

# ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی ۱ (دهم) از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

- ۱- **آزمون های نوبت اول:** آزمون های شماره ۱ تا ۳ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می شود:
  - الف) **آزمون های طبقه بندی شده:** آزمون های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه بندی کرده ایم که اگر خواستید؛ پس از خواندن هر فصل از درس نامه تعدادی سؤال حل کنید، به راحتی بتوانید آن ها را پیدا کنید. حواستان باشد این آزمون ها هم، ۲۰ نمره ای و مثل یک آزمون کامل هستند.
  - ب) **آزمون طبقه بندی نشده:** آزمون شماره ۳ را طبقه بندی نکرده ایم تا یک آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- ۲- **آزمون های نوبت دوم:** آزمون های شماره ۴ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می شود:
  - الف) **آزمون های طبقه بندی شده:** آزمون های شماره ۴ تا ۷ را که برای نوبت دوم طرح شده اند هم طبقه بندی کرده ایم که باز هم اگر خواستید پس از خواندن درس نامه ها تعدادی سؤال از هر فصل به طور جداگانه حل کنید، منبع خوبی در اختیار داشته باشید. هر کدام از این آزمون ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می بینید.
  - ب) **آزمون های طبقه بندی نشده:** آزمون های شماره ۸ تا ۱۲ را طبقه بندی نکرده ایم؛ پس، در این بخش با ۵ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.
- ۳- **پاسخ تشریحی آزمون ها:** در پاسخ تشریحی آزمون ها تمام آن چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته ایم.
- ۴- **درس نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی خوانند! در این قسمت تمام آن چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی (۱) نیاز دارید، تنها در ۲۰ صفحه آورده ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

## فهرست

پاسخ نامه	آزمون	نوبت	توضیح
۱۸	۳	اول	آزمون شماره ۱ (طبقه بندی شده)
۱۹	۴	اول	آزمون شماره ۲ (طبقه بندی شده)
۲۰	۵	اول	آزمون شماره ۳ (طبقه بندی نشده)
۲۲	۶	دوم	آزمون شماره ۴ (طبقه بندی شده)
۲۳	۸	دوم	آزمون شماره ۵ (طبقه بندی شده)
۲۴	۱۰	دوم	آزمون شماره ۶ (طبقه بندی شده)
۲۵	۱۱	دوم	آزمون شماره ۷ (طبقه بندی شده)
۲۶	۱۲	دوم	آزمون شماره ۸ (طبقه بندی نشده)
۲۷	۱۳	دوم	آزمون شماره ۹ (طبقه بندی نشده)
۲۸	۱۴	دوم	آزمون شماره ۱۰ (طبقه بندی نشده)
۲۹	۱۵	دوم	آزمون شماره ۱۱ (طبقه بندی نشده)
۳۱	۱۶	دوم	آزمون شماره ۱۲ (طبقه بندی نشده)

۳۳

درس نامه توپ برای شب امتحان



ردیف	آزمون شماره ۳	نوبت اول آزمون پایه دهم دوره متوسطه دوم	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.	الف) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ ب) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ پ) $\mathbb{R} - \{5, 7\} = (-\infty, 5) \cup (5, 7) \cup (7, +\infty)$ ت) $\sqrt{2} \in (0, 1)$	۱
۲	در یک نظرسنجی از ۱۲۰ مشتری یک فروشگاه، مشخص شد ۸۰ نفر آن‌ها در ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۶۰ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. ضمناً ۳۵ نفر آن‌ها از هر دو شرکت خرید داشته‌اند. چه تعداد از این ۱۲۰ نفر در ماه گذشته: الف) حداقل از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟ ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟ پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟ ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟		۲
۳	بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. سپس مجموع این پنج جمله را بیابید.		۱
۴	علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از سه سال قصد فروش دوچرخه را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟ ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟		۱/۵
۵	فرض کنید $\sin 75^\circ = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . مساحت مثلث ABC در شکل روبه‌رو را به دست آورید.		۱
۶	با توجه به شکل روبه‌رو معادله خط L را بنویسید.		۱/۵
۷	درستی تساوی‌ها را بررسی کنید.	الف) $\frac{1}{\sin^2 \theta} \times \tan^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ ب) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$	۲
۸	عبارتهای مقابل را تجزیه کنید.	الف) $16x^2 - 81y^2$ ب) $x^2 - 2xy + x^2y - 2y^2$	۲
۹	مخرج کسرها را گویا کنید.	الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$	۲
۱۰	معادلات مقابل را به روش خواسته‌شده حل کنید.	الف) $2x^2 + x - 2 = 0$ (مربع کامل) ب) $x^2 + 2\sqrt{3}x = 9$ (روش دلتا)	۱/۵
۱۱	اگر $(-4, 5)$ و $(4, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی را به دست آورید.		۰/۵
۱۲	الف) عبارت $A = \frac{-x^2 + 6x - 9}{-x^2 + x - 3}$ را تعیین علامت کنید. ب) نامعادله $ 17 - 3x  \geq 13$ را حل و مجموعه جواب را با نماد بازه بنویسید.		۱
۱۳	به ازای چه مقادیری از m، نمودار سهمی $y = x^2 + 3x + m$ همواره بالای محور x‌ها قرار دارد؟		۱
۱۴	معادله $h = -14t^2 + 12t + 2$ ارتفاع یک توپ تنیس را در ثانیه t ام برحسب متر از سطح زمین نشان می‌دهد. چه قدر طول می‌کشد تا پس از پرتاب توپ، به سطح زمین برخورد کند؟		۱
۲۰	موفق باشید	جمع نمرات	

