فهرست

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

نیم‌نگاه

به خلاصه‌ی برخی از نکات در این فصل اشاره می‌کنیم:

الف رادیکال: $(m, n, p \in \mathbb{N})$

۱ بیرون‌آوردن عدد از زیر رادیکال:

$$\begin{cases} \text{فرد } n: \sqrt[n]{a^n} = a \\ \text{زوج } n: \sqrt[n]{a^n} = |a| \end{cases}$$

۲ بردن عدد به زیر رادیکال:

$$\begin{cases} \text{فرد } n: a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \\ \text{زوج } n, a > 0: a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \\ \text{زوج } n: a < 0: a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n \cdot b} \end{cases}$$

۳ ساده‌کردن توان و فرجه با هم: $(m,n,p \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} a > 0: \sqrt[mn]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^p} \\ a < 0, \text{فرد } n: \sqrt[mn]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^p} \\ a < 0, \text{زوج } n: \sqrt[mn]{a^{np}} = \sqrt[m]{|a|^p} \end{cases}$$

۴ ضرب‌کردن توان و فرجه در یک عدد: $(m,n,p \in \mathbb{N})$

$$a > 0: \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{np}}$$

$$a < 0 \quad , \text{فرد } n: \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{np}}$$

$$a < 0, \text{زوج } n, \text{فرد } p: \sqrt[m]{a^p} = -\sqrt[mn]{a^{np}}$$

۵ نوشتن رادیکال به صورت توان کسری:

$$a > 0: \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

۶ فرجه‌های متوالی:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$$

۷ ریشه‌ی nاُم:

ریشه‌ی nاُم عدد b برابر a است. $\Leftrightarrow a^n = b$

۸ فرمول رادیکال مرکب:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

در واقع می‌توان گفت در رادیکال‌ها وقتی اعداد مثبت هستند، قواعد رادیکال برای آن‌ها برقرار است، اما وقتی عدد منفی باشد باید بااحتیاط قواعد رادیکال‌ها را برای آن‌ها به کار برد.

ب اتحادها:

برخی از اتحادهای مهم که در متن کتاب درسی آمده است:

۱ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ اتحاد مربع مجموع دو جمله

۲ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ اتحاد مربع تفاضل دو جمله

۳ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ اتحاد مربع مجموع سه جمله

۴ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ اتحاد مزدوج (تفاضل مربعات)

۵ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ اتحاد جمله‌ی مشترک

۶ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ اتحاد مکعب مجموع دو جمله

۷ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

۸ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ اتحاد مجموع مکعبات

۹ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ اتحاد تفاضل مکعبات

اما برای حل مسائلی که کمی فراتر از سطح کتاب درسی هستند لازم است چند اتحاد دیگر را متذکر شویم:

۱۰ اتحاد مربع مجموع n جمله‌ای: $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2=\underbrace{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)}_{\text{مجموع مربع جملات}}+2\underbrace{(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)}_{\text{مجموع حاصل ضرب دوبه‌دوی تمام جملات}}$

۱۱ اتحاد تعمیم جمله‌ی مشترک: $(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}$

$+\cdots+\underbrace{(a_1a_2a_3\cdots a_k+\cdots)}_{\text{مجموع حاصل ضرب k به k ی جملات غیرمشترک}}x^{n-k}+\cdots+a_1a_2\ldots a_n$

مثال $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

۱۲ اتحاد مکعب مجموع سه جمله: $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3a^2c+3ac^2+6abc$

این اتحاد را به صورت مقابل نیز می‌توان نوشت: $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

۱۳ اتحاد اویلر: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$

که در این اتحاد پرانتز دوم در سمت راست تساوی را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

پس خواهیم داشت: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2])+3abc$

۱۴ نتایج اتحاد اویلر:

۲ نتیجه‌ی بسیار مهم از اتحاد اویلر گرفته می‌شود:

۱ نتیجه‌ی : $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

۲ نتیجه‌ی : $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases}$

۱۵ اتحاد لاگرانژ: $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

که از آن نتیجه می‌شود: $(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

و شرط تساوی آن است که $ay=bx$ باشد.

۱۶ اتحاد بسط دوجمله‌ای نیوتن یا $(a+b)^n$ که در واقع نوعی تعمیم اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌باشد. حاصل این اتحاد به صورت زیر است:

$$(a+b)^n=a^n+k_1a^{n-1}b+k_2a^{n-2}b^2+\cdots+k_{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

برای محاسبه‌ی ضرایب k_1، k_2، ... و k_{n-1} روش‌های متعددی وجود دارد که در این‌جا ۲ روش بیان می‌کنیم:

روش اول استفاده از مثلث خیام ـ پاسکال:

این مثلث به صورت روبه‌رو می‌باشد:

که هر عدد از مجموع دو عدد ردیف بالایی آن به دست می‌آید.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \\ &&&&&\vdots&&&&& \end{array}$$

اعداد ردیف $(n+1)$اُم ضرایب $(a+b)^n$ می‌باشد، به طور مثال: $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

روش دوم استفاده از روش بازگشتی:

در این روش از فرمول زیر برای محاسبه‌ی ضریب هر جمله استفاده می‌کنیم:

$(a+b)^n$ ضریب هر جمله: در اتحاد $=\dfrac{(\text{توان a در جمله‌ی قبل})\times(\text{ضریب جمله‌ی قبل})}{\text{تعداد جملات قبلی}}$

مثال $(a+b)^5=a^5+\underbrace{\frac{1\times5}{1}}_{5}a^4b+\underbrace{\frac{5\times4}{2}}_{10}a^3b^2+\underbrace{\frac{10\times3}{3}}_{10}a^2b^3+\underbrace{\frac{10\times2}{4}}_{5}ab^4+\underbrace{\frac{5\times1}{5}}_{1}b^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

۱۷ تعمیم اتحاد مزدوج و تفاضل مکعبات (چاق و لاغر): $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

که این اتحاد برای $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

حال اگر در این اتحاد به جای b، $-b$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a^n-(-b)^n=(a-(-b))(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\cdots+(-b)^{n-1})$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} n\in\mathbb{N}: a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}) \\ n\in \underbrace{E}_{\text{اعداد طبیعی زوج}}: a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-b^{n-1}) \\ n\in \underbrace{O}_{\text{اعداد طبیعی فرد}}: a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1}) \end{cases}$$

۱۸ اگر $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$ باشد، خواهیم داشت: $a=b=c$

اثبات: $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$

$$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0 \Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

مجموع سه عبارت نامنفی صفر شده است، پس هر سه‌تای آن‌ها صفر هستند پس: $a=b=c$

۱۹ اگر a و b حقیقی و $a^2\pm ab+b^2=0$ باشد، خواهیم داشت: $a=b=0$

اثبات: $a^2\pm ab+b^2=0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2\pm 2ab+2b^2=0 \Rightarrow a^2+b^2+(a\pm b)^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a\pm b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$$

۲۰ یک اتحاد مهم: $(a^{2n}+a^n+1)(a^{2n}-a^n+1)=a^{4n}+a^{2n}+1$

اثبات: $(a^{2n}+a^n+1)(a^{2n}-a^n+1)=(a^{2n}+1+a^n)(a^{2n}+1-a^n)=(a^{2n}+1)^2-(a^n)^2=a^{4n}+2a^{2n}+1-a^{2n}=a^{4n}+a^{2n}+1$

۲۱ اگر در یک چندجمله‌ای که برحسب x نوشته شده، مجموع ضرایب برابر صفر باشد، آن چندجمله‌ای بر $x-1$ بخش‌پذیر است؛ یعنی تجزیه شده و یکی از عامل‌های آن $x-1$ خواهد بود.

۲۲ اگر در یک چندجمله‌ای که به صورت $f(x)$ می‌باشد حاصل $f(a)$ صفر شود، آن چندجمله‌ای بر $x-a$ بخش‌پذیر است؛ یعنی تجزیه شده و یکی از عامل‌های تجزیه‌ی آن $x-a$ می‌باشد.

مثال

$f(x)=x^3+x+10$

$f(-2)=0 \Rightarrow f(x)=(x+2)(x^2-2x+5)$

۱- عدد $\sqrt[3]{16\sqrt[4]{250}}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

۱) بین ۱ , ۲ ‏ ۲) بین ۲ , ۳ ‏ ۳) بین ۳ , ۴ ‏ ۴) بین ۴ , ۵

۲- حاصل $\sqrt{-a^2b}+\sqrt{-ab^2}$ همواره برابر کدام است؟

۱) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ ‏ ۲) $a\sqrt{-b}+b\sqrt{-a}$ ‏ ۳) $-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}$ ‏ ۴) $-a\sqrt{-b}-b\sqrt{-a}$

۳- حاصل $x\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}}}$ کدام است؟ $(x \neq 0)$

۱) $\sqrt[3]{x}$ ‏ ۲) $\sqrt{x}$ ‏ ۳) $\sqrt[3]{|x|}$ ‏ ۴) $\sqrt{|x|}$

۴- حاصل $\sqrt[5]{x^4\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{-x^2\sqrt{x^2}}}}$ به ازای $x=-\frac{1}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ‏ ۲) $-\frac{1}{4}$ ‏ ۳) $-\frac{1}{8}$ ‏ ۴) $\frac{1}{8}$

۵- حاصل $\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) 1 ‏ ۲) -1 ‏ ۳) $\sqrt{2}-1$ ‏ ۴) $\sqrt{2}+1$

۶- حاصل $\sqrt{\frac{1}{1-x}}\left(x-1-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$ کدام است؟

۱) صفر ‏ ۲) $2\sqrt{1-x}$ ‏ ۳) $-2\sqrt{1-x}$ ‏ ۴) $-2\sqrt{x+1}$

۷- حاصل $A=\sqrt{4-\sqrt{12}}+\sqrt{4+\sqrt{12}}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ‏ ۲) $\sqrt{3}+2$ ‏ ۳) $\sqrt{12}-1$ ‏ ۴) $\sqrt{12}+1$

۸- حاصل $K=\sqrt[3]{\frac{402^3+603^3+804^3}{204^3+306^3+408^3}}-\sqrt{\frac{402^2+603^2+804^2}{204^2+306^2+408^2}}$ کدام است؟

۱) 1 ‏ ۲) صفر ‏ ۳) 2 ‏ ۴) 3

۹- حاصل $\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ‏ ۲) $4\sqrt{2}$ ‏ ۳) $2\sqrt{2}$ ‏ ۴) 2

۱۰- حاصل $A=\sqrt{5+4\sqrt{3-4\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

۱) بین ۱ , ۲ ‏ ۲) بین ۲ , ۳ ‏ ۳) بین ۳ , ۴ ‏ ۴) بین ۴ , ۵

۱۱- حاصل $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ کدام است؟

۱) 2 ‏ ۲) $\sqrt{2}$ ‏ ۳) $\frac{1}{2}$ ‏ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲- حاصل $S=\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ‏ ۲) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$ ‏ ۳) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ‏ ۴) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

۱۳- اگر $x^{x^{x^{\cdots}}}=4\sqrt{2}$ باشد حاصل $\sqrt[5]{x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[16]{4^{\sqrt{2}}}$ ‏ ۲) $\sqrt[8]{2^{\sqrt{2}}}$ ‏ ۳) $\sqrt[8]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ ‏ ۴) $\sqrt[16]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$

۱۴- در یک آزمایشگاه نوعی باکتری کشت داده می‌شود که در هر ساعت، وزن آن‌ها ۲ برابر می‌شود. اگر در ساعت ۸ صبح وزن باکتری‌ها ۴ گرم باشد در ساعت ۹:۴۵ صبح وزن آن‌ها چند گرم خواهد بود؟ (رشد باکتری‌ها به صورت نمایی است)

۱) $4\sqrt[4]{4}$ ‏ ۲) $8\sqrt[4]{2}$ ‏ ۳) $8\sqrt[4]{4}$ ‏ ۴) $8\sqrt[4]{8}$

۱۵- حاصل $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ‏ ۲) $\sqrt{2}$ ‏ ۳) $-\sqrt{2}$ ‏ ۴) $-\sqrt{3}$

۱۶- حاصل عبارت $A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}$ کدام است؟

۱) 18 ۲) $\frac{121}{20}$ ۳) 19 ۴) 20

۱۷- حاصل $\sqrt{4+\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}-2$ ۲) $\sqrt{\sqrt{5}+1}$ ۳) $\sqrt{4-\sqrt{5}}$ ۴) $\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}$

۱۸- حاصل $x=\sqrt[10]{24+2\sqrt{24+2\sqrt{24+\cdots}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[10]{2}$ ۲) $\sqrt[5]{4}$ ۳) $\sqrt[5]{6}$ ۴) $\sqrt[10]{6}$

۱۹- حداکثر مقدار n برای برقراری نامساوی روبه‌رو چه‌قدر است؟ $(n\in\mathbb{N})$ $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}>0/1$

۱) 100 ۲) 99 ۳) 101 ۴) 98

۲۰- حاصل $\frac{2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{16}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{2}-1$ ۲) $\sqrt[3]{2}+1$ ۳) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$

۲۱- حاصل $(\sqrt[5]{4}-1)\times\frac{\sqrt[5]{4}+1}{\sqrt[5]{2}+1}\times\frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{4}+1}\times\frac{\sqrt[5]{8}+1}{\sqrt[5]{16}-1}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\sqrt[5]{2}$ ۴) $\sqrt[5]{4}$

۲۲- حاصل $K=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) 2 ۴) $\sqrt{2}+2$

۲۳- حاصل $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{5}-1$

۲۴- به ازای چند مقدار طبیعی a حاصل $k=\sqrt{2016-3\sqrt[4]{a}}$ عددی طبیعی می‌باشد؟

۱) 13 ۲) 14 ۳) 15 ۴) 16

۲۵- حاصل $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 1

۲۶- حاصل $\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}$ به ازای $x=\sqrt{37}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{37}$ ۲) $\sqrt{37}$ ۳) $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ۴) $\sqrt{37}-1$

۲۷- حاصل عبارت روبه‌رو به ازای $n=100$ کدام است؟ $S=1+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^2-n}}$

۱) 9 ۲) 10 ۳) $\sqrt{101}$ ۴) $\sqrt{99}$

۲۸- اگر a، b و c اضلاع یک مثلث باشند و a بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$K=\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a-b+c-2\sqrt{ac-bc}}$$

۱) $2\sqrt{c}$ ۲) $2\sqrt{a+b}$ ۳) $2\sqrt{a-b}$ ۴) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$

۲۹- حاصل $A=\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$ برابر است با:

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[4]{8}$

۳۰- حاصل $x=\frac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}$ برابر است با:

۱) $\frac{7}{13}$ ۲) $\frac{9}{11}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۳۱- حاصل عبارت روبه‌رو کدام گزینه است؟ $A=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

۱) ۰/۹ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰/۹۹ ۴) $\frac{9}{11}$

۳۲- حاصل $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{6}$

۳۳- حاصل $\frac{5}{\sqrt[3]{4+3\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{25}}+1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{5}$ ۲) $\sqrt[3]{25}$ ۳) $\sqrt[3]{5}-1$ ۴) $\sqrt[3]{5}+1$

۳۴- حاصل $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{\sqrt{\frac{100}{99}}-\sqrt{\frac{99}{100}}}{\sqrt{9900}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۹ ۳) ۱/۰۱ ۴) ۰/۹۹

۳۵- حاصل $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{13}+2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{13}-2}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۳۶- حاصل $\sqrt[3]{9(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+3)+3}+\sqrt{9+\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{81}}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ ۳) $\sqrt[3]{9}-3$ ۴) ۶

۳۷- حاصل $A=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[n]{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}+\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[n]{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}}$ کدام است؟ $(x\geq 1)$

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{x}$ ۴) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

۳۸- ساده‌شده‌ی عبارت $S=\frac{a^2+2a+(a+1)\sqrt{a^2-9}-3}{a^2-2a+(a-1)\sqrt{a^2-9}-3}$ به ازای $a>3$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{a+3}{a-3}}$ ۲) $\sqrt{\frac{a-3}{a+3}}$ ۳) $\sqrt{a+3}$ ۴) $\sqrt{a-3}$

۳۹- معادله‌ی روبه‌رو چند جواب دارد؟ (تعداد رادیکال‌ها بی‌شمار است) $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{3x}}}}=x$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۴۰- درجه‌ی چندجمله‌ای روبه‌رو نسبت به x چه‌قدر است؟ $(2(x^3-2x^2+1)^5-(x^5-1)^3)^4\cdot(x^3+2x^4-1)^{10}$

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۶ ۴) ۹۶

۴۱- اگر مجموع ضرایب بسط $(x+2y+1)^n$، ۵۶ واحد بیشتر از مجموع ضرایب بسط $(x+y)^n$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۴۲- اگر $P(x)=x^3-1395x^2+1395x-1$ باشد، حاصل $P(1394)$ کدام است؟

۱) ۱۳۹۳ ۲) ۱۳۹۴ ۳) ۱۳۹۵ ۴) ۱۳۹۶

۴۳- اگر $mx^4-12x^3+nx^2-12x+4$ مربع کامل باشد، مقدار $m+n$ کدام گزینه است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۷ ۴) ۲۰

۴۴- اگر $\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{x+y}{x-y}$ با فرض $x>y>0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۴۵- اگر $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۴۶- اگر $a+b-c=4$ باشد، حاصل $a^2-b^2+c^2-16$ کدام است؟

۱) $2(bc-4a)$ ۲) $2(4b-ac)$ ۳) $2(ab-4c)$ ۴) $2(ac-4b)$

۴۷- اگر $x^2+x=1$ باشد، حاصل x^6+4x^3 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۸- حاصل عبارت مقابل به ازای $c=1$ ، $b=\sqrt{5}$ و $a=\sqrt[3]{5}$ کدام است؟ $S=(a+b+c)^3+3(b+c)^2(a+b+c)-(b+c)^3-3(b+c)(a+b+c)^2$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۸

۴۹- اگر y و x حقیقی بوده و داشته باشیم $x^2+y^2=xy$ ، حاصل عبارت روبه‌رو کدام گزینه است؟ $A=x^3+y^3+x^2-y^2+x+y+1$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۵۰- اگر $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$ باشد، حاصل $\frac{a^2-b^2+4}{b-c+2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

۵۱- حاصل $\frac{2\times3\times5\times17\times257}{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{15}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۵۲- اگر $a=\sqrt{3-\sqrt{8}}$ و $b=\sqrt{3+\sqrt{8}}$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) ۴

۵۳- اگر $4x^2+y^2-2x+3y=-\frac{5}{2}$ باشد، حاصل $\frac{y}{x}$ چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) -3 ۳) ۳ ۴) -6

۵۴- حاصل عبارت روبه‌رو را به ازای $x=\sqrt[4]{80}$ و $y=2\sqrt[4]{5}-1$ به دست آورید. $A=\frac{(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)+y^{16}}{(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)+y^8}$

۱) ۸۰ ۲) $\sqrt{80}$ ۳) ۶۴۰۰ ۴) $\sqrt[4]{80}$

۵۵- حاصل $K=\frac{x^{14}+x^{13}+x^{12}+\cdots+x^2+x+3}{x^4-x^3+x^2-x+1}$ ، به ازای $x=2$ کدام است؟

۱) ۲۹۷۹ ۲) ۳۱۷۱ ۳) ۹۹۳ ۴) ۱۰۵۷

۵۶- مجموع ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو کدام گزینه است؟ $(2x-1)^3-(2x-1)^2(x+2)-2(2x-1)(x+2)^2=(2x-1)(3x+1)$

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{6}$

۵۷- اگر $x^2+2x=4$ باشد، حاصل عبارت روبه‌رو چه‌قدر است؟ $P=x(x-1)(x+2)(x-3)(x+3)(x+5)$

۱) ۵۳۲ ۲) -44 ۳) -77 ۴) ۲۵۲

۵۸- اگر $x+\frac{1}{x+2}=6$ باشد، حاصل $(x+2)^2+\frac{1}{(x+2)^2}$ کدام گزینه است؟

۱) ۶۲ ۲) ۱۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۵۹- اگر $(2a-b)(a^2-ab+b^2)=0$ باشد، حاصل $\frac{a^2+b^2}{ab}$ کدام است؟ (b و a حقیقی هستند)

۱) ۱ یا $\frac{5}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۲

۶۰- اگر $a+b+c=0$ و $a^2+b^2+c^2=4$ باشد، حاصل $a^4+b^4+c^4$ کدام گزینه است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۶۱- اگر تساوی $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=x^3$ یک اتحاد باشد، مقدار $abcd$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۶۲- اگر $a=3+\frac{1}{3}$ و $b=a^3-3a$ و $c=b^3-3b$ باشد، حاصل $3^{3^3}+\frac{1}{3^{3^3}}$ کدام است؟

۱) c ۲) c^3-3c ۳) c^3+3c ۴) $(c^3-3c)^3-(c^3-3c)$

۶۳- اگر $3^{\sqrt{\frac{a}{2}}}+3^{-\sqrt{\frac{a}{2}}}=4$ باشد، حاصل $3^{\sqrt{8a}}+3^{-\sqrt{8a}}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۵۲ ۳) ۱۹۴ ۴) ۲۵۶

۶۴- کم‌ترین مقدار عبارت روبه‌رو چه‌قدر است؟ $A=(x^3-x^2)^2+(x^3+x^2-2)^2$

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

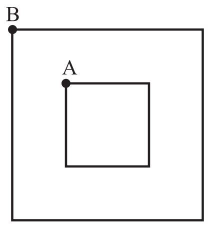
۶۵- اگر $85y^4=((x-y)^2+y^2)((x+y)^2+y^2)$ باشد، حاصل $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4y^2}$ کدام است؟ $(x,y\neq 0)$

۱) $\frac{5}{13}$ ۲) $\frac{11}{15}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{11}{3}$

