

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار ۱ از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

- ۱- **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۳ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند.
 - ب) **آزمون طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون شماره ۳ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا یک آزمون نوبت اول مشابه آزمون‌های شما را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- ۲- **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۴ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۴ تا ۷ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید.
 - ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۸ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۵ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.
- ۳- **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم
- ۴- **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند 😊 در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار ۱ نیاز دارید، تنها در ۱۲ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

فهرست

پاسخ‌نامه	آزمون	نوبت	
۱۶	۳	اول	آزمون شماره ۱ (طبقه‌بندی‌شده)
۱۷	۴	اول	آزمون شماره ۲ (طبقه‌بندی‌شده)
۱۷	۵	اول	آزمون شماره ۳ (طبقه‌بندی‌نشده)
۱۸	۶	دوم	آزمون شماره ۴ (طبقه‌بندی‌شده)
۱۹	۷	دوم	آزمون شماره ۵ (طبقه‌بندی‌شده)
۲۰	۸	دوم	آزمون شماره ۶ (طبقه‌بندی‌شده)
۲۱	۹	دوم	آزمون شماره ۷ (طبقه‌بندی‌شده)
۲۱	۱۰	دوم	آزمون شماره ۸ (طبقه‌بندی‌نشده)
۲۲	۱۱	دوم	آزمون شماره ۹ (طبقه‌بندی‌نشده)
۲۳	۱۲	دوم	آزمون شماره ۱۰ (طبقه‌بندی‌نشده)
۲۴	۱۴	دوم	آزمون شماره ۱۱ (طبقه‌بندی‌نشده)
۲۵	۱۵	دوم	آزمون شماره ۱۲ (طبقه‌بندی‌نشده)

۲۷

درس‌نامه توپ برای شب امتحان



نمره	ریاضی و آمار ۱	رشته: ادبیات و علوم انسانی	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شماره ۳	نوبت اول پایه دهم دوره متوسطه دوم		
۱	۱	حاصل $(100/1)^3$ را به کمک اتحادها به دست آورید.		
۱	۲	با توجه به الگوی مقابل و به کمک مثلث خیام، حاصل سطر هفتم را حدس بزنید:		
۲/۵	۳	الف) عبارت $(x-3)^2 - 49x^2$ را تجزیه کنید. ب) ک.م.م عبارت‌های $a^3 + 2a^2 - 3a$ و $a^3 + 8a^2 + 15a$ را به دست آورید.		
۱	۴	کدام عبارت زیر، گویا است؟ دامنه آن را تعیین کنید.		
۱/۵	۵	چه عبارتی را باید با $\frac{x^2+9x}{x^2-9}$ جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{3}{x+3}$ شود؟ (عبارت به دست آمده را تا حد امکان ساده کنید).		
۲	۶	معادلات زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید.		
۱	۷	معادله $3x^2 + kx - 5 = 0$ به ازای مقادیر مختلف k چند جواب خواهد داشت؟		
۱/۵	۸	در شکل زیر طول تمام پاره‌خطها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه محیط و مساحت شکل با هم برابر باشند x را به دست آورید.		
۱	۹	الف) به ازای چه مقدار از k معادله $\frac{2x-3}{5x} = \frac{2}{kx} - \frac{x}{15k}$ دارای جواب $x = 3$ است؟ ب) معادله گویای مقابل را حل کنید:		
۱	۱۰	اگر یکی از جواب‌های معادله $0 = 7x^2 - kx + 35$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟		
۱	۱۱	در هر قسمت، متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید: الف) $h(x) = \sqrt{2x-1}$		
۱	۱۲	ب) بهره هوشی دانش‌آموزان، یکی از عوامل مؤثر در پیشرفت تحصیلی آن‌ها است. اگر نمودار ون مقابل، بیانگر یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.		
۱	۱۳	قسمتی از تابع f به صورت جدول زیر است:		
۱	۱۴	برای f یک ضابطه مناسب بر حسب x بنویسید. سپس $f(-10)$ را حساب کنید.		
۱/۵	۱۴	نمودار روابط $y = 3$ و $x = -4$ را رسم کرده، دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید. کدام یک از آن‌ها بیانگر یک تابع است؟ چرا؟		
۲	۱۵	در یک کارخانه، نوعی لامپ تولید می‌شود و هر لامپ به قیمت ۳۰۰ تومان به فروش می‌رسد. اگر هر روز x لامپ تولید شود و معادله هزینه کارخانه $C(x) = x^2 + 200x + 30$ باشد: الف) معادله سود کارخانه را به دست آورید. ب) چند لامپ تولید شود تا بیشترین سود عاید کارخانه شود؟ پ) بیشترین مقدار سود چه قدر است؟		
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید		

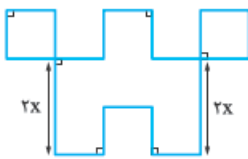
$$A = \frac{|x|-4}{x^2-3x}$$

$$B = \frac{x-1}{x^2+4}$$

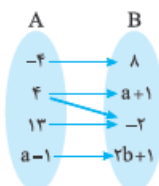
الف) $x^2 - 15x + 44 = 0$ (تجزیه)

ب) $5x^2 - 6 = 0$ (ریشه‌گیری)