نمره	Kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک و علوم تجربی	ریاضی (۱)	ردیف								
		نوبت دوم پایه دهم دوره متوسطه دوم		آزمون شماره ۵									
				<b>فصل اول</b>									
۰/۷۵		<p>الف) <math>A'</math></p> <p>ب) <math>B'</math></p> <p>ت) <math>A' \cup B'</math></p>	<p>پ) <math>(A - B)'</math></p> <p>ث) <math>(A - B) \cup (B - A)</math></p>	<p>باتوجه به شکل مقابل، مجموعه‌های خواسته‌شده را به دست آورید.</p>	۱								
۰/۷۵				<p>کدام جمله دنباله هندسی <math>۲, ۴, ۸, \dots</math> برابر ۱۲۸ است؟</p>	۲								
				<b>فصل دوم</b>									
۰/۷۵				<p>خطی به معادله <math>۳y - \sqrt{3}x + ۵ = 0</math> با جهت مثبت محور <math>x</math> ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟</p>	۳								
۰/۷۵				<p>حاصل عبارت <math>(\cos \alpha + 1)(\cos \alpha - 1) + \cos^2 \alpha(1 + 2 \tan^2 \alpha)</math> را به ساده‌ترین شکل به دست آورید.</p>	۴								
				<b>فصل سوم</b>									
۰/۷۵				<p>سه مکعب تودرتو موجودند که حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۱۲۵ و حجم مکعب داخلی (کوچک) برابر ۶۴ است. طول ضلع مکعب وسطی چه عددی می‌تواند باشد؟ (حداقل ۳ پاسخ متفاوت ارائه کنید).</p>	۵								
۰/۵				<p>مخرج کسر <math>\frac{1}{\sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{x^2}}</math> را گویا کنید.</p>	۶								
				<b>فصل چهارم</b>									
۰/۷۵				<p>معادله <math>(x-1)^2 = (2x+5)^2</math> را به روش ریشه‌گیری حل کنید.</p>	۷								
۱				<p>در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی ۴۶ سانتی‌متر مربع است. مقدار <math>x</math> را به دست آورید. (شکل بزرگ مربع است).</p>	۸								
۱/۵				<p>دو پرتابگر وزنه، وزنه‌های خود را با زوایای متفاوت <math>\alpha</math> و <math>\beta</math> که <math>\alpha &lt; \beta</math> است پرتاب کرده‌اند. معادله مسیر طی شده توسط وزنه نفر اول از رابطه <math>y = -\frac{x^2}{3} + \frac{3}{3}x + 2</math> و نفر دوم از رابطه <math>y = -2x^2 + 3x + 2</math> به دست می‌آید. (در هر معادله، <math>y</math> ارتفاع وزنه از سطح زمین و <math>x</math> مسافت افقی طی شده برحسب متر است.)</p> <p>الف) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور <math>x</math> ها در چه نقطه‌ای است؟ کدام وزنه، مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟</p> <p>ب) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از زمین پیدا کرده است؟ مقدار آن‌ها را مشخص کنید.</p>	۹								
۱				<p>در چه بازه‌ای از <math>x</math> نمودار تابع <math>f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}</math> پایین از خط <math>y = 2</math> واقع است؟</p>	۱۰								
				<b>فصل پنجم</b>									
۱				<p>اگر <math>f = \{(1, 3x - 2), (-5, 4y + 8), (4, 4)\}</math> تابعی همانی باشد، <math>x</math> و <math>y</math> را به دست آورید.</p>	۱۱								
۲/۵				<p>نمودار توابع مقابل را رسم کنید، سپس از روی نمودار برد آن‌ها را به دست آورید.</p>	۱۲								
				<table border="1"> <tr> <td>تابع</td> <td><math>f(x) =  x-1 </math></td> <td><math>g(x) =  x-1 </math></td> <td><math>h(x) =  x-1 </math></td> </tr> <tr> <td>دامنه</td> <td><math>D_f = \mathbb{R}</math></td> <td><math>D_g = \mathbb{R}^+</math></td> <td><math>D_h = \{-4, 1, 2, 3\}</math></td> </tr> </table>	تابع	$f(x) =  x-1 $	$g(x) =  x-1 $	$h(x) =  x-1 $	دامنه	$D_f = \mathbb{R}$	$D_g = \mathbb{R}^+$	$D_h = \{-4, 1, 2, 3\}$	
تابع	$f(x) =  x-1 $	$g(x) =  x-1 $	$h(x) =  x-1 $										
دامنه	$D_f = \mathbb{R}$	$D_g = \mathbb{R}^+$	$D_h = \{-4, 1, 2, 3\}$										
				<b>فصل ششم</b>									
۱/۵				<p>رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌توانند از بین حروف فارسی یا انگلیسی انتخاب شوند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟ (تکرار حروف، غیرمجاز است.)</p>	۱۳								
۲				<p>در یک شهرک صنعتی ۴ بلوار اصلی، در هر بلوار بین ۷ تا ۱۰ خیابان، در هر خیابان بین ۶ تا ۸ کوچه و در هر کوچه بین ۵ تا ۷ کارخانه قرار دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌های موجود در این شهرک چندتا است؟</p>	۱۴								

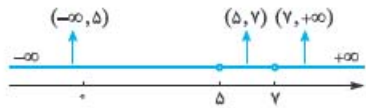
Kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک و علوم تجربی	ریاضی (۱)
نمره	نوبت دوم پایه دهم دوره متوسطه دوم	آزمون شماره ۵	
۲	<p style="text-align: right;"><b>فصل هفتم</b></p> <p>اگر ۸ نفر که دو نفر آن‌ها برادرند به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه قدر احتمال دارد که:  الف) دو برادر کنار هم باشند؟  ب) دو برادر کنار هم نباشند؟  پ) یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرد؟</p>		
۱/۵	دو تاس یکسان را با هم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی حاصل ضرب اعداد رو شده بیشتر از ۵ می‌باشد؟		
۱	چهار سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی حداکثر یکی از سکه‌ها پشت می‌آید؟		
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید	



آزمون شماره ۳ (نوبت اول)

۱- الف) تهی زیر مجموعه تمام مجموعه‌ها است، پس رابطه داده شده صحیح است.  
ب) عبارت  $(-1, 2) \subseteq [-1, 2]$  نادرست است، چون اعداد  $-1$  و  $2$  در بازه  $(-1, 2)$  وجود ندارند.

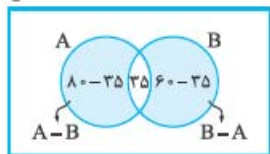
پ) درست است، زیرا با حذف اعداد  $5$  و  $7$  از  $\mathbb{R}$ ، مجموعه اعداد حقیقی به  $3$  بازه تقسیم می‌شود.