۶۶- اگر $x+y+z=5$ و $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=70$ باشد، حاصل $(x+y)(x+z)+(y+x)(y+z)+(z+x)(z+y)$ کدام است؟

۱) $-\frac{45}{2}$ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) $-\frac{35}{2}$

۶۷- همانند شکل، عکس مربع‌شکلی را در یک قاب مربع‌شکل طوری چسبانده‌ایم که مرکز مربع‌ها بر هم منطبق است. قسمت‌های خالی قاب را می‌توانیم با یک کاغذ مربع‌شکل به ضلع ۲۰ به طور کامل پوشش دهیم به طوری‌که کاغذی اضافه نمی‌ماند. اگر $AB=5\sqrt{2}$ باشد. ابعاد قاب عکس به کدام صورت است؟



۱) ۲۲×۲۲ ۲) ۲۴×۲۴ ۳) ۲۵×۲۵ ۴) ۳۰×۳۰

۶۸- حاصل عبارت روبه‌رو کدام گزینه است؟ $A=1390^2+1390\times 1395+1395^2+3\times 1390^2\times 279-3\times 1395^2\times 278$

۱) ۱۳۹۰ ۲) ۱۳۹۵ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۵

۶۹- اگر $y^2+z^2-x^2=yz$ و $x^2+z^2-y^2=xz$ و $x^2+y^2-z^2=xy$ و $x,y,z\neq 0$ باشند، حاصل $\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$ کدام است؟ $(x,y,z\neq 0)$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) -2

۷۰- اگر $\begin{cases}a^3-2a^2b+ab^2=7\\4a^2b-2ab^2-b^3=8\end{cases}$ باشد، حاصل $K=4a^2-4ab+b^2$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶۴ ۳) ۲۵ ۴) ۱۶

۷۱- اگر $x+\frac{1}{x-2}=5$ باشد، حاصل $x^2+\frac{121}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۵ ۳) ۳۲ ۴) ۴۱

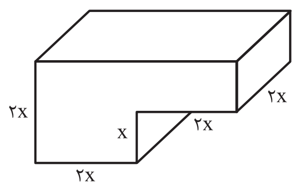
۷۲- اگر $x-\frac{1}{x}=2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$ باشد، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۲ یا ۳۴ ۲) ۷ یا ۳۴ ۳) ۳۴ ۴) ۲

۷۳- حاصل عبارت $(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1$ به ازای $x=\sqrt[4]{5}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲۵

۷۴- در شکل مقابل، یک منبع آب به گنجایش ۱۵۰۰ لیتر رسم شده است. مقدار x کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۵- حاصل $(1/253)^3+(4/747)^3+18(1/253)(4/747)$ کدام گزینه است؟

۱) ۱۸۶ ۲) ۳۶ ۳) ۲۱۶ ۴) ۱۲۵

۷۶- اگر $a^2+b^2+c^2=12$ باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$M=(a+b+c)^4-2(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2)-2(ab+ac+bc)(a+b+c)^2$$

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۴۴

۷۷- اگر $(x^۲+۶x+۷)(x^۲+۶x+۱۱)=۶۲۱$ باشد و $x<۰$ باشد، حاصل $x^۲+۲x$ کدام گزینه است؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۵

۷۸- اگر $x=۱۷۵$ و $y=۲۵$ و $z=-۱۹۹$ باشد، حاصل $(x+y)^۳+(z+۱)^۳-۸$ کدام است؟

۱) -۲۳۷۶۰۰ ۲) ۲۳۷۶۰۰ ۳) ۲۳۸۸۰۰ ۴) -۲۳۸۸۰۰

۷۹- اگر $a+b+c=۶$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۱۶$ و $a^۳+b^۳+c^۳=۶۶$ باشد، حاصل abc کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) ۱۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۱۰

۸۰- حاصل $\frac{(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

۸۱- اگر $a+b+c=۵$ و $a^۳+b^۳+c^۳=۱۵$ باشد، حاصل $(a+b)(b+c)(c+a)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰۰}{۳}$ ۳) ۳۴ ۴) ۳۷

۸۲- اگر $۳^{۳m}+۳^{-۳m}+۳^{m+۱}+۳^{۱-m}=۶۴$ باشد، مقدار $۳^m+۳^{-m}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۴

۸۳- اگر $a^۳+b^۳=۱۶$ باشد، حاصل $\frac{a^۲+۲a+۴}{b^۲+۲b+۴}$ کدام است؟ $(a\,,b\neq ۲)$

۱) $\frac{a-۲}{b-۲}$ ۲) $\frac{۲-a}{b-۲}$ ۳) $\frac{b-۲}{a-۲}$ ۴) $\frac{b-۲}{۲-a}$

۸۴- اگر $x^۴+x^۳-۴x^۲+x+۱=۰$ باشد و $y=x+\frac{۱}{x}$، مجموع مقادیر ممکن برای y کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۵ ۴) -۱

۸۵- اگر $۳a^۲+b^۲-۲ab-۲a-۲b+۳=۰$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۶- اگر تساوی روبه‌رو اتحاد باشد، حاصل K کدام است؟

$$(x^۲+x+۱)^{۱۰۰}=a_{۲۰۰}x^{۲۰۰}+a_{۱۹۹}x^{۱۹۹}+a_{۱۹۸}x^{۱۹۸}+\cdots+a_۱x+a_۰$$

$$K=a_{۲۰۰}+a_{۱۹۸}+a_{۱۹۶}+\cdots+a_۴+a_۲+a_۰$$

۱) $\frac{۳^{۱۰۰}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳^{۱۰۰}+۱}{۲}$ ۳) $۳^{۱۰۰}+۱$ ۴) $۳^{۱۰۰}-۱$

۸۷- اگر $x^۲+۱=x$ باشد، حاصل $(x^۵+\frac{۱}{x^۵})(x^{۱۳۹۵}+\frac{۱}{x^{۱۳۹۵}})$ کدام گزینه است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۸۸- اگر $x^۲+x+y^۲-y=-xy-۱$ باشد، حاصل $\frac{x+۲y}{۲x+y}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۸۹- اگر $b\,,a$ اعداد طبیعی باشند و داشته باشیم $(a+۱)(a+۵)+۲b-b^۲-۸=۰$. مقدار $۳a-۲b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۵

۹۰- معادله‌ی مقابل چند جواب دارد؟ $x^۳+(x^۲-۲)^۳-۶(x^۳-۲x)=-۸$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۱- اگر k ریشه‌ی معادله‌ی $(x+۱)^{۱۱}+(x+۱)^{۱۰}(x-۳)+(x+۱)^۹(x-۳)^۲+\cdots+(x-۳)^{۱۱}=۰$ باشد، حاصل $k^۲+k$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) صفر

۹۲- اگر $(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})(۱-\frac{۱}{۴^۲})\cdots(۱-\frac{۱}{n^۲})=\frac{۵}{۹}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹۳- اگر $x=\sqrt{۲}-۲$ باشد، حاصل عبارت $A=\frac{۳x^۲+۱۲x}{x^۳+۶x^۲+۱۰x-۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۹۴- اگر $۳a^۲+۴b=۷$ و $۳b^۲+۴a=۷$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای ab چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵۳}{۹}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{۵۸}{۹}$ ۴) ۸

۹۵- حاصل $\sqrt{\sqrt{۵۱\times ۵۲\times ۵۳\times ۵۴+۱}-۲۵۵}$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۰

۹۶- اگر $۶x^۲+y^۲=۵xy$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ کدام گزینه است؟ $(x\,,y\neq ۰)$

۱) $\frac{۵}{۲}$ یا $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ یا $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ یا $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) ۲ یا $\frac{۵}{۲}$

۹۷- اگر $x-۱=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۲}+۱}$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{x}+۱)^۶$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) $\sqrt[۳]{۱۶}-۱$ ۴) $\sqrt[۳]{۱۶}+۱$

۹۸- اگر $a=\sqrt{۴x+۱}-۲\sqrt{x-۱}$ باشد، حاصل $\sqrt{۴x+۱}$ برحسب a کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(a-\frac{۵}{a})$ ۲) $\frac{۱}{۲}(a-\frac{۳}{a})$ ۳) $\frac{۱}{۲}(a+\frac{۵}{a})$ ۴) $\frac{۱}{۲}(a+\frac{۳}{a})$

۹۹- اگر $a^۲=b^۲+c^۲$ باشد، حاصل عبارت روبه‌رو کدام گزینه است؟ $A=a^۴+b^۴+c^۴-۲a^۲b^۲-۲b^۲c^۲-۲a^۲c^۲$

۱) $a^۲$ ۲) صفر ۳) $-۴a^۲b^۲$ ۴) $-۴b^۲c^۲$

۱۰۰- اگر بین اعداد حقیقی و مثبت a ، b و c رابطه‌ی $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$ برقرار باشد، مقدار عبارت $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۰۱- چند جفت عدد حقیقی $(x\,,y)$ وجود دارد که در تساوی $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۳}{x+y}$ صدق کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۲- اگر $(x^۲-۹)(x+۵)(x-۱)=-۳۶$ باشد، حاصل $(x+۱)^۴$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۰۰ ۳) ۶۲۵ ۴) ۲۵۶

۱۰۳- حاصل عبارت A چند است؟ $A=۲\times ۱^۲+۱\times ۲+۲\times ۲^۲+۲\times ۳+۲\times ۳^۲+۳\times ۴+۲\times ۴^۲+\cdots+۲\times ۱۰^۲$

۱) ۱۱۰۱ ۲) ۱۰۰۱ ۳) ۱۱۰۰ ۴) ۱۰۱۱

۱۰۴- کم‌ترین مقدار عبارت $(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)+۱۷$ به ازای مقادیر مختلف x چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۵- اگر فقط مختصات یک نقطه از صفحه در تساوی روبه‌رو صدق کند، مقدار m کدام است؟ $(۲x+۱)^۲+(y+۳)^۲=x+y+m$

۱) $\frac{۵۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۴۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۷۳}{۱۶}$

۱۰۶- نمودار رابطه‌ی $x^۳+y^۳+۱=۳xy$ به چه صورت است؟

۱) دو خط راست و یک نقطه خارج از آن‌ها ۲) سه خط راست

۳) یک خط راست و یک نقطه خارج از آن ۴) یک خط راست

۱۰۷- نمودار رابطه‌ی $(x+y+۵)^۳=x^۳+y^۳+۱۲۵$ چگونه است؟

۱) دو خط راست و یک نقطه خارج از آن‌ها ۲) سه خط راست

۳) سه خط راست و یک نقطه خارج از آن‌ها ۴) دو خط راست

۱۰۸- اگر $x+y=۲$ و $xy=-۱$ باشد،حاصل $۱۵x^۲+۹y^۲$ با شرط $|x|>|y|$ کدام است؟

۱) $۱۲(۶-\sqrt{۲})$ ۲) $۲۴(۶+\sqrt{۲})$ ۳) $۲۴(۶-\sqrt{۲})$ ۴) $۱۲(۶+\sqrt{۲})$

۱۰۹- حاصل $A=(x+\frac{۱}{x}-۱)(x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۱)(x^۴+\frac{۱}{x^۴}-۱)(x^۸+\frac{۱}{x^۸}-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^{۳۲}-x^{۱۶}+۱}{x^{۱۵}(x^۲+x+۱)}$ ۲) $\frac{x^{۳۲}+x^{۱۶}+۱}{x^{۱۵}(x^۲-x+۱)}$ ۳) $\frac{x^{۳۲}+x^{۱۶}+۱}{x^{۱۵}(x^۲+x+۱)}$ ۴) $\frac{x^{۳۲}-x^{۱۶}+۱}{x^{۱۵}(x^۲-x+۱)}$

۱۱۰- اگر $a+b+c=۰$ باشد، حاصل K کدام گزینه است؟ $K=\frac{b+c}{bc}(b^۲+c^۲-a^۲)+\frac{a+c}{ac}(a^۲+c^۲-b^۲)+\frac{a+b}{ab}(a^۲+b^۲-c^۲)$

۱) صفر ۲) $a^۲+b^۲+c^۲$ ۳) ۱ ۴) abc

۱۱۱- اگر a و b اعداد طبیعی بوده و داشته باشیم $a = a^۲ + b^۲ - ۸b - ۲ab + ۱۶$. در این صورت عدد a حتماً:

۱) زوج است. ۲) فرد است. ۳) اول است. ۴) مربع کامل است.

۱۱۲- اگر $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=a$ و $x^۲-y^۲=b$ و $x^۳-y^۳=c$ و $|x|\neq|y|$ باشد، حاصل $x+y$ برحسب a، b و c کدام است؟

۱) $\frac{ab+c}{ac}$ ۲) $\frac{ac+b}{ab}$ ۳) $\frac{ab+c}{bc}$ ۴) $\frac{bc+a}{ab}$

۱۱۳- به ازای چه تعداد از اعداد طبیعی n، حاصل $n^۳-۸n^۲+۲۰n-۱۳$ عددی اول است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۴- اگر $c^۲-b^۲=۱۶۰$ و $c^۲-a^۲=۳۱۵$ باشد، و a، b و c طبیعی باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۷۸ ۲) ۱۸ ۳) ۱۳ ۴) ۲۲

۱۱۵- کوچک‌ترین عدد طبیعی N که به ازای آن حاصل عبارت روبه‌رو، مربع کامل شود کدام است؟ $(۲^۲-۱)(۳^۲-۱)(۴^۲-۱)\cdots(N^۲-۱)$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۷

۱۱۶- مجموع ارقام عدد $۱۰۱+۱۰۱^۲+۱۰۱^۳$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۷

۱۱۷- اگر a، b و c سه عدد فرد طبیعی متوالی باشند، بزرگ‌ترین عددی که $\frac{a^۳+b^۳+c^۳-۳abc}{a+b+c}$ همواره بر آن بخش‌پذیر است کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۱۱۸- اگر تفاضل مربعات دو عدد طبیعی، عدد اول P باشد، تفاضل مکعبات آن‌ها کدام گزینه است؟

۱) $۶P-۱۱$ ۲) $\frac{P^۲+۱۶P-۲۹}{۴}$ ۳) $\frac{۳P^۲+۱}{۴}$ ۴) $۲P+۱$

۱۱۹- اگر $(x^{۱۰}+x^۹+x^۸+\cdots+x^۲+x+۱)(x^{۱۰}-x^۹+x^۸-x^۷+\cdots+x^۲-x+۱)=a_{۲۰}x^{۲۰}+a_{۱۹}x^{۱۹}+a_{۱۸}x^{۱۸}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ برقرار باشد، حاصل $a_۰+a_۱+\cdots+a_{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۲۰- اگر $۳x+۲y=۲۶$ باشد کم‌ترین مقدار $x^۲+y^۲$ چه‌قدر است؟

۱) ۷۶ ۲) ۳۸ ۳) ۱۰۴ ۴) ۵۲

۱۲۱- حاصل $A=\frac{۱}{۱+x}+\frac{۲}{۱+x^۲}+\frac{۴}{۱+x^۴}+\frac{۸}{۱+x^۸}+\cdots+\frac{۶۴}{۱+x^{۶۴}}$ به ازای $x=۲$ کدام گزینه می‌شود؟

۱) $۱-\frac{۶۴}{۲^{۶۴}-۱}$ ۲) $۱-\frac{۱۲۸}{۲^{۱۲۸}-۱}$ ۳) $۱+\frac{۱۲۸}{۲^{۱۲۸}-۱}$ ۴) $۱+\frac{۶۴}{۲^{۶۴}-۱}$

۱۲۲- اگر $a+b+c=۶$ و $\frac{a}{b+c}+\frac{۲b}{a+c}+\frac{۳c}{a+b}=۱$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۱}{b+c}+\frac{۲}{a+c}+\frac{۳}{a+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۶}$

۱۲۳- حاصل عبارت روبه‌رو به ازای $x=۲$ کدام گزینه است؟ $A=(x^۸-x^۴+۱)(x^۴-x^۲+۱)(x^۲-x+۱)(x^۲+x+۱)$

۱) $۲^۸+۲^۴+۱$ ۲) $۲^{۱۶}+۲^۸+۱$ ۳) $۲^{۱۶}-۲^۸+۱$ ۴) $۲^{۳۲}+۲^{۱۶}+۱$

۱۲۴- از تساوی روبه‌رو مقدار $A+B+C$ کدام گزینه است؟ $\frac{x^۴-۵x^۳+۲x^۲-۷x+۱}{x^۲-۲x+۳}=x^۲+Ax-۷+\frac{Bx+C}{x^۲-۲x+۳}$

۱) -۱۱ ۲) ۱۴ ۳) -۹ ۴) ۷

۱۲۵- عبارت $x^۶-۱$ شامل چند عامل اول است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۶- در تجزیه‌ی $x^۴+۲x^۲+۹$ چند عامل اول وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۷- بزرگ‌ترین عددی که عبارت $n^۵-۵n^۳+۴n$ به ازای هر مقدار طبیعی n $(n>۲)$ بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۸۰

۱۲۸- در تجزیه $x^۲+x+y^۲+y+۲xy-۲$ کدام عامل زیر وجود دارد؟

۱) $x+y+۱$ ۲) $x+y+۲$ ۳) $x+y-۲$ ۴) $x+y$

۱۲۹- یکی از عامل‌های عبارت x^4+x^2+1 برابر x^2+ax+b می‌باشد. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ یا -۱ ۲) ۱ یا -۲ ۳) ۲ یا -۲ ۴) -۱ یا ۲

۱۳۰- در تجزیه $x(x-2)(x+1)(x+3)-72$ کدام عامل زیر وجود ندارد؟

۱) $x+4$ ۲) $x-3$ ۳) x^2-x+6 ۴) x^2+x+6

۱۳۱- اگر یکی از عوامل تجزیه عبارت x^4+4x^2-x+6، عامل x^2+ax+2 باشد مقدار a کدام است؟

۱) $a=\pm 2$ ۲) $a=\pm 1$ ۳) $a=1$ ۴) $a=-1$

۱۳۲- اگر عبارت $4x^4-17x^2y^2+4y^4$ را به ضرب عامل‌های اول با ضرایب صحیح تجزیه کنیم و یکی از عامل‌ها به‌صورت $ax+by$ باشد، مقدار $a+b$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۳- عبارت $(a+b)^2+(a-b)^2-(a^2-b^2)^2-1$ چندتا از عامل‌های زیر را دارد؟

الف) $a+b+1$ ب) $a+b-1$ ج) $a-b+1$ د) $a-b-1$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۴- در تجزیه‌ی $x^3+y^3-3xy+1$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x+y+1$ ۲) $x+y-1$ ۳) $x-y-1$ ۴) $x-y+1$

۱۳۵- اگر در تجزیه‌ی عبارت x^5+x+1 عامل x^2+x+1 وجود داشته باشد، در تجزیه عبارت $(x-1)^5+x$ کدام عامل زیر وجود دارد؟

۱) x^2-x+1 ۲) x^2-x-1 ۳) x^2+x-1 ۴) x^2+x+1

۱۳۶- اگر عبارت $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ را به‌صورت $(x^4+ax^3+bx^2+cx+1)(x^4+a'x^3+b'x^2+c'x+1)$ بنویسیم حاصل $aa'+bb'+cc'$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) -۲

۱۳۷- در تجزیه $(x^3+x^2+x+1)^2-x^3$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x^4-x^3+x^2-x+1$ ۲) x^3-x^2+x-1 ۳) $x^4+x^3+x^2+x+1$ ۴) x^3+x^2+x+1

۱۳۸- اگر $x^3-y^3=6$ و $x-y=2$ باشد، حاصل $(x+y)^4+x^4+y^4$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۳۹- عدد $A=\overbrace{999\cdots9}^{\text{۱۲تا}}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۳۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۲۳

۱۴۰- اگر $xy+yz+zx=1$ باشد و $x,y,z>0$ حاصل عبارت روبه‌رو کدام گزینه است؟

$$A=\frac{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}}{(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)}$$

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴۱- مجموع ارقام عدد $(10^{2011}+2)^2$ برابر است با: *(آزمون ربوکاپ ۱۳۹۰)*

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) 2^{2011} ۴) $2^{4022}+4$

۱۴۲- مجموع ارقام عدد $(10+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)(10^{16}+1)$ برابر است با: *(آزمون آزمایشی ربوکاپ)*

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۵۹

۱۴۳- کم‌ترین مقدار عبارت $x^2+10x+37$ به ازای مقادیر مختلف x چند است؟ *(آزمون آزمایشی ربوکاپ)*

۱) ۳۷ ۲) -۱۲ ۳) ۱۲ ۴) ۷

۱۴۴- y و x اعداد حقیقی هستند که در رابطه‌ی $(2x+1)^2+y^2+(y-2x)^2=\frac{1}{3}$ صدق می‌کنند، در این صورت مقدار $x+y$ چند است؟ *(مسابقات **IMC**)*

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) صفر ۴) $\frac{3}{2}$ ۵) $\frac{3}{4}$

۱۴۵- حاصل عبارت $S=\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)}{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)(11^4+11^2+1)}$ برابر است با: *(مسابقات **IMC**)*

۱) ۰/۰۱ ۲) $\frac{3}{133}$ ۳) $\frac{1}{130}$

۴) ۰/۰۲ ۵) ۰/۰۲۳

۱۴۶- اگر a ،b و c طبیعی بوده و $a+b^2-c=124$ و $a^2+b-c=100$ باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟ *(المپیاد ریاضی)*

۱) ۷۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۷۳

۴) ۸۲ ۵) ۶۹

۱۴۷- اعداد طبیعی a ،b و c چنانند که $a^3-b^3-c^3=3abc$ و $a^2=2(b+c)$ در این صورت $a+b+c$ کدام است؟ *(المپیاد ریاضی)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴

۴) ۵ ۵) ۶

۱۴۸- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله روبه‌رو چندتا است؟ $(2^x-4)^3+(4^x-2)^3=(4^x+2^x-6)^3$

(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲

۴) ۳ ۵) ۴

۱۴۹- پس از بسط‌دادن $(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)^2$ چندتا از ضرایب فرد است؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۳)*

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷

۴) ۹ ۵) ۱۰

۱۵۰- حاصل $\sqrt{(45-4\sqrt{41})^3}-\sqrt{(45+4\sqrt{41})^3}$ کدام است؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۳)*

۱) ۵۰۸ ۲) ۵۰۴ ۳) $4\sqrt{41}$

۴) $106\sqrt{41}$ ۵) $90^{\frac{3}{2}}$

۱۵۱- عددی طبیعی را مثلثی می‌گوییم هرگاه بتوان به ازای یک n طبیعی آن را به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ نوشت. مثلاً عدد ۱۰ مثلثی است زیرا $10=\frac{4\times5}{2}$ می‌باشد. چند زوج (a,b) از اعداد مثلثی وجود دارند به طوری که $a-b=101$ باشد؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۶)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳

۴) ۴ ۵) ۵

۱۵۲- تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2+x+8=y^2$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چندتا است؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۵)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲

۴) ۳ ۵) ۴

۱۵۳- معادله‌ی $2^x+1=3^y$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۷۴)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲

۴) ۳ ۵) بی‌شمار

۱۵۴- بزرگ‌ترین توانی از ۲ که عدد $N=3^{512}-1$ بر آن بخش‌پذیر باشد کدام است؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۷۷)*

۱) 2^8 ۲) 2^9 ۳) 2^{10}

۴) 2^{11} ۵) 2^{12}

۱۵۵- ضریب x^5 در چندجمله‌ای $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+7)$ پس از بسط‌دادن چند است؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۳)*

۱) ۳۲۲ ۲) ۱۶۱ ۳) ۶۴۴

۴) ۴۸۳ ۵) ۵۰۴۰

۱۵۶- ضریب x^5 در چندجمله‌ای روبه‌رو چند است؟ $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+1382x^{1381})^2(1+x^4+x^8)^2$

(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۲)

۱) ۲۰ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰

۴) ۶۴ ۵) ۷۰

۱۵۷- اگر اعداد طبیعی A ، B و C در دستگاه روبه‌رو صدق کنند مقدار $A+B+C$ کدام است؟

$$\begin{cases} A^۲+۲B^۲-۲BC=۱۰۰ \\ ۲AB-C^۲=۱۰۰ \end{cases}$$

(المپیاد لنینگراد- ۱۹۸۹)

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰ ۵) ۹۰

۱۵۸- دستگاه معادلات روبه‌رو در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} ۱+a^۳+۳ab=b^۳ \\ ۱+a^۵=b^۵ \end{cases}$$

(المپیاد ریاضی - ۱۳۸۲)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) نامتناهی جواب

۱۵۹- a و b عددهایی مثبت‌اند که $a^۲-۲b^۲-ab=۰$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ چه‌قدر است؟ *(المپیاد ریاضی بلغارستان- ۲۰۰۱)*

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) چنین اعدادی وجود ندارد. ۵) نمی‌توان تعیین کرد.

