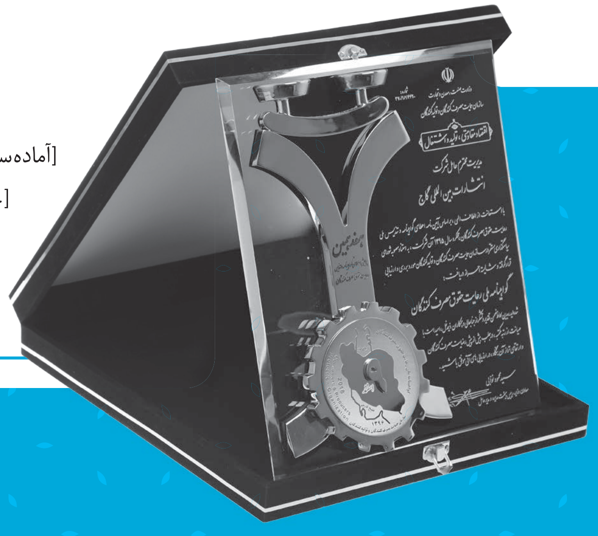
بسم الله الرحمن الرحيم

سرشناسه: خوشنویسان، محمدمهدی
عنوان: ریاضی دهم
مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین‌المللی گاج؛ ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری: ۱۶۸ ص نمودار.
فروست:مجموعه کتاب‌های خط ویژه
شابک:۲-۸۶۵-۳۵۹-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر.
شناسه افزوده: محسنی، ابراهیم
شمارهٔ کتابشناسی ملی: ۵۱۶۱۸۲۷

شناسنامه

[ناشر: انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی: مهندس محمد جوکار]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های: خط ویژه]
[مدیر تألیف و نظارت بر محتوا: مهندس علیرضا شعبانی نصر]
[عنوان کتاب: ریاضی دهم]
[مؤلفان: محمدمهدی خوشنویسان - ابراهیم محسنی]
[ویراستاران: محمدحسن دیندارلو -علی عیوضی - سجاد همایون‌زاده]
[هماهنگی و امور اجرایی: سحر رجبعلیان]
[ویرایش فنی: نسرین یوسفی قهی]
[مدیر واحد فنی و گرافیک: حسن حاجی‌محمدی]
[صفحه‌آرایی: سیده فاطمه دیوبند]
[اجرا: سیما مهجور - نفیسه کلیج]
[رسام: گزیزه علی‌پور]
[آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: گاج] + [لیتوگرافی: گاج]
[چاپ‌خانه و صحافی: گاج] + [ناظر چاپ: علی مزرعتی]
[نوبت چاپ: اول (۹۸-۱۳۹۷)]
[شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه]
[قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان]



فهرست

فصل اوّل: مجموعه، الگو و دنباله **۷**
درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۸
درس دوم: متمم یک مجموعه ۱۰
درس سوم: الگو و دنباله ۱۵
درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی ۲۰
فصل دوم: مثلثات **۳۳**
درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی ۳۴
درس دوم: دایرهٔ مثلثاتی ۴۳
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۴۹
فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری **۵۷**
درس‌های اوّل و دوم: ریشه و توان - ریشهٔ nام ۵۸
درس سوم: توان‌های گویا ۶۰
درس چهارم: عبارت‌های جبری ۶۲
فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها **۷۳**
درس اوّل: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۷۴
درس دوم: سهمی ۸۲
درس سوم: تعیین علامت ۸۵
فصل پنجم: تابع **۹۸**
درس اوّل: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۹۹
درس دوم: دامنه و برد توابع ۱۰۲
درس سوم: انواع توابع ۱۰۷
فصل ششم: شمارش بدون شمردن **۱۱۷**
درس اوّل: شمارش ۱۱۸
درس دوم: جایگشت ۱۲۲
درس سوم: ترکیب ۱۲۸
فصل هفتم: آمار و احتمال **۱۳۵**
درس اوّل: احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۱۳۶
درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ۱۴۹
درس سوم: متغیر و انواع آن ۱۵۰
آزمون‌های جامع **۱۵۲**

» درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

» درس دوم: متمم یک مجموعه

» درس سوم: الگو و دنباله

» درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

فصل اوّل:

مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های اعداد

درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در سال‌های گذشته با زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$: Real) آشنا شدیم. این مجموعه‌ها عبارت‌اند از:

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$: Natural): $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

۲) مجموعهٔ اعداد حسابی (W : Whole): $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

توجه همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این دو مجموعه فقط در عضو صفر با هم فرق دارند. یعنی $W-\mathbb{N}=\{۰\}$ می‌باشد که مجموعه‌ای تک‌عضوی است.

۳) مجموعهٔ اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$: Zahlen): این مجموعه شامل اعداد حسابی و قرینهٔ آن‌ها می‌باشد. $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

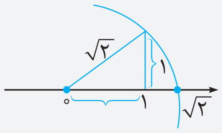
واضح است که $\mathbb{Z}-W=\{-۱,-۲,-۳,...\}$ و $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{۰,-۱,-۲,...\}$ می‌باشد، همین‌طور داریم: $\boxed{\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}}$

۴) مجموعهٔ اعداد گویا ($\mathbb{Q}$: Quotient): اجتماع اعداد صحیح و اعداد کسری به شکل $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$ را مجموعهٔ اعداد گویا می‌نامند.

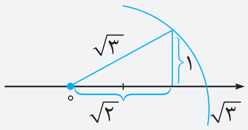
اعداد گویا به دو دستهٔ اعداد اعشاری با پایان مانند $\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$ و اعداد متناوب (اعشار با تکرار) مانند $\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶...$ دسته‌بندی می‌شوند.

۵) مجموعهٔ اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$): هر عدد حقیقی که گویا نباشد را گنگ می‌نامند (Complement Q)، پس $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ مانند اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، π و ...

نکته با توجه به اینکه اعداد گنگ اعشار بی‌پایان و غیرتکراری دارند مانند... $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴۱۴۲$، برای نشان دادن این اعداد روی محور از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم. برای نشان دادن عدد $\sqrt{۲}$ روی محور اعداد، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلع قائم ۱ رسم می‌کنیم، بنابراین طول وتر $\sqrt{۲}$ می‌شود. حال از مبدأ مختصات دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی کمان رسم شده با محور اعداد بیانگر عدد $\sqrt{۲}$ است.



برای نشان دادن $\sqrt{۳}$ نیز کافی است از مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمهٔ $\sqrt{۲}$ و ۱ استفاده کنیم.



۱ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ ۲) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ۴) $W\subseteq\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

«گزینهٔ ۴»

پاسخ: هر عدد حسابی، عددی گویاست و در نتیجه گنگ نیست.

بازه‌ها

به زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی که مشخص کنندهٔ قسمتی از محور اعداد باشد، فاصله یا بازه می‌گویند.

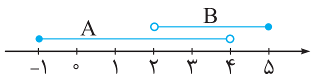
بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، یعنی $\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ و بازهٔ باز (a,b)، یعنی $\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ و بازهٔ نیم‌باز $(a,b]$، یعنی $\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$ و برای $\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ از بازهٔ $(a,+\infty)$ استفاده می‌کنیم.