ت)  $\sqrt{2} = 1/4$  پس عبارت  $\sqrt{2} \in (0, 1)$  نادرست است.

(صفحه ۳ و ۴ کتاب درسی)

۲- U



الف)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 80 + 60 - 35 = 105$

ب)  $n(\underbrace{A - B}_A) = 80 - 35 = 45$





الف)  $2x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x = 1$  -10

افزودن عدد  $\frac{1}{16}$  به دو طرف تساوی  
 $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16} \Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16}$   
 اتحاد مربع اجمه‌ای

جذر  $x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$   
 $x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$

ب)  $x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9) = 12 + 36 = 48$   
 $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2(1)} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{16 \times 3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ x'' = \frac{-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \end{cases}$

(صفحه ۷۱ الی ۷۴ کتاب درسی)

۱۱- اگر دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  دو نقطه از نمودار سهمی باشند و  $y_1 = y_2$  باشد، در این صورت به خاطر وجود تقارن در نمودار سهمی، معادله محور تقارن (طول رأس)

از رابطه  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  به دست می‌آید؛ لذا در این مسئله خواهیم داشت:  
 $x = \frac{4 + (-4)}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$  معادله محور تقارن

(صفحه ۷۸ الی ۸۲ کتاب درسی)

الف)  $A = \frac{-(x^2 - 6x + 9)}{-x^2 + x - 3}$  -12

$\Rightarrow \frac{-(x-3)^2}{-x^2 + x - 3} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$   
 همواره منفی است.  $\Rightarrow \Delta = -11, a = -1$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$-(x-3)^2$	-	۰	-
$-x^2 + x - 3$	-	-	-
A کل	+	۰	+

(صفحه ۸۶ و ۸۷ کتاب درسی)

ب)  $|u| \geq k \Rightarrow \begin{cases} u \geq k \\ u \leq -k \end{cases}$

$|17 - 2x| \geq 13 \Rightarrow \begin{cases} 17 - 2x \geq 13 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{2} \\ 17 - 2x \leq -13 \Rightarrow -2x \leq -30 \Rightarrow x \geq 15 \end{cases}$

$\Rightarrow$  مجموعه جواب  $= (-\infty, \frac{4}{2}] \cup [15, +\infty)$

(صفحه ۹۱ و ۹۲ کتاب درسی)

$y = x^2 + 2x + m$  -13

$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{4} \\ a > 0 \Rightarrow 1 > 0 \text{ (بدیهی است)} \end{cases}$

(صفحه ۸۸ الی ۹۰ کتاب درسی)

۱۴- در لحظه برخورد با زمین، فاصله توپ از سطح زمین صفر است؛ لذا:

$h = 0 \Rightarrow -14t^2 + 12t + 2 = 0 \xrightarrow{+2} -7t^2 + 6t + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 6^2 - 4(-7)(1) = 36 + 28 = 64 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2(-7)} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-6 + 8}{-14} = \frac{-1}{7} \text{ (غق ق)} \\ t = \frac{-6 - 8}{-14} = 1 \text{ (ق ق)} \end{cases}$

بنابراین پس از ۱ ثانیه از لحظه پرتاب، توپ به سطح زمین می‌رسد. (صفحه ۷۶ و ۷۷ کتاب درسی)

ب)  $n\{(A-B) \cup (B-A)\} = n(A-B) + n(B-A) = 45 + 25 = 70$

ت)  $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 120 - 105 = 15$

(صفحه ۸ الی ۱۱ کتاب درسی)

$18, 29, 40, 51, 62 \Rightarrow a_d = a + fd \Rightarrow 62 = 18 + fd \Rightarrow d = 11$  -3

$18 \xrightarrow{+11} 29 \xrightarrow{+11} 40 \xrightarrow{+11} 51 \xrightarrow{+11} 62$   
 $\Rightarrow$  مجموع جملات  $= 18 + 29 + 40 + 51 + 62 = 200$

(صفحه ۲۱ کتاب درسی)

الف)  $a = 500$  قیمت اولیه (جمله اول) -4

$a_r = a - \frac{r}{100}a = a - \frac{1}{10}a = \frac{9}{10}a \Rightarrow r = \frac{1}{10}$

$a_r = ar^r = 500 \left(\frac{9}{10}\right)^r = 500 \left(\frac{16}{25}\right) = 320$  (هزار تومان)  $\Rightarrow$  قیمت بعد از ۳ سال

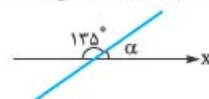
ب)  $a_n = a.r^{n-1} = 500 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$  قیمت پس از n سال

(صفحه ۲۵ کتاب درسی)

مساحت  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{4}{5} = 6$  -5

(صفحه ۳۴ کتاب درسی)

۶-  $\alpha = 18^\circ - 135^\circ = 45^\circ$  زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. -6



$\Rightarrow$  شیب خط  $\tan 45^\circ = 1, A(0, -3) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y + 3 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x - 3$  معادله خط

(صفحه ۴۰ کتاب درسی)

الف) سمت چپ تساوی:  $\frac{1}{\sin^2 \theta} \times \tan^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  -7

سمت راست تساوی:  $1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

ب) سمت چپ تساوی:  $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$

$= 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - (1 - \sin x) = \sin x$  سمت راست تساوی

(صفحه ۴۲ الی ۴۴ کتاب درسی)

الف)  $16x^2 - 81y^2 = (4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2)$  -8

$= (2x - 3y)(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2)$

ب)  $x^2 - 2xy + x^2y - 2y^2 = x(x^2 - 2y) + y(x^2y - 2y) = (x^2 - 2y)(x + y)$

(صفحه ۶۳ الی ۶۵ کتاب درسی)

الف)  $\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}} = \frac{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}}{(\sqrt{x})^2 - 2}$  -9

$= \frac{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}}{x-2}$

ب) عبارت  $= \frac{1}{\sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5x}{x-1}$

$= \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} + \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1} - 5x}{x-1} = \frac{2\sqrt{x-1} - 5x - 1}{x-1}$

(صفحه ۶۷ و ۶۸ کتاب درسی)



$$\Rightarrow (x+7)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+7=0 \Rightarrow x=-7 \text{ (فق)} \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ (غق)} \end{cases}$$

