

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

مفاهیم اولیهٔ مجموعه‌ها

هر دستهٔ مشخص شده از اشیاء را یک **مجموعه** و آن اشیاء را **اعضای** آن مجموعه می‌نامند.

مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج یک‌رقمی عبارتند از $\{2, 4, 6, 8\}$.

عضویت یک شیء در یک مجموعه را با استفاده از نماد \in و عدم عضویت را با نماد \notin نشان می‌دهیم.

اگر $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ ، در این صورت داریم $\{4\} \notin A$ ، $\{3, 4\} \in A$ و $2 \in A$ و $3 \notin A$.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را **مجموعهٔ تهی** می‌نامند و آن را با نماد \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهند.

مثلاً مجموعهٔ اعداد اول بخش‌پذیر بر ۶ تهی است.

اگر هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B و هر عضو مجموعهٔ B عضوی از مجموعهٔ A باشد، این دو مجموعه را **مساوی** می‌نامیم و می‌نویسیم $A = B$.

مثلاً $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

مثال اگر $\{x+1, y-1\} = \{1\}$ باشد، مقادیر x و y را به دست آورید.

پاسخ

$$x+1=1 \Rightarrow x=0$$

$$y-1=1 \Rightarrow y=2$$

- اگر C و D دو مجموعه باشند، به طوری که هر عضو C عضو D نیز باشد، می‌گوییم C یک زیرمجموعهٔ D است.

- زیرمجموعه بودن را با نماد \subseteq و زیرمجموعه نبودن را با نماد $\not\subseteq$ نشان می‌دهیم.

- مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

- هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است.

مثال اگر $A = \{\{1\}, 2\}$ ، تمام زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

پاسخ

$$\{\}, \{\{1\}\}, \{2\}, \{\{1\}, 2\}$$

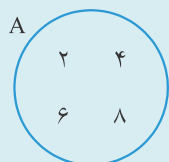
مثال اگر $A = \{\emptyset, 1, \{2, 3\}\}$ باشد، کدام یک از موارد زیر درست هستند؟

$$\emptyset \in A, \emptyset \subseteq A, \{\{\}\} \subseteq A, 1 \in A, 2 \notin A, \{2, 3\} \notin A$$

پاسخ همهٔ موارد درست هستند.

نمایش مجموعه‌ها:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$



- مجموعه‌ها را می‌توان با نوشتن اعضای آن نمایش داد:

- مجموعه‌ها را می‌توان با نمودار ون نمایش داد:

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}, k < 5\}$$

شرطی که اعضا را معلوم می‌کند به‌طوری که

مجموعه‌ها را می‌توان با نماد ریاضی نمایش داد:

مثال مجموعه $A = \left\{ \frac{2x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{N}, x < 5 \right\}$ را با نوشتن اعضای آن نمایش دهید.

پاسخ

$$A = \left\{ \frac{2x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{N}, x < 5 \right\} = \left\{ 1, \frac{8}{5}, \frac{18}{10}, \frac{32}{17} \right\}$$

مثال مجموعه $A = \{3, 5, 9, 17\}$ را با نماد ریاضی نمایش دهید.

پاسخ

$$A = \{3, 5, 9, 17\} = \{2^x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

مجموعه‌های ریاضی مهم:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

رابطه بین این مجموعه‌ها به شکل زیر است:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

1. اگر مجموعه‌های اعداد حقیقی، صحیح و طبیعی را به ترتیب با \mathbb{R} ، \mathbb{Z} و \mathbb{N} نشان دهیم، کدام رابطه درست است؟

(1) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ (3) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (4) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Z}$

(کنکور)

2. کدام مجموعه، زیرمجموعه سایر مجموعه‌ها است؟

(1) $\{\{\emptyset\}\}$ (2) $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ (3) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$ (4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

3. کدام مجموعه زیر تهی است؟

(1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0\}$ (2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x - 3 \in \mathbb{N}\}$

(3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{x}{3} \notin \mathbb{R}\}$ (4) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$

4. اگر $A = \{2, \{2\}\}$ باشد، چه تعداد از روابط زیر درست است؟

(الف) $\{2\} \in A$ (ب) $\{2\} \subseteq A$ (ج) $2 \in A$ (د) $\{2, \{2\}\} \in A$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(مسابقات ریاضی بلژیک)

۵. مجموعه $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ مفروض است. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) $\{1, 2\} \subseteq E$ (۲) $\{1, 2\} \in E$ (۳) $\emptyset \subseteq E$ (۴) $\{1\} \in E$

(سراسری ریاضی قارچ از کشور ۱۸۶)

۶. اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in B$ (۴) $B \in C$

۷. اگر $\{\{x\}, \{y, x\}\} = \{\{z\}, \{t, z\}\}$ ، آنگاه همواره کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $x = z$ و $y = t$ (۲) $x = t$ و $y = z$
(۳) $x = y$ و $z = t$ (۴) $x = y = z = t$

۸. اگر دو مجموعه $A = \{3, x, -y\}$ و $B = \{3, -4, -7\}$ با هم مساوی باشند، مقدار xy کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) -۲۸ (۳) ± ۲۸ (۴) ± ۷

۹. ★ اگر $\{1, 2, 3, 4, 5, c, d\} = \{2, 3, 4, 6, 7, a, b\}$ ، آنگاه $a + b + c + d$ چه قدر است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۸ (۳) ۱۳ (۴) ۲۱

۱۰. ★ در کدام یک از گزینه‌ها، گزاره‌نمای نوشته شده برای مجموعه نادرست است؟

(۱) $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ، $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ (۲) $B = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ، $B = \{3, 9, 27, 81, \dots\}$

(۳) $C = \{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، $C = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$ (۴) $D = \{x \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\}$ ، $D = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

۱۱. اگر $A = \{-3, -1, 1, 2\}$ و $B = \{x \mid x = \frac{k}{k^2}, x \in \mathbb{Z}, k \in A\}$ ، آنگاه مجموعه B چندعضوی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲. مجموعه S مجموعه اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳ شروع از ۳ و ختم به ۶۳ است. یک زیرمجموعه حداقل چندعضوی از

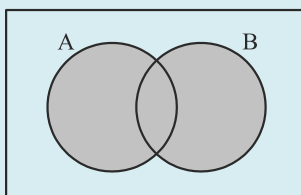
(سراسری ریاضی قارچ از کشور ۹۴)

S انتخاب شود که مطمئن باشیم شامل دو عضو با مجموع ۶۶ است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه تمام اعضای است که به A یا B (یا هر دوی آنها) تعلق دارد.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال اگر $A = \{1, 2, \{2, 3\}\}$ و $B = \{1, \{2\}\}$ باشد، $A \cup B$ را به دست آورید.

$$A \cup B = \{1, 2, \{2, 3\}, \{2\}\}$$

پاسخ

قوانین اجتماع:

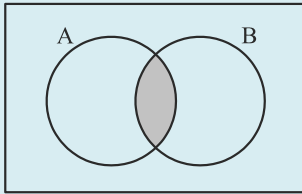
- ۱) $A \cup B = B \cup A$ (جاب‌جایی)
- ۲) $A \cup \emptyset = A$
- ۳) $A \cup A = A$
- ۴) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- ۵) $\begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{cases}$
- ۶) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (شرکت‌پذیری)

مثال با فرض $A \subseteq B$ ، عبارت $(A \cup B) \cup (\emptyset \cup A) \cup A$ را تا جای ممکن ساده کنید.

$$(A \cup B) \cup (\underbrace{\emptyset \cup A}_A) \cup A = (A \cup B) \cup \underbrace{A \cup A}_A = (A \cup B) \cup A \xrightarrow{A \subseteq B} = \underbrace{(A \cup B)}_B \cup A = \underbrace{B \cup A}_B = B$$

پاسخ

اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه تمام اعضای است که هم به A و هم به B تعلق دارند.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

مثال اگر $A = \{1, 2, \{2, 3\}\}$ و $B = \{1, \{2\}\}$ باشد، $A \cap B$ را به دست آورید.

$$A \cap B = \{1\}$$

پاسخ

قوانین اشتراک:

- ۱) $A \cap B = B \cap A$ (جاب‌جایی)
- ۲) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- ۳) $A \cap A = A$
- ۴) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- ۵) $\begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases}$
- ۶) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (شرکت‌پذیری)

اگر $A \cap B = \emptyset$ ، دو مجموعه A و B را جدا از هم می‌گویند.

مثال درستی عبارت $(A \cap \emptyset) \cap (A \cap B) \subseteq A$ را نشان دهید.

$$\underbrace{(A \cap \emptyset)}_{\emptyset} \cap (A \cap B) = \emptyset \cap (A \cap B) = \emptyset \subseteq A$$

پاسخ

قوانین ترکیب اجتماع و اشتراک:

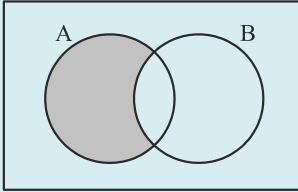
- ۱) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
- ۲) $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ (جذب)
- ۳) $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$ (پخش)

مثال اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، حاصل $(A \cap (B \cup C)) \cup C$ را به دست آورید.

پنخشی $\rightarrow (A \cap (B \cup C)) \cup C = \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset \text{ (جدا از هم)}} \cup \underbrace{(A \cap C)}_C \cup C = \emptyset \cup C = C$

پاسخ

تفاضل مجموعه B از A مجموعه تمام اعضای A است که به A تعلق دارند، ولی به B تعلق ندارند.