۱۶۰- باقی‌مانده‌ی تقسیم $۵^{۲۲}+۷$ بر ۸ برابر است با: *(المپیاد ریاضی- ۱۳۷۴)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

۱۶۱- به ازای کدام مقدار n معادله‌ی $xy+x+y=n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب ندارد؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۷۴)*

۱) $n=۱۰۰$ ۲) $n=۱۰۵$ ۳) $n=۱۱۰$ ۴) $n=۱۱۵$ ۵) $n=۱۲۰$

۱۶۲- اگر a ، b و c حقیقی بوده و $c^۲+۶a=-۱۴$ و $b^۲+۴c=-۷$ و $a^۲+۲b=۷$ باشند، حاصل abc کدام است؟ *(المپیاد ریاضی با کمی تغییر)*

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲ ۵) ۲۴

۱۶۳- اگر $S=\frac{(۲^۳-۱)(۳^۳-۱)(۴^۳-۱)\cdots(۱۰۰^۳-۱)}{(۲^۳+۱)(۳^۳+۱)(۴^۳+۱)\cdots(۱۰۰^۳+۱)}$ باشد، کدام‌یک از مقادیر زیر به S نزدیک‌تر است؟ *(المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۸۵)*

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۷ ۳) ۰/۶۶۷ ۴) ۰/۶۶۶۷ ۵) ۰/۶۶۶۶۷

۱۶۴- معادله‌ی $۲^x+۳^x-۴^x+۶^x-۹^x=۱$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟ *(المپیاد ریاضی)*

۱) جواب ندارد. ۲) یکی ۳) دوتا ۴) سه‌تا ۵) چهارتا

۱۶۵- در بسط عبارت $(a+b+c)(d-e+f)(g+h-k)(l-m-n)(p+q)$ ضریب چند جمله مثبت است؟ *(المپیاد ریاضی)*

۱) ۱۵ ۲) ۵۱ ۳) ۵۹ ۴) ۷۸ ۵) ۸۴

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی فصل سوم

۱- گزینه۳ چون $۸۱ = ۳^۴$ و $۲۵۶ = ۴^۴$ پس:

$$۳ < \sqrt[۴]{۲۵۰} < ۴ \xrightarrow{\times ۱۶} ۴۸ < ۱۶\sqrt[۴]{۲۵۰} < ۶۴$$

$$\to \sqrt[۳]{۴۸} < \sqrt[۳]{۱۶\sqrt[۴]{۲۵۰}} < \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$$

$$\sqrt[۳]{۴۸} > \sqrt[۳]{۲۷} = ۳ \to ۳ < \sqrt[۳]{۱۶\sqrt[۴]{۲۵۰}} < ۴$$

۲- گزینه۴ چون عبارات زیر رادیکال باید نامنفی باشند پس:

$$-ab^۲ \geq ۰ \Rightarrow a \leq ۰ \ , \ -a^۲b \geq ۰ \Rightarrow b \leq ۰$$

بنابراین عبارت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sqrt{-ab^۲} + \sqrt{-a^۲b} = |b|\sqrt{-a} + |a|\sqrt{-b} \ \underset{b \leq ۰}{\overset{a \leq ۰}{=\!=}} -b\sqrt{-a} - a\sqrt{-b}$$

۳- گزینه۳ اگر عبارتی بخواهد به داخل فرجه برود، باید به توان فرجه رسیده و داخل فرجه برود اما اعداد منفی نمی‌توانند داخل فرجه زوج بروند. در این سؤال x می‌تواند داخل فرجه‌ی ۳ رود و چون $x^۲$ مثبت است، می‌تواند داخل فرجه‌ی ۲ رود.

$$x\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}\sqrt{\frac{۱}{x^۲}}} = \sqrt[۳]{x^۳\frac{۱}{x}\sqrt{\frac{۱}{x^۲}}} = \sqrt[۳]{x^۲\sqrt{\frac{۱}{x^۲}}} = \sqrt[۳]{\sqrt{x^۴ \cdot \frac{۱}{x^۲}}} = \sqrt[۶]{x^۲} = \sqrt[۳]{|x|}$$

۴- گزینه۴ از داخلی‌ترین رادیکال می‌توان شروع کرد و چون قرار است به ازای $x = -\frac{۱}{۸}$ حاصل عبارات را حساب کنیم فرض می‌کنیم x منفی است پس:

$$\sqrt[۵]{x^۴\sqrt[۴]{x^۳\sqrt[۳]{-x^۲|x|}}} = \sqrt[۵]{x^۴\sqrt[۴]{x^۳\sqrt[۳]{-x^۲(-x)}}} = \sqrt[۵]{x^۴\sqrt[۴]{x^۳\sqrt[۳]{x^۳}}}$$

$$= \sqrt[۵]{x^۴\sqrt[۴]{x^۳x}} = \sqrt[۵]{x^۴\sqrt[۴]{x^۴}} = \sqrt[۵]{x^۴|x|} = \sqrt[۵]{x^۴(-x)} = \sqrt[۵]{-x^۵} = -x = \frac{۱}{۸}$$

۵- گزینه۲ برای ضرب دو عبارت رادیکالی باید آن‌ها را هم فرجه کرد:

روش اول

$$\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}\ \sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}\ \sqrt[۶]{(۱+\sqrt{۲})^۲}$$

$$= \sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}} \cdot \sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}} = \sqrt[۳]{۱-۲} = \sqrt[۳]{-۱} = -۱$$

روش دوم اگر بخواهیم فرجه‌ی اول را به ۶ تبدیل کنیم چون زیر فرجه عددی منفی است اول باید منفی آن را خارج کنیم بعد ادامه دهیم:

$$\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}\ \sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}} = -\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}\ \sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}} = -\sqrt[۶]{(\sqrt{۲}-۱)^۲}\ \sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}$$

$$= -\sqrt[۶]{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})} = -\sqrt[۶]{۹-۸} = -۱$$

۶- گزینه۳ چون عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد پس $۱-x$ حتماً مثبت خواهد بود بنابراین $x < ۱$ می‌باشد پس:

$$(x-۱-\sqrt{x^۲-۲x+۱})\sqrt{\frac{۱}{۱-x}} = (x-۱-\sqrt{(x-۱)^۲})\sqrt{\frac{۱}{۱-x}}$$

$$= (x-۱-|x-۱|)\sqrt{\frac{۱}{۱-x}} \ \overset{x<۱}{=\!=} (x-۱+x-۱)\sqrt{\frac{۱}{۱-x}} = ۲(x-۱)\sqrt{\frac{۱}{۱-x}}$$

چون $x-۱ < ۰$ است نمی‌تواند به داخل رادیکال رود، ابتدا از آن منفی فاکتور می‌گیریم سپس:

$$۲(x-۱)\sqrt{\frac{۱}{۱-x}} = -۲(۱-x)\sqrt{\frac{۱}{۱-x}} = -۲\sqrt{(۱-x)^۲(\frac{۱}{۱-x})} = -۲\sqrt{۱-x}$$

۷- گزینه۱

روش اول ابتدا هر دو را به کمک فرمول رادیکال مرکب ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}} + \sqrt{۴-\sqrt{۱۲}} = (\sqrt{\frac{۴+\sqrt{۴}}{۲}} + \sqrt{\frac{۴-\sqrt{۴}}{۲}})$$

$$+(\sqrt{\frac{۴+\sqrt{۴}}{۲}} - \sqrt{\frac{۴-\sqrt{۴}}{۲}}) = (\sqrt{۳}+۱) + (\sqrt{۳}-۱) = ۲\sqrt{۳}$$

روش دوم A را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = \sqrt{۴+\sqrt{۱۲}} + \sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}$$

$$\Rightarrow A^۲ = ۴+\sqrt{۱۲}+۴-\sqrt{۱۲}+۲\underbrace{\sqrt{(۴+\sqrt{۱۲})(۴-\sqrt{۱۲})}}_{۱۶-۱۲=۴}$$

$$\Rightarrow A^۲ = ۸+۴ = ۱۲ \Rightarrow A = \pm ۲\sqrt{۳} \xrightarrow{A>۰} A = ۲\sqrt{۳}$$

۸- گزینه۲ ظاهر سؤال کمی غلط‌انداز است و ما را به یاد چند اتحاد می‌اندازد اما:

$$K = \sqrt[۳]{\frac{۴۰۲^۳+۶۰۳^۳+۸۰۴^۳}{۲۰۴^۳+۳۰۶^۳+۴۰۸^۳}} - \sqrt{\frac{۴۰۲^۲+۶۰۳^۲+۸۰۴^۲}{۲۰۴^۲+۳۰۶^۲+۴۰۸^۲}}$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۲۰۱^۳(۲^۳+۳^۳+۴^۳)}{۱۰۲^۳(۲^۳+۳^۳+۴^۳)}} - \sqrt{\frac{۲۰۱^۲(۲^۲+۳^۲+۴^۲)}{۱۰۲^۲(۲^۲+۳^۲+۴^۲)}}$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۲۰۱^۳}{۱۰۲^۳}} - \sqrt{\frac{۲۰۱^۲}{۱۰۲^۲}} = \frac{۲۰۱}{۱۰۲} - \frac{۲۰۱}{۱۰۲} = ۰$$

۹- گزینه۴ برای آن‌که دو رادیکال را بتوان در هم ضرب کرد باید آن‌ها را هم‌فرجه کرد و فرجه‌ی مشترک در واقع کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌های آن‌ها است، پس:

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\ \sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{(۴-۲\sqrt{۲})^۲}\ \sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}$$

$$= \sqrt[۴]{(۴-۲\sqrt{۲})^۲(۶+۴\sqrt{۲})} = \sqrt[۴]{(۲۴-۱۶\sqrt{۲})(۶+۴\sqrt{۲})}$$

$$= \sqrt[۴]{۸(۳-۲\sqrt{۲})(۲)(۳+۲\sqrt{۲})} = \sqrt[۴]{۸\times ۲\times(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}$$

$$= \sqrt[۴]{۱۶(۹-۸)} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$$

۱۰- گزینه۲ از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$۴-۲\sqrt{۳} = (\sqrt{۳}-۱)^۲ \Rightarrow A = \sqrt{۵+۴\sqrt{۳-۴(\sqrt{۳}-۱)}}$$

$$= \sqrt{۵+۴\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}} = \sqrt{۵+۴\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}} = \sqrt{۵+۴(۲-\sqrt{۳})}$$

$$= \sqrt{۱۳-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(۲\sqrt{۳}-۱)^۲} = ۲\sqrt{۳}-۱ = \sqrt{۱۲}-۱$$

می‌دانیم: $۳ < \sqrt{۱۲} < ۴ \to ۲ < \sqrt{۱۲}-۱ < ۳$

۱۱- گزینه۲ معمولاً وقتی دو رادیکال با هم جمع یا تفریق شوند و عبارت‌های زیر رادیکال مزدوج هم باشند به توان ۲ رساندن عبارت کارساز است:

$$x = \frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲} + \sqrt{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}-۲+۲\sqrt{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}}{\sqrt{۵}+۱}$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵-۴}}{\sqrt{۵}+۱} = \frac{۲\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۵}+۱)}{\sqrt{۵}+۱}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۲ \to x = \pm\sqrt{۲} \xrightarrow{x>۰} x = \sqrt{۲}$$

۱۲- گزینه۴ عبارت $\sqrt{10+2\sqrt5}$ را به کمک فرمول رادیکال مرکب نمی‌توان ساده کرد بنابراین چون عبارات زیر دو رادیکال مزدوج هم هستند با به توان ۲ رساندن عبارت آن را ساده می‌کنیم:

$$S=\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt5}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt5}}$$
$$\Rightarrow S^2=8+2\sqrt{10+2\sqrt5}+8-2\sqrt{10+2\sqrt5}+2\sqrt{64-4(10+2\sqrt5)}$$
$$\Rightarrow S^2=16+2\sqrt{24-8\sqrt5}=16+2\sqrt{4(6-2\sqrt5)}=16+2\sqrt{4(\sqrt5-1)^2}$$
$$=16+4(\sqrt5-1)=16+4\sqrt5-4$$
$$\Rightarrow S^2=12+4\sqrt5\Rightarrow S=\sqrt{12+4\sqrt5}=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt2)^2}=\sqrt{10}+\sqrt2$$

۱۳- گزینه۳ چون تعداد x ها بی‌شمار است، پس:

$$x^{4\sqrt2}=4\sqrt2\xrightarrow{\text{به توان }\sqrt2}(x^{4\sqrt2})^{\sqrt2}=(4\sqrt2)^{\sqrt2}$$
$$\Rightarrow x^8=(4\sqrt2)^{\sqrt2}\xrightarrow{\text{به توان }2}x^{16}=32^{\sqrt2}=2^{5\sqrt2}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[16]{2^{5\sqrt2}}\Rightarrow\sqrt[5]{x}=\sqrt[16]{2^{\sqrt2}}=\sqrt[8]{\sqrt2^{\sqrt2}}$$

۱۴- گزینه۴ اگر فرض کنیم در هر ۱۵ دقیقه وزن آن‌ها x برابر می‌شود و در یک ساعت ۲ برابر می‌شود پس داریم:

$$x^4=2\longrightarrow x=\sqrt[4]{2}$$

حال از ۸ صبح تا ′۹:۴۵ فاصله‌ی زمانی ′۱:۴۵ می‌باشد که ۷ تا ۱۵ دقیقه است یعنی وزن باکتری‌ها x^7 برابر می‌شود. پس وزن باکتری‌ها در ′۹:۴۵ برابر است با:

$$4\times x^7=4(\sqrt[4]{2})^7=4\sqrt[4]{2^7}=4\times2\sqrt[4]{2^3}=8\sqrt[4]{8}$$

۱۵- گزینه۴

روش اول از رادیکال مرکب کمک می‌گیریم به این ترتیب که:

$$\sqrt{2+\sqrt3}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac32}+\sqrt{\frac12}$$
$$\sqrt{2-\sqrt3}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}-\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac32}-\sqrt{\frac12}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2+\sqrt3}+\sqrt{2-\sqrt3}}{\sqrt{2-\sqrt3}-\sqrt{2+\sqrt3}}=\frac{\sqrt{\frac32}+\sqrt{\frac12}+\sqrt{\frac32}-\sqrt{\frac12}}{\sqrt{\frac32}-\sqrt{\frac12}-\sqrt{\frac32}-\sqrt{\frac12}}=\frac{2\sqrt{\frac32}}{-2\sqrt{\frac12}}=-\sqrt3$$

روش دوم عبارت را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt3}+\sqrt{2-\sqrt3}}{\sqrt{2-\sqrt3}-\sqrt{2+\sqrt3}}\Rightarrow x^2=\frac{2+\sqrt3+2-\sqrt3+2\sqrt{4-3}}{2-\sqrt3+2+\sqrt3-2\sqrt{4-3}}$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{4+2}{4-2}=\frac62=3\Rightarrow x=\pm\sqrt3\xrightarrow{x<0}x=-\sqrt3$$

۱۶- گزینه۳ اگر مخرج تمام کسرها را گویا کنیم خواهیم داشت:

$$A=\frac{\sqrt2-1}{(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)}+\frac{\sqrt3-\sqrt2}{(\sqrt3+\sqrt2)(\sqrt3-\sqrt2)}+\cdots$$
$$+\frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{(\sqrt{400}+\sqrt{399})(\sqrt{400}-\sqrt{399})}$$
$$=(\sqrt2-1)+(\sqrt3-\sqrt2)+\cdots+(\sqrt{400}-\sqrt{399})=\sqrt{400}-1=20-1=19$$

۱۷- گزینه۴ ابتدا به کمک فرمول رادیکال مرکب حاصل $\sqrt{4+\sqrt5}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{4+\sqrt5}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-5}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-5}}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}$$
$$\Rightarrow\sqrt{4+\sqrt5}-\sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}$$

۱۸- گزینه۳ اگر طرفین رابطه را به توان ۵ برسانیم خواهیم داشت: $x^5=\sqrt{24+2\sqrt{24+2\sqrt{24+\cdots}}}$

و چون بی‌شمار تکرار وجود دارد، پس:

$$x^5=\sqrt{24+2x^5}\Rightarrow x^{10}=24+2x^5\Rightarrow x^{10}-2x^5-24=0$$
$$\Rightarrow(x^5-6)(x^5+4)=0\Rightarrow\begin{cases}x^5=6\Rightarrow x=\sqrt[5]{6}\\ x^5=-4\ \text{غیرقابل قبول است،زیرا}\ x>0\ \text{است.}\end{cases}$$

۱۹- گزینه۲

روش اول ابتدا $\sqrt n$ را به سمت راست نامساوی می‌بریم سپس دو طرف نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم؛ چون هر دو طرف نامساوی مثبت هستند جهت بر نمی‌گردد:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt n>0/1\Rightarrow\sqrt{n+2}>\sqrt n+0/1$$
$$\xrightarrow{\text{توان }2}n+2>n+0/01+0/2\sqrt n$$
$$\Rightarrow 1/99>0/2\sqrt n\Rightarrow\sqrt n<\frac{1/99}{0/2}=9/95$$
$$\Rightarrow n<(9/95)^2=99/0025\Rightarrow n_{max}=99$$

روش دوم ابتدا دو طرف نامساوی فرض را در مزدوج عبارت سمت چپ ضرب می‌کنیم، بنابراین:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt n>0/1\Rightarrow(\sqrt{n+2}-\sqrt n)(\sqrt{n+2}+\sqrt n)>0/1(\sqrt{n+2}+\sqrt n)$$
$$\Rightarrow n+2-n>0/1(\sqrt{n+2}+\sqrt n)\xrightarrow{\times10}\sqrt{n+2}+\sqrt n<20\quad(I)$$

دو طرف نامساوی فرض را در منفی یک ضرب می‌کنیم، بنابراین:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt n>0/1\Rightarrow-\sqrt{n+2}+\sqrt n<-0/1\quad(II)$$

اگر طرفین نامساوی‌های (I) و (II) را با یکدیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$2\sqrt n<19/9\Rightarrow\sqrt n<9/95\Rightarrow n<99/0025\Rightarrow n_{max}=99$$

۲۰- گزینه۳ اگر مخرج کسر را به صورت زیر بنویسیم پرانتز دوم اتحاد چاق و لاغر می‌شود سپس مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\frac{2}{\sqrt[3]4+\sqrt[3]8+\sqrt[3]{16}}=\frac{2}{(\sqrt[3]2)^2+(\sqrt[3]2)(\sqrt[3]4)+(\sqrt[3]4)^2}\times\frac{\sqrt[3]2-\sqrt[3]4}{\sqrt[3]2-\sqrt[3]4}$$
$$=\frac{2(\sqrt[3]2-\sqrt[3]4)}{(\sqrt[3]2)^3-(\sqrt[3]4)^3}=\frac{2(\sqrt[3]2-\sqrt[3]4)}{-2}=\sqrt[3]4-\sqrt[3]2$$

۲۱- گزینه۱ چون در صورت سؤال $\sqrt[5]{2}$ و یا توان‌های آن تکرار شده است پس از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$\sqrt[5]2=a\Rightarrow\frac{a^3+1}{a^4-1}\times\frac{a^2+a+1}{a^4+a^2+1}\times\frac{a^2+1}{a+1}\times(a^2-1)$$

$$=\frac{\cancel{(a+1)}(a^2-a+1)}{\cancel{(a^2-1)}(a^4+1)}\times\frac{a^2+a+1}{a^4+a^2+1}\times\frac{\cancel{(a^2+1)}\cancel{(a^4-1)}}{\cancel{a+1}}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^4+a^2+1}=\frac{(a^2+1)^2-a^2}{a^4+a^2+1}=\frac{a^4+a^2+1}{a^4+a^2+1}=1$$

۲۲- گزینه۳ در این نوع عبارات اگر طرفین را به توان ۳ برسانیم و از اتحاد زیر استفاده کنیم، ممکن است مفید واقع شود:

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)\Rightarrow K=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow K^3=7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}$$

$$+3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}.(\underbrace{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}}_{k})$$

$$\Rightarrow K^3=14+3\sqrt[3]{49-50}\,K\Rightarrow K^3+3K-14=0$$

$$\Rightarrow (K-2)(K^2+2K+7)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}K=2\\ K^2+2K+7=0\Rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}\Rightarrow K=2$$

۲۳- گزینه۱ با دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}=(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})+(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=(\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}=\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

حال کافی است مخرج کسر را گویا کنیم:

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

۲۴- گزینه۲ برای آن‌که حاصل $\sqrt{2016-3\sqrt[4]{a}}$ یک عدد طبیعی شود باید حاصل عبارت زیر رادیکال مربع کامل شود پس:

$$2016-3\sqrt[4]{a}=K^2\Rightarrow\sqrt[4]{a}=\frac{2016-K^2}{3}\Rightarrow\sqrt[4]{a}=672-\frac{K^2}{3}$$

پس باید $672-\frac{K^2}{3}$ عددی مثبت باشد و K باید مضرب ۳ باشد:

$$672-\frac{K^2}{3}>0\Rightarrow K^2<2016\Rightarrow K\le 44$$

$$\Rightarrow K\in\{3,6,9,\dots,42\}\Rightarrow \text{تعداد جواب}=\frac{42-3}{3}+1=14$$

پس برای K، ۱۴جواب وجود دارد به همین ترتیب برای a نیز ۱۴مقدار وجود خواهد داشت.