(صفحة ۷۶ و ۷۷ کتاب درسی)

۹- الف) وقتی وزنه به زمین برخورد می‌کند  $y=0$  (ارتفاع صفر است): لذا:

$$\text{نفر اول } y = \frac{-x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 \xrightarrow{y=0} \frac{-x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} -x^2 + 3x + 4 = 0 \xrightarrow{\times (-1)} x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \text{ (فق)} \\ x=-1 \text{ (غق)} \end{cases}$$

$$\text{نفر دوم } y = -2x^2 + 3x + 2 \xrightarrow{y=0} -2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل به روش دلتا}} \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \text{ (غق)} \\ x = 2 \text{ (فق)} \end{cases}$$

پس وزنه نفر اول، مسافت افقی بیشتری را طی کرده است.

$$\text{ب) نفر اول } y = \frac{-x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(\frac{9}{4} - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(2)\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{9}{4} + 4}{2} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{25}{8}$$

$$\text{نفر دوم } y = -2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(9 - 4(-2)(2)\right)}{4(-2)}$$

$$= \frac{9 + 16}{8} = \frac{25}{8}$$

(صفحة ۸۱ کتاب درسی)

پس ارتفاع ماکزیمم هر دو وزنه یکسان است.

$$f(x) < 2 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} - 2 < 0 \quad -10$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 2x - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4} < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$$

همواره مثبت است و می‌توانیم از آن صرفنظر کنیم.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x-4$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
کل عبارت	+	+	-	+

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=4 \\ \downarrow \\ x=2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=2 \\ \downarrow \\ x=4 \end{matrix}$$

مجموعه جواب  $(-2, 4)$

(صفحة ۸۸ الی ۹۰ کتاب درسی)

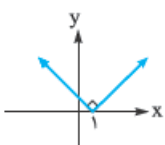
۱۱- در تابع همانی، هر  $x$  ای به خودش نسبت داده می‌شود؛ یعنی  $y=x$ . لذا در هر زوج مرتب، عضو اول باید با عضو دوم مساوی باشد.

$$3x - 2 = 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$4y + 8 = -5 \Rightarrow 4y = -13 \Rightarrow y = \frac{-13}{4}$$

(صفحة ۱۱۰ کتاب درسی)

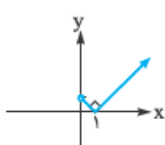
-۱۲



$$y = |x-1|$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

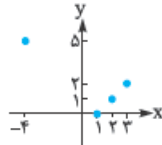
$$R_f = [0, +\infty)$$



$$y = |x-1|$$

$$D_g = \mathbb{R}^+$$

$$R_g = [0, +\infty)$$



$$y = |x-1|$$

$$D_h = \{-4, 1, 2, 3\}$$

$$R_h = \{0, 1, 2, 5\}$$

(صفحة ۱۱۱ کتاب درسی)

### آزمون شماره ۵ (نوبت دوم)

الف)  $A' = U - A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  -۱

ب)  $B' = U - B = \{1, 2, 3, 9, 10, 11, 12\}$

پ)  $A - B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow (A - B)' = U - (A - B)$

$$= \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

ت)  $A' \cup B' = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

ث)  $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

(صفحة ۸ الی ۱۱ کتاب درسی)

$$2, 4, 8, \dots \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2 \quad -2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 128 = 2 \times 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 64 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^6$$

$$\Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

(صفحة ۲۵ کتاب درسی)

$$3y - \sqrt{3}x + 5 = 0 \Rightarrow 3y = \sqrt{3}x - 5 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{5}{3} \quad -3$$

شیب

$$\text{شیب} = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha \text{ برابر } 30^\circ \text{ است.}$$

(صفحة ۴۰ کتاب درسی)

$$\text{عبارت} = \cos^2 \alpha (1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}) + \cos^2 \alpha - 1 \quad -4$$

$$= \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 1 = 2 - 1 = 1$$

(صفحة ۴۲ الی ۴۴ کتاب درسی)

۵-  $64 < x^2 < 125 \Rightarrow$  حجم مکعب بزرگ < حجم مکعب وسطی < حجم مکعب کوچک -۵

$$\Rightarrow 4^2 < x^2 < 5^2 \Rightarrow 4 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 4/1 \\ x = 4/5 \\ x = 4/8 \end{cases}$$

(صفحة ۴۸ الی ۵۶ کتاب درسی)

$$\text{عبارت} = \frac{1}{\sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{x})^3} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{x}}{5 - x}$$

(صفحة ۶۷ و ۶۸ کتاب درسی)

$$(2x+5)^2 = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2x+5 = \pm(x-1) \quad -7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+5 = x-1 \Rightarrow x = -6 \\ 2x+5 = -x+1 \Rightarrow x = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

(صفحة ۷۲ کتاب درسی)

۸- مساحت مستطیل - مساحت مربع = مساحت قسمت رنگی -۸

$$\Rightarrow (2x+5)^2 - x(x+2) = 46 \Rightarrow 4x^2 + 20x + 25 - x^2 - 2x - 46 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 18x - 21 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 6x - 7 = 0$$



فارسی انگلیسی فارسی  
 ↑ ↑ ↑  
 حالت اول: 

۳۲	۲۸	۳۱
----	----	----

 ⇒ جواب = ۳۲×۲۸×۳۱ = ۲۷۷۷۶

انگلیسی فارسی انگلیسی  
 ↑ ↑ ↑  
 حالت دوم: 

۲۸	۳۲	۲۷
----	----	----

 ⇒ جواب = ۲۸×۳۲×۲۷ = ۲۴۱۹۲

⇒ جواب کل = ۲۷۷۷۶ + ۲۴۱۹۲ = ۵۱۹۶۸

(صفحه ۱۲۲ کتاب درسی)

۱۴ - حداقل تعداد کارخانه‌ها ⇒ ۴×۷×۶×۵ = ۸۴۰  
 حداکثر تعداد کارخانه‌ها ⇒ ۴×۱۰×۸×۷ = ۲۲۴۰

(صفحه ۱۲۵ کتاب درسی)