$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

مثال اگر $A = \{1, 2, \{2, 3\}\}$ و $B = \{1, \{2\}\}$ باشد، $A - B$ را به دست آورید.

$$A - B = \{2, \{2, 3\}\}$$

پاسخ

قوانین تفاضل:

$$1) \begin{cases} A - A = \emptyset \\ A - \emptyset = A \\ \emptyset - A = \emptyset \end{cases}$$

$$2) A - B \neq B - A \text{ (مگر در موارد خاص)}$$

$$3) A - B \subseteq A$$

$$4) A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$5) (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$6) A - B = A - (A \cap B)$$

مثال درستی تساوی $((A - B) \cap A) \cup (A \cap B) \cup ((B - A) \cap B) = A \cup B$ را نشان دهید.

$$\underbrace{((A - B) \cap A)}_{A - B} \cup (A \cap B) \cup \underbrace{((B - A) \cap B)}_{B - A} = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$$

پاسخ

(کنکور)

۱۳. کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

$$W \cup N = W \quad (4) \quad N - W = \emptyset \quad (3) \quad W - N = \emptyset \quad (2) \quad N \cap W = N \quad (1)$$

۱۴. مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا و حقیقی را به ترتیب با N, W, Q, R نشان می‌دهیم. کدام حکم

(کنکور)

درست است؟

$$W \subseteq Q \quad (4) \quad W \cap Q = N \quad (3) \quad W - N = Q \quad (2) \quad Z \cup Q = R \quad (1)$$

(کنکور)

۱۵. اگر $A \cup B \subseteq \emptyset$ ، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$A = \emptyset \text{ و } B = \emptyset \quad (4) \quad A \neq \emptyset \text{ و } B = \emptyset \quad (3) \quad B \neq \emptyset \text{ و } A \neq \emptyset \quad (2) \quad A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset \quad (1)$$

(کنکور)

۱۶. اگر A زیرمجموعه B باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$(A \cup B) \cap B = A \quad (4) \quad (A \cap B) \cup A = A \quad (3) \quad (A \cup B) \cap A = B \quad (2) \quad (A \cap B) \cup B = A \quad (1)$$

(کنکور)

۱۷. اگر A و B دو مجموعه غیرتهی و $A \cup B \subseteq B$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$A \cap B = A \quad (4) \quad A \cap B = B \quad (3) \quad A \cap B = \emptyset \quad (2) \quad B \subseteq A \quad (1)$$

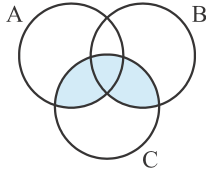
۱۸. اگر $A \subseteq B$ باشد، حاصل مجموعه $(A-B) \cap (A-C)$ کدام است؟ (کنکور)

(۱) C (۲) A (۳) B (۴) \emptyset

۱۹. A, B و C سه مجموعه هستند و داریم $A \subseteq B \subseteq C$. مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کدام است؟ (کنکور)

(۱) A (۲) B (۳) $A \cup C$ (۴) $B \cup C$

۲۰. [VIT] کدام مجموعه قسمت رنگی را نشان می‌دهد؟ (کنکور)



- (۱) $A \cap (B \cup C)$
 (۲) $A \cup (B \cap C)$
 (۳) $C \cup (A \cap B)$
 (۴) $C \cap (A \cup B)$

۲۱. برای دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ حاصل $(A-B) - (B-A)$ کدام است؟ (کنکور)

(۱) $\{4\}$ (۲) $\{\}$ (۳) \emptyset (۴) $\{2, 3\}$

۲۲. [VIT] مجموعه $(A \cap C \cap B) \cup (A-B) \cup (A-C)$ برابر است با:

- (۱) $A - (B \cap C)$ (۲) $A - (B \cup C)$ (۳) A (۴) $A \cap B' \cap C$

۲۳. با فرض $A = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ، کدام عدد به $A-B$ تعلق دارد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۴۲ (۳) ۱۴ (۴) ۹

۲۴. با فرض $A = \{9k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $315 \in A$ (۲) $312 \in B-A$ (۳) $314 \notin B$ (۴) $810 \in B-A$

۲۵. اگر $\{2, 7, 6\} = \{7, 2, y\} \cap \{9, x, 2, 6\}$ باشد، آنگاه $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۹ (۳) ۱۸ (۴) ۱۷

۲۶. ★ اگر $A \cup (B-A) = B$ ، آنگاه: (سراسری ریاضی ۸۶)

- (۱) $A \subseteq B$ (۲) $B \subseteq A$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) $B = \emptyset$

۲۷. اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (کنکور)

- (۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C \neq \emptyset$ (۳) $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ (۴) $A \cap (B-C) \neq \emptyset$

۲۸. اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{b, c, g, e\}$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟ (کنکور)

- (۱) $A - (B-A) = B$ (۲) $A - (A-B) = B$
 (۳) $A - (A-B) = A \cap B$ (۴) $A - (B-A) = A \cap B$

۲۹. اگر $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ ، مجموعه $(A_1 \cup A_2) - A_3$ کدام است؟

- (۱) $\{-3, 0, 3\}$ (۲) $\{-1, 0, 1\}$ (۳) \emptyset (۴) $\{-3, 3\}$

۳۰. [VIT] اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

(مسابقات ریاضی بلژیک)

★ ۳۱. در مورد مجموعه‌های A ، B و C ، برابری $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$:

- (۱) همواره درست است. (۲) هیچ‌گاه درست نیست.
 (۳) $A \subset C$ آنگاه درست است که (۴) $A - B = \emptyset$ آنگاه درست است که

★ ۳۲. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (سراسری ریاضی قارچ از کشور ۹۴)

- (۱) $A - B = C$ (۲) $B - C = \emptyset$ (۳) $B - C = \{1, 2\}$ (۴) $A - B = \{C\}$

تعریف بازه و مفاهیم اولیه

با فرض $a < b$ داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\}$	

مثال درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $\frac{4}{5} \in (\frac{1}{4}, 1)$

ب) $0 \in (-2, 0)$

ج) $(-1, 2) \subseteq [-1, 2]$

د) $\emptyset \subseteq (\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$

پاسخ

الف) ✓

ب) ✗

ج) ✓

د) ✓

مثال نمایش مجموعه‌ای $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1, x \geq -2\}$ را به صورت بازه نشان دهید.

پاسخ

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1, x \geq -2\} = [-2, 1)$

(کتاب درسی)

۳۳. نمایش بازه‌ای مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 7\}$ کدام است؟

- (۱) $(-5, 7)$ (۲) $[-5, 7)$ (۳) $(-5, 7]$ (۴) $[-5, 7]$

(کتاب درسی)

۳۴. بازه $[2, 8]$ با کدام برابر است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 8\}$ (۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 8\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$

۳۵. چهار کتاب با قیمت‌های برابر داریم. اگر قیمت ۲ کتاب بیش‌تر از ۴۰۰۰ تومان و قیمت ۳ کتاب کم‌تر از ۷۵۰۰ تومان باشد،

(کنکور)

قیمت هر کتاب بیان‌گر کدام بازه است؟

- (۱) $[1750, 2250]$ (۲) $(2000, 2500)$ (۳) $(1750, 2250)$ (۴) $[2000, 2500]$

۳۶. کدام عدد به بازه $[-\frac{17}{5}, \frac{24}{5}]$ تعلق ندارد؟

- (۱) -4 (۲) $\frac{24}{5}$ (۳) $\frac{19}{4}$ (۴) 0

(سراسری ریاضی ۸۶)

۳۷. جواب نامعادله $0 \leq 1 - 2x \leq 1$ کدام بازه زیر است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $[0, \frac{1}{2}]$ (۴) $[-4, 4]$

۳۸. پاسخ نامعادله $8 + x - 2 \leq 3x - 7 < 2x - 7$ به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-5, 5]$ (۲) $[-8, 3)$ (۳) $(-8, 3]$ (۴) $[-6, 4]$

(کنکور)

۳۹. **VIT** جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{1}{4} > \frac{x}{5} \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{4} < \frac{x}{5} + \frac{1}{3} \end{cases}$ ، کدام بازه زیر است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{38}{5})$ (۲) $(\frac{15}{8}, +\infty)$ (۳) $(\frac{15}{8}, \frac{35}{8})$ (۴) $(\frac{8}{35}, \frac{8}{15})$

۴۰. اگر عدد ۴ متعلق به بازه $(m + 2, 4m + 8)$ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $-4 < m$ (۲) $-1 < m < 2$ (۳) $m < 2$ (۴) $-4 < m < 2$

۴۱. اگر عدد ۵ در بازه $(2n - 1, 3n + 14)$ باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که n می‌تواند اختیار کند، کدام است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $[-3, 3]$ (۴) $(-2, 3]$

(کنکور)

۴۲. **★** کدام عدد زیر وجود دارد؟

- (۱) کوچک‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از -1 (۲) کوچک‌ترین عدد گنگ بزرگ‌تر از -1
(۳) بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از -1 (۴) بزرگ‌ترین عدد گویای کوچک‌تر از -1

اجتماع و اشتراک و تفاضل بازه‌ها

قوانین اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها، همان قوانین بین مجموعه‌ها است.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک بازه بنویسید.

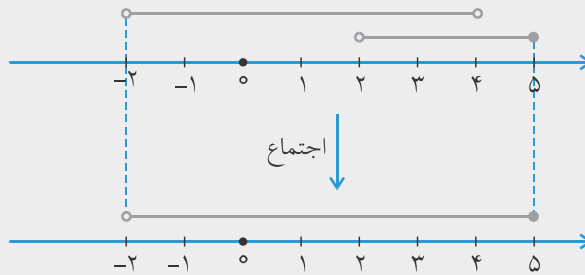
الف) $(-2, 4) \cup (2, 5)$

ب) $(2, 7) \cap (3, 7)$

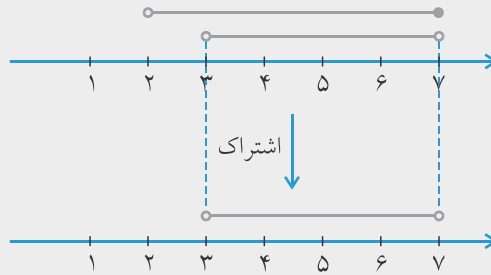
ج) $(-\infty, 3) - (-\infty, 1)$

پاسخ

الف) $(-2, 4) \cup (2, 5) = (-2, 5]$

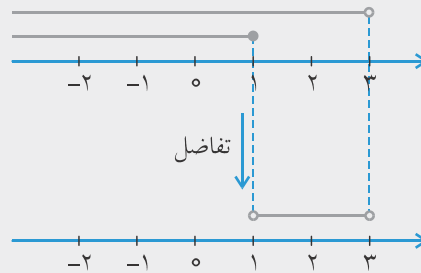


ب) $(2, 7] \cap (3, 7) = (3, 7)$



دقت کنید که چون خود عدد ۷ در یک بازه هست و در دیگری نیست، در اشتراک آن‌ها نباید باشد و دایره مربوط به آن توخالی است.

ج) $(-\infty, 3) - (-\infty, 1] = (1, 3)$



دقت کنید که چون خود عدد ۱ در بازه دوم هست، پس در تفاضل آن‌ها نباید باشد (اگر خود ۱ در بازه دوم نبود، باید در تفاضل آن‌ها می‌بود).