۲ اگر $A=[-۱,۴)$ و $B=(۲,۵]$، آن‌گاه مجموعهٔ $B-A$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

«گزینهٔ ۲»

پاسخ: مجموعه‌ها را روی محور اعداد نشان می‌دهیم:



$B-A=[۴,۵]$

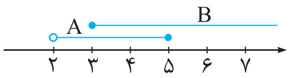
بازهٔ $[۴,۵]$ شامل دو عدد صحیح $\{۴,۵\}$ می‌باشد.

۳ حاصل $(۲,۵]-[۳,+\infty)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

«گزینهٔ ۱»

پاسخ: بازه‌های $A=(۲,۵]$ و $B=[۳,+\infty)$ را روی محور نشان می‌دهیم و تفاضل این دو را به‌دست می‌آوریم:



$(۲,۵]-[۳,+\infty)=(۲,۳)$

بازهٔ $(۲,۳)$ هیچ عدد صحیحی ندارد.

۴ اگر $A=[-3,0]$ و $A\cup B=[-5,3]$، آن‌گاه کوچک‌ترین مجموعهٔ B دارای چند عضو است؟

گزینهٔ «۲»

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ: کوچک‌ترین مجموعهٔ B، مجموعه‌ای است که با A اشتراکی نداشته باشد، به عبارت دیگر: $B=[-5,3]-[-3,0]$

پس $B=[-5,-3)\cup(0,3]$ که شامل اعداد صحیح $\{-5,-4,1,2,3\}$ می‌باشد.

۵ طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که شامل یک عدد صحیح می‌باشد، کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: بزرگ‌ترین بازه‌ای که شامل یک عدد صحیح مانند a باشد بازهٔ $(a-1,a+1)$ است که دارای طول ۲ می‌باشد.

۶ اگر $[-3,12]=[b,10]\cup[-2,a]$ باشد، آن‌گاه $-2b+a$ برابر با کدام است؟

گزینهٔ «۴»

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۸

پاسخ: با توجه به اینکه $A_1\cup A_2=A_2\cup A_1$، پس $[-3,12]=[-2,a]\cup[b,10]=[-2,a]\cup[b,10]$، بنابراین $b=-3$ و $a=12$ می‌باشد و در نتیجه داریم: $-2b+a=-2(-3)+12=18$

۷ اگر $A_n=(\frac{-2}{n},\frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعهٔ $(A_3\cup A_6)-A_3$ برابر با کدام بازه است؟

گزینهٔ «۴»

۱) $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۲) $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A_3 و A_6 را با توجه به A_n تشکیل می‌دهیم:

$$A_3=(-\frac{2}{3},\frac{3-2}{3})=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}),A_6=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

بنابراین:

$$(A_3\cup A_6)-A_3=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})-(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})=[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر مجموعه‌ای تعداد محدودی عضو داشته باشد آن را متناهی می‌گویند و اگر تعداد اعضای یک مجموعه بی‌نهایت باشد آن را نامتناهی می‌گویند. به عبارت دیگر مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد متناهی است و در غیر این صورت آن را نامتناهی گویند.

نکات

۱) مجموعه‌های اعداد $\mathbb{Q},\mathbb{W},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}'$ نامتناهی می‌باشند و هم‌چنین در یک بازه با طول محدود تعداد اعداد متعلق به مجموعه‌های $\mathbb{W},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ متناهی و تعداد اعداد متعلق به مجموعه‌های $\mathbb{R},\mathbb{Q}',\mathbb{Q}$ نامتناهی است.

۲) مجموعهٔ تهی $\varnothing=\{\}$ عضوی ندارد و متناهی است، پس برای مجموعهٔ دلخواه A داریم: $\varnothing\cap A=\varnothing$ و $\varnothing\cup A=A$

۳) اگر A و B متناهی باشند، آن‌گاه $A\cup B$ ، $A\cap B$ و $A-B$ متناهی‌اند.

۴) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، آن‌گاه $A\cup B$ نامتناهی است، اما در مورد $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ نمی‌توان نظر داد.

۵) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن‌گاه $A\cap B$ و $B-A$ متناهی و $A\cup B$ و $A-B$ نامتناهی است.

۸ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

گزینهٔ «۴»

۱) اعداد گویای بازهٔ $(0,200)$
۲) اعداد گنگ بازهٔ $(-1,100)$
۳) اعداد گویای بازهٔ $(\frac{1}{2},1)$
۴) $(A-B)\cup(B-A)$ اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}\cup\{-5\}$

پاسخ:

$$A=\mathbb{W}=\{0,1,2,3,...\},B=\{-5,1,2,3,4,...\}\Rightarrow(A-B)\cup(B-A)=\{0\}\cup\{-5\}=\{0,-5\}$$

که مجموعه‌ای دو عضوی و متناهی است.

۹ کدام مجموعهٔ زیر متناهی است؟

گزینهٔ «۳»

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد
۲) مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ $(1,2)$
۳) مجموعهٔ سنگ‌ریزه‌های کرهٔ زمین
۴) مجموعهٔ اعداد $(\mathbb{N}\cup\mathbb{Z})\cap\mathbb{W}$

پاسخ: اگر چه سنگ‌ریزه‌های کرهٔ زمین بسیار زیاد هستند، ولی با داشتن امکانات کافی و صرف وقت می‌توان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد.

۱۰ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟ «گزینهٔ ۴»

۱) مجموعه انسان‌های روی کرهٔ زمین
۲) مجموعهٔ مولکول‌های کل یک مدرسه
۳) بازهٔ $((\circ,+\infty)\cup(-\infty,۲))\cap(۲,۵\circ\circ\circ\circ\circ)$
۴) مجموعهٔ تمام دایره‌ها به مرکز مبدأ مختصات

پاسخ: مجموعه‌های ذکر شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هرچند که تعداد اعضای بسیار زیادی دارند، اما متناهی هستند، ولی در گزینهٔ (۴) بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ مختصات می‌توان رسم کرد.

۱۱ اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعهٔ اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ متناهی است؟ «گزینهٔ ۳»

۱) $A-B$
۲) $\mathbb{Z}-A$
۳) $A\cap B$
۴) $A\cup B$

پاسخ: اعضای مجموعه A و B را می‌نویسیم:
$A=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$ $\quad$ $B=\{-۹۹,-۹۸,...,۹۸,۹۹\}$

واضح است که A نامتناهی و B متناهی است. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): با توجه به نامتناهی بودن A، اگر تعدادی عضو (اعضای B) را از آن برداریم، مجموعهٔ باقی‌مانده یعنی $A-B$ نامتناهی می‌باشد.

گزینهٔ (۲): $\mathbb{Z}-A=\{...,-۲,-۱,\circ,۱,۲,\cancel{۳},۴,۵,\cancel{۶},...\}=\{...,-۲,-۱,\circ,۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱\circ,...\}$

ملاحظه می‌کنید که $\mathbb{Z}-A$ نیز نامتناهی است.

گزینهٔ (۳): اشتراک یک مجموعهٔ نامتناهی (A) با مجموعهٔ متناهی (B) مجموعه‌ای متناهی است. $A\cap B=\{۳,۶,۹,...,۹۹\}$

گزینهٔ (۴): اجتماع یک مجموعهٔ نامتناهی (A) با مجموعهٔ متناهی (B) مجموعه‌ای نامتناهی است.