۱۵- اگر دو برادر را x و y بنامیم، آن‌گاه:  
 $n(S) = ۸!$   
 الف)  $n(A) = ۷! \times ۲! \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷! \times ۲!}{۸!} = \frac{۷! \times ۲}{۸ \times ۷!} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$   
 ب)  $P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$

پ) 

۱	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۱
---	---	---	---	---	---	---	---

 ⇒ جواب = ۶! = ۷۲۰  

۱	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۱
---	---	---	---	---	---	---	---

 ⇒ جواب = ۶! = ۷۲۰

اصل جمع →  $n(A) = ۱۴۴۰ \Rightarrow P(A) = \frac{۱۴۴۰}{۸!} = \frac{۱۴۴۰}{۴۰۳۲۰}$

(صفحه ۱۴۶ و ۱۴۷ کتاب درسی)

۱۶- نوشتن اعضای پیشامد مطلوب بسیار طولانی است، پس از  $A'$  استفاده می‌کنیم:  
 $n(S) = ۶^۲ = ۳۶$

$\underline{A} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (1,3), (1,4), (4,1), (5,1), (1,5)\}$   
 ضرب دو تاس، بزرگتر از ۵ نباشد.

$\Rightarrow n(A) = ۱۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸} \Rightarrow P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۵}{۱۸} = \frac{۱۳}{۱۸}$   
 ضرب دو تاس، بزرگتر از ۵ باشد.

(صفحه ۱۴۶ و ۱۴۷ کتاب درسی)

۱۷ - حداکثر ۱ پشت، یعنی ۱ پشت یا هیچ پشت؛ لذا:  
 $n(S) = ۲^۴ = ۱۶$

$n(A) = \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۰} = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۶}$

البته اگر نخواستید از ترکیب استفاده کنید، باید پیشامد A را به طور کامل بنویسید.

$A = \{(ر,ر,ر,ر), (پ,ر,ر,ر), (ر,ر,ر,پ), (ر,ر,پ,ر), (ر,ر,ر,پ), (پ,ر,ر,ر), (ر,ر,ر,پ), (پ,ر,ر,ر)\} \Rightarrow n(A) = ۵$

(صفحه ۱۴۶ و ۱۴۷ کتاب درسی)



# درس نامه توپ برای شب امتحان

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه، یک عدد حسابی باشد (حتی یک عدد حسابی خیلی بزرگ) به آن مجموعه، متناهی می‌گوییم؛ مثلاً مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$ ، رقمی، متناهی است و یا مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول آب (با آن‌که تعداد مولکول‌ها بسیار زیاد هستند) متناهی است ولی مجموعه‌هایی مثل  $\mathbb{N}$ ،  $\mathbb{Z}$ ،  $\mathbb{Q}$ ،  $\mathbb{R}$  و یا بازه‌هایی مثل  $(1, 2)$  و  $[3, \infty)$  نامتناهی‌اند.

## متمم یک مجموعه

اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد، (مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث ما را شامل می‌شود) آن‌گاه به مجموعه  $A' = U - A$  متمم مجموعه  $A$  می‌گوییم. یعنی  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.



**نکته:** روابط زیر را حتماً حفظ کنید. (البته به کمک رسم نمودار هم می‌توان آن‌ها را اثبات کرد.)

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\emptyset' = U$           | 2) $U' = \emptyset$           |
| 3) $A \cup A' = U$            | 4) $A \cap A' = \emptyset$    |
| 5) $A - A' = A$               | 6) $A' - A = A'$              |
| 7) $(A')' = A$                | 8) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |
| 9) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | 10) $A - B = A \cap B'$       |

**مثال:** الف) اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد، مجموعه‌های  $N'$ ،  $W'$ ،  $Z'$  و  $(N \cup W)'$  را به دست آورید. (جواب‌ها را روی محور نمایش دهید.)

ب) اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد، علاوه بر قسمت الف) حاصل  $\mathbb{R}'$  را نیز تعیین کنید. (جواب‌ها را روی محور نمایش دهید.)

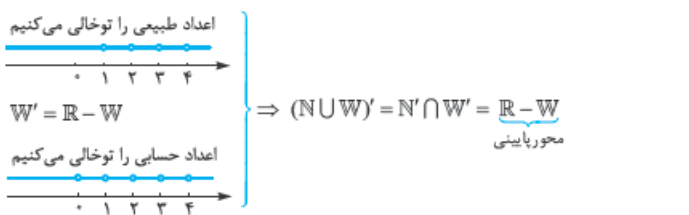
الف)  $N' = Z - N = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$W' = Z - W = \{\dots, -2, -1\}$

$Z' = \emptyset$ ،  $\emptyset' = Z$

$(N \cup W)' = N' \cap W' = \{\dots, -2, -1, 0\} \cap \{\dots, -2, -1\} = \{\dots, -2, -1\}$

ب)  $N' = \mathbb{R} - \mathbb{N}$



$Z' = \mathbb{R} - Z$

$R' = \emptyset$ ،  $\emptyset' = \mathbb{R}$

**دو مجموعه جدا از هم:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند که اشتراک آن‌ها  $\emptyset$  باشد، اصطلاحاً می‌گوییم جدا از هم می‌باشند.

## فصل: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های مهم در ریاضیات عبارت‌اند از:

اعداد حسابی  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد طبیعی  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

اعداد صحیح  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ، گویا  $Q = \{\frac{m}{n} | m, n \in Z, n \neq 0\}$

مجموعه اعدادی که نتوانیم آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح بنویسیم مانند  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $\frac{1}{\sqrt{666}}$ ، ...

$Q'$  اعداد گنگ  $(\mathbb{R} - Q)$

اعداد حقیقی:  $\mathbb{R} = Q \cup Q'$

رابطه بین مجموعه‌های بالا به صورت  $N \subset W \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$  می‌باشد.