مثال $\mathbb{R} - (a, b)$ را به صورت اجتماع دو بازه نشان دهید. ($a < b$)

پاسخ

$\mathbb{R} - (a, b) \xrightarrow{\text{نمایش هندسی}} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \xrightarrow{\text{بازه}} (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$

۴۳. خلاصه شده عبارت $[1, 3] \cup [3, 7]$ کدام بازه است؟

- (۱) $[3, 7]$ (۲) $[2, 4]$ (۳) $[4, 7]$ (۴) $[1, 7]$

۴۴. حاصل $[1, 12] - [3, 8]$ کدام است؟

- (۱) $[1, 3] \cup (8, 12]$ (۲) $[1, 3] \cup [8, 12]$ (۳) $[1, 3] \cup (8, 12)$ (۴) $[1, 3] \cup [8, 12]$

۴۵. حاصل $[-4, 2] - (-2, 3)$ کدام است؟

- (۱) $[-4, -2]$ (۲) $[-4, -2)$ (۳) $(-4, -2]$ (۴) $(-4, -2)$

۴۶. اگر $A_n = [1, 2 + \frac{1}{n}]$ ، آنگاه $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ کدام است؟

- (۱) $[1, \frac{9}{4}]$ (۲) $[1, \frac{2}{3}]$ (۳) $[1, \frac{4}{3}]$ (۴) \emptyset

۴۷. [VII] اگر $A_n = [n-1, n+1]$ ، آنگاه مجموعه $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟ (کنکور)

- (۱) $\{x: 1 \leq x \leq 5\}$ (۲) $\{x: 0 \leq x \leq 5\}$ (۳) $\{x: 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$ (۴) $\{x: 1 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

۴۸. اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $(-1)^n n, 2n$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟ (کنکور)

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۴۹. ★ اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر کدام بازه است؟

(سراسری ریاضی قاج از کشور ۸۶)

- (۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

۵۰. اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{4}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_7 \cap A_8) - (A_1 \cap A_2)$ به کدام صورت است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

- (۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) \emptyset

۵۱. ★ اگر $A_i = [-2i, 20-i]$ و $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ، مجموعه $\bigcup_{i=1}^{10} A_i - \bigcap_{i=1}^{10} A_i$ چند عضو صحیح دارد؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

- مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است را مجموعه متناهی (باپایان) می‌نامیم.

- مجموعه‌ای که نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد را مجموعه نامتناهی (بی‌پایان) می‌نامیم.

مثال تعیین کنید که کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند:

الف) $W - \mathbb{Z}$

ب) $\mathbb{R} - \mathbb{N}$

ج) $(-1, 2)$

د) مجموعه درخت‌های جنگ آمازون

هـ) مجموعه اعداد اول

پاسخ

الف) متناهی $W - \mathbb{Z} = \emptyset \rightarrow$

ب) نامتناهی $\mathbb{R} - \mathbb{N} \rightarrow$

ج) نامتناهی $(-1, 2) \rightarrow$

د) متناهی \rightarrow مجموعه درخت‌های جنگ آمازون

هـ) نامتناهی \rightarrow مجموعه اعداد اول

۵۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر منتهای نیست؟

- (۱) مجموعه تمام خرگوش‌های کره زمین.
 (۲) مجموعه تمام اتم‌های اکسیژن در کره زمین.
 (۳) مجموعه تمام نقاط روی یک خط.
 (۴) مجموعه تمام شهرهای جهان.

۵۳. کدام یک از مجموعه‌های زیر نامنتهای است؟

- (۱) مجموعه تمام مورچه‌های روی کره زمین.
 (۲) مجموعه تمام تلفن‌های موجود در جهان.
 (۳) مجموعه تمام اعداد اول بخش‌پذیر بر ۷.
 (۴) مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۱۱.

۵۴. کدام مجموعه زیر منتهای است؟

- (۱) مجموعه اعداد گنگ و بزرگ‌تر از ۱۰.
 (۲) مجموعه اعداد گویای مثبت و کوچک‌تر از ۰/۰۳.
 (۳) مجموعه اعداد صحیح که معکوس آن‌ها بین ۰ و $-\frac{1}{5}$ است.
 (۴) مجموعه اعداد طبیعی که معکوس آن‌ها بزرگ‌تر از ۰/۰۱ است.

۵۵. چه تعداد از مجموعه‌های زیر منتهای است؟

- A = مجموعه اعداد حقیقی که از معکوس خود بزرگ‌تر هستند.
 B = مجموعه اعداد طبیعی که از معکوس خود کوچک‌تر هستند.
 C = مجموعه اعداد حقیقی بین ۲ و ۳.
 D = مجموعه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۷.
 E = مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶. کدام مجموعه منتهای است؟

- (۱) $Z - N$ (۲) $R - W$ (۳) $Q - Z$ (۴) $Z - R$

۵۷. مجموعه اعداد طبیعی، حسابی و صحیح را به ترتیب با N ، W و Z نشان می‌دهیم. کدام مجموعه منتهای است؟

(کنکور)

- (۱) $Z - W$ (۲) $W \cap N$ (۳) $Z \cap W$ (۴) $W - N$

۵۸. کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای نامنتهای، نامنتهای است.
 (۲) هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای نامنتهای، منتهای است.
 (۳) هر زیرمجموعه از مجموعه‌های منتهای، نامنتهای است.
 (۴) هر زیرمجموعه از مجموعه‌های منتهای، منتهای است.

۵۹. می‌دانیم A یک مجموعه نامنتهای است، به طوری که $A \subseteq B$. با فرض $A \neq B$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $A - B$ نامنتهای است.
 (۲) $B - A$ منتهای است.
 (۳) $B - A$ نامنتهای است.
 (۴) هیچ کدام

۶۰. اگر A یک مجموعه منتهای و B یک مجموعه نامنتهای باشد، کدام مجموعه‌ها می‌توانند تهی باشند؟

- (۱) $A \cap B$ و $A \cup B$ (۲) $B - A$ و $A \cap B$ (۳) $A - B$ و $A \cap B$ (۴) $A - B$ و $B - A$

۶۱. می‌دانیم A نامتناهی و B متناهی است. کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

- (۱) $B - A$ (۲) $A \cap B$ (۳) $A - B$ (۴) $\mathbb{R} - B$

۶۲. اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد طبیعی اول باشند، کدام مجموعه متناهی (با پایان) است؟

(کنکور)

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cap B$

۶۳. اگر n یک عدد طبیعی و $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 2n\}$ باشد، در مورد A کدام گزینه درست است؟

- (۱) متناهی است. (۲) نامتناهی است.
(۳) می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. (۴) بستگی به n دارد.

۶۴. **VIT** اگر $A = \{1, 2, 3, \{4, 5, 6, \dots\}\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟

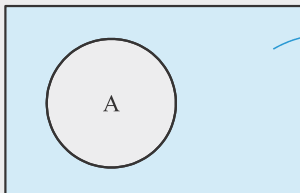
- (۱) A متناهی و B نامتناهی است. (۲) A نامتناهی و B متناهی است.
(۳) A و B هر دو نامتناهی‌اند. (۴) A و B هر دو متناهی‌اند.

مجموعه مرجع و متمم

مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند را **مجموعه مرجع** یا **مجموعه جهانی** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

برای مثال هنگامی که می‌خواهیم بهترین گلزن یک لیگ فوتبال را انتخاب کنیم، مجموعه مرجع ما مجموعه همه بازیکنان لیگ است.

اگر U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم** مجموعه A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.



$$A' = U - A$$

$$A' = \{x | x \in U, x \notin A\}$$

مثال اگر $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

- الف) A' ب) B' ج) $(A \cup B)'$ د) $A' \cap B'$

پاسخ

الف) $A' = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ب) $B' = \{1, 7, 8, 9, 10\}$

ج) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{7, 8, 9, 10\}$

د) $A' \cap B' = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 7, 8, 9, 10\} = \{7, 8, 9, 10\}$

قوانین مربوط به مجموعه مرجع و متمم:

۱) $(A')' = A$

۲) $\begin{cases} \emptyset' = U \\ U' = \emptyset \end{cases}$

۳) $\begin{cases} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$

۴) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۵) $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$ (دمورگان)

۶) $A - B = A \cap B'$

مثال عبارت $(A - B) \cap [(A \cup B) \cap (B - A)']$ را ساده کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} \underbrace{(A - B)}_{A \cap B'} \cap \underbrace{[(A \cup B) \cap (B - A)']}_{B \cap A'} &= A \cap B' \cap \underbrace{[(A \cup B) \cap (B \cap A')']}_{B' \cup A} \\ &= A \cap B' \cap \underbrace{[(A \cup B) \cap (B' \cup A)]}_{A \cup (B \cap B')} = A \cap B' \cap [A \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}] = A \cap B' \cap \underbrace{[A \cup \emptyset]}_A \\ &= A \cap B' \cap A = \underbrace{A \cap A}_{A} \cap B' = A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

۶۵. اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدرمطلق کم تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در \mathbb{Z} متناهی است؟ (کنکور)

(۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۶۶. مجموعه A ، ۵ عضو بیش تر از مجموعه A' دارد. خارج قسمت تقسیم یا تفاضل تعداد زیرمجموعه های این دو مجموعه کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)

(۱) خارج قسمت ۲۵ (۲) خارج قسمت ۳۲ (۳) تفاضل ۲۵ (۴) تفاضل ۳۲

۶۷. اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 9\}$ و $C = \{4, 5, 6, 7\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $(A \cap C)' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (۲) $B - C = \{2, 9\}$
 (۳) $(A \cup B)' = \{7, 9\}$ (۴) $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

۶۸. اگر مجموعه مرجع مجموعه اعداد طبیعی، $A = \{n \mid n \geq 6\}$ و $B = \{2, 7, 6\}$ ، آنگاه $A' \cup B$ برابر کدام است؟

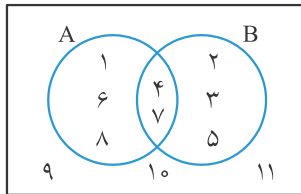
(۱) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (۲) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ (۳) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۴) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

۶۹. کدام یک از احکام زیر نادرست است؟ (کنکور)

(۱) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ (۲) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ (۳) $\mathbb{W} - \{0\} = \mathbb{N}$ (۴) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