پ) $x^2 + 16 = 8x$ (روش کلی)



$$\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$



x	0	1	2	3	4
f	5	9	13	17	21

ردیف	ریاضی و آمار ۱	رشته: ادبیات و علوم انسانی	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره																									
	آزمون شماره ۵		نوبت دوم پایه دهم دوره متوسطه دوم																											
۱	فصل اول حاصل عبارت $1^2 - 25^2 - 251^2$ را به کمک اتحادها به دست آورید.				۱																									
۲	فصل دوم معادلات گویای زیر را حل کنید.				۲																									
	الف) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$	ب) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$																												
۳	در معادله $-4x^2 + 2x + 3 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله به دست آورید.				۳																									
۴	معادلات زیر را حل کنید.				۴																									
۱/۵	الف) $(x-3)^2 - 36 = 0$ (ریشه‌گیری)	ب) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ (مربع کامل)																												
۵	فصل سوم دامنه و برد توابع مقابل را مشخص کنید.				۵																									
۱/۵	الف) 	ب) $f: A \rightarrow B$, $A = \{0, 3, 8\}$ $f(x) = \sqrt{x+1}$																												
۶	جدول مقابل، رابطه خطی بین عمق و دمای سنگ‌های زیر زمین را نشان می‌دهد: الف) ضابطه f را به دست آورید. ب) در چه عمقی دما به 300 درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟ پ) در عمق 10 کیلومتری دما چه قدر است؟				۶																									
	<table border="1" data-bbox="159 907 414 985"> <tr> <td>عمق x (km)</td> <td>۳</td> <td>۵</td> </tr> <tr> <td>y (درجه سانتی‌گراد)</td> <td>۸۰</td> <td>۱۴۰</td> </tr> </table>	عمق x (km)	۳	۵	y (درجه سانتی‌گراد)	۸۰	۱۴۰																							
عمق x (km)	۳	۵																												
y (درجه سانتی‌گراد)	۸۰	۱۴۰																												
۷	فصل چهارم به متن مقابل توجه کنید: «در یک کارخانه، روزانه 3000 عدد شامپو تولید می‌شود. به طور تصادفی 50 عدد آن‌ها را انتخاب کرده تا کیفیت آن‌ها را بررسی کنیم (خوب، متوسط، بد). در این نمونه، نسبت شامپوهای با کیفیت خوب برابر $\frac{40}{50}$ است.» الف) نوع متغیر در متن بالا چیست؟ جامعه و نمونه را مشخص کنید. ب) نسبت $\frac{40}{50}$ آماره است یا پارامتر؟ چرا؟				۷																									
۸	میانگین داده‌های $3, a, 4, 7$ برابر 5 است. میانه داده‌های $2, 2, a, 3, 4, 8, 10, 12, 15$ را به دست آورید.				۸																									
۹	در یک سری از داده‌های آماری، تمام داده‌ها را در عددی مثبت مثل k ضرب می‌کنیم. دامنه تغییرات چه تغییری خواهد کرد؟ میانه و میانگین چه طور؟				۹																									
۱۰	در داده‌های آماری $13, 12, 12, 11, 9, 8, 8, 6, 6, 3, 3, 4$ داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف کنید. انحراف معیار داده‌های باقی‌مانده را به دست آورید.				۱۰																									
۱۱	در یک سری از داده‌ها که به صورت منحنی نرمال قابل نمایش نیستند، میانگین برابر با \bar{x} و انحراف معیار برابر σ است. به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) تقریباً چند درصد داده‌ها در بازه $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ قرار دارند؟ ب) تقریباً 98% داده‌ها، در چه بازه‌ای واقع هستند؟				۱۱																									
۱۲	فصل پنجم نمودار جعبه‌ای داده‌های مقابل را رسم کنید.				۱۲																									
۳	$3, 4, 4, 8, 12, 14, 15, 18, 21, 25, 30$																													
۱۳	با توجه به جدول زیر، نمودارهای راداری مناسب رسم کنید.				۱۳																									
	<table border="1" data-bbox="159 1724 989 2016"> <thead> <tr> <th>متغیر</th> <th>نام درس</th> <th>امیر</th> <th>محسن</th> <th>بیشینه (حداکثر)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>درس اول (x_1)</td> <td>ریاضی</td> <td>۱۸</td> <td>۱۰</td> <td>۱۹</td> </tr> <tr> <td>درس دوم (x_2)</td> <td>معارف</td> <td>۱۷</td> <td>۱۸</td> <td>۲۰</td> </tr> <tr> <td>درس سوم (x_3)</td> <td>عربی</td> <td>۱۶</td> <td>۱۹</td> <td>۱۹</td> </tr> <tr> <td>درس چهارم (x_4)</td> <td>فارسی</td> <td>۲۰</td> <td>۱۷</td> <td>۲۰</td> </tr> </tbody> </table>	متغیر	نام درس	امیر	محسن	بیشینه (حداکثر)	درس اول (x_1)	ریاضی	۱۸	۱۰	۱۹	درس دوم (x_2)	معارف	۱۷	۱۸	۲۰	درس سوم (x_3)	عربی	۱۶	۱۹	۱۹	درس چهارم (x_4)	فارسی	۲۰	۱۷	۲۰				
متغیر	نام درس	امیر	محسن	بیشینه (حداکثر)																										
درس اول (x_1)	ریاضی	۱۸	۱۰	۱۹																										
درس دوم (x_2)	معارف	۱۷	۱۸	۲۰																										
درس سوم (x_3)	عربی	۱۶	۱۹	۱۹																										
درس چهارم (x_4)	فارسی	۲۰	۱۷	۲۰																										
۲۰	موفق باشید		جمع نمرات																											