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۲)

الف)  $(Z \cup W) \cap Q = (W - N) \cup Z$

می‌دانیم اگر  $A \subset B$  باشد، آن‌گاه:  $A \cup B = B$  و  $A \cap B = A$  در نتیجه خواهیم داشت:

الف)  $(Z \cup W) \cap Q = Z \cap Q = Z$ ،  $(W - N) \cup Z = \{0\} \cup Z = Z$

## بازه‌ها

۴ نوع بازه برای نمایش مجموعه‌هایی وجود دارد که همگی آن‌ها زیرمجموعه  $\mathbb{R}$  هستند:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

**نکته:** هر مجموعه مثل  $\mathbb{R} - \{a\}$  را می‌توانیم به صورت  $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$  نیز نمایش دهیم. مثلاً  $\mathbb{R} - \{2\}$  برابر است با  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ .

**مثال:** با فرض آن‌که  $A = (-\infty, -4)$ ،  $B = [-5, 6]$  و  $C = [0, +\infty)$  حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: (مشابه کار در کلاس صفحه ۵)

الف)  $(A \cup B) \cap C = (A - B) \cup C$



الف)  $A \cup B = (-\infty, 6] \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (-\infty, 6] \cap [0, +\infty) = [0, 6]$

برای محاسبه  $A - B$  باید عضوهایی مشترک  $A$  و  $B$  را از  $A$  حذف کرده، آن‌چه از  $A$  باقی می‌ماند  $A - B$  است، به عبارت دیگر  $A - B = A - (A \cap B)$ .

ب)  $A - B = (-\infty, -5) \Rightarrow (A - B) \cup C = (-\infty, -5) \cup [0, +\infty)$

جواب به دست آمده را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت.

### تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

در حالت کلی تعداد اعضای مجموعه  $A \cup B$  از فرمول زیر به دست می‌آید:  
منظور از  $n$  تعداد اعضا می‌باشد.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

دقت کنید اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، آن‌گاه  $n(A \cap B) = 0$  خواهد بود. ضمناً مجموعه  $A \cap B$  شامل عضوهایی است که هم در  $A$  و هم در  $B$  باشند ولی  $A \cup B$  شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  قرار دارند. (یا  $A$  یا  $B$  هر دو)  
**مثال:** در یک گروه ۳۱ نفر حضور دارند. ۱۸ نفر آن‌ها به فوتبال و ۷ نفر به والیبال علاقه دارند. اگر ۲ نفر هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه‌مند باشند، چند نفر حداقل به یکی از ورزش‌های فوتبال یا والیبال علاقه دارند؟

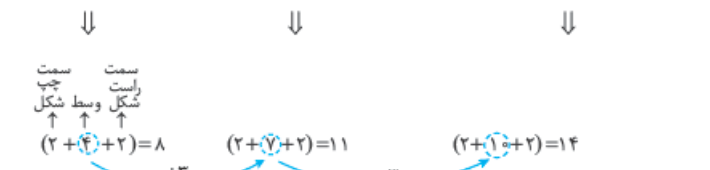
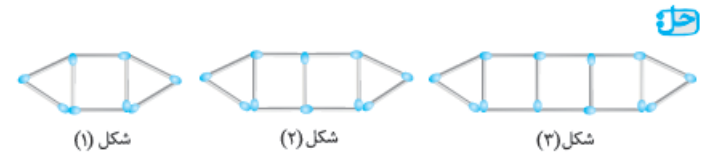
(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱)

**حل:**  $A$  را مجموعه علاقه‌مندان به فوتبال و  $B$  را مجموعه علاقه‌مندان به والیبال می‌نامیم؛ لذا  $n(A) = 18$ ،  $n(B) = 7$  و  $n(A \cap B) = 2$  بنابراین خواهیم داشت:  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 18 + 7 - 2 = 23$

### الگو

در این بخش معمولاً چند شکل دنباله‌دار (مرتبط با هم) به ما داده می‌شود و باید با توجه به نظمی که در شکل‌ها می‌بینیم، نحوه تکمیل شدن شکل‌ها را بررسی کنیم تا قانون مربوط به آن الگو را کشف کنیم. در نهایت باید بتوانیم جمله عمومی الگو را بنویسیم. به کمک این جمله عمومی، می‌توانیم مقدار هر جمله دلخواه از الگو را به دست آوریم. (جمله عمومی را با  $a_n$ ،  $b_n$ ،  $c_n$ ، ... نمایش می‌دهیم.)

**مثال:** با توجه به شکل‌های زیر، جمله عمومی ( $a_n$ ) الگو را به دست آورده (یعنی شکل  $n$ م چند چوب‌کبریت دارد). سپس مشخص کنید شکل دهم چند چوب‌کبریت دارد؟ (مقدار  $a_{10}$  چه قدر است؟)



ملاحظه می‌کنید که هر ۲ تا در تمام شکل‌ها ثابت‌اند ولی اعداد وسط ۲ تا ۳ تا ۲ تا زیاد می‌شوند.

لذا: جمله عمومی  $a_n = [2 + (3n - 1) + 2] = 3n + 5$

دقت کنید که در جمله عمومی،  $n$  همیشه اعداد طبیعی را اختیار می‌کند. اگر در  $a_n = 3n + 5$  به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳ را قرار دهیم به جواب‌های ۸، ۱۱، ۱۴ می‌رسیم. (همان تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل‌های اول، دوم و سوم)

حال برای محاسبه  $a_{10}$  کافی است به جای  $n$  عدد ۱۰ را قرار دهیم:  
تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل دهم:  $a_{10} = 3(10) + 5 = 35$

**الگوی خطی:** در مثال قبل دیدید که اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۳ بود. به این‌گونه الگوها که اختلاف هر دو جمله متوالی آن‌ها، عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌گوییم و جمله عمومی آن‌ها  $a_n = kn + p$  می‌باشد. ( $k, p \in \mathbb{R}$ )

شماره جملات	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...
مقدار جملات	۸	۱۱	۱۴	...
		+۳	+۳	

ضمناً اختلاف هر دو جمله متوالی، ضریب  $n$  می‌باشد. در مثال قبلی دیدید که  $a_n = 3n + 5$  بود و تعداد چوب‌کبریت‌ها نیز ۳ تا ۳ تا زیاد شدند.