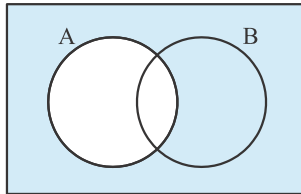
۷۰. اگر مجموعه مرجع اعداد صحیح باشد، $A' = \{0, 1, 2\}$ و $B' = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه $(A \cup B)'$ کدام مجموعه است؟

(۱) $\{1, 2\}$ (۲) $\{2, 3, 4\}$ (۳) $\{3, 3, 5\}$ (۴) $\{4, 5\}$



۷۱. با توجه به نمودار روبه‌رو، مجموعه $A - B'$ کدام است؟

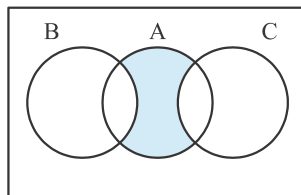
- (۱) $\{4, 5\}$
 (۲) $\{4, 7\}$
 (۳) $\{1, 6, 9\}$
 (۴) $\{8, 10, 11\}$



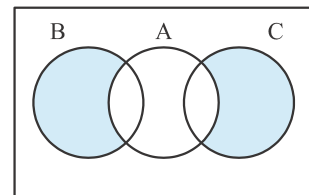
۷۲. ناحیه رنگی در شکل روبه‌رو، کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

- (۱) $B' - A'$
 (۲) $A' \cup B$
 (۳) A'
 (۴) $B' - A$

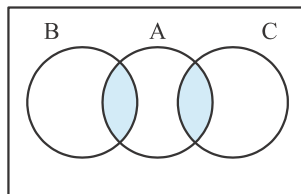
۷۳. نمودار ون مربوط به مجموعه $A - (B \cup C)'$ کدام می‌تواند باشد؟



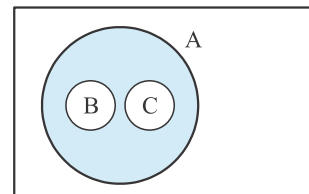
(۲)



(۱)



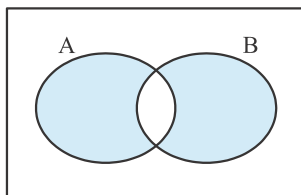
(۴)



(۳)

(کنکور)

۷۴. در شکل زیر مجموعه سایه زده از دو مجموعه A و B با کدام مجموعه برابر نیست؟



(۱) $(A \cup B') \cap (B \cup A')$

(۲) $(A \cap B') \cup (B \cap A')$

(۳) $(A - B) \cup (B - A)$

(۴) $(A \cup B) - (A \cap B)$

۷۵. **VIT** اگر $A = \{x | x \geq 2\}$ و $B = \{x | x \leq -2\}$ ، آنگاه $A' \cap B'$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x | -2 < x < 2\}$
 (۲) $\{x | -2 < x \leq 2\}$
 (۳) $\{x | -2 \leq x < 2\}$
 (۴) $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

۷۶. مجموعه اعداد طبیعی را به سه مجموعه A ، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A = \{n : n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ و

$B = \{n : n = 6k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ ، کدام عدد طبیعی به مجموعه C تعلق دارد؟ (افراز کردن در این جا یعنی اینکه هر عضوی

(کنکور)

از \mathbb{N} دقیقاً در یکی از مجموعه‌های A یا B یا C وجود داشته باشد)

- (۱) ۱۱
 (۲) ۴۳
 (۳) ۴۴
 (۴) ۳۷

۷۷. **✉** اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند و $A - B = B - A$ آنگاه کدام درست است؟

- (۱) $A = B$
 (۲) $A = B'$
 (۳) $A \subseteq B'$
 (۴) $B' \subseteq A$

۷۸. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی و $A \cap B' = B \cap A'$ آنگاه مجموعه $(A \Delta B) - A$ کدام است؟

(سراسری ریاضی قارج از کشور ۹۰)

$$(X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X))$$

- (۱) \emptyset (۲) A (۳) B (۴) B'

۷۹. اگر دو مجموعه A و B غیر تهی و $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A$ باشد، آنگاه مجموعه $B \cap A'$ برابر کدام است؟

(سراسری ریاضی قارج از کشور ۹۳)

$$(A \Delta B = (A - B) \cup (B - A))$$

- (۱) A (۲) B (۳) A' (۴) \emptyset

۸۰. متمم مجموعه $A - (B - A)'$ نسبت به مجموعه جهانی کدام است؟

(سراسری ریاضی قارج از کشور ۸۸)

- (۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) A (۴) B

۸۱. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $(A - B)'$ برابر با کدام مجموعه است؟

- (۱) $A' \cup B$ (۲) $A \cup B'$ (۳) $A \cup B$ (۴) $(A \cup B)'$

۸۲. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی با مجموعه جهانی U باشند، مجموعه $A' \Delta B'$ برابر کدام است؟

(کنکور)

$$(X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X))$$

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) $A \Delta B$ (۴) U

۸۳. اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه $B' \cap (A \cup (B \cup A))$ برابر کدام مجموعه است؟

- (۱) $A' \cap B$ (۲) $A \cap B'$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A' \cap B'$

۸۴. می دانیم $A \subseteq B$ است، حاصل $(B - A) \cup A$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) B' (۲) A' (۳) B (۴) A

۸۵. اگر $T \subseteq A \cap B$ و $T \subseteq A' \cup B'$ باشد، الزاماً.....

- (۱) $T = \emptyset$ (۲) $T \subseteq A$ یا B (۳) $T \subseteq A, B$ (۴) $A = B = \emptyset$

۸۶. [VIT] مجموعه $A - (A - B)$ برابر با کدام است؟

- (۱) $A \cup B$ (۲) \emptyset (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B'$

۸۷. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

(سراسری ریاضی قارج از کشور ۹۱)

- (۱) B' (۲) \emptyset (۳) $A \cap B$ (۴) $A - B$

۸۸. [] اگر $B - A \subseteq (B - A)'$ باشد، آنگاه $A' \cap B'$ کدام است؟

- (۱) \emptyset (۲) U (۳) A' (۴) B'

۸۹. اگر $B \subseteq A$ باشد، کدام نتیجه گیری لزوماً صحیح نیست؟

- (۱) $A' \subseteq B'$ (۲) $A \cup B' = U$ (۳) $A - B = \emptyset$ (۴) $A' \cup B = U$

(سراسری ریاضی ۸۸)

۹۰. مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

- (۱) $B - A$ (۲) B (۳) \emptyset (۴) A'

مجموعه، الگو و دنباله

۱. گزینه «۳»

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

۲. گزینه «۳»

$$\emptyset \cap A = \emptyset$$

اشتراک مجموعه تهی با هر مجموعه‌ای برابر است با مجموعه تهی.

$$\emptyset \subseteq A$$

مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

۳. گزینه «۳»

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0\} \Rightarrow A = \{0\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x - 3 \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{x}{3} \notin \mathbb{R}\} \Rightarrow C = \{\}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\} \Rightarrow D = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

۴. گزینه «۳»

مورد «الف» درست است، زیرا $\{2\}$ یکی از دو عضو A است.

مورد «ب» درست است، زیرا ۲ عضو A است و در نتیجه $\{2\}$ زیرمجموعه‌ای از A است.

مورد «ج» درست است، زیرا ۲ عضو A است.

مورد «د» نادرست است، در اصل $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ درست است.

۵. گزینه «۴»

۱ عضوی از E است، پس $1 \in E$ و $\{1\} \subseteq E$ درست هستند، ولی $\{1\} \in E$ نادرست است.

۶. گزینه «۱»

عضو ۲ در مجموعه B هست و در C نیست، پس $B \subseteq C$ نادرست است.

۷. گزینه «۱»

دو مجموعه برابر هستند، پس عضوهایشان با هم برابر است. پس با توجه به عضوهایی که هر کدام مجموعه‌ای یک یا دو عضوی‌اند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left. \begin{array}{l} \{x\} = \{z\} \\ \{y, x\} = \{t, z\} \end{array} \right\} \Rightarrow x = z, y = t$$

۸. گزینه «۲»

هر دو مجموعه عضو ۳ را دارند، پس دو عضو دیگرشان هم باید با هم برابر باشد، دو حالت دارد:

$$\left. \begin{array}{l} x = -4 \\ -y = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow xy = -4 \times 7 = -28$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -7 \\ -y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -7 \\ y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow xy = -7 \times 4 = -28$$

۹. گزینه «۱»

فرض می‌کنیم $P = \{2, 3, 4, 6, 7, a, b\}$ و $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, c, d\}$.

در مجموعه P ، عضوهای ۶ و ۷ را داریم و چون $P = Q$ است، ۶ و ۷ هم باید عضو Q باشند، در نتیجه $\{c, d\} = \{6, 7\}$.

در مجموعه Q ، عضوهای ۱ و ۵ را داریم و چون $P = Q$ است، ۱ و ۵ هم باید عضو P باشند، در نتیجه $\{a, b\} = \{1, 5\}$.

$$a + b + c + d = 1 + 5 + 6 + 7 = 19$$

پس:

۱۰. گزینه «۱»

اگر $x = 0$ باشد، آنگاه $x^2 = 0$ می‌شود. پس نمایش عضوی A به شکل مقابل است: $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

۱۱. گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} k = -3 \Rightarrow x = \frac{k}{k^2} = \frac{-3}{(-3)^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \\ k = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1 \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1 \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1 \text{ یا } x = 1 \Rightarrow B = \{-1, 1\}$$

۱۲. گزینه «۳»

$$S = \{3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63\}$$

مجموعه S دارای ۱۱ عضو است. داریم:

$$3 + 63 = 66 \quad 9 + 57 = 66 \quad 15 + 51 = 66 \quad 21 + 45 = 66 \quad 27 + 39 = 66$$

اگر از بین ۱۰ عدد بالا (یعنی همهٔ اعضا به جز ۳۳)، ۶ عدد انتخاب کنیم، قطعاً هر دو عدد یکی از تساوی‌ها را انتخاب کرده‌ایم. با در نظر گرفتن این که خود ۳۳ هم ممکن است انتخاب شود، اگر ۷ عدد از S انتخاب کنیم، مطمئن هستیم که حداقل جمع دو تا از آن‌ها ۶۶ می‌شود.