$A\cup B=\{-۹۹,-۹۸,...,\circ,۱,۲,۳,۴,...,۹۹,۱\circ۲,۱\circ۵,..\}$

۱۲ کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟ «گزینهٔ ۴»

۱) $\{\mathbb{Z}\}$
۲) مجموعهٔ اعداد اول سه‌رقمی
۳) $\varnothing$
۴) مجموعهٔ اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[\circ,۱]$

پاسخ: گزینهٔ (۱) مجموعه‌ای تک‌عضوی است، در نتیجه متناهی می‌باشد. گزینهٔ (۲) مجموعه‌ای با تعداد عضوهای محدود و طبیعی می‌باشد، پس متناهی است و گزینهٔ (۳) مجموعه‌ای صفرعضوی است، بنابراین متناهی می‌باشد و فقط مجموعهٔ اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[\circ,۱]$ دارای بی‌شمار عضو است.

۱۳ اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی و C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟ «گزینهٔ ۱»

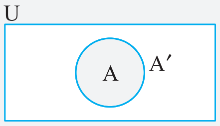
۱) $(C-A)\cup B$
۲) $(A\cup B)\cap C$
۳) $(A-C)\cup B$
۴) $(A\cap B)\cap C$

پاسخ: می‌دانیم اجتماع یک مجموعهٔ نامتناهی با یک مجموعهٔ متناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است. از طرفی چون C نامتناهی و A متناهی است، بنابراین $(C-A)$ نامتناهی می‌باشد؛ در نتیجه $(C-A)\cup B$ نامتناهی است. طبق نکات گفته شده، گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) متناهی می‌باشند.

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشد، مجموعهٔ مرجع می‌نامند و آن را با نماد U (Universal Set) نشان می‌دهند و اگر A زیرمجموعه‌ای از U باشد، آن‌گاه $U-A$ را متمم A می‌نامند و با A' نشان می‌دهند، پس:



$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$

همین‌طور داریم:

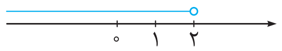
$(A')'=A\,,U'=\varnothing\,,\varnothing'=U$

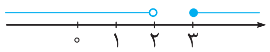
مثال آموزشی

متمم بازه‌های زیر را در $\mathbb{R}$ تعیین کنید و روی محور اعداد نشان دهید.

الف) $[۲,+\infty)$ $\quad$ ب) $[۲,۳)$ $\quad$ ج) $(-\infty,۳)\cup(۳,۵)\cup(۶,+\infty)$

پاسخ

الف) $(-\infty,۲)\Rightarrow$


ب) $(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)\Rightarrow$


ج) $\{۳\}\cup[۵,۶]\Rightarrow$


دنبالهٔ هندسی

دنبالهٔ هندسی: دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن (به جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. به این عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً با r نمایش می‌دهیم. دقت کنید که جملهٔ اول هم باید غیرصفر باشد.

اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی، a_1 و قدر نسبت آن r باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر هستند:

$$a_1 \xrightarrow{\times r} \underbrace{a_1r}_{\text{جملهٔ دوم}} \xrightarrow{\times r} \underbrace{a_1r^2}_{\text{جملهٔ سوم}} \xrightarrow{\times r} \underbrace{a_1r^3}_{\text{جملهٔ چهارم}} ,\ldots \Rightarrow \boxed{a_n=a_1.r^{n-1}}$$

به عنوان مثال: $a_{14}=a_1.r^{13}=a_{20}.r^{-6}=a_6.r^8=a_2.r^{12}$

در طرف دوم هر یک از تساوی‌های فوق، مجموع اندیس a و توان r برابر با ۱۴ است، به بیان دیگر در هر دنبالهٔ هندسی که در آن n و m اعدادی طبیعی هستند، داریم:

$$\boxed{a_n=a_m.r^{n-m}}$$
$n=m+(n-m)$

۹۵ در یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۲، حاصل $\frac{a_1\times a_7}{(a_2)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

گزینهٔ «۲»

پاسخ: از رابطهٔ $a_n=a_1.r^{n-1}$ داریم:

$$\frac{a_1\times a_7}{(a_2)^2}=\frac{a_1\times a_1r^6}{(a_1.r)^2}=\frac{a_1^2.r^6}{a_1^2.r^2}=r^4=(2)^4=16$$

۹۶ در یک دنبالهٔ هندسی $a_1.a_3.a_5=8a_5.a_6.a_7$، قدر نسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۴) $\sqrt[3]{2}$

گزینهٔ «۳»

پاسخ: از رابطهٔ $a_n=a_1.r^{n-1}$ داریم:

$$a_1.a_3.\cancel{a_5}=8\cancel{a_5}.a_6.a_7 \Rightarrow a_1.a_3=8a_6.a_7$$
$$\Rightarrow \cancel{a_1}.\cancel{a_1}r^2=8\cancel{a_1}r^5.\cancel{a_1}r^6 \Rightarrow r^2=8r^{11}\Rightarrow 1=8r^9\Rightarrow r^9=\frac{1}{8}\Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt[9]{8}}=\frac{1}{\sqrt[9]{2^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

۹۷ در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{2}{3^n}$، جملهٔ چهارم چند برابر جملهٔ ششم است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۹

گزینهٔ «۴»

پاسخ: کافی است در جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌جای n، شمارهٔ جملهٔ مورد نظر را جایگذاری کنیم.

$$\frac{a_4}{a_6}=\frac{\frac{2}{3^4}}{\frac{2}{3^6}}=\frac{3^6}{3^4}=3^2=9$$

۹۸ در یک دنبالهٔ هندسی، جملات چهارم و هفتم به ترتیب ۷ و ۵۶ می‌باشد. جملهٔ نهم کدام است؟

۱) $50\sqrt{2}$ ۲) $56\sqrt{2}$ ۳) ۲۰۴ ۴) ۲۲۴

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

$$a_4=7,\quad a_7=56\Rightarrow a_7=a_4.r^3\Rightarrow 56=7\times r^3\Rightarrow r^3=8\Rightarrow r=\sqrt[3]{8}=2$$
$$a_9=a_7.r^2=56\times 2^2=56\times 4=224$$

۹۹ در یک دنبالهٔ هندسی $a_2.a_3.a_4=8$، حاصل $a_1.a_5$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶

گزینهٔ «۱»

پاسخ:

$$a_2.a_3.a_4=8\Rightarrow a_1r.a_1r^2.a_1r^3=8\Rightarrow a_1^3.r^6=8\Rightarrow (a_1.r^2)^3=2^3\Rightarrow a_1r^2=2\,(*)$$
$$a_1.a_5=a_1.a_1.r^4=a_1^2.r^4=(a_1r^2)^2\xRightarrow{\text{طبق رابطهٔ }(*)}(2)^2=4$$

۱۰۰ در یک دنبالهٔ هندسی، قدر نسبت برابر $\frac{1}{2}$ است. مجموع جملات پنجم و هفتم چند برابر مجموع جملات هشتم و دهم است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

$$\frac{a_5+a_7}{a_8+a_{10}}=\frac{a_1r^4+a_1r^6}{a_1r^7+a_1r^9}=\frac{a_1r^4(1+r^2)}{a_1r^7(1+r^2)}=\frac{1}{r^3}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^3}=8$$