۲۵- گزینه۲ عبارت‌های زیر رادیکال را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت پس:

$$\begin{cases}3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2\\ 3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2\end{cases},\quad\begin{cases}17+12\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^2=(\sqrt{2}+1)^4\\ 17-12\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^2=(\sqrt{2}-1)^4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)^4}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}-1)^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}}+\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2-1}=2\sqrt{2}$$

۲۶- گزینه۲ در این نوع مسائل بهتر است اگر عبارت ساده می‌شود، اول آن را ساده کنیم سپس عمل جای‌گذاری مقدار x را انجام دهیم. برای ساده‌سازی از روش تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$\sqrt{x+2}=a\ ,\ \sqrt{x-2}=b$$

$$\Rightarrow\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}=\frac{a^2+ab}{a^2-ab}+\frac{a^2-ab}{a^2+ab}$$

$$=\frac{a(a+b)}{a(a-b)}+\frac{a(a-b)}{a(a+b)}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}=\frac{2(x+2+x-2)}{(x+2)-(x-2)}=\frac{4x}{4}=x=\sqrt{37}$$

۲۷- گزینه۲ اگر مخرج کسر آخر را گویا کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^2-n}}\times\frac{n-\sqrt{n^2-n}}{n-\sqrt{n^2-n}}=\frac{\sqrt{n}(n-\sqrt{n^2-n})}{n^2-(n^2-n)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^2}-\sqrt{n(n-1)})}{n}=\frac{\sqrt{n^2}-\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

پس همه‌ی کسرها را می‌توان به این صورت نوشت:

$$S=1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\sqrt{n}$$

به ازای $n=100$: $S=\sqrt{100}=10$

۲۸- گزینه۴ همان‌طور که در زیر مشاهده می‌کنید عبارات زیر رادیکال‌ها را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت و خواهیم داشت:

$$K=\sqrt{(a+b)+c-2\sqrt{(a+b)c}}+\sqrt{(a-b)+c-2\sqrt{(a-b)c}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{c})^2}+\sqrt{(\sqrt{a-b}-\sqrt{c})^2}$$

$$=|\sqrt{a+b}-\sqrt{c}|+|\sqrt{a-b}-\sqrt{c}|$$

می‌دانیم در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است پس:

$$\begin{cases}a+b>c\Rightarrow\sqrt{a+b}>\sqrt{c}\\ b+c>a\Rightarrow c>a-b\Rightarrow\sqrt{c}>\sqrt{a-b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{a+b}-\sqrt{c}+\sqrt{c}-\sqrt{a-b}=\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$$

۲۹- گزینه۳ چون در صورت کسر عبارت‌های زیر رادیکال مزدوج هم هستند؛ به توان ۲ رساندن عبارت ممکن است راه‌گشا باشد، پس:

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{(\sqrt[4]{8})^2-(\sqrt{\sqrt{2}-1})^2}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{8}-(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}=\frac{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{2(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1})}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}=2\Rightarrow A=\pm\sqrt{2}\xrightarrow{A>0}A=\sqrt{2}$$

۳۰- گزینه۱ با فرض $\sqrt{4+\sqrt{15}}=a$ ، $\sqrt{4-\sqrt{15}}=b$ ، $\sqrt{6+\sqrt{35}}=c$ و $\sqrt{6-\sqrt{35}}=d$ به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$x=\frac{a^3+b^3}{c^3-d^3}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(c-d)(c^2+cd+d^2)}$$

$$=\frac{(a+b)(4+\sqrt{15}-1+4-\sqrt{15})}{(c-d)(6+\sqrt{35}+1+6-\sqrt{35})}=\frac{(a+b)(7)}{(c-d)(13)}$$

$$a+b=\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}\ \underset{\text{مرکب}}{\overset{\text{رادیکال}}{=}}\ \sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=2\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$c-d=\sqrt{6+\sqrt{35}}-\sqrt{6-\sqrt{35}}\ \underset{\text{مرکب}}{\overset{\text{رادیکال}}{=}}\ \sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=2\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}\times 7}{2\sqrt{\frac{5}{2}}\times 13}=\frac{7}{13}$$

۳۱- گزینه۱ فرم کلی کسرها به صورت $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ است ابتدا مخرج این کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\times\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}$$

$$\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)(n+1-n)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

پس تمام کسرها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

که جملات به صورت تلسکوپی با هم حذف می‌شوند و داریم:

$$A=1-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

۳۲- گزینه۲ ابتدا مخرج‌ها را کمی ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \underline{\underline{\text{رادیکال مرکب}}}\ \sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\ \underline{\underline{\text{رادیکال مرکب}}}\ \sqrt{\frac{2+1}{2}}-\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}+\frac{4-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(4+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})+(4-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}-\cancel{4\sqrt{6}}+\cancel{6\sqrt{6}}-\cancel{6\sqrt{2}}+\cancel{12\sqrt{2}}+\cancel{4\sqrt{6}}-\cancel{6\sqrt{6}}-\cancel{6\sqrt{2}}}{18-6}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}}{12}=\sqrt{2}$$

۳۳- گزینه۲ عبارت زیر فرجه‌ی ۳ را می‌توانیم به شکل اتحاد مکعب دوجمله‌ای بنویسیم:

$$4+3\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{25}=5-1+3\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{25}=(\sqrt[3]{5}-1)^3$$

$$\Rightarrow\ \frac{5}{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5}-1)^3}+1}=\frac{5}{\sqrt[3]{5}-1+1}=\frac{5}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{25}$$

۳۴- گزینه۴ ابتدا کسری که فرم کلی کسرها را نشان می‌دهد ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n(n+1)}}\times\frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n^2}}{n(n+1)}$$

$$=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

پس کل عبارت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=0.99$$

۳۵- گزینه۱ صورت و مخرج کسر اول را در $\sqrt{\sqrt{13}-2}$ ضرب می‌کنیم پس:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{13}+2}}\times\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2}}{\sqrt{\sqrt{13}-2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-2}+3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{13}-2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2}}{\sqrt{\sqrt{13}-2}+\sqrt{3}}$$

پس عبارت اصلی به صورت زیر است:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2}}{\sqrt{\sqrt{13}-2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{13}-2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{13}-2}+\sqrt{3}}=1$$

۳۶- گزینه۴ عبارت داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{9(3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3)+3}+\sqrt{9+\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{3}}$$

$$=\sqrt[3]{27+27\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}+3}+\sqrt{9+\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{3}}$$

$$=\sqrt[3]{(3+\sqrt[3]{3})^3}+\sqrt{(3-\sqrt[3]{3})^2}=3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}=6$$

۳۷- گزینه۱ می‌دانیم:

$$\sqrt[n]{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\,.\,\sqrt[n]{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\sqrt[n]{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$$

$$=\sqrt[n]{x-(x-1)}=\sqrt[n]{1}=1$$

یعنی این دو معکوس یکدیگرند، پس:

$$\sqrt[n]{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=K\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{5}}{1+K}+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{1}{K}}=\frac{\sqrt{5}}{1+K}+\frac{\sqrt{5}K}{K+1}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}K}{K+1}=\sqrt{5}\frac{(1+K)}{K+1}=\sqrt{5}$$

۳۸- گزینه۱ از تجزیه و فاکتورگیری کمک می‌گیریم:

$$S=\frac{(a^2+2a-3)+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{(a^2-2a-3)+(a-1)\sqrt{a^2-9}}=\frac{(a-1)(a+3)+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{(a+1)(a-3)+(a-1)\sqrt{a^2-9}}$$

$$=\frac{\sqrt{a+3}\,[\cancel{(a-1)\sqrt{a+3}+(a+1)\sqrt{a-3}}]}{\sqrt{a-3}\,[\cancel{(a+1)\sqrt{a-3}+(a-1)\sqrt{a+3}}]}=\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}$$

۳۹- گزینه۳ چون تعداد رادیکال‌ها بی‌شمار است پس:

$$\sqrt{x+2\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots 2\sqrt{3x}}}}_{x}}=x\ \Rightarrow\ \sqrt{x+2x}=x$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{3x}=x\ \Rightarrow\ 3x=x^2\ \Rightarrow\ x^2-3x=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$$

۴۰- گزینه۲ قبل از هر چیز چند نکته را یادآوری می‌کنم:

۱ اگر دو چندجمله‌ای از درجه‌های m و n که $m>n$ است با هم جمع یا تفریق شوند درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل درجه‌ی بزرگ‌تر یعنی m است.

۲ اگر دو چندجمله‌ای هم‌درجه با درجه‌ی n با یکدیگر جمع یا تفریق شوند درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل حداکثر n است.

۳ اگر دو چندجمله‌ای با درجه‌های m و n در هم ضرب شوند درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل $m+n$ است.

۴ اگر چندجمله‌ای درجه‌ی n به توان m برسد درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل mn است.

با توجه به این نکات داریم: $(D=$ درجه$)$

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{۲(\underbrace{x^۳-۲x^۲+۱}_{D=۳})^۵}_{D=۱۵}-\underbrace{(x^۵-۱)^۳}_{D=۱۵}}_{D=۱۵})^۴}_{D=۱۵\times۴=۶۰}\underbrace{(\underbrace{x^۳+۲x^۴-۱}_{D=۴})^{۱۰}}_{D=۴۰}$$

باید حواسمان باشد که در پرانتز اول $۲x^{۱۵}$ دارد و با $x^{۱۵}$ چندجمله‌ای دوم حذف نمی‌شود پس درجه ۱۵ باقی می‌ماند.

پس درجه‌ی چندجمله‌ای نهایی $۱۰۰=۴۰+۶۰$ می‌باشد.

۴۱- گزینه۴

برای محاسبه‌ی مجموع ضرایب در هر چندجمله‌ای کافی است به جای همه‌ی متغیرهای آن یک قرار دهیم.

بنابراین مجموع ضرایب بسط $(x+۲y+۱)^n$ برابر ۴^n و مجموع ضرایب $(x+y)^n$ برابر ۲^n است پس:

$$۴^n-۲^n=۵۶ \Rightarrow ۴^n-۲^n-۵۶=۰ \xrightarrow{۲^n=t} t^۲-t-۵۶=۰$$

$$\Rightarrow (t-۸)(t+۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۲^n=۸ \\ t=۲^n=-۷ \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases} \Rightarrow n=۳$$

۴۲- گزینه۱ برای محاسبه‌ی $P(۱۳۹۴)$ باید به جای x در عبارت $P(x)$ عدد ۱۳۹۴ را جای‌گذاری کنیم پس:

$$P(۱۳۹۴)=۱۳۹۴^۳-۱۳۹۵\times۱۳۹۴^۲+۱۳۹۵\times۱۳۹۴-۱$$

برای راحتی کار فرض می‌کنیم $a=۱۳۹۴$

$$P(۱۳۹۴)=a^۳-(a+۱)a^۲+(a+۱)a-۱=a^۳-a^۳-a^۲+a^۲+a-۱$$

$$=a-۱=۱۳۹۴-۱=۱۳۹۳$$

۴۳- گزینه۲ با توجه به تعداد جملات واضح است که این عبارت، مربع یک سه‌جمله‌ای است پس خواهیم داشت:

$$(ax^۲+bx+c)^۲=mx^۴-۱۲x^۳+nx^۲-۱۲x+۴$$

$$\Rightarrow a^۲x^۴+b^۲x^۲+c^۲+۲abx^۳+۲acx^۲+۲bcx$$

$$=mx^۴-۱۲x^۳+nx^۲-۱۲x+۴$$

با متحد قراردادن دو چندجمله‌ای به تساوی‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a^۲=m \\ ۲ab=-۱۲ \\ b^۲+۲ac=n \\ ۲bc=-۱۲ \\ c^۲=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b,c)=(۲,-۳,۲) \\ \text{یا} \\ (a,b,c)=(-۲,۳,-۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=a^۲=۴ \\ n=b^۲+۲ac=۹+۸=۱۷ \end{cases} \Rightarrow m+n=۴+۱۷=۲۱$$

۴۴- گزینه۳ معمولاً استفاده از طرفین ـ وسطین در فرض‌هایی که دو کسر با هم برابرند، مفید است:

$$\frac{xy}{x^۲+y^۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲+y^۲=۴xy$$

ظاهر این فرض بسیار به اتحاد مربع دوجمله‌ای شباهت دارد پس:

$$A=\frac{x+y}{x-y} \Rightarrow A^۲=\frac{x^۲+y^۲+۲xy}{x^۲+y^۲-۲xy}=\frac{۴xy+۲xy}{۴xy-۲xy}=\frac{۶xy}{۲xy}=۳$$

$$\Rightarrow A=\pm\sqrt{۳}$$

طبق فرض: $x>y>۰ \Rightarrow A>۰ \Rightarrow A=\sqrt{۳}$

۴۵- گزینه۴

روش اول یک روش معمول استفاده از طرفین ـ وسطین است:

$$\frac{x}{x^۲+x+۱}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲+x+۱=۴x \Rightarrow x^۲+۱=۳x \Rightarrow (x^۲+۱)^۲=۹x^۲$$

$$\Rightarrow x^۴+۱+۲x^۲=۹x^۲ \Rightarrow x^۴+x^۲+۱=۸x^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}=\frac{x^۲}{۸x^۲}=\frac{۱}{۸}$$

روش دوم این راه کمی سخت‌تر است اما بعضی از مسائل فقط با این ایده قابل حل هستند:

$$\frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}=\frac{x^۲}{(x^۲+x+۱)^۲-۲(x^۳+x^۲+x)}$$

$$=\frac{x^۲}{(x^۲+x+۱)^۲-۲x(x^۲+x+۱)}$$

مخرج و صورت را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$=\frac{۱}{(\frac{x^۲+x+۱}{x})^۲-۲(\frac{x^۲+x+۱}{x})}=\frac{۱}{(۴)^۲-۲(۴)}=\frac{۱}{۱۶-۸}=\frac{۱}{۸}$$

روش سوم

$$\frac{x}{x^۲+x+۱}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲+x+۱=۴x \Rightarrow x^۲=۳x-۱$$

$$\Rightarrow x^۴+x^۲+۱=(۳x-۱)^۲+(۳x-۱)+۱=۹x^۲-۶x+۱+۳x$$

$$=۹(۳x-۱)-۳x+۱=۲۴x-۸=۸(۳x-۱) \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}=\frac{۳x-۱}{۸(۳x-۱)}=\frac{۱}{۸}$$

روش چهارم

$$\frac{x}{x^۲+x+۱}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲+x+۱=۴x \Rightarrow \begin{cases} x^۲+x+۱=۴x \\ x^۲-x+۱=۲x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)=۴x.۲x \Rightarrow (x^۲+۱)^۲-x^۲=۸x^۲$$

$$\Rightarrow x^۴+x^۲+۱=۸x^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}=\frac{۱}{۸}$$

-۴۶ گزینه۴ اگر طرفین فرض را به توان ۲ برسانیم علامت a^2، b^2 و c^2 مثبت خواهد شد اما در حکم چون علامت b^2 منفی است پس بهتر است b را به سمت دیگر فرض برده و بعد به توان ۲ برسانیم:

$$a+b-c=4 \Rightarrow a-c=4-b \Rightarrow (a-c)^2=(4-b)^2$$

$$\Rightarrow a^2+c^2-2ac=16+b^2-8b$$

$$\Rightarrow a^2-b^2+c^2-16=2ac-8b=2(ac-4b)$$

-۴۷ گزینه۱

روش اول یک روش متداول، روش تقلیل توان است. به این ترتیب که:

$$x^2+x=1 \Rightarrow x^2=1-x$$

حال هر جا که x^2 داشتیم به جای آن $1-x$ قرار می‌دهیم:

$$x^6=(x^2)^3=(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3$$

$$=1-3x+3(1-x)-x(1-x)=1-3x+3-3x-x+\underbrace{x^2}_{1-x}=5-8x$$

$$x^6+4x^3=5-8x+4x(1-x)=5-8x+4x-4x^2$$

$$=5-4x-4(1-x)=5-4x-4+4x=1 \Rightarrow x^6+4x^3=1$$

روش دوم استفاده از اتحاد $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$:

$$x^2+x=1 \to (x^2+x)^3=1 \Rightarrow x^6+x^3+3x^2\cdot x(\underbrace{x^2+x}_{1})=1$$

$$\Rightarrow x^6+x^3+3x^3=1 \Rightarrow x^6+4x^3=1$$

روش سوم استفاده از نتیجه اتحاد اویلر

اتحاد اویلر:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$$

نتیجه‌ی اتحاد اویلر: $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

$$x^2+x=1 \Rightarrow x^2+x+(-1)=0 \Rightarrow x^6+x^3+(-1)$$

$$=3x^2\cdot x(-1) \Rightarrow x^6+x^3-1=-3x^3 \Rightarrow x^6+4x^3=1$$

-۴۸ گزینه۳ در این نوع مسائل که ظاهری بزرگ دارند و عبارت‌های تکراری در آن‌ها زیاد است روش تغییر متغیر مناسب خواهد بود:

$$\begin{matrix}a+b+c=x\\ b+c=y\end{matrix} \Rightarrow S=x^3+3y^2x-y^3-3yx^2$$

$$\Rightarrow S=(x-y)^3=(a+b+c-b-c)^3=a^3=(\sqrt[3]{5})^3=5$$

کاملاً واضح است که جای‌گذاری a، b و c در ابتدای مسئله کاری بیهوده است.

-۴۹ گزینه۲ تنها اعداد حقیقی که در تساوی $x^2+y^2=xy$ صدق می‌کنند $x=y=0$ می‌باشند. زیرا:

$$x^2+y^2=xy \Rightarrow x^2+y^2-xy=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2-2xy=0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2+x^2+y^2=0$$

جمع سه عبارت نامنفی صفر شده است پس باید هر سه صفر شوند، بنابراین:

$$x=y=0 \Rightarrow A=x^3+y^3+x^2-y^2+x+y+1=1$$

$(x, y\in\mathbb{R})$:

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=0 \Rightarrow x=y=0\\ x^2+xy+y^2=0 \Rightarrow x=y=0\end{cases}$$

اثبات: $\xrightarrow{\times 2} 2x^2\pm 2xy+2y^2=0$

$$\Rightarrow (x\pm y)^2+x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$$

جمع سه عبارت نامنفی صفر شده است پس هر سه باید صفر شوند.