۱۳. گزینه «۲»

$$N \subseteq W \Rightarrow N \cap W = N$$

گزینه ۱ درست است:

$$W - N = \{0\}$$

گزینه ۲ نادرست است:

$$N \subseteq W \Rightarrow N - W = \emptyset$$

گزینه ۳ درست است:

$$N \subseteq W \Rightarrow W \cup N = W$$

گزینه ۴ درست است:

۱۴. گزینه «۴»

$$Z \subseteq Q \Rightarrow Z \cup Q = Q$$

گزینه ۱ نادرست است:

$$W - N = \{0\}$$

گزینه ۲ نادرست است:

$$W \subseteq Q \Rightarrow W \cap Q = W$$

گزینه ۳ نادرست است:

۱۵. گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq C$$

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ A \cup B \subseteq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} B \subseteq A \cup B \\ A \cup B \subseteq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$$

۱۶. گزینه «۳»

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

پس:

$$(A \cap B) \cup B = A \cup B = B$$

گزینه ۱ نادرست است:

$$(A \cup B) \cap A = B \cap A = A$$

گزینه ۲ نادرست است:

$$(A \cap B) \cup A = A \cup A = A$$

گزینه ۳ درست است:

$$(A \cup B) \cap B = B \cap B = B$$

گزینه ۴ نادرست است:

۱۷. گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ A \cup B \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

۱۸. گزینه «۴»

$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$(A - B) \cap (A - C) = \emptyset \cap (A - C) = \emptyset$$

۱۹. گزینه «۲»

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$$

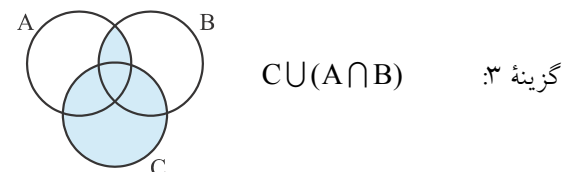
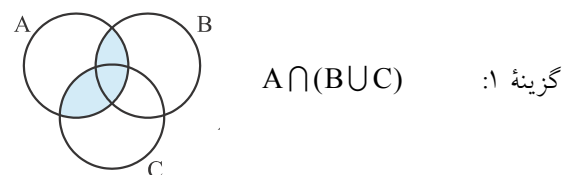
$$B \subseteq C \Rightarrow B \cap C = B$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = B \cap C = B$$

با توجه به سه رابطه بالا داریم:

۲۰. گزینه «۴»

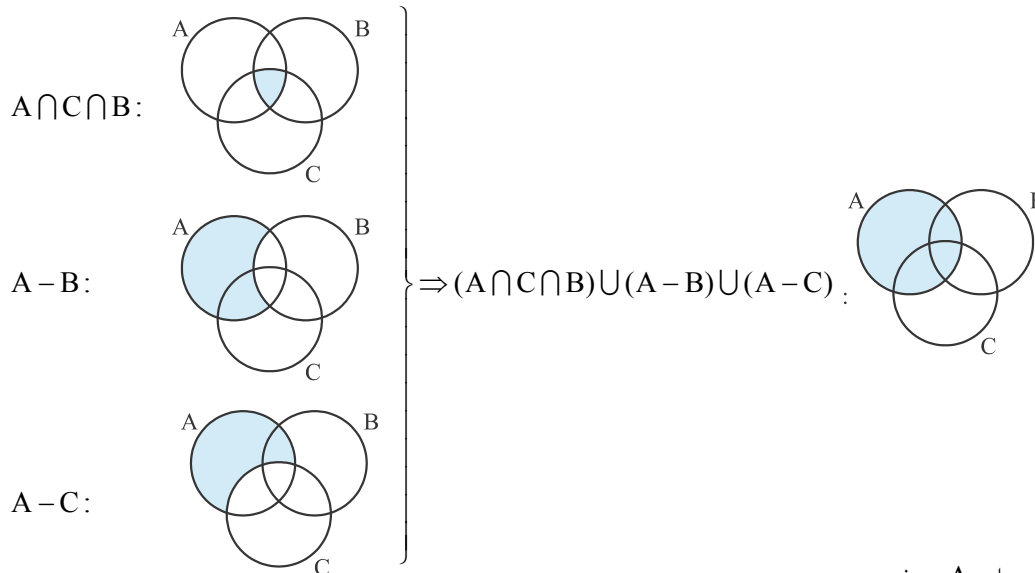
نمودار ون هر گزینه را رسم می‌کنیم:



۲۱. گزینه «۲»

$$(A - B) - (B - A) = \{۱\} - \{۴\} = \{۱\}$$

۲۲. گزینه «۳»



همان‌طور که دیدید، حاصل برابر A می‌شود.

۲۳. گزینه «۳»

A اعداد صحیح بخش‌پذیر بر ۷ است و B اعداد صحیح بخش‌پذیر بر ۳ است. پس $A - B$ شامل اعداد صحیحی است که بر ۷ بخش‌پذیر هستند و بر ۳ بخش‌پذیر نیستند. در بین گزینه‌ها، عدد ۱۴ بر ۷ بخش‌پذیر است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۲۴. گزینه «۴»

A شامل اعداد صحیح بخش‌پذیر بر ۹ است و B شامل اعداد صحیح بخش‌پذیر بر ۳ است، پس $B - A$ شامل اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و نابخش‌پذیر بر ۹ است.

بررسی گزینه ۱: ۳۱۵ بر ۹ بخش‌پذیر است، پس $۳۱۵ \in A$.

بررسی گزینه ۲: ۳۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است و بر ۹ بخش‌پذیر نیست، پس $۳۱۲ \in B - A$.

بررسی گزینه ۳: ۳۱۴ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس $۳۱۴ \notin B$.

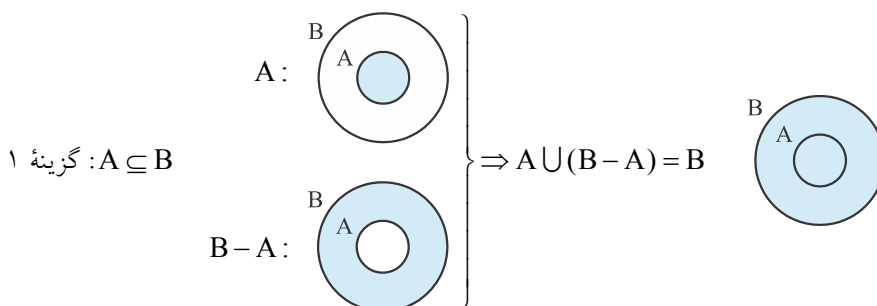
بررسی گزینه ۴: ۸۱۰ بر ۹ بخش‌پذیر است، پس $۸۱۰ \notin B - A$.

۲۵. گزینه «۱»

اعداد ۶ و ۷ در اشتراک دو مجموعه هستند، پس ۶ و ۷ در هر دو مجموعه هستند:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \in \{9, x, 2, 6\} \Rightarrow x = 7 \\ 6 \in \{7, 2, y\} \Rightarrow y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = 7 + 6 = 13$$

۲۶. گزینه «۱»



پس گزینه ۱ درست است.

گزینه ۲: $B \subseteq A \Rightarrow B - A = \emptyset \Rightarrow A \cup (B - A) = A \cup \emptyset = A$

پس گزینه ۲ نادرست است.

گزینه ۳: $A = \emptyset \Rightarrow B - A = B - \emptyset = B \Rightarrow A \cup (B - A) = A \cup B = \emptyset \cup B = B$

پس گزینه ۳ درست است.

گزینه ۴: $B = \emptyset \Rightarrow B - A = \emptyset - A = \emptyset \Rightarrow A \cup (B - A) = A \cup \emptyset = A$

پس گزینه ۴ نادرست است.

بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ درست هستند. اما گزینه ۳ حالت خاصی از گزینه ۱ است. بنابراین گزینه ۱ پاسخ مسئله است.

۲۷. گزینه «۳»

بررسی گزینه ۱: فرض کنید $A = \{1\}$ ، $B = \{2\}$ و $C = \{2\}$ باشد. پس $B \cap C = \{2\}$ می‌شود و این گزینه غلط می‌شود.

بررسی گزینه ۲: فرض کنید $A = \{1\}$ ، $B = \{2\}$ و $C = \{3\}$ باشد، پس $B \cap C = \emptyset$ می‌شود و این گزینه غلط می‌شود.

بررسی گزینه ۳: درست است زیرا:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

بررسی گزینه ۴: فرض کنید $A = \{1\}$ ، $B = \{2\}$ و $C = \{2\}$ باشد، پس:

$$A \cap (B - C) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

پس این گزینه نیز غلط می‌شود.

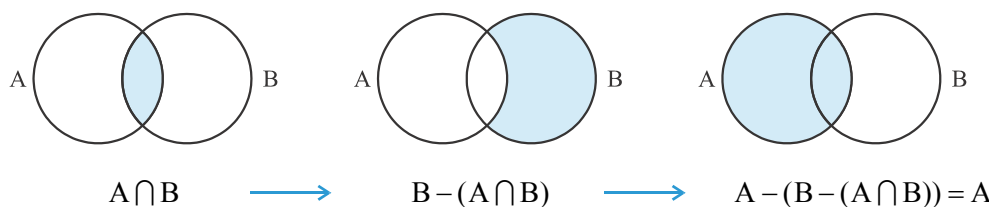
۲۸. گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} A - (A - B) &= \{a, b, c, d\} - \{a, b\} = \{b, c\} \\ A \cap B &= \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, g, e\} = \{b, c\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - (A - B) = A \cap B$$

۲۹. گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \{-1, 0, 1\} \\ A_2 &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ A_3 &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A_1 \cup A_2) - A_3 = A_3 - A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} - \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{-3, 3\}$$

۳۰. گزینه «۱»

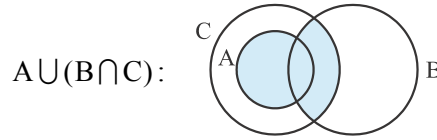
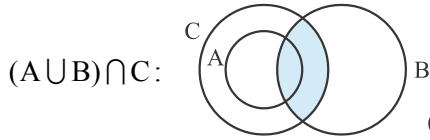


۳۱. گزینه «۲»

گزینه ۱ نادرست است:

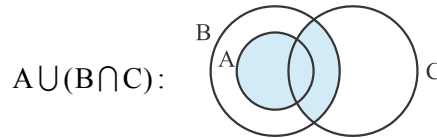
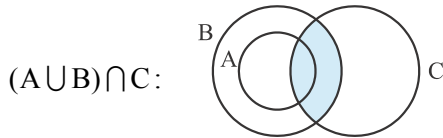