۱۰۱ در دنبالهٔ هندسی $2^{\sqrt{2}}, 2^{3\sqrt{2}}, 2^{5\sqrt{2}},\ldots$، حاصل $\frac{a_9+a_5}{a_3+a_7}$ کدام است؟

۱) $2^{4\sqrt{2}}$ ۲) 2^8 ۳) 2^4 ۴) $2^{2\sqrt{2}}$

گزینهٔ «۱»

پاسخ: ابتدا قدر نسبت دنبالهٔ هندسی داده شده را می‌یابیم:

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2^{3\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}=2^{2\sqrt{2}}\Rightarrow \frac{a_9+a_5}{a_3+a_7}=\frac{a_1r^8+a_1r^4}{a_1r^2+a_1r^6}=\frac{\cancel{a_1}r^4(\cancel{r^4+1})}{\cancel{a_1}r^2(\cancel{1+r^4})}=\frac{r^4}{r^2}=r^2=(2^{2\sqrt{2}})^2=2^{4\sqrt{2}}$$

۱۰۲ در یک دنبالهٔ هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است. اگر جملهٔ سیزدهم ۹ باشد، جملهٔ پانزدهم کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

$$\begin{cases}a_8.a_{20}=108\\a_{13}=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1r^7.a_1r^{19}=108\\a_1r^{12}=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1^2.r^{26}=108\\a_1r^{12}=9\end{cases}\xrightarrow{\div}\frac{a_1^2.r^{26}}{a_1.r^{12}}=\frac{108}{9}\Rightarrow a_1r^{14}=12\Rightarrow a_{15}=12$$

۱۰۳ در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (تجربی داخل ۹۰)

گزینهٔ «۲»

پاسخ: جملهٔ وسط را a فرض می‌کنیم، در نتیجه جملهٔ قبلی $\frac{a}{r}$ و جملهٔ بعدی ar است، پس این سه جمله به صورت $\frac{a}{r},a,ar$ هستند، بنابراین داریم:

$$\text{حاصل ضرب سه جملهٔ متوالی}=216\Rightarrow\frac{a}{r}\times a\times ar=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$$

$$\text{مجموع سه جملهٔ متوالی}=19\Rightarrow\frac{a}{r}+a+ar=19\xrightarrow{a=6}\frac{6}{r}+6+6r=19$$

$$\Rightarrow\frac{6}{r}+6r=13\xrightarrow{\times r}6+6r^2=13r\Rightarrow 6r^2-13r+6=0\Rightarrow(3r-2)(2r-3)=0\Rightarrow r=\frac{2}{3}\text{ یا }\frac{3}{2}$$

به ازای هر دو مقدار r به‌دست آمده، بزرگ‌ترین جمله برابر $6\times\frac{3}{2}=9$ و کوچک‌ترین جمله برابر $\frac{6}{\frac{3}{2}}=4$ می‌باشد، در نتیجه تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جمله برابر ۵ می‌باشد.

۱۰۴ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم و دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $5+2\sqrt{3}$ ۳) $5+4\sqrt{3}$ ۴) $7+4\sqrt{3}$

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

$$a_2,2a_5,a_8\xrightarrow[\text{هندسی‌اند}]{\text{جملات دنبالهٔ}}a_1r,2a_1r^4,a_1r^7\xrightarrow[\text{دنبالهٔ حسابی می‌دهند}]{\text{چون تشکیل}}2(2a_1r^4)=a_1r+a_1r^7\xrightarrow{\div a_1r}4r^3=1+r^6\Rightarrow r^6-4r^3+1=0$$

$$\text{فرض کنیم}: r^3=t\Rightarrow t^2-4t+1=0\Rightarrow t=2\pm\sqrt{3}\Rightarrow r^3=2\pm\sqrt{3}$$

اکنون با معلوم بودن r^3 نسبت بزرگ‌ترین این سه عدد (یعنی a_n) به کوچک‌ترین آن‌ها یعنی a_2 برابربست با:

$$\frac{a_8}{a_2}=\frac{a_1r^7}{a_1r}=r^6=(2\pm\sqrt{3})^2=7\pm4\sqrt{3}\xrightarrow[\text{به گزینه‌ها}]{\text{با توجه}}7+4\sqrt{3}\text{ ق ق}$$

واسطهٔ هندسی

نکته اگر a,b,c سه جملهٔ متوالی یا جملات متساوی‌الفاصله از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2=a.c$ و b را واسطهٔ هندسی بین a و c می‌نامیم.

و به طور کلی حاصل‌ضرب k جمله از یک دنبالهٔ هندسی با حاصل‌ضرب k جملهٔ دیگر از همان دنبالهٔ هندسی برابرند به شرطی که مجموع اندیس‌ها در دو طرف تساوی با هم برابر باشند.

به عنوان مثال: در دنبالهٔ هندسی ...,a_1,a_2,a_3 داریم: (الف) $a_6\times a_8=a_3\times a_{11}$

زیرا در هر طرف تساوی ۲ جمله داریم و مجموع اندیس‌ها در دو طرف با هم مساوی است. $(11+3=8+6)$

(ب) $a_3\times a_7\times a_{20}=a_5\times a_{10}\times a_{15}$ ، $a_{10}\times a_6\times a_{14}=a_{10}\times a_{10}\times a_{10}=(a_{10})^3$

در رابطهٔ بالا در هر طرف ۳ جمله داریم و مجموع اندیس‌ها در هر دو طرف با هم مساوی است.

تعداد جملات در دو طرف رابطهٔ روبه‌رو با هم مساوی نیستند، بنابراین رابطهٔ مقابل برقرار نمی‌باشد. (ج) $a_{10}\times a_6\times a_{14}\neq a_{10}\times a_{20}$

۱۰۵ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی باشند. چندمین جملهٔ این دنبالهٔ حسابی، صفراست؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۳»

پاسخ:

$$a_3,a_7,a_9\xrightarrow[\text{عددی‌اند}]{\text{جملات دنبالهٔ}}(a_1+2d),(a_1+6d),(a_1+8d)\xrightarrow[\text{هندسی می‌شوند}]{\text{جملات متوالی یک دنبالهٔ}}(a_1+6d)^2=(a_1+2d)(a_1+8d)$$

$$\Rightarrow a_1^2+12a_1d+36d^2=a_1^2+10a_1d+16d^2\Rightarrow 20d^2=-2a_1d\xrightarrow{\div 2d}10d=-a_1\Rightarrow a_1+10d=0\Rightarrow a_{11}=0$$

فصل دوم:

مثلثات

» درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

» درس دوم: دایرهٔ مثلثاتی

» درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

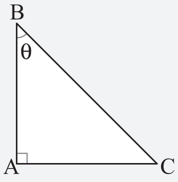
درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

تعریف علم مثلثات:

مثلثات شاخه‌ای از علم ریاضی است که به حل مثلث‌های مختلف می‌پردازد. منظور از حل مثلث، پیدا کردن اجزاء مجهول مثلث (مانند زوایا و یا طول اضلاع) به کمک قسمت‌های معلوم آن می‌باشد. اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم نیز از اهداف این علم می‌باشد. این علم در علوم مختلف مهندسی، نقشه‌برداری، جنگ، دریانوردی، نجوم، فیزیک و ... کاربرد فراوانی دارد.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