-۵۰ گزینه۱ ابتدا به کمک فرض ثابت می‌کنیم $a=b=c$، به این ترتیب که:

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$$

$$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

مجموع سه عبارت نامنفی صفر شده است، پس هر سه باید صفر شوند:

$$\begin{cases}a=b\\ b=c\\ c=a\end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \frac{a^2-b^2+4}{b-c+2}=\frac{4}{2}=2$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Rightarrow a=b=c$$

-۵۱ گزینه۲ محاسبه‌ی مخرج و صورت امکان‌پذیر نیست پس باید آن‌ها را با ظاهری متفاوت نوشت:

$$\text{صورت کسر}=2\times3\times5\times17\times257=2\times1\times3\times5\times17\times257$$

$$=2\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(2-1)(2+1)}_{2^2-1}(2^2+1)}_{2^4-1}(2^4+1)}_{2^8-1}(2^8+1)}_{2^{16}-1}=2(2^{16}-1)$$

$$\text{مخرج}=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{15}$$

$$=(\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+1}_{2}+2}_{2^2}+2^2}_{2^3\cdots}+2^3+\cdots+2^{15}}_{2^{16}})-1=2^{16}-1$$

$$\Rightarrow \text{حاصل کسر}=\frac{2(2^{16}-1)}{2^{16}-1}=2$$

اتحادهای زیر بسیار کاربردی هستند:

$$n\in\mathbb{N}: a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج: $\mathbb{E}$

$$n\in\mathbb{E}: a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots-b^{n-1})$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد: $\mathbb{O}$

$$n\in\mathbb{O}: a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$$

بنابراین مخرج را می‌توانستیم به این صورت نیز ساده کنیم:

$$2^{15}+2^{14}+\cdots+2+1=(2-1)(2^{15}+2^{14}+\cdots+2+1)=2^{16}-1$$

۵۲- گزینه۳

روش اول برای حل بهتر است ابتدا مربع کسر داده‌شده را حساب کنیم:

$$(\frac{a+b}{a-b})^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\frac{3-\sqrt{8}+3+\sqrt{8}+2\sqrt{9-8}}{3-\sqrt{8}+3+\sqrt{8}-2\sqrt{9-8}}=\frac{8}{4}=2$$

$$\rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\pm\sqrt{2}$$

کاملاً واضح است که $a<b$ می‌باشد پس حاصل کسر منفی است، پس:

$$\frac{a+b}{a-b}=-\sqrt{2}$$

معمولاً وقتی طرفین تساوی را به توان زوج می‌رسانیم بعد از جذرگیری باید حواسمان به علامت عبارت اولیه باشد.

روش دوم از فرمول رادیکال مرکب استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a=\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt{2}-1 \\ b=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt{2}+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)}=\frac{2\sqrt{2}}{-2}=-\sqrt{2}$$

۵۳- گزینه۴ در این نوع مسائل همه‌ی عبارات را به یک طرف تساوی آورده و سعی می‌کنیم آن را به صورت مجموع چند مربع کامل بنویسیم:

$$(4x^2-2x)+(y^2+3y)+\frac{5}{2}=0\Rightarrow(2x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=0$$

$$\Rightarrow(2x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=0$$

جمع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس:

$$\begin{cases} 2x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ y+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}=-6$$

۵۴- گزینه۳ در این‌گونه مسائل ابتدا کسر را ساده می‌کنیم، سپس جای‌گذاری را انجام می‌دهیم. گاهی برای راحتی کار در حین ساده‌سازی بعضی قسمت‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\sqrt[4]{80}=2\sqrt[4]{5} \quad , \quad y=2\sqrt[4]{5}-1 \Rightarrow x-y=1$$

$$A=\frac{\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)}{\cancel{x-y}\ 1}+y^{16}}{\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)}{\cancel{x-y}\ 1}+y^8}$$

$$=\frac{x^{16}-y^{16}+y^{16}}{x^8-y^8+y^8}=\frac{x^{16}}{x^8}=x^8=(\sqrt[4]{80})^8=80^2=6400$$

۵۵- گزینه۱ از اتحادهایی که در نکته‌ی ۱۷ از قسمت ب در ابتدای فصل گفته شد کمک می‌گیریم:

$$K=\frac{x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1+2}{x^4-x^3+x^2-x+1}$$

$$=\frac{\frac{(x-1)(x^{14}+x^{13}+\cdots+x+1)}{x-1}+2}{\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}}=\frac{\frac{x^{15}-1}{x-1}+2}{\frac{x^5+1}{x+1}}$$

$$\xrightarrow{x=2} K=\frac{2^{15}-1+2}{\frac{2^5+1}{3}}=\frac{3(2^{15}+1)}{2^5+1}$$

$$=\frac{3\,\cancel{(2^5+1)}\,(2^{10}-2^5+1)}{\cancel{2^5+1}}=3(1024-32+1)=2979$$

۵۶- گزینه۴ چون عبارت‌های $x+2$ و $2x-1$ تکرار شده‌اند، ابتدا تغییر متغیر می‌دهیم:

$$2x-1=a,x+2=b\Rightarrow 3x+1=a+b\Rightarrow a^3-a^2b-2ab^2=a(a+b)$$

$$\Rightarrow a(a^2-ab-2b^2)=a(a+b) \Rightarrow a(a+b)(a-2b)=a(a+b)$$

از طرفین، عبارت برابر را می‌توان زد به شرط آن‌که مساوی صفر قرار دهیم و جواب آن را به عنوان ریشه قبول کنیم:

$$\begin{cases} a=0 \\ a+b=0 \\ a-2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \\ 2x-1-2x-4=0 \ \text{غیرقابل قبول} \end{cases} \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

۵۷- گزینه۲ چون در فرض $x^2+2x=4$ می‌باشد پرانتزهایی را در هم ضرب می‌کنیم که مجموع جملات غیرمشترک آن‌ها برابر ۲ شود پس:

$$P=x(x+2)\cdot(x-1)(x+3)\cdot(x-3)(x+5)$$

$$=(x^2+2x)(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$$

$$=4(4-3)(4-15)=4\times1\times(-11)=-44$$

معمولاً وقتی چند پرانتز که به صورت اتحاد جمله‌مشترک هستند در هم ضرب شوند، بهتر است آن‌هایی را در هم ضرب کنیم که مجموع جملات غیرمشترک آن‌ها با مجموع دیگر جملات غیرمشترک برابر است. به طور مثال: $P=(x+1)(x+4)(x+5)(x+8)$ پرانتز اول و آخر در هم ضرب شود و پرانتزهای دوم و سوم نیز در هم ضرب شوند.

۵۸- گزینه۱ کافی است به دو طرف فرض ۲ واحد اضافه کنیم و بعد طرفین را به توان ۲ برسانیم:

$$x+\frac{1}{x+2}=6 \xRightarrow{+2} x+2+\frac{1}{x+2}=8$$

$$\xRightarrow{\text{توان}2} (x+2)^2+\frac{1}{(x+2)^2}+2\cancel{(x+2)}\frac{1}{\cancel{(x+2)}}=64$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+\frac{1}{(x+2)^2}=62$$

-۵۹ **گزینه۳** حاصل‌ضرب دو عبارت صفر شده پس حداقل یکی از آن‌ها صفر است، پس:

$$\begin{cases} 2a-b=0 \to b=2a \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{a^2+4a^2}{2a^2}=\dfrac{5a^2}{2a^2}=\dfrac{5}{2} & (1)\\ a^2-ab+b^2=0 & (2)\end{cases}$$

رابطه‌ی (۲) در صورتی برقرار است که $a=b=0$ بنابراین چون مخرج کسر $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ صفر می‌شود، قابل قبول نیست.

دام آموزشی: اگر به حقیقی‌بودن a و b توجهی نشود:

$$a^2-ab+b^2=0 \Rightarrow a^2+b^2=ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}=1$$

وگزینه‌ی ۱ را انتخاب می‌کنیم.

-۶۰ **گزینه۱**

روش اول ابتدا عبارت $ab+ac+bc$ را حساب می‌کنیم؛ چون خواهیم دید که به مقدار آن نیاز پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{(a+b+c)^2}_{0}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{4}+2(ab+ac+bc)\Rightarrow ab+ac+bc=-2$$

حال از اتحاد زیر بهره می‌بریم:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

$$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$=16-2[(ab+ac+bc)^2-2(\underbrace{a^2bc+ab^2c+abc^2}_{abc(a+b+c)=0})]$$

$$=16-2((-2)^2-2\times 0)=16-2\times 4=8$$

روش دوم اگر بتوانیم مقادیر a، b و c را طوری حدس بزنیم که فرض‌های مسئله برقرار باشند، می‌توانیم مقدار عبارت خواسته‌شده را به دست آوریم:

$$\begin{cases} a=b=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\ c=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-2\sqrt{\dfrac{2}{3}}+2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=0\\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{12}{3}=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{64}{9}=\frac{72}{9}=8$$

-۶۱ **گزینه۲** روش‌های زیادی برای حل این مسئله وجود دارد که چند روش را بیان می‌کنیم.

روش اول **روش عدد دهی:**

چون تساوی یک اتحاد هست پس به ازای هر x برقرار است:

$$x=1 \Rightarrow d=1$$

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow a+b+c+d=8\\ x=0 \Rightarrow -a+b-c+d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=7\\ -a+b-c=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3\\ a+c=4\end{cases}$$

$$x=3 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=27 \Rightarrow 8a+12+2c+1=27$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=4\\ 8a+2c=14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ c=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow (a,b,c,d)=(1,3,3,1) \Rightarrow abcd=9$$

روش دوم سمت چپ را ساده کرده و با سمت راست متحد قرار دهیم:

$$a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+c(x-1)+d=x^3$$

$$\Rightarrow ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)=x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1\\ -3a+b=0\\ 3a-2b+c=0\\ -a+b-c+d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=3\\ c=3\\ d=1\end{cases} \Rightarrow abcd=9$$

روش سوم این روش در این مسئله خاص امکان‌پذیر است، می‌دانیم:

$$x^3=((x-1)+1)^3=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=3\\ c=3\\ d=1\end{cases}$$

مسلماً با توجه به نوع مسئله هر کدام از این روش‌ها، روش خوبی خواهند بود.

-۶۲ **گزینه۲**

$$a=3+\frac{1}{3}\Rightarrow a^3=3^3+\frac{1}{3^3}+\underbrace{3(3)(\tfrac{1}{3})}_{3}\underbrace{(3+\tfrac{1}{3})}_{a}\Rightarrow a^3-3a=3^3+\frac{1}{3^3}$$

$$\Rightarrow b=3^3+\frac{1}{3^3}\Rightarrow b^3=(3^3)^3+\frac{1}{(3^3)^3}+\underbrace{3(3^3)(\tfrac{1}{3^3})}_{3}\underbrace{(3^3+\tfrac{1}{3^3})}_{b}$$

$$\Rightarrow b^3-3b=3^{3^2}+\frac{1}{3^{3^2}}=c$$

$$\Rightarrow c^3=3^{3^3}+\frac{1}{3^{3^3}}+\underbrace{3(3^{3^2})(\tfrac{1}{3^{3^2}})}_{3}\underbrace{(3^{3^2}+\tfrac{1}{3^{3^2}})}_{c}\Rightarrow 3^{3^3}+\frac{1}{3^{3^3}}=c^3-3c$$

-۶۳ **گزینه۳** برای سادگی کار فرض می‌کنیم $3^{\sqrt{\frac{a}{2}}}=x$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4\ ,\ 3^{\sqrt{8a}}+3^{-\sqrt{8a}}=3^{4\sqrt{\frac{a}{2}}}+3^{-4\sqrt{\frac{a}{2}}}=x^4+\frac{1}{x^4}$$

$$=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=((x+\frac{1}{x})^2-2)^2-2=(16-2)^2-2=14^2-2=194$$

-۶۴ **گزینه۱** با کمی دقت اگر تغییر متغیرهای زیر را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} x^3-1=a\\ x^2-1=b\end{matrix} \Rightarrow A=(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow A=2[(x^2-1)^2+(x^3-1)^2]$$

هر دو پرانتز به ازای $x=1$ به مینیمم مقدار خود می‌رسند، پس $A_{min}=0$.

۶۵- گزینه۱

ابتدا سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$((x-y)^2+y^2)((x+y)^2+y^2)=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$$
$$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2=x^4+4y^4$$
$$\Rightarrow 85y^4=x^4+4y^4 \Rightarrow x^4=81y^4 \Rightarrow x^2=9y^2$$
$$\Rightarrow \frac{x^2-4y^2}{x^2+4y^2}=\frac{9y^2-4y^2}{9y^2+4y^2}=\frac{5y^2}{13y^2}=\frac{5}{13}$$

۶۶- گزینه۲

از روش تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$x+y=a,\ y+z=b,\ z+x=c \Rightarrow a+b+c=2(x+y+z)=2\times5=10$$

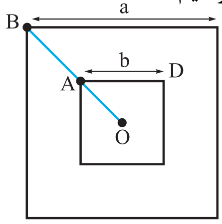
طبق فرض: $a^2+b^2+c^2=70$

سپس باید مقدار $ac+ab+bc$ را حساب کنیم:

$$\underbrace{(a+b+c)^2}_{10^2=100}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{70}+2(ab+ac+bc)$$
$$\Rightarrow ab+ac+bc=\frac{100-70}{2}=15$$
$$\Rightarrow (x+y)(x+z)+(y+x)(y+z)+(z+x)(z+y)=15$$

۶۷- گزینه۳

با توجه به شکل خواهیم داشت:



$$AB=OB-OA=\frac{d}{2}-\frac{d'}{2}$$

d و d' قطر مربع‌ها هستند و می‌دانیم:

$$OB=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \quad , \quad OA=\frac{d'}{2}=\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}=5\sqrt{2} \Rightarrow a-b=10\\ \text{از طرفی: مساحت باقی‌مانده از قاب} = a^2-b^2=20^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a-b=10\\(a-b)(a+b)=400\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-b=10\\a+b=40\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=25\\b=15\end{cases}$$

۶۸- گزینه۴

یادمان باشد هرگاه عبارت $a^2\pm ab+b^2$ را دیدیم، با ضرب پرانتز $a\mp b$ در آن می‌توان اتحاد چاق و لاغر تشکیل داد:

$$A=\frac{(1390^2+1390\times1395+1395^2)(1395-1390)}{1395-1390}$$
$$+3\times1390^2\times279-3\times1395^2\times278$$
$$\Rightarrow 5A=1395^3-1390^3+3\times1390^2\times(5\times279)-3\times1395^2\times(5\times278)$$
$$\Rightarrow 5A=1395^3-1390^3+3\times1390^2\times1395-3\times1395^2\times1390$$
$$\Rightarrow 5A=(1395-1390)^3=5^3=125 \Rightarrow A=25$$

۶۹- گزینه۲

معمولاً در چنین مسائلی جمع‌کردن روابط یا ضرب‌کردن آن‌ها کارساز است. سه رابطه را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=xy\\x^2+z^2-y^2=xz\\y^2+z^2-x^2=yz\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$$

$$\Rightarrow x=y=z \Rightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{3x^3}{x^3}=3$$

۷۰- گزینه۴

چون $K=4a^2-4ab+b^2=(2a-b)^2$ می‌باشد سعی می‌کنیم از روی فرض $2a-b$ بسازیم. چون توان ۳ در فرض وجود دارد، پس به $(2a)^3$ نیاز داریم پس رابطه‌ی اول را در ۸ ضرب کرده با رابطه‌ی دوم جمع می‌کنیم:

$$8(a^3-2a^2b+ab^2)+(4a^2b-2ab^2-b^3)=8\times7+8$$
$$\Rightarrow 8a^3-16a^2b+8ab^2+4a^2b-2ab^2-b^3=64$$
$$\Rightarrow 8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=64 \Rightarrow (2a-b)^3=64$$
$$\Rightarrow 2a-b=4 \Rightarrow K=(2a-b)^2=4^2=16$$

۷۱- گزینه۱

ابتدا فرض را ساده می‌کنیم چون ظاهراً $x-2$ در مخرج دردسر ساز است، پس:

$$\frac{x^2-2x+1}{x-2}=5 \Rightarrow x^2-2x+1=5x-10 \Rightarrow x^2+11=7x$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+11}{x}=7 \Rightarrow x+\frac{11}{x}=7 \xRightarrow{\text{توان}2} x^2+\frac{121}{x^2}+22=49$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{121}{x^2}=27$$

۷۲- گزینه۳

ابتدا طرفین فرض مسئله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x-\frac{1}{x}=2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}) \xrightarrow{\text{توان}2} x^2+\frac{1}{x^2}-2=4(x+\frac{1}{x}+2)$$
$$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2-2-2=4(x+\frac{1}{x}+2)$$
$$\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=a} a^2-4=4a+8 \Rightarrow a^2-4a-12=0$$
$$\Rightarrow (a-6)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=x+\frac{1}{x}=6\\a=x+\frac{1}{x}=-2\end{cases}$$

چون در صورت سؤال $\sqrt{x}$ وجود دارد پس $x>0$ می‌باشد پس $a=-2$ غیرقابل‌قبول است، پس:

$$x+\frac{1}{x}=6 \xrightarrow{\text{توان}2} x^2+\frac{1}{x^2}+2=36 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=34$$

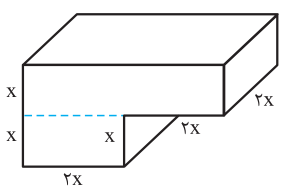
۷۳- گزینه۳

طبق اتحاد دوجمله‌ای نیوتن که نکات آن در ابتدای فصل آمده است، می‌دانیم:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$\Rightarrow (x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1$$
$$=((x-1)+1)^4=x^4=(\sqrt[4]{5})^4=5$$

۷۴- گزینه۲

اگر خط‌چین نشان داده شده در شکل را رسم کنیم منبع آب به دو مکعب مستطیل تقسیم می‌شود.



$$\text{حجم مکعب مستطیل کوچک‌تر} = ۲x \times x \times ۲x = ۴x^۳$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل بزرگ‌تر} = ۴x \times x \times ۲x = ۸x^۳$$

$$\Rightarrow ۴x^۳ + ۸x^۳ = ۱۵۰۰ \Rightarrow ۱۲x^۳ = ۱۵۰۰ \Rightarrow x^۳ = \frac{۱۵۰۰}{۱۲} = ۱۲۵ \Rightarrow x = ۵$$

۷۵- گزینه۳ فرض می‌کنیم $a = ۱/۲۵۳$ و $b = ۴/۷۴۷$

پس $a + b = ۶$ و داریم:

$$a^۳ + b^۳ + ۳ab(a+b) = (a+b)^۳ = (۱/۲۵۳ + ۴/۷۴۷)^۳ = ۶^۳ = ۲۱۶$$

۷۶- گزینه۴ اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + ac + bc)$$

اگر $ab + bc + ac = z$ و $a^۲ + b^۲ + c^۲ = y$ و $a + b + c = x$ باشد؛ خواهیم داشت:

$$x^۲ = y + ۲z \Rightarrow M = x^۴ - ۲(z)(y) - ۲(z)(x^۲)$$

$$= (y+۲z)^۲ - ۲zy - ۲z(y+۲z) = y^۲ + \cancel{۴yz} + \cancel{۴z^۲} - \cancel{۲yz} - \cancel{۲yz} - \cancel{۴z^۲}$$

$$\Rightarrow M = y^۲ = (a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲ = ۱۴۴$$

۷۷- گزینه۱ برای راحتی محاسبات $x^۲ + ۶x + ۷$ را می‌توان a گرفت اما بهتر است $x^۲ + ۶x + ۹ = a$ فرض شود چون مربع کامل بوده و محاسبات سریع‌تر انجام می‌شود، پس:

$$x^۲ + ۶x + ۹ = a \Rightarrow (a-۲)(a+۲) = ۶۲۱ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۶۲۱$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow (x^۲ + ۶x + ۹)^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow (x+۳)^۴ = ۶۲۵$$

$$\Rightarrow x + ۳ = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ & \text{غیرقابل قبول}\ (x<۰) \\ x = -۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x = (-۸)^۲ + ۲(-۸) = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸$$

۷۸- گزینه۲ طبق مقادیری که داده شده داریم:

$$(x+y) + (z+۱) + (-۲) = ۲۰۰ - ۱۹۸ - ۲ = ۰$$

پس طبق نتیجه‌ی اتحاد اویلر در نکته‌ی ۱۴ در ابتدای فصل خواهیم داشت:

$$(x+y)^۳ + (z+۱)^۳ + (-۲)^۳ = ۳(x+y)(z+۱)(-۲)$$

$$= ۳(۲۰۰)(-۱۹۸)(-۲) = ۲۳۷۶۰۰$$

۷۹- گزینه۴ از اتحاد اویلر کمک می‌گیریم ولی قبل از آن:

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow ab + ac + bc = \frac{۳۶ - ۱۶}{۲} = ۱۰$$

اتحاد اویلر:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ = (a+b+c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - ac - bc) + ۳abc$$

$$\Rightarrow ۶۶ = ۶ \times (۱۶ - ۱۰) + ۳abc \Rightarrow ۳abc = ۳۰ \Rightarrow abc = ۱۰$$

۸۰- گزینه۲ از نتیجه اتحاد اویلر کمک می‌گیریم:

$$(a-b) + (b-c) + (c-a) = ۰ \Rightarrow (a-b)^۳ + (b-c)^۳ + (c-a)^۳$$

$$= ۳(a-b)(b-c)(c-a) \Rightarrow \frac{(a-b)^۳ + (b-c)^۳ + (c-a)^۳}{(a-b)(b-c)(c-a)} = ۳$$

۸۱- گزینه۱

اتحاد مکعب سه‌جمله‌ای را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$(a+b+c)^۳ = a^۳ + b^۳ + c^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + ۳b^۲c + ۳bc^۲ + ۳a^۲c + ۳ac^۲ + ۶abc$$

$$(a+b+c)^۳ = a^۳ + b^۳ + c^۳ + ۳(a+b)(b+c)(c+a)$$

پس خواهیم داشت:

$$\underbrace{(a+b+c)^۳}_{۱۲۵} = \underbrace{a^۳ + b^۳ + c^۳}_{۱۵} + ۳(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = \frac{۱۲۵ - ۱۵}{۳} = \frac{۱۱۰}{۳}$$

۸۲- گزینه۴

$$A = ۳^m + ۳^{-m}$$

$$\Rightarrow A^۳ = (۳^m)^۳ + ۳(۳^m)^۲(۳^{-m}) + ۳(۳^m)(۳^{-m})^۲ + (۳^{-m})^۳$$

$$\Rightarrow A^۳ = ۳^{۳m} + ۳^{m+۱} + ۳^{۱-m} + ۳^{-۳m} = ۶۴$$

$$\Rightarrow A^۳ = ۶۴ \Rightarrow A = ۴ \Rightarrow ۳^m + ۳^{-m} = ۴$$

۸۳- گزینه۴ با توجه به آن‌که عبارت‌های موجود در مخرج و صورت کسر پرانتز دوم اتحاد چاق و لاغر هستند، به این صورت عمل می‌کنیم:

$$a^۳ + b^۳ = ۱۶ \Rightarrow a^۳ - ۸ = ۸ - b^۳ \Rightarrow (a-۲)(a^۲ + ۲a + ۴)$$

$$= (۲-b)(۴ + ۲b + b^۲) \Rightarrow \frac{a^۲ + ۲a + ۴}{b^۲ + ۲b + ۴} = \frac{۲-b}{a-۲} = \frac{b-۲}{۲-a}$$

۸۴- گزینه۴ دو طرف فرض را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم: (چون $x \neq ۰$ است پس مجاز به این‌کار هستیم)

$$x^۴ + x^۳ - ۴x^۲ + x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\div x^۲} x^۲ + x - ۴ + \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow (x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) + (x + \frac{۱}{x}) - ۴ = ۰ \Rightarrow (x + \frac{۱}{x})^۲ - ۲ + (x + \frac{۱}{x}) - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{x + \frac{۱}{x} = y} y^۲ + y - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۲ \\ y_۲ = -۳ \end{cases} \Rightarrow y_۱ + y_۲ = -۱$$

چندجمله‌ای‌های درجه‌ی زوج که ضرایب جملات از دو طرف متقارن است نوعی از معادلات معکوسه هستند که با تقسیم طرفین بر «x به توان نصف درجه» می‌توان آن را برحسب $x + \frac{۱}{x}$ مرتب کرد.