گزینه ۳ نادرست است:



گزینه ۴ نادرست است:

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$$



۳۲. گزینه «۴»

۱ بررسی گزینه ۱: $A - B = \{\{1, 2, 3\}\} \neq C$

۲ بررسی گزینه ۲: $B - C = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset$

۳ بررسی گزینه ۳: $B - C = \{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$

۴ بررسی گزینه ۴: $A - B = \{\{1, 2, 3\}\} = \{C\}$

۳۳. گزینه «۲»

$$x \in [-5, 7) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 7\}$$

۳۴. گزینه «۴»

$$x \in [2, 8] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$$

۳۵. گزینه «۲»

قیمت هر کتاب را x فرض می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 4000 < 2x \Rightarrow 2000 < x \\ 3x < 7500 \Rightarrow x < 2500 \end{array} \right\} \Rightarrow 2000 < x < 2500 \Rightarrow x \in (2000, 2500)$$

۳۶. گزینه «۱»

$$-4 = -\frac{20}{5} < -\frac{17}{5} \Rightarrow -4 \notin \left(-\frac{17}{5}, \frac{24}{5}\right]$$

۳۷. گزینه «۳»

$$0 \leq 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq 1 - 2x \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \Rightarrow 0 \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

۳۸. گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 7 < 3x - 2 \Rightarrow -5 < x \\ 3x - 2 \leq x + 8 \Rightarrow 2x \leq 10 \Rightarrow x \leq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -5 < x \leq 5 \Rightarrow x \in (-5, 5]$$

۳۹. گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{1}{4} > \frac{x}{5} &\Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{5} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5x}{15} - \frac{3x}{15} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x}{15} > \frac{1}{4} \Rightarrow 2x > \frac{15}{4} \Rightarrow x > \frac{15}{8} \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{4} < \frac{x}{5} + \frac{1}{3} &\Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{5} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5x}{15} - \frac{3x}{15} < \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{2x}{15} < \frac{7}{12} \Rightarrow x < \frac{35}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{15}{8} < x < \frac{35}{8} \Rightarrow x \in \left(\frac{15}{8}, \frac{35}{8}\right)$$

۴۰. گزینه «۲»

$$4 \in (m+2, 4m+8) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} m+2 < 4 &\Rightarrow m < 2 \\ 4 < 4m+8 &\Rightarrow -4 < 4m \Rightarrow -1 < m \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 < m < 2$$

۴۱. گزینه «۳»

$$5 \in (2n-1, 3n+14) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2n-1 < 5 &\Rightarrow 2n < 6 \Rightarrow n < 3 \\ 5 < 3n+14 &\Rightarrow -9 < 3n \Rightarrow -3 < n \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 < n < 3 \Rightarrow [-3, 3)$$

۴۲. گزینه «۳»

فرض کنید n عددی طبیعی باشد.

کوچکترین عدد صحیح کوچکتر از -1 وجود ندارد، زیرا با بزرگ شدن n ، عدد $-n$ کوچکتر می‌شود.

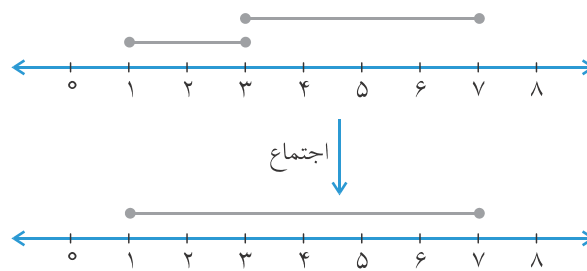
کوچکترین عدد گنگ بزرگتر از -1 وجود ندارد، زیرا با بزرگ شدن n ، عدد $-1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ عددی گنگ است که به -1 نزدیک‌تر می‌شود.

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از -1 برابر است با -2 .

بزرگترین عدد گویای کوچکتر از -1 وجود ندارد، زیرا با بزرگ شدن n ، عدد $-1 - \frac{1}{n}$ عددی گویا است که به -1 نزدیک‌تر می‌شود.

۴۳. گزینه «۴»

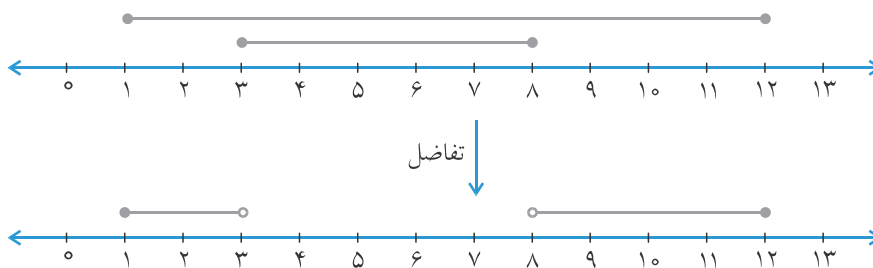
بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم، سپس اجتماع آن‌ها را به دست می‌آوریم:



پس پاسخ می‌شود $[1, 7]$.

۴۴. گزینه «۱»

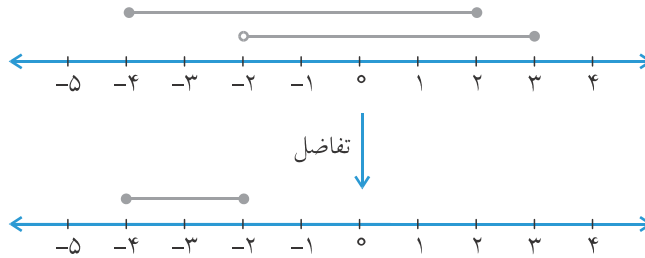
ابتدا دو بازه را روی محور نمایش می‌دهیم، سپس تفاضل آن‌ها را به دست می‌آوریم:



پس پاسخ مسئله $[1, 3) \cup (8, 12]$ می‌شود.

۴۵. گزینه «۱»

ابتدا دو بازه را روی محور نمایش می‌دهیم، سپس تفاضل آن‌ها را به دست می‌آوریم:



پاسخ مسئله $[-2, -4]$ می‌شود.

۴۶. گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = [1, 2 + \frac{1}{1}) \\ A_2 = [1, 2 + \frac{1}{2}) \\ A_3 = [1, 2 + \frac{1}{3}) \\ A_4 = [1, 2 + \frac{1}{4}) \end{array} \right\} \Rightarrow A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1 = A_4 = [1, 2 + \frac{1}{4}) = [1, \frac{9}{4})$$

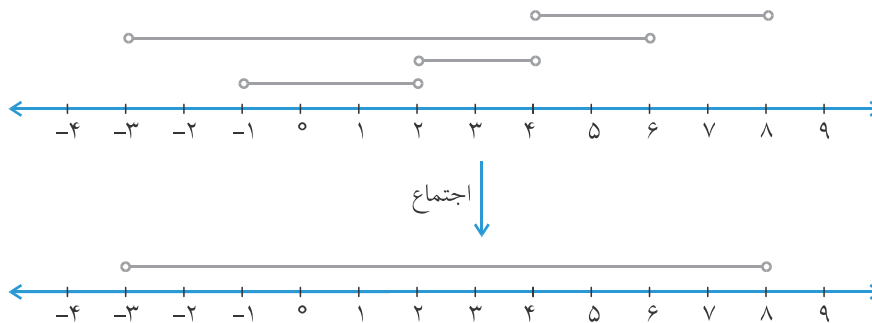
۴۷. گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^4 A_n &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = [0, 2] \cup [1, 3] \cup [2, 4] \cup [3, 5] = [0, 5] \\ \bigcap_{n=1}^3 A_n &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0, 2] \cap [1, 3] \cap [2, 4] = \{2\} \\ \bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n &= [0, 5] - \{2\} = \{x : 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\} \end{aligned}$$

۴۸. گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^4 A_n &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \\ A_1 &= ((-1)^1 \times 1, 2 \times 1) = (-1, 2) \\ A_2 &= ((-1)^2 \times 2, 2 \times 2) = (2, 4) \\ A_3 &= ((-1)^3 \times 3, 2 \times 3) = (-3, 6) \\ A_4 &= ((-1)^4 \times 4, 2 \times 4) = (4, 8) \end{aligned}$$

بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم و سپس اجتماع آن‌ها را به دست می‌آوریم:



پس پاسخ مسئله می‌شود بازه $(-3, 8)$ که اعداد -2 تا 7 در آن است و تعداد این اعداد 10 است.

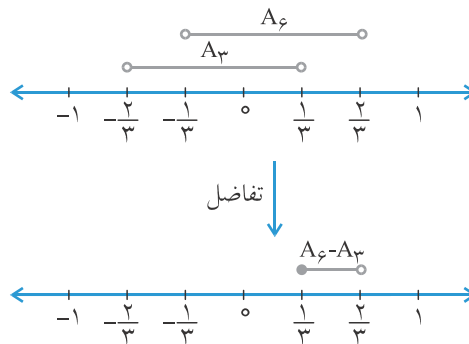
۴۹. گزینه «۴»

$$A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(A \cup B) - A = B - A \Rightarrow (A_3 \cup A_6) - A_3 = A_6 - A_3$$

بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم و سپس تفاضل دو مجموعه را به دست می‌آوریم:



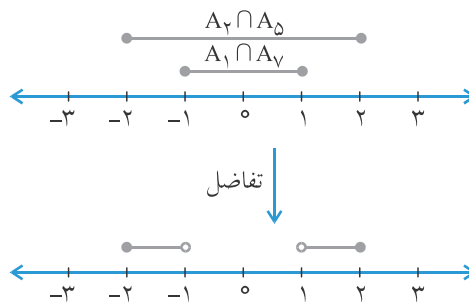
پس پاسخ مسئله $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ است.

۵۰. گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = \left[-2, \frac{5}{2}\right] \\ A_5 = \left[-5, 2\right] \end{array} \right\} \Rightarrow A_2 \cap A_5 = \left[-2, 2\right]$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \left[-1, 4\right] \\ A_7 = \left[-7, 1\right] \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 \cap A_7 = \left[-1, 1\right]$$

بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم و سپس تفاضل دو محور را به دست می‌آوریم:



پس پاسخ می‌شود $[-2, -1) \cup (1, 2]$.