**مثال:** در یک الگوی خطی، جملات سوم و بیستم به ترتیب ۲ و ۳۶ هستند.

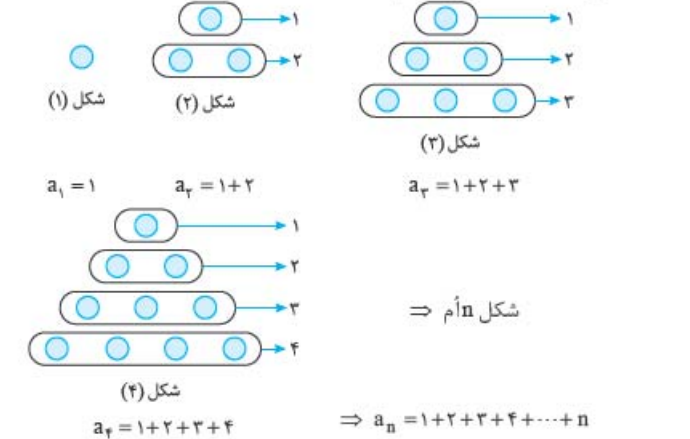
جمله عمومی الگو را به دست آورید. (مشابه مثال صفحه ۱۶)

**حل:** جمله عمومی را به صورت  $a_n = kn + p$  در نظر می‌گیریم. (یا می‌توانید به صورت

$$a_n = kn + p \Rightarrow \begin{cases} 3k + p = 2 \\ 20k + p = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} k = 2, p = -4$$

پس جمله عمومی این الگو برابر  $a_n = 2n - 4$  می‌باشد. (بعبارتی ببینید که الگوهای فنی، همان دنباله حسابی هستند.)

**الگوهای غیرخطی:** گاهی اوقات جملات یک الگو با یک مقدار ثابت، زیاد یا کم نمی‌شوند؛ یعنی با الگوهای غیرخطی مواجه‌ایم. مثلاً الگوی زیر غیرخطی می‌باشد، حال جمله عمومی‌اش را به دست می‌آوریم:



ضمناً به عنوان یک فرمول رابطه  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  را حفظ کنید، پس در این مثال می‌توان گفت:

پس الگوی فوق، خطی نیست زیرا در  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$  توان ۲ هم برای  $n$  وجود دارد.

### دنباله

اگر یک سری از اعداد به طور متوالی پشت سر هم قرار گیرند، یک دنباله ایجاد می‌شود. پس اعداد مربوط به الگوها هم دنباله محسوب می‌شوند. به هر یک از این اعداد، جملات دنباله می‌گوییم. البته دقت کنید که در امتحانات مدارس همیشه شکل به شما داده نمی‌شود، گاهی اوقات چند جمله اول دنباله داده می‌شود و باید جمله عمومی آن را حدس بزنید.

**مثال:** در هر قسمت، سه جمله بعدی دنباله را نوشته و جمله عمومی آن را حدس

بزنید: (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۹)

الف)  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$

ب)  $0/1, 0/01, 0/001, \dots$

ج)  $-1, 8, -27, 64, \dots$

د)  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \dots$

ه) جمله عمومی دنباله:

الف)  $a_n = \sqrt{n}$

ب)  $0/1, 0/01, 0/001, 0/0001, 0/00001, 0/000001, 0/0000001, \dots$

ج)  $a_n = 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

د)  $-1, 8, -27, 64, \dots$

جملات را می‌توان این‌جوری فرض کرد:  $(-1)^2, 2^3, -(3)^2, 4^3, -(5)^2, 6^3, -(7)^2, \dots$   
جمله سوم جمله اول، جمله چهارم جمله دوم





### دنباله هندسی

در این دنباله تمام جملات در یک عدد ثابت به نام قدرنسبت ضرب می‌شوند. مانند  $2, 6, 18, \dots$  قدرنسبت دنباله هندسی را معمولاً با  $r$  یا  $q$  نمایش می‌دهیم و برابر است با نسبت جملات متوالی. البته برای سادگی قدرنسبت را از رابطه  $r = \frac{a_r}{a_{r-1}}$  به دست می‌آوریم. برای یافتن جمله عمومی به جدول زیر دقت کنید.

جملات	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$	$a_n$
بازشده جملات	$a$	$a \cdot r$	$a \cdot r^2$	$a \cdot r^3$	$\dots$	$a \cdot r^{n-1}$
		$\times r$	$\times r$	$\times r$	$\dots$	$\times r$

پس جمله عمومی دنباله هندسی  $a_n = a \cdot r^{n-1}$  یا  $a_n = a \cdot q^{n-1}$  است؛ لذا خیلی سریع می‌توان گفت:  $a_{10} = a \cdot r^9$ ,  $a_{100} = a \cdot r^{99}$ ,  $a_{1000} = a \cdot r^{999}$ .

**مثال:** در دنباله زیر، جمله عمومی و جمله هشتم را به دست آورید. کدام جمله این دنباله برابر  $-40$  است؟  $5, -10, 20, \dots$

**حل:** جمله عمومی:  $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$ ,  $a_n = ar^{n-1} = 5 \times (-2)^{n-1}$

$n=8 \rightarrow a_8 = 5(-2)^{8-1} = 5(-2)^7 = -640$

$a_n = 5 \times (-2)^{n-1} \xrightarrow{a_n = -40} -40 = 5 \times (-2)^{n-1} \Rightarrow -8 = (-2)^{n-1}$

$\Rightarrow (-2)^2 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n-1 = 2 \Rightarrow n = 3$

**نکته:** در سؤالاتی که دو جمله دلخواه از دنباله هندسی به ما داده می‌شود هر یک از آن‌ها را با توجه به جمله عمومی باز کرده سپس طرفین دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم تا  $r$  پیدا شود. با جای‌گذاری  $r$  در یکی از روابط  $a$  هم پیدا می‌شود. (همیشه پوتره رابطه‌ای که توان در اون بزرگ‌تره رو در رریف بالا قرار بدین.)