أزمون شماره ٣ (نوبت اول)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2a^1b + 2ab^1 + b^2 \Rightarrow (100/1)^2 = (100+0/1)^2 & -1 \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ & & a \quad b \\ &= (100)^2 + 2(100)^1(0/1) + 2(100)(0/1)^1 + (0/1)^2 \\ &= 1000000 + 3000 + 3 + 0/001 = 1003003/001\end{aligned}$$

(صفحة ١٥ الى ١٧)



تذکره اگر Δ عددی مثبت می‌شد، باید ریشه‌ها را از $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آوردیم.
 $7x^2 - kx + 35 = 0 \Rightarrow x'x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow x'x'' = \frac{35}{7} = 5 \xrightarrow{(x''=2)} -4x' = 5 \Rightarrow x' = -\frac{5}{4} = -1.25$
 (صفحه ۴۳ الی ۴۵)

دقت کنید که نمی‌توانستیم از رابطه $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ استفاده کنیم؛ چون در $x' + x'' = \frac{k}{7}$ مجهول k وجود دارد.
 (الف) x متغیر مستقل و $h(x)$ متغیر وابسته است.
 (ب) بهره هوشی متغیر مستقل و پیشرفت تحصیلی، متغیر وابسته است.
 (صفحه ۴۷)
 (صفحه ۵۴)

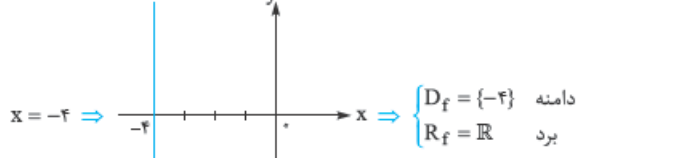
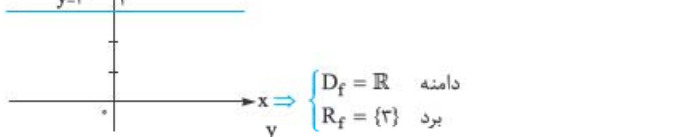
$(f, a+1) = (f, -2) \Rightarrow a+1 = -2 \Rightarrow a = -3$
 عضوهای اول مساوی‌اند.
 پس دومی‌ها نیز باید برابر باشند.

اگر عدد $a = -2$ را در $(a-1)$ موجود در نمودار قرار دهیم، حاصل $a-1$ برابر با $-3-1 = -4$ می‌شود، لذا:
 $(-4, 8) = (-4, 2b+1) \Rightarrow 2b+1 = 8 \Rightarrow 2b = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$
 عضوهای اول مساوی‌اند.
 پس دومی‌ها نیز باید برابر باشند.
 (صفحه ۵۴ الی ۵۶)

$13-x$ ها یکی یکی زیاد شده‌اند و y ها 4 تا 4 تا پس یک تابع خطی خواهیم داشت. کافی است دو نقطه دلخواه از جدول را انتخاب کنیم:

$A(0, 5), B(1, 9) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{1 - 0} = 4, y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 4(x - 0)$
 $\Rightarrow y = 4x + 5, y = f(x) = 4x + 5 \xrightarrow{(x=-1)} f(-1) = 4(-1) + 5 = -3$
 (صفحه ۶۴ الی ۷۵)

۱۴- رابطه $y=3$ تابع است؛ چون هر خط عمودی دلخواه که رسم کنیم، نمودار آن را در یک نقطه قطع می‌کند.



رابطه بالا تابع نیست، چون بی‌نهایت نقطه، در یک راستای عمودی زیر هم قرار دارند.
 (صفحه ۵۴ الی ۷۰)

۱۵- $R(x) = x.p \xrightarrow{(p=300)} R(x) = 300x$
 $P(x) = R(x) - C(x) = 300x - x^2 - 200x - 30 = -x^2 + 100x - 30$
 $\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-1)} = 50$
 تعداد کالاها برای ماکزیم‌شدن سود
 (صفحه ۴۵ الی ۴۷)

$P(x) = -x^2 + 100x - 30 \xrightarrow{(x=50)} P_{max} = -50^2 + 100(50) - 30 = 2470$
 بیشترین سود (تومان)
 (صفحه ۸۴)

۲- $2^{(n-1)}$ = مجموع اعداد سطر n مثلث خیام
 $\Rightarrow 2^{(7-1)} = 2^6 = 64$ (صفحه ۱۰ الی ۱۷)

۳- اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
 $\Rightarrow 49x^2 - (x-3)^2 = [7x - (x-3)][7x + (x-3)]$
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ a=7x & (x-3)=b \end{matrix}$
 $= (6x+3)(8x-3) = 2(x+2)(8x-3)$ (صفحه ۱۰ الی ۱۷)

ب) $a^2 + 2a^2 - 2a^2 = a^2(a^2 + 2a - 2) = a^2(a+3)(a-1)$
 اتحاد جمله مشترک

$a^2 + 8a^2 + 15a = a(a^2 + 8a + 15) = a(a+5)(a+3)$
 اتحاد جمله مشترک
 $\Rightarrow a^2(a+3) \times (a+5)(a-1)$
 ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر
 ضرب عوامل غیرمشترک

۴- عبارت B گویا است، چون در صورت و مخرج آن، چند جمله‌ای مشاهده می‌شود (در عبارت A صورت کسر، چندجمله‌ای نیست، چون متغیر داخل قدرمطلق قرار دارد). (صفحه ۱۸ الی ۲۴)
 \mathbb{R} = دامنه \Rightarrow معادله جواب ندارد $\Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ مخرج
 (صفحه ۱۸ الی ۲۴)