۵۱. گزینه «۱»

$\bigcup_{i=1}^{10} A_i$ یعنی اجتماع همه بازه‌ها و $\bigcap_{i=1}^{10} A_i$ یعنی اشتراک همه بازه‌ها:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = [-2, 19] \\ A_2 = [-4, 18] \\ A_3 = [-6, 17] \\ \vdots \\ A_{10} = [-20, 10] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{10} = [-2, 10] \\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{10} = [-20, 19] \end{array}$$

برای تفاضل دو بازه می‌نویسیم:

$$[-20, 19] - [-2, 10] = \underbrace{[-20, -2]}_{\text{عدد } 18} \cup \underbrace{(10, 19]}_{\text{عدد } 9}$$

پس شامل $27 = 18 + 9$ عدد صحیح است.

۵۲. گزینه «۳»

تعداد خرگوش‌ها، اتم‌ها و شهرهای جهان هر چه قدر هم که زیاد باشند، محدود است. ولی تعداد نقاط روی یک خط بی‌شمار است.

۵۳. گزینه «۴»

تعداد مورچه‌ها و تلفن‌ها هر چه قدر هم که زیاد باشند، محدود است. در بین اعداد اول، فقط عدد ۷ هست که بر ۷ بخش پذیر است. ولی بی‌شمار عدد مضرب ۱۱ وجود دارد.

۵۴. گزینه «۴»

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: اعداد $10 + \sqrt{2}$ ، $10 + 2\sqrt{2}$ ، $10 + 3\sqrt{2}$ و ... را در نظر بگیرید. همه این اعداد در مجموعه هستند، پس این مجموعه نامتناهی است.

گزینه ۲: اعداد $0/01$ ، $0/001$ و ... را در نظر بگیرید. همه این اعداد در مجموعه هستند، پس این مجموعه نامتناهی است.

گزینه ۳: اعداد -6 ، -7 ، -8 و ... را در نظر بگیرید. همه این اعداد در مجموعه هستند، پس این مجموعه نامتناهی است.

گزینه ۴: این مجموعه به صورت $\{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$ است، پس ۹۹ عضو دارد و متناهی است.

۵۵. گزینه «۱»

نامتناهی است $\rightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 0 \text{ یا } 1 < x\}$

متناهی است $\rightarrow \{ \}$

نامتناهی است $\rightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 < x < 3\}$

نامتناهی است $\rightarrow \{8, 9, 10, 11, \dots\}$

نامتناهی است $\rightarrow \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1\}$

۵۶. گزینه «۴»

گزینه ۱: مجموعه $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ شامل اعداد صحیح نامنفی است، یعنی $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ پس نامتناهی است.

گزینه ۲: مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{W}$ شامل اعداد حقیقی است که فقط اعداد حسابی از آن حذف شده‌اند، پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

گزینه ۳: مجموعه $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ شامل اعداد گویایی است که عدد صحیح نیستند، بی‌شمار عدد گویای غیر صحیح داریم، پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z} - \mathbb{R} = \emptyset$

گزینه ۴: این مجموعه تهی است، پس متناهی است:

۵۷. گزینه «۴»

$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\} \rightarrow$ نامتناهی

$\mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow$ نامتناهی

$\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow$ نامتناهی

$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \rightarrow$ متناهی

۵۸. گزینه «۴»

گزینه ۱ نادرست است، مثلاً $\{1\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از \mathbb{N} است.

گزینه ۲ نادرست است، مثلاً \mathbb{N} زیرمجموعه‌ای نامتناهی از \mathbb{W} است.

گزینه ۳ نادرست است، زیرا تعداد عضوهای زیرمجموعه یک مجموعه، کوچکتر یا مساوی تعداد عضوهای خود مجموعه است. پس اگر مجموعه متناهی باشد، زیرمجموعه نمی‌تواند نامتناهی باشد.

۵۹. گزینه «۴»

$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \rightarrow$ متناهی است

گزینه ۱ نادرست است، زیرا:

گزینه ۲ نادرست است، مثلاً فرض کنید $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{Z}$ باشد:

$B - A = \mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \rightarrow$ نامتناهی است

گزینه ۳ نادرست است، مثلاً فرض کنید $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{W}$ باشد:

$B - A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \rightarrow$ متناهی است

۶۰. گزینه «۳»

$A \cap B$ می‌تواند تهی باشد، مثلاً اگر $A = \{1\}$ و $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ باشد، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ می‌شود.

$A - B$ می‌تواند تهی باشد، مثلاً اگر $A = \{1\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ باشد، آنگاه $A - B = \emptyset$ می‌شود.

$B - A$ نمی‌تواند تهی باشد، زیرا $B - A$ نامتناهی است. علت نامتناهی بودن $B - A$ این است که از بی‌شمار عضو آن، تعداد محدودی عضو کم شده است.

$A \cup B$ نمی‌تواند تهی باشد، زیرا $A \cup B$ نامتناهی است. علت نامتناهی بودن $A \cup B$ این است که تعداد عضوهایش از B (که خودش نامتناهی است) کمتر نیست.

۶۱. گزینه «۳»

$B - A$ نمی‌تواند نامتناهی باشد، زیرا تعداد عضوهایش از B بیشتر نیست و B خود متناهی است.

$A \cap B$ نمی‌تواند نامتناهی باشد، زیرا تعداد عضوهایش از B بیشتر نیست و B خود متناهی است.

$A - B$ نامتناهی است، زیرا تعداد عضوهایش به تعداد محدودی کمتر از تعداد عضوهای A است و A خود نامتناهی است.

$\mathbb{R} - B$ ممکن است متناهی باشد، مثلاً اگر $B = \mathbb{R} - \{1\}$ باشد، آنگاه $\mathbb{R} - B = \{1\}$ می‌شود.

۶۲. گزینه «۲»

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} A - B = \{1, 9, 15, 21, 25, 27, \dots\} \rightarrow \text{نامتناهی} \\ B - A = \{2\} \rightarrow \text{متناهی} \\ A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, \dots\} \rightarrow \text{نامتناهی} \\ A \cap B = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \rightarrow \text{نامتناهی} \end{cases}$$

۶۳. گزینه ۱

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2n\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

پس تعداد عضوهای A برابر با $2n$ است که یک عدد طبیعی است، پس A متناهی است.

۶۴. گزینه ۱

تعداد عضوهای B بی شمار است، پس B نامتناهی است.

عضوهای A عبارتند از $1, 2, 3, \dots$ و $\{4, 5, 6, \dots\}$ ، پس تعداد عضوهای A برابر با 4 است و متناهی است.

۶۵. گزینه ۳

می دانیم A نامتناهی و B متناهی است. ابتدا A' را به دست می آوریم (مجموعه مرجع \mathbb{Z} است):

$$A = \{3, 6, 9, 12, \dots\} \Rightarrow A' = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

پس A' یک مجموعه نامتناهی است.

اجتماع یک مجموعه نامتناهی با هر مجموعه ای نامتناهی می شود، پس $A \cup B$ و $A' \cup B$ هر دو نامتناهی هستند.

$$A \cap B' = A - B$$

برای $A \cap B'$ داریم:

A نامتناهی و B متناهی است، پس $A - B$ نامتناهی است.

اشتراک یک مجموعه متناهی با هر مجموعه ای متناهی می شود، پس $A \cap B$ متناهی می شود.

۶۶. گزینه ۲

اگر A' به تعداد n عضو داشته باشد، A به تعداد $n + 5$ عضو خواهد داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد زیرمجموعه های } A = 2^{n+5} \\ \text{تعداد زیرمجموعه های } A' = 2^n \end{array} \right\} = 2^{n+5} \div 2^n = 2^{n+5-n} = 2^5 = 32$$

۶۷. گزینه ۳

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 9\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: $A \cap C = \{4\} \Rightarrow (A \cap C)' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

گزینه ۲: $B - C = \{2, 9\}$

گزینه ۳: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{5, 7, 8\}$

گزینه ۴: $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

۶۸. گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} A = \{n \mid n \geq 6\} = \{6, 7, 8, 9, \dots\} \Rightarrow A' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B = \{2, 7, 6\} \end{array} \right\} \Rightarrow A' \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

۶۹. گزینه «۱»

گزینه ۱: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$

گزینه ۲: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

گزینه ۳: $\mathbb{W} - \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

گزینه ۴: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \cap (\mathbb{Q}')' = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \stackrel{\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}}{=} \mathbb{Q}$

۷۰. گزینه «۱»

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = \{0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\}$$

۷۱. گزینه «۲»

$$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = \{4, 7\}$$

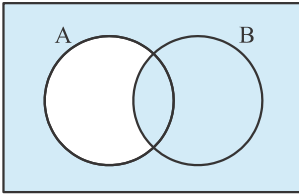
راه حل اول:

راه حل دوم: مجموعه مرجع $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ است:

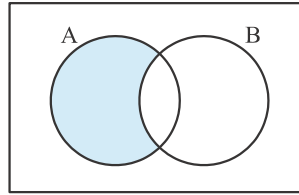
$$\left. \begin{aligned} A &= \{1, 4, 6, 7, 8\} \\ B &= \{2, 3, 4, 5, 7\} \Rightarrow B' = \{1, 6, 8, 9, 10, 11\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - B' = \{4, 7\}$$

۷۲. گزینه «۳»

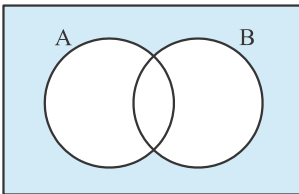
گزینه ۲: $A' \cup B = (A \cap B')' = (A - B)'$



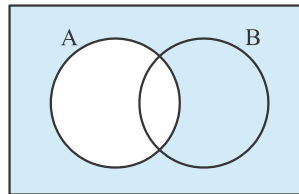
گزینه ۱: $B' - A' = B' \cap (A')' = B' \cap A = A - B$



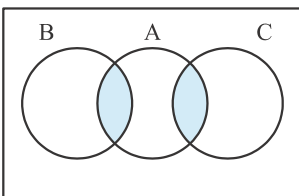
گزینه ۴: $B' - A = B' \cap A' = (B \cup A)'$



گزینه ۳:

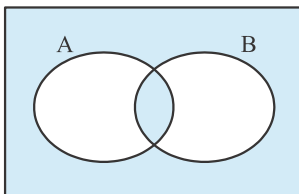


۷۳. گزینه «۴»



$$A - (B \cup C)' = A \cap ((B \cup C)')' = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

۷۴. گزینه «۱»