۸۵- گزینه۴

روش اول: برای حل این‌گونه مسائل معمولاً آن را به جمع چند مربع کامل تبدیل می‌کنیم: $۳a^۲ + b^۲ - ۲ab - ۲a - ۲b + ۳ = ۰$

$$\Rightarrow (a^۲ + b^۲ - ۲ab) + (a^۲ - ۲a + ۱) + (a^۲ - ۲b + ۲) = ۰$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود پرانتز آخر به صورت مربع کامل نیست. برای $۲ab$ به $b^۲$ و هم‌چنین برای $۲b$ نیز به $b^۲$ نیاز داریم پس تعداد $b^۲$ کم است. طرفین تساوی را در عددی مناسب مثل ۲ ضرب می‌کنیم: $\Rightarrow ۶a^۲ + ۲b^۲ - ۴ab - ۴a - ۴b + ۶ = ۰$

$$\Rightarrow (۴a^۲ + b^۲ - ۴ab) + (b^۲ - ۴b + ۴) + (۲a^۲ - ۴a + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow (۲a-b)^۲ + (b-۲)^۲ + ۲(a-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۳$$

روش دوم عبارت داده‌شده را بر حسب b مرتب می‌کنیم:

$$b^۲+(-۲a-۲)b+۳a^۲-۲a+۳=۰$$

معادله‌ی درجه‌دومی نسبت به b حاصل می‌شود:

$$\Delta=(-۲a-۲)^۲-۴(۳a^۲-۲a+۳)=۴a^۲+۴+۸a-۱۲a^۲+۸a-۱۲$$

$$=-۸a^۲+۱۶a-۸=-۸(a-۱)^۲\ge ۰$$

برای این‌که Δ منفی نشود تنها، باید $a=۱$ شود:

$$a=۱\Rightarrow b^۲-۴b+۴=۰\Rightarrow (b-۲)^۲=۰\Rightarrow b=۲\Rightarrow a+b=۱+۲=۳$$

۸۶- **گزینه۲** چون این تساوی اتحاد است، یک بار به‌جای x عدد یک و بار دیگر منفی یک قرار می‌دهیم:

$$x=۱\ \Rightarrow\ ۳^{۱۰۰}=a_{۲۰۰}+a_{۱۹۹}+\cdots+a_۱+a_۰$$

$$x=-۱\ \Rightarrow\ ۱=a_{۲۰۰}-a_{۱۹۹}+\cdots-a_۱+a_۰$$

حال اگر ۲ رابطه را با هم جمع کنیم:

$$۳^{۱۰۰}+۱=۲(a_{۲۰۰}+a_{۱۹۸}+a_{۱۹۶}+\cdots+a_۲+a_۰)\ \Rightarrow\ K=\frac{۳^{۱۰۰}+۱}{۲}$$

۸۷- **گزینه۱** اگر همه‌ی عبارت را به سمت چپ ببریم، پرانتز دوم اتحاد چاق و لاغر را به وجود می‌آورد، پس دو طرف را در پرانتز اول آن ضرب می‌کنیم:

$$x^۲-x+۱=۰\Rightarrow (x+۱)(x^۲-x+۱)=۰\Rightarrow x^۳+۱=۰\Rightarrow x^۳=-۱$$

از تساوی بالا نمی‌توان گفت $x=-۱$ است زیرا ریشه‌ی $x=-۱$ را خودمان به وجود آوردیم به خاطر ضرب‌کردن طرفین معادله در $x+۱$.

$$(x^۵+\frac{۱}{x^۵})(x^{۱۳۹۵}+\frac{۱}{x^{۱۳۹۵}})=(x^۳\cdot x^۲+\frac{۱}{x^۳\cdot x^۲})\times((x^۳)^{۴۶۵}+\frac{۱}{(x^۳)^{۴۶۵}})$$

$$=(-x^۲+\frac{۱}{-x^۲})(-۱+\frac{۱}{-۱})=-۲(-x^۲-\frac{۱}{x^۲})=۲(\frac{x^۴+۱}{x^۲})=۲(\frac{x^۳\cdot x+۱}{x^۲})$$

$$=۲(\frac{-x+۱}{x^۲})=۲(\frac{-x+۱}{x-۱})=-۲$$

۸۸- **گزینه۳** اگر عبارت را به طور مناسب جابه‌جا کنیم، خواهیم داشت:

$$x^۲+x+y^۲-y=-xy-۱\ \Rightarrow\ x^۲+y^۲+۱=-x+y-xy$$

$$\Rightarrow\ (-x)^۲+y^۲+۱^۲=-x+y-xy$$

$$\xrightarrow[\substack{a^۲+b^۲+c^۲=ab+ac+bc\\ \Rightarrow\ a=b=c}]{\text{طبق نکته‌ی ۱۸ در مقدمه‌ی فصل}}\ -x=y=۱\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=-۱\\ y=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x+۲y}{۲x+y}=\frac{-۱+۲}{-۲+۱}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

۸۹- **گزینه۳** ابتدا عبارت را کمی ساده می‌کنیم و سپس به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$(a+۱)(a+۵)+۲b-b^۲-۸=۰\ \Rightarrow\ a^۲+۶a+۵+۲b-b^۲-۸=۰$$

$$\Rightarrow (a+۳)^۲-۴-(b^۲-۲b+۱)-۷=۰\Rightarrow (a+۳)^۲-(b-۱)^۲=۱۱$$

$$\Rightarrow (a+۳+b-۱)(a+۳-b+۱)=۱۱\Rightarrow (a+b+۲)(a-b+۴)=۱۱$$

پرانتز اول بزرگ‌تر است و چون a و b طبیعی هستند، پس:

$$\begin{cases}a+b+۲=۱۱\\ a-b+۴=۱\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a+b=۹\\ a-b=-۳\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=۳\\ b=۶\end{cases}\ \Rightarrow\ ۳a-۲b=-۳$$

۹۰- **گزینه۴** با جابه‌جایی در عبارت خواهیم داشت:

$$x^۳+(x^۲-۲)^۳+۲^۳=۶x(x^۲-۲)$$

$$\begin{cases}x=a\\ x^۲-۲=b\\ ۲=c\end{cases}\ \Rightarrow\ a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$$

اتحاد اویلر

$$a^۳+b^۳+c^۳=(a+b+c)(\underbrace{a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc}_{\frac{۱}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]})+۳abc$$

حال اگر $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ باشد یکی از دو پرانتز صفر است.

پرانتز اول $=۰\ \Rightarrow\ a+b+c=۰$ ، پرانتز دوم $=۰\ \Rightarrow\ a=b=c$

پس طبق این نکته: $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=b=c\\ \text{یا}\\ a+b+c=۰\end{cases}$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}x=x^۲-۲=۲\ \Rightarrow\ x=۲\\ x+x^۲-۲+۲=۰\ \Rightarrow\ x=۰,-۱\end{cases}$$ $\Rightarrow$ معادله ۳ جواب دارد

۹۱- **گزینه۱** برای سادگی کار از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x+۱=a\\ x-۳=b\end{cases}\ \Rightarrow\ a^{۱۱}+a^{۱۰}b+a^۹b^۲+\cdots+b^{۱۱}=۰$$

$$a-b=۴$$

دو طرف را در $a-b$ ضرب می‌کنیم:

$$(a-b)(a^{۱۱}+a^{۱۰}b+\cdots+b^{۱۱})=۰$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نکته‌ی ۱۷ در مقدمه‌ی فصل}}\ a^{۱۲}-b^{۱۲}=۰\ \Rightarrow\ a^{۱۲}=b^{۱۲}$$

$$\Rightarrow\ a=\pm b\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+۱=x-۳ & \text{غیرقابل قبول}\\ x+۱=۳-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x+۱=۳-x\ \Rightarrow\ ۲x=۲\ \Rightarrow\ x=۱\ \Rightarrow\ k=۱\ \Rightarrow\ k^۲+k=۲$$

۹۲- **گزینه۳** پرانتزها را به شکل اتحاد مزدوج می‌نویسیم:

$$(۱-\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۴})(۱+\frac{۱}{۴})\cdots(۱-\frac{۱}{n})(۱+\frac{۱}{n})$$

$$=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲})\times(\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۳})\times(\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۴})\cdots((\frac{n-۱}{n})(\frac{n+۱}{n}))$$

در پرانتزها کسر دوم هر پرانتز با کسر اول پرانتز بعد ساده می‌شود پس چیزی که می‌ماند:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{n+۱}{n}=\frac{n+۱}{۲n}=\frac{۵}{۹}\ \Rightarrow\ ۱۰n=۹n+۹\ \Rightarrow\ n=۹$$

$$(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})\cdots(۱-\frac{۱}{n^۲})=\frac{n+۱}{۲n}$$

۹۳- گزینه ۲

چون با توجه به فرض داریم $x+2=\sqrt{2}$، سعی می‌کنیم عبارت را برحسب $x+2$ بنویسیم:

$$A=\frac{3(x^2+4x)}{x^3+6x^2+12x+8\underbrace{-2x-10}_{-2x-4-6}}=\frac{3[(x+2)^2-4]}{(x+2)^3-2(x+2)-6}$$

$$\Rightarrow A=\frac{3[\sqrt{2}^2-4]}{(\sqrt{2})^3-2(\sqrt{2})-6}=\frac{-6}{\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{2\sqrt{2}}-6}=\frac{-6}{-6}=1$$

۹۴- گزینه ۱

چون هر دو برابر ۷ هستند آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$3b^2+4a=3a^2+4b \Rightarrow 3(b-a)(b+a)-4(b-a)=0$$

$$\Rightarrow (b-a)(3b+3a-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=b & (I)\\ 3a+3b=4 & (II)\end{cases}$$

$$(I)\quad \begin{matrix}a=b\\ 3a^2+4b=7\end{matrix} \Rightarrow 3a^2+4a-7=0$$

$$\Rightarrow (a-1)(3a+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1=b \Rightarrow ab=1 \\ a=-\frac{7}{3}=b \Rightarrow ab=\frac{49}{9}\end{cases}$$

$$(II)\quad 3a+3b=4 \Rightarrow b=\frac{4}{3}-a$$

$$3a^2+4b=7 \Rightarrow 3a^2+\frac{16}{3}-4a=7 \Rightarrow 9a^2-12a-5=0$$

$$\Rightarrow (3a)^2-4(3a)-5=0 \Rightarrow (3a+1)(3a-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{5}{3} \Rightarrow ab=-\frac{5}{9} \\ a=\frac{5}{3} \Rightarrow b=-\frac{1}{3} \Rightarrow ab=-\frac{5}{9}\end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای $ab=1+\frac{49}{9}-\frac{5}{9}=1+\frac{44}{9}=\frac{53}{9}$

۹۵- گزینه ۲

از متوالی‌بودن چهار عدد این‌گونه استفاده می‌کنیم که اگر $x=51$، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 51\times52\times53\times54+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$$

$$=(\underbrace{x^2+3x}_{y})(\underbrace{x^2+3x+2}_{y+2})+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2+3x+1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{51\times52\times53\times54+1}-255}=\sqrt{\sqrt{(x^2+3x+1)^2}-5x}$$

$$=\sqrt{x^2+3x+1-5x}=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=51-1=50$$

۹۶- گزینه ۱

روش اول فرض شبیه اتحاد جمله‌مشترک است:

$$6x^2+y^2=5xy \Rightarrow y^2-5xy+6x^2=0$$

یعنی جمله‌ی مشترک y است. جمع دو عبارت $-5x$ و ضرب آن‌ها $6x^2$ شده است. پس $-2x$ و $-3x$ بوده‌اند، بنابراین:

$$(y-2x)(y-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases}y=2x\\ y=3x\end{cases}$$

روش دوم دو طرف فرض را بر x^2 (یا y^2) تقسیم می‌کنیم: $(x^2\neq 0)$

$$6x^2+y^2=5xy \overset{\div x^2}{\Rightarrow} 6+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{5y}{x}$$

حال با تغییر متغیر $\frac{y}{x}=a$ خواهیم داشت:

$$6+a^2=5a \Rightarrow a^2-5a+6=0 \Rightarrow (a-2)(a-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ a=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2 \Rightarrow \frac{y}{x}=2 \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\\ a=3 \Rightarrow \frac{y}{x}=3 \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}\end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

۹۷- گزینه ۲

مقدار x را از فرض مسئله محاسبه کرده و در عبارت موردنظر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}+1}+1=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}\times\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{2-1}=\sqrt[3]{4}-1\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+1\right)^6=(\sqrt[3]{4}-1+1)^6=(\sqrt[3]{4})^6=16$$

۹۸- گزینه ۳

ابتدا ۲ را به داخل رادیکال می‌بریم تا دو رادیکال کمی شبیه به یکدیگر شوند:

$$\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-4}=a \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{4x+1}=m\\ \sqrt{4x-4}=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-n=a\\ m^2-n^2=5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m-n=a\\ (m+n)(m-n)=5\Rightarrow m+n=\frac{5}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-n=a\\ m+n=\frac{5}{a}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} 2m=a+\frac{5}{a}\Rightarrow m=\sqrt{4x+1}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{5}{a}\right)$$

۹۹- گزینه ۴

در اتحاد مربع سه‌جمله‌ای $(\pm a\pm b\pm c)^2$ جملات $2ab$، $2ac$ و $2bc$ یا هر سه علامت مثبت دارند و یا فقط دوتا منفی هستند و هر سه نمی‌توانند علامت منفی داشته باشند. پس خواهیم داشت:

$$A=(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2a^2c^2)-4b^2c^2$$

$$=(\underbrace{\cancel{b^2+c^2}}_{a^2}-a^2)^2-4b^2c^2=-4b^2c^2$$

۱۰۰- گزینه ۳

روش اول ابتدا فرض را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}\Rightarrow\frac{a+b}{c}-1=\frac{a+c}{b}-1=\frac{b+c}{a}-1$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}$$

اگر تعدادی کسر با مخرج‌های هم‌علامت با هم برابر باشند، چنان‌چه صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کنیم حاصل تغییر نمی‌کند: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$

بنابراین: $\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$

$$\Rightarrow\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)=2\times2\times2=8$$

روش دوم اگر در فرض مسئله کسر اول و دوم را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b} \Rightarrow ab+b^2-\cancel{bc}=ac-\cancel{bc}+c^2$$

$$\Rightarrow ab+b^2-ac-c^2=0 \Rightarrow a(b-c)+(b+c)(b-c)=0$$

$$\Rightarrow (b-c)(\underbrace{a+b+c}_{\neq 0})=0 \Rightarrow b=c$$

چون a و b و c مثبت هستند

پس با استفاده از تقارن فرض مسئله به راحتی می‌توان فهمید که: $a=b=c$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(2a)(2a)(2a)}{a^3}=\frac{8a^3}{a^3}=8$$

۱۰۱- گزینه ۱ فرض مسئله را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{x+y} \Rightarrow \frac{y+x}{xy}=\frac{3}{x+y} \Rightarrow (x+y)^2=3xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy=3xy \Rightarrow x^2+y^2=xy$$

$$\xrightarrow{\text{نکته‌ی ۱۹ مقدمه‌ی فصل}} x=y=0$$

که غیرقابل‌قبول است پس جواب وجود ندارد.

۱۰۲- گزینه ۲ اگر x^2-9 را تجزیه کنیم ۴ پرانتز با جملات غیرمشترک داریم که جمع دوبه‌دوی آن‌ها مقداری ثابت است یعنی $(-1)+5=3+(-3)$، پس:

$$(x^2-9)(x+5)(x-1)=-36 \Rightarrow (x-3)(x+3)(x+5)(x-1)=-36$$

$$\Rightarrow (x^2+2x-15)(x^2+2x-3)=-36$$

$$x^2+2x+1=a \Rightarrow (a-16)(a-4)=-36$$

$$\Rightarrow a^2-20a+64=-36 \Rightarrow a^2-20a+100=0$$

$$\Rightarrow (a-10)^2=0 \Rightarrow a=10 \Rightarrow x^2+2x+1=10$$

$$\Rightarrow (x+1)^2=10 \Rightarrow (x+1)^4=100$$

۱۰۳- گزینه ۳ کافی است عبارت A را به شکل زیر نوشته و از تساوی $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$ استفاده کنیم:

$$A=1^2+(1^2+1\times2+2^2)+(2^2+2\times3+3^2)+(3^2+3\times4+4^2)$$
$$+\dots+(9^2+9\times10+10^2)+10^2$$

$$A=1^2+\frac{2^3-1^3}{2-1}+\frac{3^3-2^3}{3-2}+\frac{4^3-3^3}{4-3}+\dots+\frac{10^3-9^3}{10-9}+10^2$$

$$=\cancel{1}+\cancel{2^3}-\cancel{1^3}+\cancel{3^3}-\cancel{2^3}+\cancel{4^3}-\cancel{3^3}+\dots+10^3-\cancel{9^3}+10^2=10^3+10^2=1100$$

۱۰۴- گزینه ۲ پرانتزهایی که جمع جملات غیرمشترک آن‌ها با دو پرانتز دیگر برابر است را در هم ضرب می‌کنیم.

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+17$$

$$=(\underbrace{x^2+8x+7}_{a})(\underbrace{x^2+8x+15}_{a+8})+17=a(a+8)+17$$

$$=a^2+8a+17=(a+4)^2+1=(x^2+8x+7+4)^2+1=(x^2+8x+11)^2+1$$

دلتای پرانتز مثبت است پس می‌تواند صفر شود یعنی مربعِ آن می‌تواند مینیمم شود پس مینیمم کل عبارت ۱ است.

۱۰۵- گزینه ۱ آن‌ها را به صورت مجموع دو مربع کامل که برابر صفر است تبدیل می‌کنیم پس:

$$4x^2+4x+1+y^2+6y+9=x+y+m \Rightarrow 4x^2+3x+y^2+5y=m-10$$

$$\Rightarrow \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=m-10$$

$$\Rightarrow \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=m-10+\frac{9}{16}+\frac{25}{4}$$

$$=m+\frac{-160+9+100}{16}=m-\frac{51}{16}$$

پس باید $m-\frac{51}{16}=0$ شود تا فقط یک نقطه در آن صدق کند.

$$\Rightarrow m=\frac{51}{16}$$

۱۰۶- گزینه ۳ طبق نکته‌ی ۱۴ در قسمت ب اگر $a^3+b^3+c^3=3abc$ باشد یا $a=b=c$ یا $a+b+c=0$.

$$x^3+y^3+1^3=3(x)(y)(1) \Rightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ \text{یا} \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

پس نمودار آن از یک نقطه و یک خط راست تشکیل شده است.

