_۴=f(\frac{۱}{x})\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}y_۴'=\frac{-۱}{x^۲}f'(\frac{۱}{x})\Rightarrow y_۴'$ در صفر وجود ندارد

$\Rightarrow$ نمی‌توان اظهار نظر کرد.

توجه داشته باشید که دامنه‌ی تابع $y_۴$، شامل صفر نیست. پس قبل از حل هم می‌توانستیم بگوییم که این تابع همواره یکنوا نیست. چون قبلاً گفتیم که توابع گویایی که مخرجشان صفر شود، غیر یکنوا هستند. برای $f(\frac{۱}{x})$ می‌توانیم مثال زیر را در نظر بگیریم:

$$\underbrace{f(x)=x}_{\text{اکیداً صعودی}}\Rightarrow\underbrace{f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}}_{\text{غیریکنوا}}$$

۶۰۶. گزینه ۱

(۱) باید مشتق در این بازه منفی باشد، پس:

$$y=\frac{ax+۲}{x+a-۱}\xrightarrow{\text{مشتق تابع هموگرافیک}}y'=\frac{a(a-۱)-۲(۱)}{\underbrace{(x+a-۱)^۲}_{\text{همواره مثبت}}}<۰$$

$$\Rightarrow a(a-۱)-۲<۰\Rightarrow a^۲-a-۲<۰\Rightarrow(a-۲)(a+۱)<۰$$

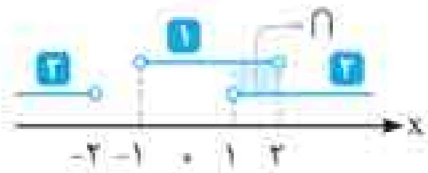
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۱<a<۲ \quad ۱$$

(۲) ریشه‌ی مخرج نباید در بازه‌ی $(۰,۳)$ قرار داشته باشد، یعنی:

ریشه‌ی مخرج: $x+a-۱=۰\Rightarrow x=۱-a\notin(۰,۳)$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱-a<۰\Rightarrow a>۱\\ \text{یا}\\ ۱-a>۳\Rightarrow a<-۲\end{cases} \quad ۲$$

$\xrightarrow{\text{بازه‌ها رو نمایش بده}}$



$\Rightarrow$ ① $\cap$ ② $=(1,2)$

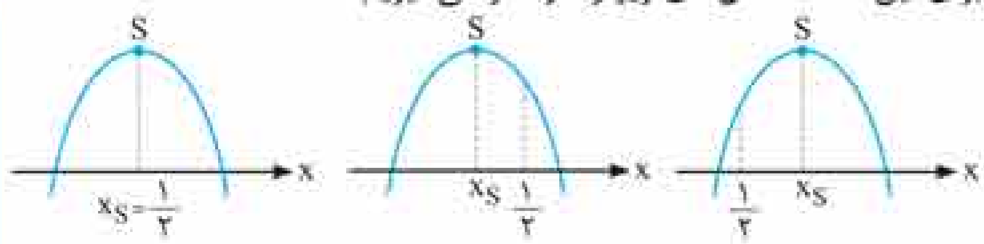
در این بازه هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

۶۰۷. **گزینه ۲** تابع داده‌شده، یک تابع درجه‌ی دو است؛ پس برای آن دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول ضریب x^2 منفی باشد:

$a-1<0\Rightarrow a<1\Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.

برای این حالت شکل‌های زیر را در نظر می‌گیریم:



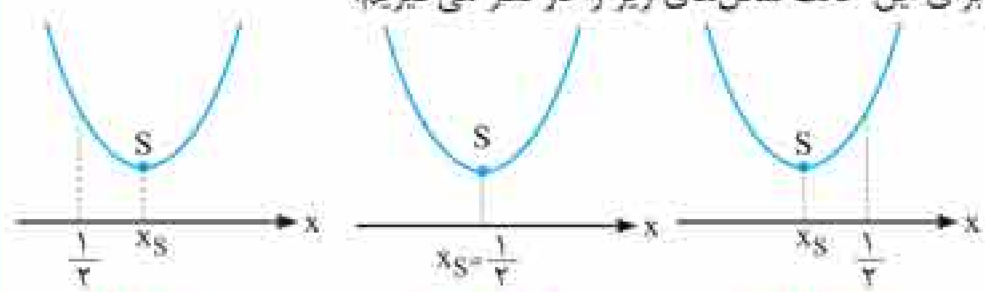
شکل «۱» شکل «۲» شکل «۳»

همان‌طور که در شکل‌های «۱»، «۲» و «۳» می‌بینید، امکان ندارد که تابع در این حالت، برای $x\ge\frac{1}{2}$ صعودی باشد؛ پس حالت اول رد می‌شود.

حالت دوم ضریب x^2 مثبت باشد:

$a-1>0\Rightarrow a>1$ ① $\Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست.