$\frac{x^2 + 9x}{x^2 - 9} + A = \frac{3}{x+3} \Rightarrow A = \frac{3}{x+3} - \frac{x^2 + 9x}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x-3) - (x^2 + 9x)}{(x-3)(x+3)}$
 اتحاد مربع جمله‌ای (-) فاکتور می‌گیریم
 $= \frac{3x - 9 - x^2 - 9x}{(x-3)(x+3)} = \frac{-x^2 - 6x - 9}{(x-3)(x+3)} = \frac{-(x^2 + 6x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-(x+3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-(x+3)}{x-3}$

۶- $x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-11=0 \Rightarrow x=11 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$
 اتحاد جمله مشترک

ب) $5x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{5} \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm \sqrt{\frac{6}{5}}$

معادله ریشه مضاعف دارد $\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = 4$

۷- $2x^2 + kx - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4(2)(-5) = k^2 + 40$
 حاصل Δ همیشه مثبت است، چون $k^2 + 40$ همیشه عددی مثبت می‌باشد.
 لذا معادله، به ازای هر مقدار k (مقدارش مهم نیست) دارای ۲ ریشه متمایز است. (صفحه ۳۵ الی ۴۷)

۸- (مساحت ۲ مستطیل) + (مساحت ۲ مربع) = مساحت کل

 $2x^2 + 2x(2x) = 2x^2 + 4x^2 = 6x^2 = 3x^2$
 مساحت هر مستطیل
 مساحت هر مربع
 (محیط بقیه شکل) + (محیط ۲ مربع) = محیط کل
 $\Rightarrow 2(4x) + 14x = 22x \xrightarrow{\text{طبق فرض سوال}} 8x^2 = 22x \Rightarrow 8x^2 - 22x = 0$
 $\Rightarrow x(8x - 22) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (غ غ ق)} \\ x = \frac{22}{8} = \frac{11}{4} \end{cases}$ (صفحه ۳۵ الی ۴۷)

۹- (الف) $\frac{2x-2}{5x} = \frac{2}{kx} - \frac{x}{15k} \xrightarrow{(x=2)} \frac{2(2)-2}{5(2)} = \frac{2}{2k} - \frac{2}{15k}$
 $\Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{2}{2k} - \frac{1}{15k} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{10-2}{15k} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 15k = 35 \Rightarrow k = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$
 مخرج مشترک می‌گیریم (صفحه ۴۸ الی ۵۱)

ب) $\frac{11}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+3}{-(x-2)} = \frac{2x-3}{x+2} \Rightarrow \frac{11 - (x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-3}{x+2}$
 مخرج مشترک می‌گیریم
 $\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 11 - (x+3)(x+2) = (x-2)(2x-3) \Rightarrow 11 - x^2 - 5x - 6 = 2x^2 - 3x - 4x + 6$
 معادله جواب ندارد $\Rightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8$
 انتقال همه جملات به چپ

آزمون شماره ۵ (نوبت دوم)

۱- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 251^2 = (250+1)^2 = 250^2 + 2(250)(1) + 1^2$
 (صفحه ۱۰ الی ۱۷)

۲- $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3) + x(2x+5)}{x(x+3)} = 5$
 الف) مخرج مشترک می‌گیریم

طرفین وسطین $\rightarrow 3x^2 + 9x - 2x - 6 + 2x^2 + 5x = 5x^2 + 15x$
 $5x^2 + 12x - 6 = 5x^2 + 15x \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$ (صفحه ۴۸ الی ۵۳)

ب) $\frac{24}{10+m} + \frac{1}{10-m} = \frac{24}{10+m} \Rightarrow \frac{24+10+m}{10+m} = \frac{24}{10-m}$ طرفین وسطین $\rightarrow (34+m)(10-m) = 24(10+m)$
 $\Rightarrow 240 - 24m + 10m - m^2 = 240 + 24m$ انتقال تمام جملات به سمت راست $\rightarrow m^2 + 48m - 100 = 0$
 اتحاد جمله مشترک

$\Rightarrow (m+50)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -50 \\ m = 2 \end{cases}$ هر دو جواب قابل قبول اند. چون در معادله اولیه، هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند.

تذکره: معادله $m^2 + 48m - 100 = 0$ را به روش دلتا هم می‌توانستید حل کنید ولی راه حلشان طولانی‌تر می‌شد.

۳- $-4x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-3}{4} \end{cases}$ (صفحه ۴۳ الی ۴۷)

۴- الف) $(x-3)^2 = 36$ جذر $\rightarrow x-3 = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 6 \Rightarrow x = 9 \\ x-3 = -6 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

ب) $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = -1 \xrightarrow{+2} x^2 - 2x = \frac{-1}{2}$

افزودن $\frac{b^2}{4} = \frac{(-2)^2}{4} = 1$ به دو طرف تساوی اتحاد مربع $\rightarrow x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2}$ جذر $\rightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ x-1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$ (صفحه ۳۹ الی ۴۰)



$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, R_f = \{5\}$$

۵- الف (صفحة ۵۴ الی ۷۰)

$$f(x) = \sqrt{x+1} \begin{cases} x=0 \rightarrow f(0) = \sqrt{0+1} = 1 \\ x=2 \rightarrow f(2) = \sqrt{2+1} = 2 \\ x=8 \rightarrow f(8) = \sqrt{8+1} = 3 \end{cases} \quad (ب)$$

$$\Rightarrow D_f = \{0, 2, 8\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$

$$۶- الف) A(2, 8), B(5, 14) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 8}{5 - 2} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 10 \quad (صفحة ۶۴ الی ۷۶)$$

$$ب) y = 2x - 10 \xrightarrow{(y=30)} 2x - 10 = 30 \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{2} = 20 \text{ کیلومتر}$$

$$ب) y = 2x - 10 \xrightarrow{(x=10)} y = 2(10) - 10 = 10 \text{ سانتی گراد}$$

۷- الف) متغیر، کیفیت شامپوهاست و چون دارای ترتیب است (خوب، متوسط، بد) کیفی
ترتیبی است. ۳۰۰۰ شامپوی تولیدی روزانه، جامعه آماری و ۵۰ عدد شامپوی انتخابی، نمونه تصادفی است.