۱۰۷- گزینه ۲ از نکته‌ی ۱۲ در قسمت ب استفاده می‌کنیم:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

پس:
$$(x+y+5)^3=x^3+y^3+5^3+3(x+y)(x+5)(y+5)$$

$$=x^3+y^3+125 \Rightarrow 3(x+y)(x+5)(y+5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+5=0 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی سه خط راست}$$

۱۰۸- گزینه ۴ عبارت $15x^2+9y^2$ نسبت به x و y نامتقارن است برای عبارت‌های نامتقارن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$ax+by=\left(\frac{a+b}{2}\right)(x+y)+\left(\frac{a-b}{2}\right)(x-y)$$

پس:
$$A=15x^2+9y^2=\left(\frac{15+9}{2}\right)(x^2+y^2)+\left(\frac{15-9}{2}\right)(x^2-y^2)$$

$$=12(x^2+y^2)+3(x^2-y^2)$$

پس باید x^2+y^2 و x^2-y^2 را حساب کنیم:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2(-1)=6$$

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2=4x^2y^2 \Rightarrow 36-4=(x^2-y^2)^2$$

$$\rightarrow |x^2-y^2|=\sqrt{32} \xrightarrow{|x|>|y|} x^2-y^2=4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A=12\times6+3\times4\sqrt{2}=72+12\sqrt{2}=12(6+\sqrt{2})$$

۱۰۹- گزینه۳ ابتدا عبارات را مخرج‌مشترک گرفته و از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(a^{2n}-a^n+1)(a^{2n}+a^n+1)=a^{4n}+a^{2n}+1$$

$$A=(\frac{x^2-x+1}{x})(\frac{x^4-x^2+1}{x^2})(\frac{x^8-x^4+1}{x^4})(\frac{x^{16}-x^8+1}{x^8})$$

عبارات را در x^2+x+1 ضرب و تقسیم می‌کنیم:

ضرب

$$A=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)}{(x^2+x+1)\times x^{15}}$$

ضرب

$$=\frac{(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)}{(x^2+x+1)x^{15}}$$

$$=\dots=\frac{x^{32}+x^{16}+1}{x^{15}(x^2+x+1)}$$

۱۱۰- گزینه۱ پرانتز اول را ساده می‌کنیم، بقیه نیز به طور مشابه ساده می‌شوند.

$$b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-2bc-a^2=(-a)^2-2bc-a^2=-2bc$$

به همین ترتیب $\begin{cases}a^2+c^2-b^2=-2ac\\ a^2+b^2-c^2=-2ab\end{cases}$

$$\Rightarrow K=\frac{b+c}{bc}(-2bc)+\frac{a+c}{ac}(-2ac)+\frac{a+b}{ab}(-2ab)$$

$$=-2b-2c-2a-2c-2a-2b=-4(a+b+c)=-4\times 0=0$$

۱۱۱- گزینه۴ اگر به طرفین فرض $8a$ اضافه شود:

$$9a=a^2+b^2-8b-2ab+16+8a \Rightarrow 9a=(a-b+4)^2$$

چون سمت راست مربع کامل است پس سمت چپ نیز مربع کامل است و چون ۹ مربع کامل است بنابراین a نیز مربع کامل است.

۱۱۲- گزینه۲ همه‌ی فرض‌ها را برحسب $x+y$ می‌نویسیم:

$$(1)\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \Rightarrow \frac{x+y}{xy}=a \Rightarrow xy=\frac{1}{a}(x+y)$$

$$(2)\quad x^2-y^2=b \Rightarrow (x+y)(x-y)=b \Rightarrow x-y=\frac{b}{x+y}$$

$$(3)\quad x^3-y^3=c \Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=c$$

$$\Rightarrow (x-y)[(x+y)^2-xy]=c \Rightarrow \frac{b}{x+y}[(x+y)^2-\frac{1}{a}(x+y)]=c$$

$$\Rightarrow b(x+y)-\frac{b}{a}=c \Rightarrow b(x+y)=c+\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow b(x+y)=\frac{ac+b}{a} \Rightarrow x+y=\frac{ac+b}{ab}$$

۱۱۳- گزینه۳ چون مجموع ضرایب صفر است پس بر $n-1$ بخش‌پذیر است پس:

$$n^3-8n^2+20n-13=(n-1)(n^2-7n+13)=p$$

$$(1)\begin{cases}n-1=1\\ n^2-7n+13=p\end{cases} \quad \text{یا} \quad (2)\begin{cases}n-1=p\\ n^2-7n+13=1\end{cases}$$

$$(1)\begin{cases}n=2\\ 4-14+13=3=p\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}n^2-7n+12=0\\ n=3 \ \text{یا}\ n=4\\ n=3 \rightarrow p=2\\ n=4 \rightarrow p=3\end{cases}$$

پس به ازای سه مقدار n حاصل عبارت عدد اول خواهد بود.

۱۱۴- گزینه۳ اگر دو فرض را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$(c^2-a^2)-(c^2-b^2)=315-160=155$$

$$\Rightarrow b^2-a^2=155 \Rightarrow \begin{cases}(b-a)(b+a)=31\times 5\\ (c-b)(c+b)=2^5\times 5\\ (c-a)(c+a)=3^2\times 5\times 7\end{cases}$$

از تساوی اول شروع می‌کنیم چون عامل‌های اول با توان کم‌تری دارد پس حالت‌های کم‌تری دارد.

$$(1)\begin{cases}b-a=1\\ b+a=155\end{cases} \quad \text{یا} \quad (2)\begin{cases}b-a=5\\ b+a=31\end{cases}$$

از رابطه‌ی اول $b=78$ می‌باشد که اگر در رابطه‌ی $c^2-b^2=160$ قرار دهیم عدد c طبیعی نمی‌شود پس رابطه‌ی دوم صحیح است.

$$\begin{cases}b-a=5\\ b+a=31\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=13\\ b=18\end{cases} \Rightarrow c=22$$

۱۱۵- گزینه۲ اگر عبارت را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$$A=[(2-1)(2+1)][(3-1)(3+1)][(4-1)(4+1)]\cdots[(N-1)(N+1)]$$

$$=[1\times 3]\times[2\times 4]\times[3\times 5][4\times 6]\times\cdots\times[(N-1)(N+1)]$$

همه‌ی اعداد ۲ بار تکرار شده‌اند به جز ۱، ۲، N و $N+1$

$$\Rightarrow A=1\times 2\times N\times(N+1)\times K^2 \qquad (K=3\times 4\times 5\times\cdots\times(N-1))$$

پس باید $2N(N+1)$ مربع کامل باشد با توجه به صورت سؤال $N\geq 2$ می‌باشد. در عبارت داده‌شده اگر $N=2$ باشد حاصل مربع کامل نمی‌شود و برای $N\geq 3$ با سعی و خطا، اولین مقداری که برای N به دست می‌آید تا حاصل A مربع کامل شود، $N=8$ است.

۱۱۶- گزینه۱ ابتدا عدد موردنظر را کمی ساده می‌کنیم:

$$101(1+101+101^2)=101\frac{(101^3-1)}{101-1}=\frac{101^4-101}{100}$$

$$101^4=(100+1)^4=100^4+4\times 100^3+6\times 100^2+4\times 100+1$$

$$\Rightarrow \frac{101^4-101}{100}=\frac{10^8+4\times 10^6+6\times 10^4+3\times 100}{100}$$

که اگر عدد موردنظر را به صورت زیر بنویسیم:

$$=10^6+4\times 10^4+6\times 10^2+3=1040603$$

مجموع ارقام آن برابر ۱۴ می‌باشد.

۱۱۷- گزینه۲ ابتدا کسر را به کمک اتحاد اویلر ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}=(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

حال اگر a، b و c سه عدد فرد متوالی باشد داریم: $\begin{cases} b-a=۲ \\ c-b=۲ \\ c-a=۴ \end{cases}$

پس حاصل کسر برابر است با: $\frac{۱}{۲}[۴+۴+۱۶]=\frac{۱}{۲}\times ۲۴=۱۲$

و چون حاصل کسر همیشه ۱۲ است پس بزرگ‌ترین عددی که بـه آن بخش‌پذیر است نیز ۱۲ می‌باشد.

۱۱۸- **گزینه۳** فرض مسئله را می‌نویسیم:

$$a^۲-b^۲=P \Rightarrow (a-b)(a+b)=P$$

پس چون $a-b$ کوچک‌تر است یک حالت بیشتر پیش نمی‌آید.

$$\begin{cases} a-b=۱ \\ a+b=P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{P+۱}{۲} \\ b=\frac{P-۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a^۳-b^۳=(\frac{P+۱}{۲})^۳-(\frac{P-۱}{۲})^۳$$

$$=\frac{P^۳+۳P^۲+۳P+۱}{۸}-\frac{P^۳-۳P^۲+۳P-۱}{۸}=\frac{۶P^۲+۲}{۸}=\frac{۳P^۲+۱}{۴}$$

۱۱۹- **گزینه۳** عبارت داده‌شده را به کمک اتحاد تعمیم چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$(x^{۱۰}+x^۹+x^۸+\cdots+x+۱)(x^{۱۰}-x^۹+x^۸-x^۷+\cdots+x^۲-x+۱)$$

$$=\frac{x^{۱۱}-۱}{x-۱}\times\frac{x^{۱۱}+۱}{x+۱}=\frac{x^{۲۲}-۱}{x^۲-۱} \quad , \quad x^۲=t$$

$$=\frac{t^{۱۱}-۱}{t-۱}=t^{۱۰}+t^۹+\cdots+t+۱=x^{۲۰}+x^{۱۸}+\cdots+x^۲+۱$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم ضریب توان‌های زوج برابر ۱ و ضریب توان‌های فرد صفر است، پس:

$$a_۰+a_۱+\cdots+a_{۱۰}=\underbrace{(a_۰+a_۲+\cdots+a_{۱۰})}_{۶}+\underbrace{(a_۱+a_۳+\cdots+a_۹)}_{۰}=۶$$

۱۲۰- **گزینه۴**

روش اول از روش جای‌گذاری استفاده کرده و عبارت $x^۲+y^۲$ را برحسب یک متغیر می‌نویسیم:

$$۳x+۲y=۲۶ \Rightarrow y=۱۳-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow x^۲+y^۲=x^۲+۱۶۹+\frac{۹}{۴}x^۲-۳۹x$$

$$=\frac{۱۳}{۴}x^۲-۳۹x+۱۶۹=\frac{۱۳}{۴}(x^۲-۱۲x+۵۲)$$

$$=\frac{۱۳}{۴}[(x-۶)^۲+۱۶] \Rightarrow \text{Min}=\frac{۱۳}{۴}\times ۱۶=۵۲$$

روش دوم استفاده از اتحاد لاگرانژ

اتحاد لاگرانژ:

$$(ax+by)^۲+(ay-bx)^۲=(a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)$$

اگر در این اتحاد $a=۳$ و $b=۲$ باشد داریم:

$$(۳x+۲y)^۲+(۳y-۲x)^۲=(۹+۴)(x^۲+y^۲)$$

$$\Rightarrow ۱۳(x^۲+y^۲)=۲۶^۲+(۳y-۲x)^۲$$

پس کم‌ترین مقدار $x^۲+y^۲$ وقتی اتفاق می‌افتد که $۳y-۲x=۰$ باشد (و این اتفاق می‌افتد یعنی دستگاه $\begin{cases} ۳x+۲y=۲۶ \\ ۳y-۲x=۰ \end{cases}$ جواب دارد) و حاصل مینیمم $x^۲+y^۲$ برابر است با: $\frac{۲۶^۲}{۱۳}=۵۲$.

۱۲۱- **گزینه۲** اگر به دو طرف تساوی $\frac{۱}{۱-x}$ را بیافزاییم:

$$A+\frac{۱}{۱-x}=\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{۱}{۱-x}+\frac{۱}{۱+x}}_{\frac{۲}{۱-x^۲}}+\frac{۲}{۱+x^۲}}_{\frac{۴}{۱-x^۴}}+\frac{۴}{۱+x^۴}}_{\frac{۸}{۱-x^۸}}+\cdots+\frac{۶۴}{۱+x^{۶۴}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$A=\frac{۱۲۸}{۱-x^{۱۲۸}}-\frac{۱}{۱-x} \xrightarrow{x=۲} A=۱+\frac{۱۲۸}{۱-۲^{۱۲۸}}=۱-\frac{۱۲۸}{۲^{۱۲۸}-۱}$$

۱۲۲- **گزینه۴** $\frac{a}{b+c}+\frac{۲b}{a+c}+\frac{۳c}{a+b}=۱$

$$\Rightarrow \frac{۶-(b+c)}{b+c}+۲(\frac{۶-(a+c)}{a+c})+۳(\frac{۶-(a+b)}{a+b})=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{b+c}-۱+۲(\frac{۶}{a+c}-۱)+۳(\frac{۶}{a+b}-۱)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{b+c}+\frac{۱۲}{a+c}+\frac{۱۸}{a+b}=۷ \overset{\div ۶}{\Rightarrow} \frac{۱}{b+c}+\frac{۲}{a+c}+\frac{۳}{a+b}=\frac{۷}{۶}$$

۱۲۳- **گزینه۲** از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(a^{۲n}+a^n+۱)(a^{۲n}-a^n+۱)=a^{۴n}+a^{۲n}+۱$$

$$A=(x^۸-x^۴+۱)(x^۴-x^۲+۱)\underbrace{(x^۲-x+۱)(x^۲+x+۱)}_{x^۴+x^۲+۱}$$

$$=(x^۸-x^۴+۱)\underbrace{(x^۴-x^۲+۱)(x^۴+x^۲+۱)}_{x^۸+x^۴+۱}$$

$$=(x^۸-x^۴+۱)(x^۸+x^۴+۱)\Rightarrow A=x^{۱۶}+x^۸+۱ \xrightarrow{x=۲} A=۲^{۱۶}+۲^۸+۱$$

۱۲۴- **گزینه۴** دقت کنید وقتی مثلاً عدد $\frac{۷}{۳}$ را به عدد مخلوط تبدیل می‌کنیم داریم: $\frac{۷}{۳}=۲+\frac{۱}{۳}$ که عدد ۲ خارج قسمت تقسیم و ۱ باقی‌مانده تقسیم است. پس در صورت سؤال معنی تساوی این است که اگر تقسیم سمت چپ را انجام دهیم $x^۲+Ax-۷$ خارج قسمت و $Bx+C$ باقی‌مانده است. بنابراین تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۴-۵x^۳+۲x^۲-۷x+۱ & x^۲-۲x+۳ \\ \cline{2-2} -\underline{(x^۴-۲x^۳+۳x^۲)} & x^۲-۳x-۷ \\ -۳x^۳-x^۲-۷x+۱ & \\ -\underline{(-۳x^۳+۶x^۲-۹x)} & \\ -۷x^۲+۲x+۱ & \\ -\underline{(-۷x^۲+۱۴x-۲۱)} & \\ -۱۲x+۲۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-۳ \\ B=-۱۲ \Rightarrow A+B+C=-۳-۱۲+۲۲=۷ \\ C=۲۲ \end{cases}$$

۱۲۵- گزینه۲

روش اول

$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$=(x-1)(x+1)[(x^4+2x^2+1)-x^2]=(x-1)(x+1)[(x^2+1)^2-x^2]$

$=(x-1)(x+1)(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

روش دوم

$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

پس x^6-1 شامل ۴ عامل اول است.

۱۲۶- گزینه۴

$x^4+2x^2+9=x^4+9+2x^2$

$=(x^2+3)^2-6x^2+2x^2=(x^2+3)^2-4x^2=(x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

چون در عبارات درجه‌ی دوم، دلتا منفی است پس تجزیه نمی‌شوند.

۱۲۷- گزینه۲ ابتدا عبارت n^5-5n^3+4n را تجزیه می‌کنیم:

$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-1)(n^2-4)$

$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

که در واقع حاصل‌ضرب ۵ عدد متوالی است پس بر $5!=120$ بخش‌پذیر است.

حاصل‌ضرب n عدد طبیعی متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۱۲۸- گزینه۲ با دسته‌بندی مناسب عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$x^2+x+y^2+y+2xy-2=(x^2+y^2+2xy)+(x+y)-2$

$=(x+y)^2+(x+y)-2=((x+y)-1)((x+y)+2)$

$=(x+y-1)(x+y+2)$

۱۲۹- گزینه۱ اگر x^4+x^2+1 را تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

پس $a=1$ و $b=1$ یا $a=-1$ و $b=1$ است پس $ab=1$ یا $ab=-1$ است.

۱۳۰- گزینه۳ ابتدا پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم ولی به طوری که آن‌هایی در هم ضرب می‌شوند که مجموع جملات غیرمشترک آن‌ها با مجموع جملات غیرمشترک ۲ پرانتز دیگر برابر باشد:

$x(x-2)(x+1)(x+3)-72=[x(x+1)][(x-2)(x+3)]-72$

$=\underbrace{(x^2+x)}_{a}\underbrace{(x^2+x-6)}_{a-6}-72$

$=a(a-6)-72=a^2-6a-72=(a+6)(a-12)$

$=(x^2+x+6)(x^2+x-12)=(x^2+x+6)(x-3)(x+4)$

پس جواب گزینه‌ی ۳ است.

۱۳۱- گزینه۴ چون x^2+ax+2 یکی از عوامل x^4+4x^2-x+6 است پس حاصل‌ضرب عوامل دیگر یک عبارت درجه‌ی دوم به صورت x^2+bx+c می‌باشد؛ یعنی:

$x^4+4x^2-x+6=(x^2+ax+2)(x^2+bx+c)$

کاملاً واضح است که $2c=6$ است پس $c=3$ است. حال کافی است ضرایب x و x^2 و x^3 دو طرف تساوی و ضرایب را برابر قرار دهیم:

$$\begin{array}{l} x^3 \text{ ضریب}: 0=b+a \\ x^2 \text{ ضریب}: 4=c+2+ab \\ x \text{ ضریب}: -1=ac+2b \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \\ 3a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

۱۳۲- گزینه۳ ابتدا عبارت موردنظر را تجزیه می‌کنیم:

$4x^4-17x^2y^2+4y^4=4x^4-16x^2y^2-x^2y^2+4y^4$

$=4x^2(x^2-4y^2)-y^2(x^2-4y^2)$

$=(x^2-4y^2)(4x^2-y^2)=(x+2y)(x-2y)(2x+y)(2x-y)$

$\Rightarrow a+b=1+2\ ,\ 1-2\ ,\ 2+1\ ,\ 2-1 \Rightarrow a+b=3\ ,\ -1\ ,\ 1$

اما می‌توانیم تجزیه حاصل را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$(x+2y)(x-2y)(2x+y)(2x-y)=(-x-2y)(x-2y)(-2x-y)(2x-y)$

$\Rightarrow a+b=-1-2,1-2,-2-1,2-1 \Rightarrow a+b=-3,-1,1$

پس $a+b$، ۴ تا مقدار ۱، ۱-، ۳ و ۳- را می‌تواند داشته باشد.

۱۳۳- گزینه۴ با دسته‌بندی مناسب و تغییر متغیر عبارت موردنظر به صورت زیر می‌شود:

$a+b=x\ ,\ a-b=y \Rightarrow x^2+y^2-x^2y^2-1$

$=(x^2-1)+(y^2-x^2y^2)=(x^2-1)-y^2(x^2-1)=(x^2-1)(1-y^2)$

$=(x+1)(x-1)(1+y)(1-y)=(a+b+1)(a+b-1)(1+a-b)(1-a+b)$

$=-(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(a-b-1)$

۱۳۴- گزینه۱ از اتحاد اویلر استفاده می‌کنیم:

$x^3+y^3-3xy+1=x^3+y^3+1^3-3(x)(y)(1)$

$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-x-y-xy)$

۱۳۵- گزینه۱ چون x^5+x+1 دارای عامل x^2+x+1 است پس:

$x^5+x+1=(x^2+x+1)\cdot A(x)$

که $A(x)$ عبارت درجه ۳ است. حال اگر به جای همه‌ی xها، $x-1$ قرار دهیم:

$(x-1)^5+x-1+1=((x-1)^2+x-1+1)A(x-1)$

$\Rightarrow (x-1)^5+x=(x^2-2x+1+x)A(x-1)=(x^2-x+1)A(x-1)$

پس عبارت $(x-1)^5+x$ دارای عامل x^2-x+1 است و با تجزیه‌ی کامل عبارت موردنظر، می‌توان وجود سایر گزینه‌ها را در تجزیه‌ی آن رد کرد.

۱۳۶- گزینه۱ عبارت $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$x^2=t \rightarrow t^4+t^3+t^2+t+1=(t^4+t^3+t^2+t+1)\frac{(t-1)}{t-1}$

$=\frac{t^5-1}{t-1}=\frac{(x^2)^5-1}{x^2-1}=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{(x^5-1)(x^5+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^5-1}{x-1}\times\frac{x^5+1}{x+1}$

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$\Rightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a'=-b'=c'=-1 \end{cases} \Rightarrow aa'+bb'+cc'=-1+1-1=-1$

یا $\begin{cases} a'=b'=c'=1 \\ a=-b=c=-1 \end{cases} \Rightarrow aa'+bb'+cc'=-1+1-1=-1$

۱۳۷- گزینه۳

روش اول

$$(x^3+x^2+x+1)^2-x^3=\left(\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}\right)^2-x^3$$

$$=\frac{(x^4-1)^2}{(x-1)^2}-x^3=\frac{(x^4-1)^2-x^3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^8-\cancel{2x^4}+1-x^5+\cancel{2x^4}-x^3}{(x-1)^2}=\frac{x^8-x^3-x^5+1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3(x^5-1)-(x^5-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x^5-1)(x^3-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+x^2+x+1)\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)^2}}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)$$

روش دوم

$$(x^3+x^2+x+1)^2-x^3=[(x^3+x^2+x+1)^2-1]-(x^3-1)$$

$$=(x^3+x^2+x+1+1)(x^3+x^2+x+1-1)-(x-1)(x^2+x+1)$$

$$=(x^3+x^2+x+2)(\underbrace{x^3+x^2+x}_{x(x^2+x+1)})-(x-1)(x^2+x+1)$$

$$=(x^2+x+1)[x(x^3+x^2+x+2)-(x-1)]=(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

۱۳۸- گزینه۱

روش اول ابتدا به کمک اطلاعات داده‌شده x^2+xy+y^2 را به دست می‌آوریم:

$$x^3-y^3=6\Rightarrow\underbrace{(x-y)}_{2}(x^2+xy+y^2)=6\Rightarrow x^2+xy+y^2=3$$

حال عبارت $(x+y)^4+x^4+y^4$ را تجزیه می‌کنیم:

$$(x+y)^4+x^4+y^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4$$

$$=2x^4+2y^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3$$

$$=2(x^4+y^4+x^2y^2+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3)$$

$$=2(x^2+xy+y^2)^2=2\times3^2=18$$

روش دوم برای تجزیه‌ی $(x+y)^4+x^4+y^4$ می‌توانیم از روش زیر عمل کنیم، سایر مراحل شبیه روش اول خواهد بود:

$$(x+y)^4+x^4+y^4=[(x^2+y^2)+2xy]^2+(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2+4x^2y^2+4xy(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$

$$=2(x^2+y^2)^2+2x^2y^2+4xy(x^2+y^2)$$

$$=2[(x^2+y^2)^2+(xy)^2+2xy(x^2+y^2)]=2(x^2+xy+y^2)^2$$

۱۳۹- گزینه۴ ابتدا عدد A را تجزیه می‌کنیم:

$$A=\overbrace{99\ldots9}^{\text{۱۲ تا}}=10^{12}-1=(10^6-1)(10^6+1)=(10^3-1)(10^3+1)(100^3+1)$$

$$=(10-1)(10^2+10+1)(10+1)(10^2-10+1)(100+1)(100^2-100+1)$$

$$=9\times111\times11\times91\times101\times9901=3^3\times7\times11\times13\times37\times101\times9901$$

پس بر ۲۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۴۰- گزینه۴ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم.

$$x^2+1=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$$

$$y^2+1=y^2+xy+yz+zx=(y+z)(y+x)$$

$$z^2+1=z^2+xy+yz+zx=(z+x)(z+y)$$

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}}{3(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{1}{3}$$

۱۴۱- گزینه۲

$$(10^{2011}+2)^2=10^{4022}+4\times10^{2011}+4=1\underbrace{0\ldots0}_{\text{۲۰۱۰ تا}}4\underbrace{0\ldots0}_{\text{۲۰۱۰ تا}}4$$

پس مجموع ارقام برابر ۹ است.