چهار نسبت مثلثاتی را با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

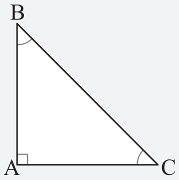


$$\sin\theta=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ }\theta}{\text{طول وتر}}=\frac{AC}{BC}\qquad \cos\theta=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ }\theta}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{BC}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ }\theta}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ }\theta}=\frac{AC}{AB}\qquad \cot\theta=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ }\theta}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ }\theta}=\frac{AB}{AC}$$

بنابراین از روابط فوق، می‌توان نتایج زیر را گرفت:

$$\boxed{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}}=\frac{AB}{AC}=\cot\theta}\ ,\quad \boxed{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}=\frac{AC}{AB}=\tan\theta}\ ,\quad \boxed{\tan\theta.\cot\theta=۱}\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{۱}{\cot\theta}}\ ,\quad \boxed{\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}}$$



نکته اگر جمع دو زاویه °۹۰ شود، آن دو زاویه را متمم هم گویند. به عنوان مثال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC دو زاویهٔ B و C متمم یکدیگرند. $(\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ)$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم:

در مثلث فوق برای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم:

$$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\cos\hat{B}=\sin\hat{C}\qquad \sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}\ ,\ \cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\sin\hat{B}=\cos\hat{C}$$

$$\cot\hat{B}=\frac{AB}{AC}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\cot\hat{B}=\tan\hat{C}\qquad \tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}\ ,\ \cot\hat{C}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\tan\hat{B}=\cot\hat{C}$$

بنابراین اگر $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=۹۰^\circ$ باشد، داریم: $\cot\alpha=\tan\beta\ ,\ \tan\alpha=\cot\beta\ ,\ \cos\alpha=\sin\beta\ ,\ \sin\alpha=\cos\beta$

به مثال‌های زیر دقت نمایید:

$$\begin{cases}۰^\circ+۹۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\sin۰^\circ=\cos۹۰^\circ,\cos۰^\circ=\sin۹۰^\circ,\tan۰^\circ=\cot۹۰^\circ,\cot۰^\circ=\tan۹۰^\circ\\ ۱^\circ+۸۹^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\sin۱^\circ=\cos۸۹^\circ,\cos۱^\circ=\sin۸۹^\circ,\tan۱^\circ=\cot۸۹^\circ,\cot۱^\circ=\tan۸۹^\circ\\ ۳۰^\circ+۶۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\sin۳۰^\circ=\cos۶۰^\circ,\cos۳۰^\circ=\sin۶۰^\circ,\tan۳۰^\circ=\cot۶۰^\circ,\cot۳۰^\circ=\tan۶۰^\circ\\ ۴۵^\circ+۴۵^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\sin۴۵^\circ=\cos۴۵^\circ,\tan۴۵^\circ=\cot۴۵^\circ\end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۳۰، °۴۵ و °۶۰: به کمک نکتهٔ مربوط به زوایای متمم، به سادگی می‌توان جدول زیر را به خاطر سپرد.

نسبت مثلثاتی / α	°۳۰	°۴۵	°۶۰
$\sin\alpha$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\alpha$	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

« درس اوّل و دوم: ریشه و توان – ریشهٔ nام
« درس سوم: توان‌های گویا
« درس چهارم: عبارت‌های جبری

فصل سوم:

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس‌های اول و دوم: ریشه و توان- ریشهٔ n ام

ریشهٔ n ام

ریشهٔ n ام: اگر n عددی طبیعی و مخالف ۱ باشد، ریشهٔ nام عدد a، عددی مانند b است به شرطی که $b^n = a$ باشد.

به عنوان مثال ریشهٔ سوم ۸ برابر ۲ است، زیرا $8 = 2^3$، اما از آن‌جایی که $81 = (3)^4$ و $81 = (-3)^4$، در نتیجه ریشهٔ چهارم ۸۱، ۳ و ۳- می‌باشد.

در واقع اگر n عددی زوج باشد و b ریشهٔ nام a $(a > 0)$ باشد، آن‌گاه b- هم ریشهٔ nام a است. اما اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه هر عدد حقیقی مانند a فقط یک ریشهٔ nام دارد.

نکات

۱) اگر n فرد باشد، هر عدد حقیقی فقط یک ریشهٔ nام دارد.

۲) اگر n زوج باشد، هر عدد حقیقی و مثبت، دو ریشهٔ nام دارد که قرینهٔ هم هستند. به بیان دیگر، ریشهٔ nام عدد مثبت a وقتی که n زوج است برابر با $\pm\sqrt[n]{a}$ می‌باشد.

۳) اگر n زوج باشد، برای اعداد منفی، ریشهٔ nام تعریف نمی‌شود و ریشهٔ nام مثبتِ عدد مثبتِ a را با نماد $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال ریشه‌های چهارم ۸۱ عبارت‌اند از ۳ و ۳-، اما $\sqrt[4]{81} = 3$ است.

۴) اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه:

الف) $a > a^2 > a^3 > \dots$ ب) $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots$

۵) اگر $a > 1$، آن‌گاه:

الف) $a < a^2 < a^3 < \dots$ ب) $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots$

۱ کدام مورد **نادرست** است؟

گزینهٔ «۴»

۱) هر عدد مثبت، دارای دو ریشهٔ چهارم است که قرینهٔ هم هستند.

۲) هر عدد مثبت، یک ریشهٔ سوم دارد.

۳) هر عدد منفی، یک ریشهٔ سوم دارد.

۴) هر عدد منفی، دارای دو ریشهٔ چهارم است که قرینهٔ هم هستند.

پاسخ: عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند. در واقع برای اعداد منفی، ریشهٔ زوج تعریف نمی‌شود.

۲ اگر $\sqrt[4]{a} > a$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $a^2 - a > 0$ ۲) $a > 1$ ۳) $a^3 > a^4$ ۴) $a > \sqrt[4]{2}$

پاسخ: چون $\sqrt[4]{a} > a$، پس $0 < a < 1$، در نتیجه $a^3 > a^4$.

۳ اگر $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد، کوچکترین عضو مجموعهٔ $A = \{\sqrt[3]{a}, \sqrt{a}, a, a^2\}$ کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) a ۲) a^2 ۳) $\sqrt{a}$ ۴) $\sqrt[3]{a}$

پاسخ: چون $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$، عددی بین صفر و یک است، در نتیجه:

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > a > a^2$$

بنابراین کوچکترین عضو مجموعهٔ A برابر با a^2 می‌باشد.