ب) نسبت $\frac{40}{50}$ آماره است: چون مربوط به نمونه انتخابی است نه کل جامعه آماری.

$$\bar{x} = 5 \Rightarrow \frac{3 + a + 4 + 7}{4} = 5 \Rightarrow a + 14 = 20 \Rightarrow a = 6$$

$$\text{نوشتن داده‌های جدید} \rightarrow 2, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15 \quad (صفحة ۹۹)$$

۹- می‌دانیم که $R = \max - \min$ اگر تمام داده‌ها را در k ضرب کنیم \min و \max هم در k ضرب می‌شوند: لذا: $k(\max - \min) = k.R$

پس دامنه تغییرات جدید، k برابر دامنه تغییرات اولیه است. ضمناً اگر تمام داده‌ها را در k ضرب کنیم، میان، مد و میانگین هم در عدد k ضرب می‌شوند.

نوشتن داده‌های مطلوب $\rightarrow 3, 3, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 12, 12, 13$ ۱۰-

$$Q_1 = \frac{3+6}{2} = 4.5, \quad Q_2 = \frac{8+8}{2} = 8, \quad Q_3 = \frac{11+12}{2} = 11.5$$

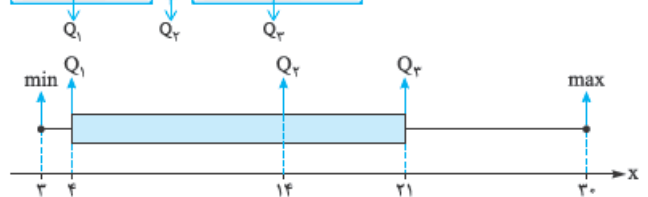
$$\text{نوشتن داده‌های مطلوب} \rightarrow 6, 6, 8, 8, 9, 11 \Rightarrow \bar{x} = \frac{6+6+8+8+9+11}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{2(6-8)^2 + 2(8-8)^2 + (9-8)^2 + (11-8)^2}{6} = \frac{8+0+1+9}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\text{انحراف معیار} \sigma = \sqrt{3} \quad (صفحة ۱۰۳ الی ۱۱۰)$$

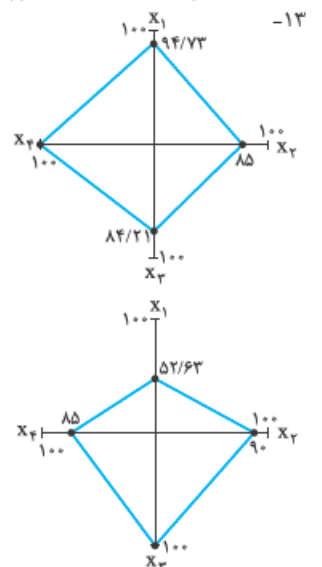
۱۱- الف) ۹۵ درصد (صفحة ۱۰۳ الی ۱۱۰) ب) بازه $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$

$$3, 4, 6, 8, 12, 15, 18, 25, 30 \quad (صفحة ۱۱۲ الی ۱۲۱)$$



۱۲- الف) ۹۵ درصد (صفحة ۱۲۵ الی ۱۲۷)

$\frac{x_1}{\max} \times 100$	$\frac{18}{19} \times 100 \approx 94.73$
$\frac{x_2}{\max} \times 100$	$\frac{17}{19} \times 100 \approx 89.47$
$\frac{x_3}{\max} \times 100$	$\frac{16}{19} \times 100 \approx 84.21$
$\frac{x_4}{\max} \times 100$	$\frac{20}{20} \times 100 = 100$
$\frac{x_1}{\max} \times 100$	$\frac{10}{19} \times 100 \approx 52.63$
$\frac{x_2}{\max} \times 100$	$\frac{18}{20} \times 100 = 90$
$\frac{x_3}{\max} \times 100$	$\frac{19}{19} \times 100 = 100$
$\frac{x_4}{\max} \times 100$	$\frac{17}{20} \times 100 = 85$



درس نامه توپ برای شب امتحان

مثال: به کمک مثلث خیام، حاصل $(3x + 2y)^4$ را به دست آورید.

حل: طبق جدولی که رسم کردیم می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$\Rightarrow (3x+2y)^4 = 1(3x)^4 + 4(3x)^3(2y) + 6(3x)^2(2y)^2 + 4(3x)(2y)^3 + 1(2y)^4$$

$$= 81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4$$

دو نکته مهم در مورد مثلث خیام

نکته ۱: طبق الگوی زیر می‌توان به یک نتیجه مهم رسید:

سطر اول مثلث $1 = 2^0$
 سطر دوم مثلث $1+1 = 2^1$
 سطر سوم مثلث $1+2+1 = 2^2$
 سطر چهارم مثلث $1+3+3+1 = 2^3$

با فرض آن‌که n عددی طبیعی است، حاصل جمع اعداد سطر n ام مثلث خیام برابر $2^{(n-1)}$ است.