۱۴۲- گزینه۱ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم به این صورت که در $(10-1)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$\frac{(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)(10^{16}+1)}{10-1}$$

$$=\frac{10^{32}-1}{10-1}=\frac{(10-1)(10^{31}+10^{30}+\cdots+1)}{10-1}$$

$$=10^{31}+10^{30}+\cdots+10^2+10+1=\underbrace{11\ldots1}_{\text{۳۲ تا}}\Rightarrow\text{مجموع ارقام}=32$$

۱۴۳- گزینه۳

روش اول عبارت را مربع کامل می‌کنیم:

$$x^2+10x+37=x^2+10x+25+12=(x+5)^2+12$$

مینیمم $(x+5)^2$ به ازای $x=-5$ صفر می‌شود پس کم‌ترین مقدار کل عبارت ۱۲ می‌باشد.

روش دوم

مینیمم عبارت ax^2+bx+c به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ اتفاق می‌افتد.

پس: $A=x^2+10x+37$

$$x_{min}=-\frac{10}{2}=-5\Rightarrow A_{min}=(-5)^2+10(-5)+37=25-50+37=12$$

۱۴۴- گزینه۱ ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کرده و همه‌ی عبارات را به یک طرف تساوی می‌بریم:

$$4x^2+4x+1+y^2+y^2+4x^2-4xy-\frac{1}{3}=0$$

$$\Rightarrow 8x^2+2y^2-4xy+4x+\frac{2}{3}=0\xRightarrow{\times3}24x^2+6y^2-12xy+12x+2=0$$

$$\Rightarrow 6(x-y)^2+2(3x+1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\3x+1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y=-\frac{1}{3}\Rightarrow x+y=-\frac{2}{3}$$

۱۴۵- گزینه۲ از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^4+a^2+1=(a^4+2a^2+1)-a^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

از طرفی با کمی محاسبات در می‌یابیم که:

$$(n-1)^2+(n-1)+1=n^2-n+1$$

یعنی: $۲^۲+۲+۱=۳^۲-۳+۱\ ,\ ۳^۲+۳+۱=۴^۲-۴+۱$

پس:

$$S=\frac{\cancel{(۲^۲+۲+۱)}(۲^۲-۲+۱)\cancel{(۴^۲+۴+۱)}\dots\cancel{(۸^۲-۸+۱)}\cancel{(۱۰^۲+۱۰+۱)}\cancel{(۱۰^۲-۱۰+۱)}}{\cancel{(۳^۲+۳+۱)}\cancel{(۳^۲-۳+۱)}\cancel{(۵^۲+۵+۱)}\dots\cancel{(۹^۲-۹+۱)}(۱۱^۲+۱۱+۱)\cancel{(۱۱^۲-۱۱+۱)}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۲^۲-۲+۱}{۱۱^۲+۱۱+۱}=\frac{۳}{۱۳۳}$$

۱۴۶- **گزینه۴** ابتدا مجهول c را از معادلات حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases}a^۲+b-c=۱۰۰\\ a+b^۲-c=۱۲۴\end{cases}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}}a^۲+b-a-b^۲=-۲۴$$

$$\Rightarrow a^۲-b^۲+b-a=-۲۴\Rightarrow (a-b)(a+b)-(a-b)=-۲۴$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b-۱)=-۲۴\Rightarrow (b-a)(a+b-۱)=۲۴$$

چون a و b طبیعی هستند حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

$$b-a<a+b+۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-a=۱\\ a+b-۱=۲۴\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}b-a=۲\\ a+b-۱=۱۲\end{cases}$$

$$\text{یا}\ \begin{cases}b-a=۳\\ a+b-۱=۸\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}b-a=۴\\ a+b-۱=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۱۲\\ b=۱۳\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}a=\frac{۱۱}{۲}\\ b=\frac{۱۵}{۲}\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}a=۳\\ b=۶\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}a=\frac{۳}{۲}\\ b=\frac{۱۱}{۲}\end{cases}$$

پس: $\begin{cases}a=۱۲\\ b=۱۳\end{cases}\Rightarrow c=۵۷\Rightarrow a+b+c=۱۲+۱۳+۵۷=۸۲$

یا

$$\begin{cases}a=۳\\ b=۶\end{cases}\Rightarrow c=-۸۵\qquad \text{غیرقابل قبول}$$

۱۴۷- **گزینه۳** از فرض $a^۳-b^۳-c^۳=۳abc$ و نتیجه‌ی اتحاد اویلر شروع می‌کنیم:

$$a^۳+(-b)^۳+(-c)^۳=۳a(-b)(-c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-b=-c & (I)\\ \text{یا}\\ a+(-b)+(-c)=۰ & (II)\end{cases}$$

$(I): a=-b=-c$

$$a^۲=۲(b+c)\Rightarrow a^۲=۲(-a-a)\Rightarrow a^۲=-۴a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۰ & \text{غیرقابل قبول}\\ a=-۴ & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

$(II): a+(-b)+(-c)=۰\Rightarrow a=b+c$

$$a^۲=۲(b+c)\Rightarrow a^۲=۲a\Rightarrow\begin{cases}a=۰ & \text{غ ق ق}\\ a=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow b+c=a=۲\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\ c=۱\end{cases}\Rightarrow a+b+c=۴$$

۱۴۸- **گزینه۴** اگر فرض کنیم $۲^x-۴=a$ و $۴^x-۲=b$ خواهیم داشت:

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳\Rightarrow a^۳+b^۳=a^۳+b^۳+۳a^۲b+۳ab^۲$$

$$\Rightarrow ۳ab(a+b)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\ b=۰\\ a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲^x-۴=۰\\ ۴^x-۲=۰\\ ۲^x+۴^x-۶=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲^x=۴\to x=۲\\ ۴^x=۲\to x=\frac{۱}{۲}\\ ۲^x+۴^x-۶=۰\quad (۱)\end{cases}$$

$$(۱)\xrightarrow{۲^x=y}y^۲+y-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}y=-۳ & \text{غیرقابل قبول}\\ y=۲\Rightarrow ۲^x=۲\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

پس معادله سه ریشه‌ی ۲، $\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ را دارد.

۱۴۹- **گزینه۲** می‌دانیم در اتحاد مربع مجموع n جمله‌ای، عبارات، مربع‌شده با هم جمع می‌شوند و با ۲ برابر مجموع حاصل‌ضرب دوبه‌دوی عبارات جمع می‌شود. قسمت دوم عبارت چون ۲ برابر می‌شود همه ضرایب زوج هستند پس ضرایب فرد در قسمت اول هستند چون ضرایب فرد، ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ هستند و هیچ دوجمله‌ای متشابه با ضریب فرد وجود ندارد، پس ۵ ضریب فرد وجود دارد.

۱۵۰- **گزینه۱** می‌دانیم:

$$\begin{cases}۴۵+۴\sqrt{۴۱}=۴۱+۴+۴\sqrt{۴۱}=(\sqrt{۴۱}+۲)^۲\\ ۴۵-۴\sqrt{۴۱}=۴۱+۴-۴\sqrt{۴۱}=(\sqrt{۴۱}-۲)^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(۴۵+۴\sqrt{۴۱})^۳}-\sqrt{(۴۵-۴\sqrt{۴۱})^۳}=\sqrt{(\sqrt{۴۱}+۲)^۶}-\sqrt{(\sqrt{۴۱}-۲)^۶}$$

$$=(\underbrace{\sqrt{۴۱}+۲}_{a})^۳-(\underbrace{\sqrt{۴۱}-۲}_{b})^۳=a^۳-b^۳=(a-b)^۳+۳ab(a-b)$$

$$=۴^۳+۳\times(۳۷)(۴)=۵۰۸$$

۱۵۱- **گزینه۲** چون a و b هر دو مثلثی هستند پس:

$$\begin{cases}a=\frac{n(n+۱)}{۲}\\ b=\frac{m(m+۱)}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{n(n+۱)}{۲}-\frac{m(m+۱)}{۲}=۱۰۱$$

$$\overset{\times ۸}{\Rightarrow}(۴n^۲+۴n)-(۴m^۲+۴m)=۸۰۸$$

$$\Rightarrow((۲n+۱)^۲-۱)-((۲m+۱)^۲-۱)=۸۰۸\Rightarrow(۲n+۱)^۲-(۲m+۱)^۲=۸۰۸$$

$$\Rightarrow(۲n+۱+۲m+۱)(۲n+۱-۲m-۱)=۸۰۸$$

$$\Rightarrow ۲(m+n+۱)(۲)(n-m)=۸۰۸\Rightarrow(m+n+۱)(n-m)=۲۰۲$$

پس ۲ حالت وجود دارد:

$$\begin{cases}m+n+۱=۲۰۲\\ n-m=۱\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}m+n+۱=۱۰۱\\ n-m=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۱۰۱\\ m=۱۰۰\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}n=۵۱\\ m=۴۹\end{cases}$$

پس مسئله ۲ جواب دارد.

۱۵۲- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف را در ۴ ضرب کنیم:

$$4x^2+4x+32=4y^2 \Rightarrow (2x+1)^2+31=4y^2$$

$$\Rightarrow (2y)^2-(2x+1)^2=31 \Rightarrow (2y+2x+1)(2y-2x-1)=31$$

پرانتز اول طبیعی است و از پرانتز دوم بیشتر است پس یک حالت بیشتر وجود ندارد:

$$\begin{cases}2y+2x+1=31\\2y-2x-1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=7\\y=8\end{cases}$$

۱۵۳- گزینهٔ ۳ اعداد $x=1$ و $y=1$ در معادله صدق می‌کنند پس $(x,y)=(1,1)$ یک جواب است. حال فرض می‌کنیم $x,y\geq 2$ هستند پس:

$$2^x=3^y-1 \Rightarrow 2^x=\underbrace{(3-1)}_{2}(3^{y-1}+3^{y-2}+\dots+3+1)$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2^{x-1}=3^{y-1}+3^{y-2}+\dots+3+1$$

سمت چپ زوج است و چون تعداد اعداد فرد در سمت راست که با هم جمع شده‌اند برابر y است باید y زوج باشد پس داریم: $y=2k$

$$2^x=3^{2k}-1 \Rightarrow 2^x=(3^k+1)(3^k-1)$$

پرانتزهای سمت راست هر دو باید توانی از ۲ باشند پس:

$$\begin{cases}3^k+1=2^a\\3^k-1=2^b\end{cases} \Rightarrow 2^a-2^b=2 \xrightarrow{\div 2} 2^{a-1}-2^{b-1}=1$$

اگر $a,b\geq 2$ باشند معادله جواب ندارد چون سمت چپ زوج و سمت راست فرد است، پس:

$$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases} \Rightarrow k=1 \to y=2\ ,\ x=3$$

پس جواب‌ها عبارت‌اند از $(3,2)$ یا $(x,y)=(1,1)$

۱۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا عبارت N را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$N=3^{512}-1=(3^{256}+1)(3^{256}-1)=(3^{256}+1)(3^{128}+1)(3^{128}-1)$$

$$=(3^{256}+1)(3^{128}+1)(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{16}+1)(3^{8}+1)(3^{4}+1)$$

$$(3^2+1)(3+1)(3-1) \Rightarrow N=(9^{128}+1)(9^{64}+1)(9^{32}+1)(9^{16}+1)$$

$$(9^8+1)(9^4+1)(9^2+1)(9+1)\times 4\times 2$$

کاملاً واضح است که پرانتزها بر ۲ بخش‌پذیر هستند ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیستند زیرا باقی‌ماندهٔ ۹ بر ۴ برابر یک است و باقی‌ماندهٔ 9^n+1 بر ۴ برابر ۲ خواهد بود. پس هر پرانتز یک عامل ۲ دارد و عدد 4×2 نیز ۳ عامل ۲ دارد که روی هم ۱۱ عامل ۲ وجود دارد. پس بر 2^{11} بخش‌پذیر است.

۱۵۵- گزینهٔ ۱

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

$$=x^n+(a_1+a_2+\dots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}$$

$$+\dots+(\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{مجموع حاصل‌ضرب k به k ی غیرمشترک‌ها}})x^{n-k}+\dots+a_1a_2\cdots a_n$$

پس طبق این نکته ضریب x^5 برابر است با مجموع حاصل‌ضرب دوبه‌دوجملات غیرمشترک:

$$\text{ضریب } x^5=1\times2+1\times3+1\times4+1\times5+1\times6+1\times7+2\times3+2\times4$$

$$+2\times5+2\times6+2\times7+3\times4+3\times5+3\times6+3\times7+4\times5+4\times6+4\times7$$

$$+5\times6+5\times7+6\times7=\frac{1}{2}((1+\dots+7)^2-(1^2+\dots+7^2))$$

$$=\frac{1}{2}((\frac{7\times8}{2})^2-\frac{7\times8\times15}{6})=322$$

۱۵۶- گزینهٔ ۴ پرانتز دوم اگر به توان برسد به صورت زیر خواهد بود.

$$(1+x^4+x^8)^2=1+x^8+x^{16}+2x^4+2x^8+2x^{12}$$

فقط ۱ و $2x^4$ هستند که اگر در عبارات مناسب ضرب شوند x^5 تولید می‌کنند. عدد ۱ در پرانتز دوم در عبارت ax^5 که از پرانتز اول تولید می‌شود x^5 تولید می‌کند و عبارت $2x^4$ در bx پرانتز اول پس خواهیم داشت:

$$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\dots+1382x^{1381})^2$$

$$\left.\begin{array}{l}ax^5=2(1)(6x^5)+2(2x)(5x^4)+2(3x^2)(4x^3)=56x^5\\bx=2(1)(2x)=4x\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (56x^5)(1)+(4x)(2x^4)=56x^5+8x^5=64x^5$$

$$bx=2(1)(2x)=4x \Rightarrow (56x^5)(1)+(4x)(2x^4)=56x^5+8x^5=64x^5$$

۱۵۷- گزینهٔ ۱ چون هر دو، برابر ۱۰۰ هستند داریم:

$$A^2+2B^2-2BC=2AB-C^2$$

$$\Rightarrow A^2+2B^2-2BC-2AB+C^2=0$$

$$\Rightarrow (A-B)^2+(B-C)^2=0 \Rightarrow A=B=C$$

$$\xrightarrow[\text{از رابطه‌ها}]{\text{جای‌گذاری در یکی}} 2A^2-A^2=100 \Rightarrow A^2=100$$

$$\Rightarrow A=10 \Rightarrow A+B+C=30$$

۱۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا به سراغ معادلهٔ اول می‌رویم:

$$1+a^3+3ab=b^3 \Rightarrow a^3+(-b)^3+1^3=3a(-b)(1)$$

می‌دانیم:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz \Rightarrow \begin{cases}x=y=z\\ \text{یا}\\ x+y+z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=-b=1 \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases} \Rightarrow \text{در معادلهٔ دوم صدق نمی‌کند}\\ \text{یا}\\ a+(-b)+1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow b=a+1$$

در معادلهٔ دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$1+a^5=(a+1)^5 \Rightarrow 1+a^5=a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$$

$$\Rightarrow 5a^4+10a^3+10a^2+5a=0$$

$$\overset{\div5}{\Rightarrow} a^4+2a^3+2a^2+a=0 \Rightarrow a(a^3+1)+2a^2(a+1)=0$$

$$\Rightarrow a(a+1)(a^2-a+1+2a)=0 \Rightarrow a(a+1)(a^2+a+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=0 \Rightarrow b=1\\a=-1 \Rightarrow b=0\\a^2+a+1=0\ \text{جواب ندارد}\end{cases} \Rightarrow (a,b)=(0,1)\ ,\ (-1,0)$$

۱۵۹- گزینه ۱ بهترین راه برای حل این مسئله این است که عبارت داده‌شده را تجزیه کنیم. (به کمک اتحاد جمله‌مشترک)

$$a^2 - ab - 2b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a + b = 0 \end{cases}$$ چون هر دو مثبت هستند، غیرقابل‌قبول است.

$$\Rightarrow a = 2b \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{2b+b}{2b-b} = \frac{3b}{b} = 3$$

۱۶۰- گزینه ۱ در این نوع مسائل عموماً یکی از راه‌ها استفاده از اتحادهای $a^n \pm b^n$ می‌باشد:

$$5^{22} + 7 = (5^2)^{11} - 1 + 8 = 25^{11} - 1^{11} + 8$$

$$= (25-1)(25^{10} + 25^9 + \cdots + 1) + 8 = 24k + 8 = 8(3k+1) = 8t$$

پس بر ۸ بخش‌پذیر است.

$a^n - b^n$ بر $a - b$ بخش‌پذیر است اگر n طبیعی باشد.

$a^n - b^n$ بر $a + b$ بخش‌پذیر است اگر n زوج باشد.

$a^n + b^n$ بر $a + b$ بخش‌پذیر است اگر n فرد باشد.

۱۶۱- گزینه ۱ عبارت $xy + x + y$ عبارت بسیار مهمی است چرا که با افزودن عدد ۱ به آن تجزیه می‌شود و در این مسئله چون اعداد طبیعی هستند این نکته قابل اهمیت است.

$$xy + x + y + 1 = n + 1 \Rightarrow (x+1)(y+1) = n + 1$$

حال n عددی است که $n+1$ باید به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشته شود یا به زبان ساده‌تر $n+1$ باید مرکب باشد که چون ۱۰۱ اول است پس به ازای $n = 100$ معادله جواب ندارد.

۱۶۲- گزینه ۱ ابتدا سه فرض داده‌شده را جمع می‌کنیم:

$$a^2 + 2b + b^2 + 4c + c^2 + 6a = 7 + (-7) + (-14)$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + b^2 + 2b + c^2 + 4c + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + 6a + 9) + (b^2 + 2b + 1) + (c^2 + 4c + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (a+3)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = -3 \ , \ b = -1 \ , \ c = -2 \Rightarrow abc = (-3)(-1)(-2) = -6$$

۱۶۳- گزینه ۴ ابتدا همه‌ی پرانتزها را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$S = \frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)\cdots(100-1)(100^2+100+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)\cdots(100+1)(100^2-100+1)}$$

با چند محاسبه‌ی ساده می‌توان فهمید که داریم:

$$(n-1)^2 + (n-1) + 1 = n^2 - n + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^2 + 2 + 1 = 3^2 - 3 + 1 \\ 3^2 + 3 + 1 = 4^2 - 4 + 1 \\ \vdots \end{cases}$$

پس تعدادی از عبارت‌های صورت و مخرج با هم ساده شده و آن‌چه باقی می‌ماند به صورت زیر است:

$$S = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(100-1)(100^2+100+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(4+1)\cdots(100+1)}$$

$$= \frac{1\times2\times3\times\cdots\times99\times10101}{3\times3\times4\times5\times\cdots\times101} = \frac{2\times10101}{3\times100\times101} = 0/66673$$

پس به گزینه‌ی ۴ نزدیک‌تر است.

۱۶۴- گزینه ۲ چون همه‌ی پایه‌ها دارای عامل‌هایی از ۲ و ۳ هستند پس: $2^x = a \ , \ 3^x = b$

$$\Rightarrow a + b - a^2 + ab - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$$

$$\xRightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

مجموع سه عبارت نامنفی صفر شده است، پس هر سه صفرند بنابراین: $a = b = 1 \Rightarrow 2^x = 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

پس یک جواب حقیقی دارد.

۱۶۵- گزینه ۴ جملات حاصل از بسط این عبارت به صورت مجموع یا تفریق جملاتی است که هر جمله از حاصل‌ضرب ۵ حرف تشکیل شده به طوری که از هر پرانتز یک حرف می‌باشد. در پرانتز اول و آخر همه‌ی علامت‌ها مثبت است. برای این‌که علامت مثبت حاصل شود؛ حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

علامت پرانتز چهارم تعداد حالت	علامت پرانتز سوم تعداد حالت	علامت پرانتز دوم تعداد حالت	
+ ۱ حالت	+ ۲ حالت	+ ۲ حالت	$\Rightarrow 2\times2\times1=4$
+ ۱ حالت	− ۱ حالت	− ۱ حالت	$\Rightarrow 1\times1\times1=1$
− ۲ حالت	+ ۲ حالت	− ۱ حالت	$\Rightarrow 1\times2\times2=4$
− ۲ حالت	− ۱ حالت	+ ۲ حالت	$\Rightarrow 2\times1\times2=4$

$$\Rightarrow 4 + 1 + 4 + 4 = 13$$

پرانتز اول ۳ حالت و پرانتز آخر ۲ حالت دارند، پس:

تعداد کل حالات $= 13 \times 3 \times 2 = 78$