**مثال:** در یک دنباله هندسی، جملات سوم و ششم به ترتیب ۱۵ و ۴۰۵ است. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۲۶)

**حل:**

با استفاده از روابط  $\frac{a_6}{a_3} = \frac{405}{15} = 27$  و  $\frac{a_6}{a_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = r^3$  داریم  $r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

$\Rightarrow r^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 3^2 \Rightarrow r = 3$

$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } a \times r^2 = 15} a \times 3^2 = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{9}$

$\Rightarrow a_n = a \cdot r^{n-1} = \frac{15}{9} \times 3^{n-1}$

**نکته:** واسطه هندسی بین اعداد  $x$  و  $y$  برابر است با  $\pm \sqrt{xy}$  (به  $\sqrt{xy}$  واسطه هندسی مثبت و به  $-\sqrt{xy}$  واسطه هندسی منفی می‌گوییم)؛ یعنی اعداد  $(x, +\sqrt{xy}, y)$  و  $(x, -\sqrt{xy}, y)$  تشکیل ۲ دنباله هندسی می‌دهند؛ مثلاً واسطه هندسی مثبت بین ۴ و ۱۶ برابر است با:  $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$  ضمناً گاهی اوقات، باید چند واسطه هندسی بین دو عدد قرار دهیم که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم.

**مثال:** بین دو عدد  $-5$  و  $160$  چهار واسطه هندسی قرار دهید. (جمله اول  $-5$  است.) (مشابه کار در کلاس صفحه ۲۶)

$-5, \dots, \dots, \dots, \dots, 160$   
 $\downarrow$  جمله اول  $a$   $\downarrow$   $a_5$

$a_5 = 160 \Rightarrow ar^4 = 160 \xrightarrow{(a=-5)} -5 \times r^4 = 160$

$\Rightarrow r^4 = \frac{160}{-5} = -32 \Rightarrow r^4 = (-2)^4 \Rightarrow r = -2$

$\times(-2) \quad \times(-2) \quad \times(-2) \quad \times(-2)$   
 $-5, 10, -20, 40, -80, 160$

ملاحظه می‌کنید که اولاً علامت‌ها یک در میان  $(-)$  و  $(+)$  هستند، پس فعلاً  $(-1)^n$  را برای علامت‌ها در نظر می‌گیریم. ثانیاً شماره هر جمله به توان ۳ رسیده است؛ یعنی مثلاً در جمله چهارم، ۴ به توان ۳ رسیده پس در جمله  $n$ ام،  $n$  به توان ۳ می‌رسد ( $n^3$ ) حال خواهیم داشت:

### دنباله حسابی

دنباله‌ای است که در آن، به تمام جملات مقداری ثابت اضافه یا از تمام جملات مقداری ثابت کم می‌شود؛ مانند دنباله  $1, 3, 5, 7, \dots$  یا  $10, 7, 4, \dots$  (همان الگوهای خطی هستند که خواندیم) به این عدد ثابت قدرنسبت می‌گوییم و معمولاً با  $d$  نمایش می‌دهیم. (در مثال اول  $d = 2$  و در بعدی  $d = -3$  بود.) اگر جمله اول را با  $a$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

جملات	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$	$a_n$
بازشده جملات	$a$	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$\dots$	$a+(n-1)d$
		$+d$	$+d$	$+d$	$\dots$	$+d$

پس جمله عمومی (جمله  $n$ ام) دنباله حسابی به صورت  $a_n = a + (n-1)d$  می‌باشد. (به جای  $a$  و  $a_n$  می‌توانید از  $t_1$  و  $t_n$  هم استفاده کنید.) پس خیلی سریع می‌توان گفت:

$a_{10} = a + 9d$ ,  $a_{100} = a + 99d$ ,  $a_{1000} = a + 999d$

**مثال:** جمله عمومی دنباله زیر را به دست آورده و به کمک آن  $a_7$  و  $a_{10}$  را محاسبه کنید. کدام جمله از این دنباله برابر ۲۰۰ است؟  $-6, -4, -2, \dots$

**حل:** در دنباله حسابی، هر دو جمله متوالی را که از هم کم کنیم،  $d$  به دست می‌آید ولی راحت‌تر است که از  $d = a_2 - a_1$  استفاده کنیم:

$d = a_2 - a_1 = (-4) - (-6) = 2$

جمله عمومی  $a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{\frac{a=-6}{d=2}} a_n = -6 + (n-1)(2) = -6 + 2n - 2 = 2n - 8$

$n=10 \rightarrow a_{10} = 2(10) - 8 = 12$

$n=200 \rightarrow a_{200} = 2(200) - 8 = 392$

$a_n = 2n - 8 \xrightarrow{a_n = 200} 200 = 2n - 8 \Rightarrow 2n = 208 \Rightarrow n = 104$

پس جمله صد و چهارم برابر با ۲۰۰ می‌باشد.

**مثال:** در یک دنباله حسابی جملات سوم و نهم به ترتیب ۱۱ و ۲۳ هستند. جمله عمومی را به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۶)

**حل:**

$\begin{cases} a_3 = 11 \\ a_9 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 11 \\ a + 8d = 23 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 7, d = 2$

$a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{\frac{a=7}{d=2}} a_n = 7 + (n-1) \times 2 = 7 + 2n - 2 = 2n + 5$

**نکته:** واسطه حسابی بین دو عدد  $x$  و  $y$  برابر است با  $\frac{x+y}{2}$ . یعنی اعداد  $(x, \frac{x+y}{2}, y)$  یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. مثلاً واسطه حسابی بین  $-1$  و  $5$  برابر است با:  $\frac{5-1}{2} = 2$ . ضمناً در بعضی از سؤالات از شما خواسته می‌شود بین دو عدد  $x$  و  $y$  چند عدد دیگر (چند واسطه حسابی) طوری قرار دهید که تمامی این اعداد، تشکیل دنباله حسابی دهند که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم. (برای این کار یک فرمول پوتره دره ولی پهن کتاب گفته ما هم نمی‌گیریم.)

**مثال:** بین دو عدد ۳ و ۲۷ پنج عدد طوری قرار دهید که با این دو عدد، تشکیل دنباله حسابی دهند. (مشابه کار در کلاس صفحه ۲۳)

**حل:**

$3, \dots, \dots, \dots, \dots, 27$   
 $\downarrow$  جمله اول  $a$   $\downarrow$  جمله هفتم

$a_7 = 27 \Rightarrow a + 6d = 27 \xrightarrow{a=3} 3 + 6d = 27 \Rightarrow 6d = 24 \Rightarrow d = 4$

$\xrightarrow{+4} 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27$   
 واسطه‌های حسابی