مثلاً به سرعت می‌توان حدس زد که حاصل جمع اعداد سطر دهم مثلث خیام برابر است با: $2^{(10-1)} = 2^9 = 512$

نکته ۲: به الگوی زیر توجه کنید:

سطر اول مثلث خیام $11^0 = 1$
 سطر دوم مثلث خیام $11^1 = 11$
 سطر سوم مثلث خیام $11^2 = 121$
 سطر چهارم مثلث خیام $11^3 = 1331$

طبق الگوی بالا و با فرض آن‌که n عددی حسابی است ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)، می‌توان حدس زد که حاصل 11^n برابر است با اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام. البته این‌گونه جواب‌ها حدسی هستند و ممکن است درست نباشند؛ مثلاً طبق این استدلال، حاصل حدسی 11^5 برابر می‌شود با: 15101051 ولی مقدار واقعی 11^5 برابر است با: 161051 . به این‌گونه استدلال‌ها، استدلال استقرایی می‌گوییم؛ یعنی با مشاهده چند مورد جزئی، به یک نتیجه کلی می‌رسیم که گاهی درست و گاهی نادرست است.

تجزیه عبارات‌های جبری

منظور از تجزیه یک عبارت جبری این است که آن عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر با درجه کم‌تر تبدیل کنیم. روش‌های تجزیه عبارت‌اند از:

۱) فاکتورگیری

۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله‌مشترب: $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

۴) تجزیه به کمک اتحادهای مربع دوجمله‌ای
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

۵) تجزیه به کمک اتحادهای چاق و لاغر
 $a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
 $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

به عنوان مثال عبارات‌های زیر را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم:

۱) $5a^2b^2 - 15ab^2 = 5ab^2(a^2 - 3b^2)$ (فاکتورگیری)

۲) $(x-4y)^2 - 4(x-4y) = (x-4y)[(x-4y) - 4]$ (فاکتورگیری)

فصل: عبارات‌های جبری

اتحادهای جبری

سال گذشته با اتحادهای زیر آشنا شدید:

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال: $(4x+1)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(1) + 1^2 = 16x^2 + 8x + 1$

اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال: $(3x-5y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$

اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

مثال: $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5-2=3$

اتحاد جمله‌مشترب: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

مثال: $(x+7)(x-6) = x^2 + (7-6)x + 7(-6) = x^2 + x - 42$

اتحادهای چاق و لاغر

در این اتحادها یک دوجمله‌ای در یک سه‌جمله‌ای به صورت زیر ضرب می‌شود:

مثال ۱: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

مثال ۲: $(x-\frac{1}{x})(x^2+x+\frac{1}{x}) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$

مثال ۳: $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2) = (3x)^3 + (2y)^3 = 27x^3 + 8y^3$

مثلث خیام و کاربرد آن در اتحادها

برای محاسبه تمامی اتحادها به شکل $(a+b)^n$ ، $(a-b)^n$ ، $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ می‌توانیم از اعداد مثلث خیام استفاده کنیم به جدول زیر دقت کنید:

ردیف اول مثلث	1	$(a+b)^0 = 1$
ردیف دوم مثلث	1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
ردیف سوم مثلث	1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
ردیف چهارم مثلث	1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
ردیف پنجم مثلث	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
ردیف ششم مثلث	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

مثلاً به ردیف چهارم جدول نگاه کنید، حاصل $(a+b)^3$ چگونه نوشته شده است؟ چون توان کل پرتاز ۳ است از a^3 شروع کرده سپس مرتباً یک واحد از توان a کم می‌کنیم و یک واحد به توان b اضافه می‌کنیم تا در نهایت به b^3 برسیم، ضرایب جملات هم، اعداد ردیف چهارم مثلث خیام هستند:

اتحاد مکعب مجموع ۲ جمله: $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
 اعداد ردیف چهارم مثلث خیام

حال برای محاسبه حاصل $(a-b)^3$ کافی است در رابطه بالا تمام b ها را به $-b$ تبدیل کنیم:

اتحاد مکعب تفاضل ۲ جمله: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$



بامعنی یا بی معنی بودن عبارت گویا یک عبارت گویا فقط وقتی بامعنی (تعریف شده) است که مخرجش صفر نباشد؛ مثلاً عبارت $\frac{x^2-1}{x-2}$ به ازای $x=2$ تعریف نشده است، چون اگر ۲ را به جای x ها قرار دهیم به کسر $\frac{3}{0}$ می‌رسیم که بی معنی است.

مثال: هر عبارت گویای زیر، به ازای چه مقدار یا مقادیری از متغیر، بی معنی است؟

$$\frac{8x^2-3x+4}{3x-1} = \frac{5t+2}{t^2-25}$$

$$\frac{y-7}{y^2+16} = \frac{x-1}{2}$$

حل: $3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$t^2-25=0 \Rightarrow t^2=25 \xrightarrow{\text{جذر}} t=\pm 5$

$y^2+16=0 \Rightarrow y^2=-16 \Rightarrow$

این معادله جواب ندارد، چون حاصل y^2 نمی‌تواند منفی باشد. پس هیچ مقداری پیدا نمی‌شود. این عبارت، همواره بامعنی است، چون در مخرج اصلاً متغیری وجود ندارد.