برای این حالت شکل‌های زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل «۳» شکل «۵» شکل «۴»

در شکل «۳» هم تابع برای $x\ge\frac{1}{2}$ صعودی نیست؛ پس با توجه به شکل‌های «۴» و «۵» برای این‌که تابع در بازه‌ی $[\frac{1}{2},+\infty)$ صعودی باشد، باید طول رأس سهمی کوچک‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ باشد؛ بنابراین:

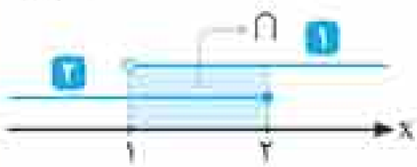
$$y=(a-1)x^2-(2a-3)x+1\Rightarrow x_S=\frac{-B}{2A}=\frac{2a-3}{2(a-1)}\le\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\times 2]{\text{نامعادله رو حل کن}}\frac{2a-3}{a-1}\le 1$$

با توجه به شرط ①، $a-1>0$ است، پس می‌توانیم دو طرف نامعادله‌ی بالا را در $a-1$ ضرب کنیم؛ بنابراین:

$$\frac{2a-3}{a-1}\le 1\xrightarrow{\times(a-1)}2a-3\le a-1\Rightarrow 2a-a\le -1+3$$

$\Rightarrow a\le 2$ ②



$\xrightarrow{①\cap②}1<a\le 2$

که تنها عدد صحیح این بازه $a=2$ است.

۶۰۸. **گزینه ۴** در این تست با انتخاب $g(x)=\frac{2x^3}{3}-4x^2+11$ و $f(x)=2^x$ درمی‌یابیم که تابع y، همان تابع fog است. همچنین در فصل توابع نمایی و لگاریتمی آموختیم که تابع $f(x)=2^x$ همواره صعودی است. از طرفی می‌دانیم که ترکیب یک تابع صعودی و یک تابع نزولی، تابعی نزولی است؛ پس برای این‌که y نزولی باشد، باید بازه‌ای را که g در آن نزولی است، پیدا کنیم. بنابراین:

$$g(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+11$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}g'(x)=2x^2-8x=2x(x-4)$$

$$\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow 2x(x-4)<0\Rightarrow 2x(x-4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-4=0\Rightarrow x=4\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{تشکیل جدول تغییرات}}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

پس تابع g و در نتیجه تابع $y=(fog)(x)$ در بازه‌ی $(0,4)$ نزولی است، یعنی:

$$(a,b)=(0,4)\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}}b-a=4-0=4$$

۶۰۹. **گزینه ۳**

تابع f همواره صعودی است، یعنی: $f'(x)\ge 0$

$$f(x)=x^3-(m+2)x^2+3x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3\ge 0$$

شرط آن‌که سه‌جمله‌ای درجه‌ی دو همواره نامنفی باشد آن است که:

$$\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در این تست}}\begin{cases}a=3>0\ ✓\\ \Delta=(-2(m+2))^2-4\times 3\times 3\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta=4(m^2+4m+4)-36\le 0\xrightarrow{\div 4}m^2+4m+4-9\le 0$$

$$\Rightarrow m^2+4m-5\le 0\xrightarrow{\text{تجزیه کن}}(m+5)(m-1)\le 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت کن}}-5\le m\le 1 \quad ✿$$

حالا ریشه‌ی معادله‌ی $f''(x)=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3$$

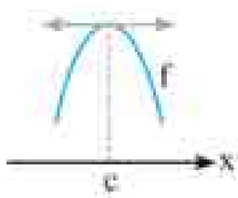
$$\xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{مشتق دوم}}f''(x)=6x-2(m+2)\Rightarrow f''(x)=0$$

$$\Rightarrow 6x=2(m+2)\xrightarrow{\div 6}x=\frac{m+2}{3}$$

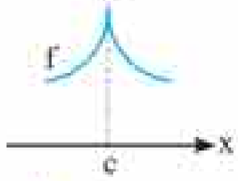
با توجه به رابطه‌ی ✿ داریم:

$$-5\le m\le 1\xrightarrow{+2}-3\le m+2\le 3\xrightarrow{\div 3}-1\le\frac{m+2}{3}\le 1$$

۶۱۰. **گزینه ۱** شرط لازم برای این‌که تابعی در $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد، این است که در همسایگی این نقطه تعریف شده باشد. نقاط اکسترمم نسبی تابع ممکن است ناپیوسته یا مشتق‌ناپذیر باشند. در همه‌ی شکل‌های زیر تابع در $x=c$ اکسترمم نسبی دارد:

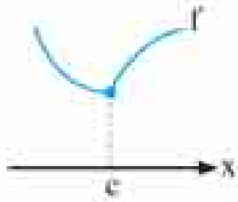


f در c پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f'(c)=0$ و در c ماکزیمم نسبی دارد.



f در c پیوسته است و $f'(c)$ وجود ندارد و در c ماکزیمم نسبی دارد.

f در c ناپیوسته است و در c مینیمم نسبی دارد.



f در c پیوسته و مشتق‌ناپذیر است و در c مینیمم نسبی دارد.

۶۱۱. **گزینه ۱** هر اکسترمم مطلقی، اکسترمم نسبی نیست؛ بلکه باید تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد. از طرفی ممکن است تابع در نقاط اکسترمم خود ناپیوسته یا مشتق‌ناپذیر باشد یا حتی مشتق تابع برابر صفر باشد؛ پس کامل‌ترین گزینه، گزینه‌ی «۱» است.