قوانین ریشه‌گیری

قوانین زیر در ریشه‌گیری مطرح می‌باشند:

۱)
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| \ ; & n \text{ زوج} \xRightarrow{\text{مثال}} \sqrt[6]{2^6} = |2| = 2 \\ a \ ; & n \text{ فرد} \xRightarrow{\text{مثال}} \sqrt[3]{(-7)^3} = -7 \end{cases}$$

۲) اگر حداقل یکی از فرجه‌های m یا n زوج باشد و $a > 0$، آن‌گاه:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \xRightarrow{\text{مثال}} \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

۳) اگر m و n هر دو فرد باشند، آن‌گاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \xRightarrow{\text{مثال}} \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$$

۴) اگر n زوج و $b > 0$، آن‌گاه:

$$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n . b} \ ; & a \geq 0 \xRightarrow{\text{مثال}} 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45} \\ -\sqrt[n]{a^n . b} \ ; & a < 0 \xRightarrow{\text{مثال}} -2\sqrt{4} = -\sqrt{(-2)^2 \times 4} = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$$

۵) اگر n فرد باشد، آن‌گاه: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n.b} \xrightarrow{\text{مثال}} ۲\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۲^۳\times ۴}=\sqrt[۳]{۳۲}$

۶) اگر n زوج باشد و a و b هر دو نامنفی باشند ($a\geq ۰$ و $b\geq ۰$)، آن‌گاه: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$

۷) اگر n فرد باشد، به ازای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۷}=\sqrt[۳]{۳۵}$

۸) اگر n زوج باشد و $a\geq ۰$ و $b>۰$، آن‌گاه: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۴]{\frac{۸}{۳}}=\frac{\sqrt[۴]{۸}}{\sqrt[۴]{۳}}$

۹) اگر n فرد باشد و $b\neq ۰$، آن‌گاه: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۳]{\frac{۷}{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲}}$

۴ حاصل $۳\sqrt[۴]{۰/۰۶۲۵}+\sqrt[۳]{-۰/۰۶۴}$ کدام است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۹

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

$$\begin{cases}\sqrt[۴]{۰/۰۶۲۵}=\sqrt[۴]{\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰}}=\sqrt[۴]{(\frac{۵}{۱۰})^۴}=\frac{۵}{۱۰}\\ \sqrt[۳]{-۰/۰۶۴}=\sqrt[۳]{-\frac{۶۴}{۱۰۰۰}}=\sqrt[۳]{(\frac{-۴}{۱۰})^۳}=-\frac{۴}{۱۰}\end{cases}\Rightarrow ۳\sqrt[۴]{۰/۰۶۲۵}+\sqrt[۳]{-۰/۰۶۴}=۳\times\frac{۵}{۱۰}-\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۱}{۱۰}=۱/۱$$

۵ اگر $x<۰$ باشد، حاصل $۲\sqrt[۳]{x^۳}+\sqrt[۴]{x^۴}$ کدام است؟

۱) $۳x$ ۲) x ۳) $-x$ ۴) $-۳x$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: چون $x<۰$، پس: $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|=-x$. از طرفی $\sqrt[۳]{x^۳}=x$، بنابراین: $۲\sqrt[۳]{x^۳}+\sqrt[۴]{x^۴}=۲x-x=x$

۶ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{(-x)^۳}+\sqrt{x^۲}+\sqrt{(-۲)^۲}$ وقتی که $x>۰$، کدام است؟

۱) $-۲x-۲$ ۲) -۲ ۳) $۲x+۲$ ۴) ۲

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

$$\sqrt[۳]{(-x)^۳}+\sqrt{x^۲}+\sqrt{(-۲)^۲}=-x+|x|+|-۲|\xrightarrow{x>۰\Rightarrow |x|=x}-x+x+۲=۲$$

۷ اگر $x=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ باشد، مقدار عددی $x^۲+\sqrt{۲}x-۳$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

$$x=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{(\sqrt{۲})^۲.\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{(\sqrt{۲})^۳}=\sqrt{۲}\Rightarrow x^۲+\sqrt{۲}x-۳=(\sqrt{۲})^۲+\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}-۳=۲+۲-۳=۱$$

۸ ساده‌شدهٔ عبارت $\sqrt[۳]{\sqrt{۸}-\sqrt{۲}}+\sqrt{\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt[۳]{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۶]{۲}$ ۲) $۳\sqrt[۶]{۲}$ ۳) $۴\sqrt[۶]{۲}$ ۴) $\sqrt[۶]{۲}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: می‌دانیم $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$، بنابراین داریم:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۸}-\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{۲}\ ،\ \sqrt{\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۳^۳\times ۲}+\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt{۳\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt{۴\sqrt[۳]{۲}}=۲\sqrt{\sqrt[۳]{۲}}=۲\sqrt[۶]{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{\sqrt{۸}-\sqrt{۲}}+\sqrt{\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۶]{۲}+۲\sqrt[۶]{۲}=۳\sqrt[۶]{۲}$$

۹ حاصل عبارت $(\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}-۳\sqrt[۸]{۱۶}+۴\sqrt[۵]{۴\sqrt{۲}})^۶$ کدام است؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) $۱۰۲۴\sqrt{۲}$ ۳) $۵۱۲\sqrt{۲}$ ۴) ۵۱۲

گزینهٔ «۴»

پاسخ: با استفاده از قواعد رادیکال‌ها داریم:

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{(\sqrt{۲})^۳}=\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt[۸]{۱۶}=\sqrt[۸]{۲^۴}=\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt[۵]{۴\sqrt{۲}}=\sqrt[۵]{(\sqrt{۲})^۵}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت داده شده}=(\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲})^۶=(۲\sqrt{۲})^۶=۲^۶\times(\sqrt{۲})^۶=۲^۶\times ۲^۳=۲^۹=۵۱۲$$

۱۰ حاصل عبارت $\frac{۲\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}+۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

گزینهٔ «۱»

پاسخ: با مخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{۲\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}+۲\sqrt{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}(۱-\sqrt{۲})}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-۴}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}-۴}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۴(\sqrt{۲}-۱)}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۴(\sqrt{۲}-۱)}{-(\sqrt{۲}-۱)}=-۴$$

» درس اوّل: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

» درس دوم: سهمی

» درس سوم: تعیین علامت

فصل چهارم:

معادله‌ها و نامعادله‌ها

معادلهٔ درجه دوم و حل به روش‌های تجزیه و مربع کامل

درس اوّل: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

معادلهٔ درجه دوم: شکل کلی معادلهٔ درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد که در آن ضرایب a، b و c اعداد حقیقی‌اند ($a\neq 0$) و x را متغیر یا مجهول معادله می‌نامند. برای حل معادلهٔ درجه دوم روش‌های مختلفی وجود دارند که آن‌ها را در ادامه مطرح می‌کنیم:

۱) **روش تجزیه:** در این روش ابتدا عبارت درجه دوم را تجزیه می‌کنیم، سپس تک‌تک پرانتزها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال آموزشی

معادلهٔ $x^2-8x+15=0$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ

$$x^2-8x+15=0\Rightarrow (x-3)(x-5)=0\Rightarrow \begin{cases} x-3=0\Rightarrow x=3\\ x-5=0\Rightarrow x=5\end{cases}$$

۲) **روش مربع کامل:** ابتدا به کمک رابطهٔ $x^2\pm bx=(x\pm\frac{b}{2})^2-(\frac{b}{2})^2$ عبارت را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، سپس کلیهٔ اعداد را به‌سمت راست تساوی می‌بریم و از طرفین رابطه جذر می‌گیریم (در صورتی‌که عدد سمت راست تساوی منفی نباشد). دقت کنید اگر $A^2=B^2$ باشد، آن‌گاه $A=\pm B$ می‌شود.