نمودار ون $(A \cup B)' \cap (B \cup A)'$ به صورت روبه‌رو می‌شود:

۷۵. گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} A = \{x \mid x \geq 2\} &\Rightarrow A' = \{x \mid x < 2\} \\ B = \{x \mid x \leq -2\} &\Rightarrow B' = \{x \mid x > -2\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A' \cap B' = \{x \mid -2 < x < 2\}$$

۷۶. گزینه «۱»

اعدادی که باقی‌مانده تقسیمشان بر ۶ برابر ۱ است، در مجموعه A هستند و اعدادی که باقی‌مانده تقسیمشان بر ۶ برابر ۱- است، در مجموعه B هستند. بقیه اعداد در مجموعه C هستند.

$$11 = 6 \times 2 - 1 \Rightarrow 11 \in B$$

$$43 = 6 \times 7 + 1 \Rightarrow 43 \in A$$

$$44 = 6 \times 7 + 2 \Rightarrow 44 \in C$$

$$37 = 6 \times 6 + 1 \Rightarrow 37 \in A$$

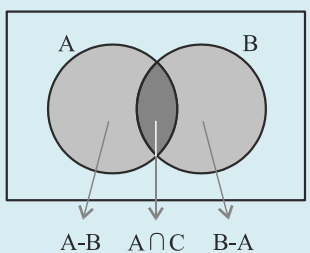
۷۷. گزینه «۱»

اگر $A - B = B - A$ باشد، آنگاه $A = B$. زیرا:
اگر عضو x طوری باشد که $x \in A$ و $x \notin B$ ، آنگاه x عضو $A - B$ است و عضو $B - A$ نیست. در نتیجه همه عضوهای A عضو B هم هستند. به طور مشابه ثابت می‌شود که همه عضوهای B هم عضو A هستند. پس $A = B$.

۷۸. گزینه «۱»

$$\begin{aligned} A \cap B' &= B \cap A' \Rightarrow A - B = B - A \Rightarrow A = B \\ A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \stackrel{A=B}{=} \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ (A \Delta B) - A &= \emptyset - A = \emptyset \end{aligned}$$

۷۹. گزینه «۴»



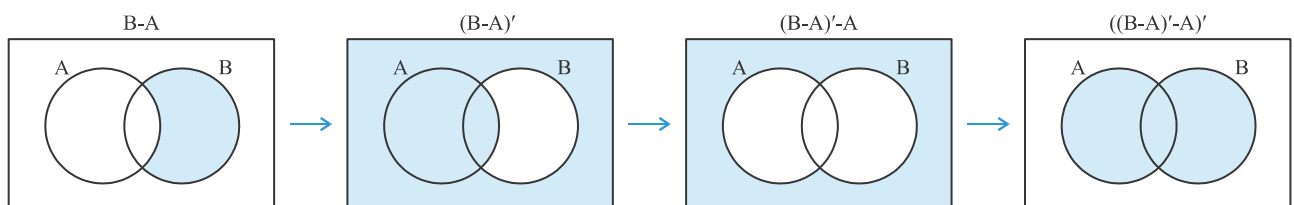
$$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

پس داریم:

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B - A = \emptyset \Rightarrow B \cap A' = \emptyset$$

۸۰. گزینه «۱»



در نمودار نتیجه می‌شود که حاصل برابر است با $A \cup B$.

۸۱. گزینه «۱»

$$(A - B)' = (A \cap B)' = A' \cup B$$

۸۲. گزینه «۳»

$$A' \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A) = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B$$

۸۳. گزینه «۲»

$$B' \cap (A \cup (B \cup A)) = (A \cup (B \cup A)) \cap B' = (A \cup B \cup A) \cap B' = (A \cup B) \cap B' = (A \cup B) - B = A - B = A \cap B'$$

۸۴. گزینه «۳»

$$A \subseteq B \Rightarrow B \cup A = B$$

$$(B - A) \cup A = (B \cap A') \cup A = (B \cup A) \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$$

۸۵. گزینه «۱»

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

پس T هم زیرمجموعه $A \cap B$ است و زیرمجموعه متمم $A \cap B$. اگر T تهی نباشد، باید عضوی داشته باشد که هم در یک مجموعه و هم در مکملش وجود داشته باشد، در حالی که چنین چیزی امکان پذیر نیست. پس T تهی است:

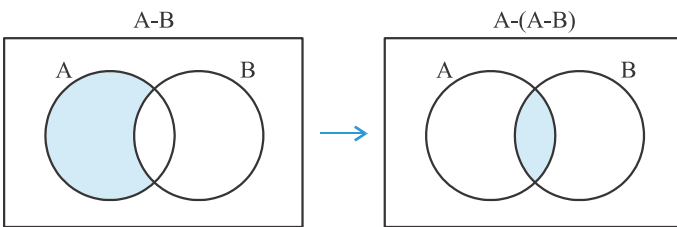
$$\left. \begin{array}{l} T \subseteq (A \cap B) \\ T \subseteq (A \cap B)' \end{array} \right\} \Rightarrow T = \emptyset$$

۸۶. گزینه «۳»

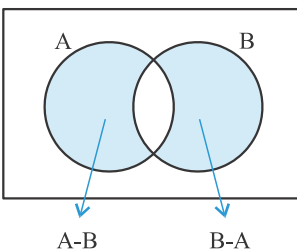
راه حل اول:

$$A - (A - B) = A - (A \cap B') = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

راه حل دوم:



۸۷. گزینه «۴»



$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset \Rightarrow (A - B) - (B - A) = A - B \Rightarrow$$

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$

۸۸. گزینه «۳»

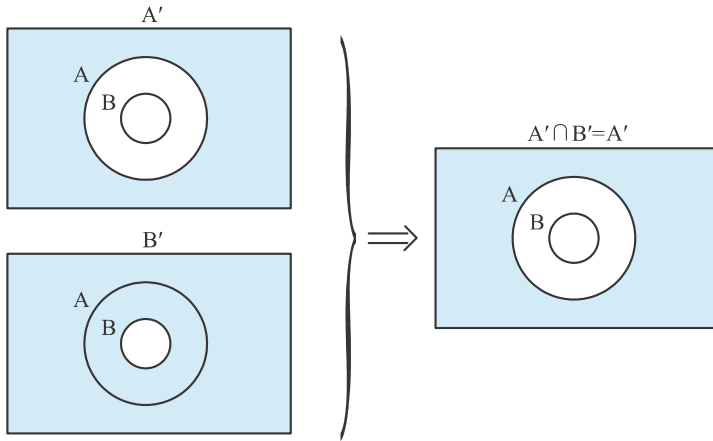
اگر $T \subseteq T'$ باشد، آنگاه $T = \emptyset$ است، زیرا:

اگر x وجود داشته باشد که عضو T باشد، آنگاه چون T زیرمجموعه T' است، پس x باید عضو T' هم باشد، در حالی که هیچ عضوی نمی تواند هم عضو یک مجموعه باشد و هم عضو متمم آن مجموعه. پس T هیچ عضوی ندارد، یعنی $T = \emptyset$ است.

با توجه به نکته بالا داریم:

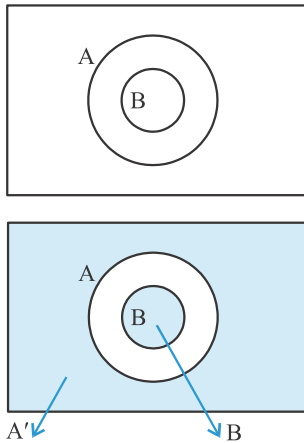
$$B - A \subseteq (B - A)' \Rightarrow B - A = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A$$

نمودار را بررسی می‌کنیم:



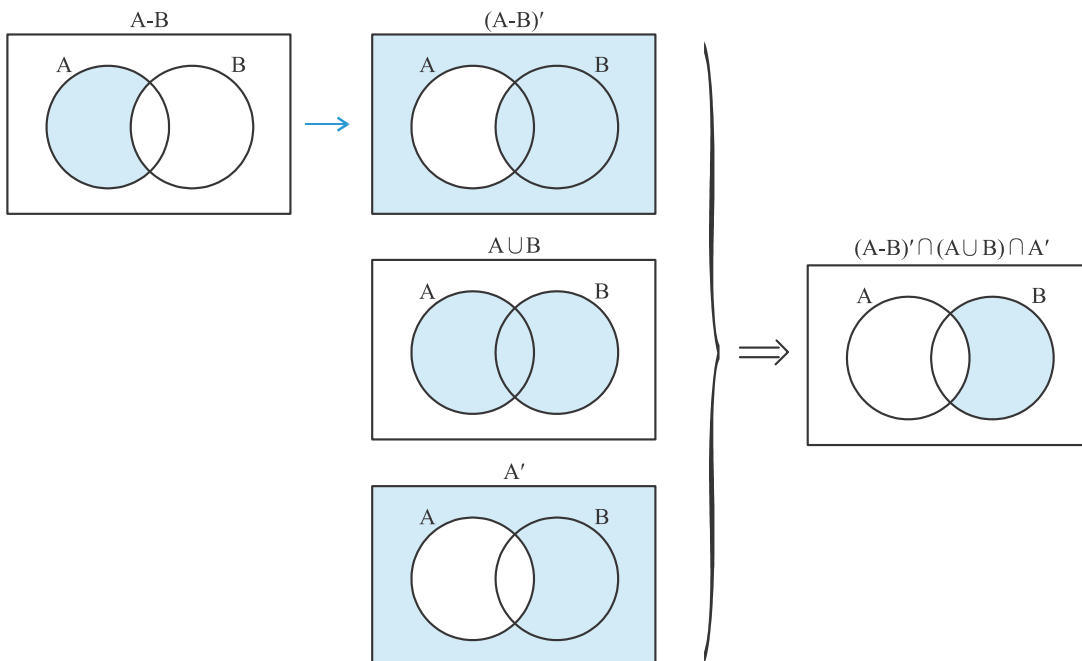
۸۹. گزینه «۴»

اگر $B \subseteq A$ باشد، نمودار ون آن‌ها به شکل روبه‌رو می‌شود:



رابطه $A' \cup B = U$ درست نیست زیرا نمودار ون $A' \cup B$ به صورت روبه‌رو می‌شود. (در اصل $A - B$ را کم دارد تا U شود).

۹۰. گزینه «۱»



همان‌طور که دیده می‌شود حاصل برابر $B - A$ است.