ساده کردن عبارت‌های گویا برای این کار، صورت و مخرج را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم (به کمک فاکتورگیری یا اتحادها). سپس عامل یا عوامل مشترک را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

مثال ۱: اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

اتحاد مزدوج

مثال ۲: اتحاد چاقی و لاغر

$$\frac{x^2-8}{x^2+3x-10} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+5)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+5}$$

اتحاد جمله مشترک

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا برای این منظور، ابتدا صورت و مخرج تمام کسرها را تا حد امکان تجزیه کرده، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج‌ها خط می‌زنیم. ضمناً می‌دانید که: $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$ ، یعنی تقسیم را همیشه به ضرب تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱:

$$\frac{x^2-3x^2+2x}{2x^2-2x} \times \frac{4}{x^2-4} = \frac{x(x^2-3x+2)}{2x(x-1)} \times \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-2)(x-1)}{2x(x-1)} \times \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{2(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

مثال ۲:

$$\frac{x^2-16}{x+2} \div \frac{x-4}{x^2+x-2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4}$$

$$= (x+4)(x-1)$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا برای انجام جمع یا تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا تمام صورت و مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، اگر هر کسری قابل ساده شدن بود، صورت و مخرجش را ساده می‌کنیم. سپس مخرج مشترک می‌گیریم. (می‌دونید که مخرج مشترک، معنون ک.م.م است.)

مثال ۱:

$$\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+7}{x^2+10x+21} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} + \frac{x+7}{(x+7)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3}$$

مثال ۲:

$$\frac{a-8}{a^2-a-6} + \frac{a-2}{a-3} = \frac{a-8+(a-2)(a+2)}{(a-3)(a+2)}$$

$$= \frac{a-8+a^2-4}{(a-3)(a+2)} = \frac{a^2+a-12}{(a-3)(a+2)} = \frac{(a+4)(a-3)}{(a-3)(a+2)} = \frac{a+4}{a+2}$$

اتحاد مزدوج $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$x^2-25=(x-5)(x+5)$

اتحاد مزدوج $49y^2-t^2=(7y-t^2)(7y+t^2)$

اتحاد جمله مشترک $x^2+3x-40=(x+8)(x-5)$

در این مثال، به این علت $(+8)$ و (-5) را انتخاب کرده‌ایم که ضربشان (-40) و جمعشان $(+3)$ می‌شود.

اتحاد جمله مشترک $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

در این مثال، اعداد -2 و $+1$ را انتخاب کرده‌ایم چون ضربشان -2 و جمعشان -1 می‌شود.

اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$2(2x)(6)=12x$ (ضرب جذرها)

$x^2-12x+36=(x-6)^2$

اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$2(2x)(1)=4x$ (ضرب جذرها)

$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

اتحاد چاق و لاغر $a^2-b^2=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$x^2-27=(x-3)(x^2+3x+9)$

د $a^2+b^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$4y^2+1=(2y+1)(4y^2-2y+1)$

نکته: اگر بخواهیم یک ۳ جمله‌ای را تجزیه کنیم که در آن ضرب x^2 مربع کامل باشد (جذر کامل داشته باشد)، باید جمله مشترک را از دل جملات اول و دوم بیرون بکشیم. $3x$ جمله مشترک است. به مثال زیر دقت کنید:

$9x^2+18x+8=(3x)^2+6(3x)+8=(3x+4)(3x+2)$

دو عدد ۲ و ۴ به این علت انتخاب شده‌اند که ضربشان $+8$ و جمعشان $+6$ است.

ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) عبارت‌های جبری

برای یافتن ک.م.م دو یا چند عبارت جبری، ابتدا هر یک از آن‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک با توان بیشتر را در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم؛ مثلاً ک.م.م دو عبارت $3x^2(x-1)^4(x+6)$ و $5x^3(x-1)^2(x+1)$ برابر است با:

ک.م.م $= x^3(x-1)^4 \times 3 \times 5 \times (x+6)(x+1)$

مثال: ک.م.م دو عبارت x^2-x-2 و x^2-8 را به دست آورید.

حل: اتحاد چاق و لاغر $x^2-8=x^2-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

اتحاد جمله مشترک $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

\Rightarrow ک.م.م $= (x-2) \times (x+1)(x^2+2x+4)$

عبارت‌های گویا

هر کسری که صورت و مخرج آن، دو چندجمله‌ای باشند، عبارت گویا نام دارد؛ مثلاً عبارت‌های $\frac{\sqrt{3x^2-5x}}{x^2}$ ، $\frac{1}{x}$ ، $\frac{x^2-1}{5x+2}$ و x^2+5x همگی گویا هستند.

ولی عبارت‌های \sqrt{x} ، $\frac{|x|}{\sqrt{y}}$ ، $\frac{y-1}{3x^2-1}$ ، چون متغیر زیر رادیکال و یا داخل قدرمطلق قرار دارد. (آنگاه متغیر زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق باشه ریگه چندجمله‌ای نداریم.)

فصل: معادله درجه دوم



معادله درجه اول و کاربردهای آن

هر معادله که پس از ساده شدن به صورت $ax + b = 0$ تبدیل شود، معادله درجه اول نام دارد (a و b دو عدد حقیقی دلخواهاند ولی a نمی تواند صفر باشد). مثلاً معادلات $2x - 2 = 0$ ، $5x = -1$ ، $2x - 2 = 0$ همگی درجه اول هستند. برای حل آن‌ها ابتدا اعداد را از متغیرها جدا کرده سپس عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم:

مثال ۱:

$$(x+1)(x-6) = x^2 + 3x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow -6x + x - 3x = -1 + 6$$

$$\Rightarrow -8x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

مثال ۲:

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x}{5} = 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{5(x+3) - 2x}{10} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5x + 15 - 2x = 10$$

$$\Rightarrow 3x = 10 - 15 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

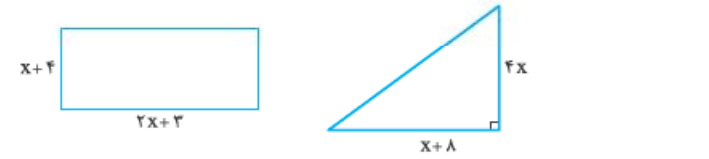
کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی گاهی به جای آن‌که یک معادله به صورت حاضر و آماده به ما داده شود، خودمان باید با توجه به یک توصیف (متن فارسی) معادله‌ای مناسب تشکیل داده و آن را حل کنیم تا مجهول موردنظر به دست آید.