مثال آموزشی

۱) معادلهٔ $x^2-8x+15=0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ ابتدا عبارت x^2-8x را به‌صورت $x^2-8x=(x-4)^2-16$ می‌نویسیم و در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2-8x+15=0\Rightarrow (x-4)^2-16+15=0\Rightarrow (x-4)^2-1=0\Rightarrow (x-4)^2=1\Rightarrow x-4=\pm1\Rightarrow \begin{cases} x-4=1\Rightarrow x=5\\ x-4=-1\Rightarrow x=3\end{cases}$$

۲) معادلهٔ $x^2+2x+17=0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ عبارت x^2+2x را به‌صورت $x^2+2x=(x+1)^2-1$ می‌نویسیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$x^2+2x+17=0\Rightarrow (x+1)^2-1+17=0\Rightarrow (x+1)^2+16=0\Rightarrow (x+1)^2=-16$$

معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، چون $\sqrt{-16}$ در اعداد حقیقی وجود ندارد.

۳) در حل معادلهٔ $2x^2+9x-5=0$ به روش مربع کامل، از چه عددی جذر می‌گیریم؟

پاسخ در عبارت $2x^2+9x$ از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم تا بتوانیم از رابطهٔ مربع کامل استفاده کنیم:

$$2x^2+9x=2(x^2+\frac{9}{2}x)=2[(x+\frac{9}{4})^2-\frac{81}{16}]$$

$$\Rightarrow 2x^2+9x-5=0\Rightarrow 2[(x+\frac{9}{4})^2-\frac{81}{16}]-5=0\Rightarrow 2(x+\frac{9}{4})^2-\frac{2\times81}{16}-5=0\Rightarrow 2(x+\frac{9}{4})^2=\frac{121}{8}\Rightarrow (x+\frac{9}{4})^2=\frac{121}{16}$$

در ادامهٔ حل کافی است از عدد $\frac{121}{16}$ جذر بگیریم.

۱ در حل معادلهٔ $2x^2-5x-3=0$ به روش تجزیه به $A(x-3)=0$ می‌رسیم، A^2 کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) x^2+4x+1 ۲) $4x^2+4x+1$

۳) $4x^2+x+4$ ۴) $4x^2+4x+4$

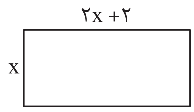
پاسخ: ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم تا A به‌دست آید، سپس A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)=A(x-3)\Rightarrow A=2x+1\Rightarrow A^2=(2x+1)^2=(2x)^2+2(2x)(1)+1^2=4x^2+4x+1$$

۲ طول یک مستطیل دو واحد بیشتر از دو برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل $24m^2$ باشد، نصف عرض مستطیل برابر با کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸



پاسخ: اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن $2x+2$ می‌باشد، داریم:

$$\text{مساحت} = \text{طول}\times\text{عرض} = x(2x+2)=24\Rightarrow 2x^2+2x-24=0\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow (x+4)(x-3)=0\Rightarrow \begin{cases} x=3\Rightarrow \frac{x}{2}=1/5\\ x=-4 \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

» درس اوّل: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

» درس دوم: دامنه و برد توابع

» درس سوم: انواع توابع

فصل پنجم:

تابع

درس اوّل: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

تابع یکی از مفاهیم اصلی در ریاضیات است، بنابراین آن را از دیدگاه‌های مختلف بررسی می‌کنیم. قبل از اینکه مفهوم تابع را بیان کنیم ابتدا با زوج مرتب آشنا می‌شویم.

زوج مرتب: به دستهٔ دوتایی (x,y) که ترتیب قرار گرفتن x و y در کنار هم مهم باشد، زوج مرتب می‌گویند. x را مؤلفهٔ اول و y را مؤلفهٔ دوم می‌نامند، پس $(x,y) \neq (y,x)$ (به شرطی که $x \neq y$ باشد). به عنوان نمونه $(۳,۵) \neq (۵,۳)$، همچنین برای اینکه $(x,y) = (z,t)$، باید $x = z$ و $y = t$ باشد.

تست آموزشی

اگر زوج مرتب‌های $(۳x+y,۳)$ و $(۷,۲x-y)$ برابر باشند، $x-y$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۲» صحیح است.

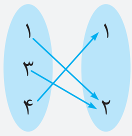
$$(۳x+y,۳) = (۷,۲x-y) \Rightarrow \begin{cases} ۳x+\cancel{y} = ۷ \\ ۲x-\cancel{y} = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۵x = ۱۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow ۳(۲)+y = ۷ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow x-y = ۱$$

چون دو زوج مرتب با هم برابرند، بنابراین هر یک از مؤلفه‌های دو زوج مرتب نیز با یکدیگر برابر هستند.

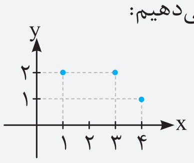
تعریف تابع: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود. بنابراین مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را یک تابع می‌نامیم هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن عضو اول یکسان نداشته باشند و اگر عضو اول آن یکسان باشد، عضو دوم نیز باید یکسان شود، بنابراین اگر (x,y_1) و (x,y_2) هر دو عضو یک تابع باشند، باید $y_1 = y_2$ باشد.

به عنوان مثال رابطهٔ $f = \{(۱,۲),(۳,۲),(۴,۱)\}$ تابع هست ولی رابطهٔ $g = \{(۱,۲),(۱,۴)\}$ تابع نیست. (چرا؟)

نمایش تابع: یک تابع را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار مختصاتی، نمودار پیکانی (وِن) و یا جدول، نمایش داد. به عنوان نمونه تابع f که در مثال بالا ذکر شده است را به‌صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:



نمودار پیکانی



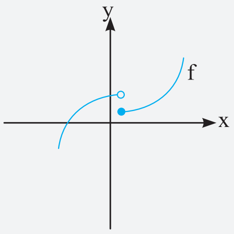
نمودار مختصاتی

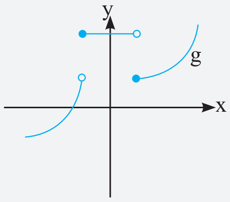
x	۱	۳	۴
y	۲	۲	۱

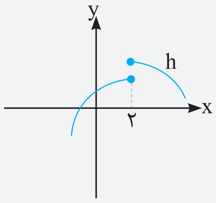
جدول

تابع از دید نمودار مختصاتی (دکارتی): نموداری نشان‌دهندهٔ یک تابع است که هر خط موازی با محور y ها (عرض‌ها)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

به عنوان مثال f، g و h را ببینید:





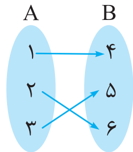


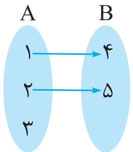
نمودارهای **f** و **g** تابع هستند، چون هر خط موازی با محور **y** ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، اما در نمودار **h** خط **$x = ۲$** نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس **h** تابع نیست.

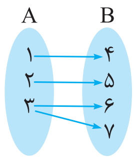
تابع از دید نمودار پیکانی (وِن): رابطه‌ای تابع است که به هر عضو از مجموعهٔ A، دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B نسبت داده شود. بنابراین باید از هر عضو A، دقیقاً یک پیکان به اعضای مجموعهٔ B رسم شوند.