مثال: عددی را به دست آورید که ۳ برابر آن به علاوه ۱ مساوی با نصف همان عدد منهای ۲ شود.

حل: آن عدد را x فرض کرده و این طور می‌نویسیم:

$$2x + 1 = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow 2x - \frac{x}{2} = -2 - 1 \Rightarrow \frac{4x}{2} = -3 \Rightarrow 4x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

مثال: مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



حل:

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول} = (2x+3)(x+4)$$

$$= 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 2x^2 + 11x + 12$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{(x+8) \times 4x}{2} = 2x(x+8) = 2x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت مثلث} \Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow 16x - 11x = 12 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$\text{عرض مستطیل} = x + 4 = \frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$$

$$\text{طول مستطیل} = 2x + 3 = 2\left(\frac{12}{5}\right) + 3 = \frac{24}{5} + 3 = \frac{39}{5}$$

معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود، با شرط $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم نام دارد. به a ضریب x^2 ، به b ضریب x و به c عدد ثابت می‌گوییم. مثلاً در معادله $-x^2 + 6x - 7 = 0$ ضرایب معادله عبارت‌اند از: $a = -1$ ، $b = 6$ ، $c = -7$ و یا در معادله $\frac{x^2}{5} + 3 = 0$ ضرایب معادله برابرند با: $a = \frac{1}{5}$ ، $b = 0$ ، $c = 3$.

روش‌های حل معادله درجه دوم

۱ روش تجزیه: در فصل ۱ با تجزیه عبارت‌های جبری آشنا شدید. بسیاری از معادلات درجه دوم را به کمک فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها حل می‌کنیم:

مثال ۱:

$$14x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 2x(7x - 6) = 0$$

فاکتوراز $2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7} \end{cases}$$

البته می‌توانید از x هم فاکتور بگیرید

مثال ۱:

$$64x^2 - 100 = 0 \Rightarrow (8x - 10)(8x + 10) = 0$$

اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \\ 8x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

مثال ۲:

$$x^2 - x - 56 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 7) = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

۲ روش جذرگیری (ریشه‌گیری): از این روش فقط زمانی می‌توانیم استفاده کنیم که معادله شامل x^2 هست ولی x^1 ندارد. در این صورت عدد ثابت را به سمت راست تساوی برده و از دو طرف جذر می‌گیریم.

مثال ۱:

$$x^2 - 49 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \xrightarrow{\text{جذراز دو طرف}} x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

مثال ۲:

$$9x^2 - 64 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{9} \xrightarrow{\text{جذراز دو طرف}} x = \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\frac{8}{3}$$

مثال ۳:

$$(x-3)^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذراز دو طرف}} x-3 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x-3=5 \Rightarrow x=8 \\ x-3=-5 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

۳ روش مربع کامل: در این روش ابتدا اگر ضریب x^2 عددی به جز ۱ بود تمام جملات معادله را بر آن ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 یک شود سپس ضریب x را نصف کرده به توان ۲ می‌رسانیم، عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم (به طور خلاصه $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف معادله، اضافه می‌کنیم که b ضریب x است). سمت چپ معادله، حتماً اتحاد مربع خواهد شد. در نهایت مانند روش جذرگیری عمل می‌کنیم:

مثال ۱:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -3$$

$$\xrightarrow{\text{عدد } \frac{b^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4 \text{ را به دو طرف می‌افزاییم}} x^2 - 4x + 4 = -3 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 1$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{جذراز دو طرف}} x-2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

مثال ۲:

$$2x^2 + 10x = 1 \xrightarrow{+2} x^2 + 5x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{عدد } \frac{b^2}{4} = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4} \text{ را به دو طرف اضافه می‌کنیم}} x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{2} + \frac{25}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\Rightarrow x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{27}}{2} - \frac{5}{2} \\ x + \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{27}}{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

۴ روش کلی (روش استفاده از دلتا): در این روش ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه کرده، سپس حالات زیر را خواهیم داشت:

الف) معادله ۲ ریشه متمایز دارد. $\Rightarrow \Delta > 0$ اگر $\Delta > 0$ اگر

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

که این ریشه‌ها عبارت‌اند از:

ب) معادله ریشه مضاعف دارد. $\Rightarrow \Delta = 0$ اگر $\Delta = 0$ اگر

$$x = \frac{-b}{2a}$$

که این ریشه عبارت است از:

ج) معادله جواب ندارد. $\Rightarrow \Delta < 0$ اگر $\Delta < 0$ اگر

ضمناً به دلتا (Δ) مبین معادله هم می‌گوییم. حال معادلات زیر را به روش کلی حل می‌کنیم:

مثال ۱:

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6)$$

$$= 25 + 24 = 49$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{5+7}{2} = 6 \\ x'' = \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$