مثال آموزشی

کدام رابطه نمایش یک تابع است؟

۱) 

۲) 

۳) 

پاسخ با توجه به تعریف بالا، فقط رابطهٔ نشان داده شده در مورد (۱) تابع هست. در مورد (۲) از عدد ۳ فلش یا پیکانی خارج نشده است، پس تابع نمی‌باشد (باید از تمام اعضای مجموعهٔ A فلش یا پیکان خارج شود). در مورد (۳) از عدد ۳ دو پیکان خارج شده است، پس تابع نمی‌باشد، یعنی دو زوج مرتب متفاوت، با مؤلفهٔ اول یکسان داریم: $(۳,۶)$ و $(۳,۷)$

» آزمون جامع ۱
» آزمون جامع ۲
» آزمون جامع ۳
» آزمون جامع ۴
» پاسخنامهٔ تشریحی

آزمون‌های جامع

آزمون جامع (۱)

۱ متمم مجموعهٔ $(B-A)\cup(B-A')$ نسبت به مجموعهٔ مرجع U کدام است؟

۱) B ۲) B' ۳) A ۴) A'

۲ اگر A مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۳ و $B=\{a\in\mathbb{Z},|a|<۲۰\}$ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ نامتناهی است؟

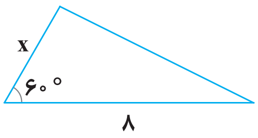
۱) B ۲) $A\cap B$ ۳) $B-A$ ۴) B'

۳ اگر $n(A)=۴۰$، $n(B)=۱۵$ و $n(A\cap B)=۱۰$ باشد، تعداد اعضای $A\cap B'$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

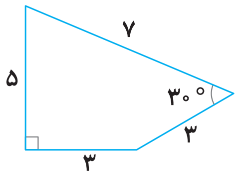
۴ حاصل عبارت $\dfrac{\sin ۲۵^\circ \cos ۳۹^\circ \cos ۲۷۰^\circ + \sin ۲۷۰^\circ}{\cos ۱۶^\circ \cot ۲۷۰^\circ + \tan ۶۰^\circ \tan ۴۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$



۵ مساحت مثلث مقابل با مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ برابر است. مقدار x چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



۶ مساحت شکل مقابل کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) $\dfrac{۵۱}{۴}$ ۴) ۳۶

۷ اگر $\sqrt{۵}=۳^{a+۱}$ باشد، مقدار $۹^{a-۱}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۵}{۹}$ ۲) ۵ ۳) ۴۵ ۴) $\dfrac{۵}{۸۱}$

۸ اگر $A=\sqrt[۶]{۱۲}\sqrt[۴]{۵۴}\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}}$ باشد، مقدار $\sqrt[۳]{A^۲-۹}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt[۳]{۳۶}$ ۳) $\sqrt[۳]{۶\sqrt{۶}}$ ۴) $\sqrt[۳]{۴۲}$

۹ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{(x^۲-۱۶)(x^۲+۵)}{(x^۲+x+۱)(۲x+۱)}>۰$ به صورت $(a,\dfrac{-۱}{۲})\cup(b,+\infty)$ می‌باشد. $a+b$ کدام است؟

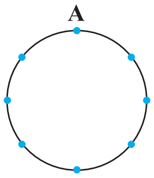
۱) صفر ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۴

۱۰ محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۲۰ متر و ۱۶ متر مربع می‌باشند. نسبت طول به عرض مستطیل برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{۵}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۴}{۵}$ ۴) ۴

۱۱ اگر رابطهٔ $f=\{(۳,m^۲+۲m+۲),(m^۲+۱,۴),(۲,۵),(۳,۶m-۱)\}$ یک تابع باشد، آنگاه معادلهٔ $x^۳-(m^۲+۱)x^۲+۲۵x=۰$ چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



۱۲ هشت نقطه مطابق شکل روی محیط یک دایره قرار دارند. چند چهارضلعی به رئوس این نقاط می‌توان رسم کرد، طوری‌که حتماً این چهارضلعی‌ها شامل رأس A باشند؟

۱) $\dbinom{۸}{۳}$ ۲) ۳۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۳۶

۱۳ حاصل $\dbinom{۶}{۶}+\cdots+\dbinom{۶}{۲}+\dbinom{۶}{۱}+\dbinom{۶}{۰}$ برابر با کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «GREEN» به طوری‌که E ها کنار هم **نباشند**، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۶۰ ۳) ۸۴ ۴) ۳۶

۱۵ دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده متوالی هستند؟ *(تجربی داخل ۹۵)*

۱) $\dfrac{۲}{۹}$ ۲) $\dfrac{۵}{۱۸}$ ۳) $\dfrac{۷}{۱۸}$ ۴) $\dfrac{۴}{۹}$

۱۶ گروه خونی افراد یک جامعه چه نوع متغیر تصادفی است؟

۱) کمی - پیوسته ۲) کیفی - پیوسته ۳) کیفی - اسمی ۴) کیفی - ترتیبی

آزمون جامع (۲)

۱ اگر بازهٔ $(5, 2a+1)$ شامل سه عدد صحیح باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $2/5 < a \leq 3$ ۲) $3/5 < a \leq 4$ ۳) $4 < a \leq 4/5$ ۴) $4/5 < a \leq 5$

۲ در یک دنبالهٔ اعداد $a_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} + 1$، جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۳ در یک دنبالهٔ هندسی صعودی، مجموع جملات پنجم و ششم ۴۸ و تفاضل جملهٔ پنجم از هفتم برابر ۴۸ می‌باشد. قدرنسبت کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $\frac{1}{5}$

۴ اگر $5\sin\alpha - \sqrt{3} = 0$ و $\tan\alpha = \sqrt{\frac{47}{22} - x}$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

۵ اگر خط به معادلهٔ $(4m-1)y - mx + 5m + 2 = 0$ با جهت مثبت محور xها زاویه 45° بسازد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶ مساحت یک شش‌ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ واحد مربع است. اندازهٔ قطر کوچک آن، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۳

۷ حاصل $(\sqrt{50} + \sqrt[12]{64} - \sqrt{32} - \sqrt[10]{32})^4$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۸ اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2} - 4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2} + 4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $7\sqrt{2}$

۹ مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x + 1 - |x - 2| > |x^2 + 1|$ کدام است؟

۱) $(-2, 1)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(-1, 2)$ ۴) $(1, 2)$

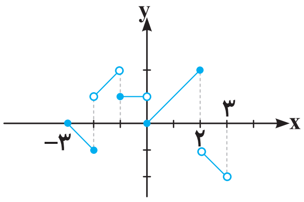
۱۰ مجموعه جواب نامعادلهٔ $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۶)

۱) $x < \frac{1}{2}$ ۲) $x < 3$ ۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

۱۱ معادلهٔ $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی داخل ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲ اگر نمودار $f(x)$ شکل مقابل باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $[-3, -2] \cup [0, 2]$ ۲) $[-2, 2]$ ۳) $[-3, -2] \cup [0, 3]$ ۴) $[-2, 3)$

۱۳ حاصل $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \cdots + \binom{8}{8}$ کدام است؟

۱) ۲۵۵ ۲) ۲۵۶ ۳) ۲۴۸ ۴) ۲۴۷

۱۴ با حروف کلمه «talk» چند کلمهٔ سه‌حرفی (با معنی یا بی‌معنی) می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف «t» باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۶ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۵ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون بیاوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ **نیستند**؟ (تجربی داخل ۹۴)

۱) $\frac{28}{45}$ ۲) $\frac{29}{45}$ ۳) $\frac{31}{45}$ ۴) $\frac{32}{45}$

$$\Rightarrow x^{۲}+۱۶=۱۰x \Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۱۶=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۸ \end{cases}$$

$$x=۸ \Rightarrow y=\frac{۱۶}{x}=\frac{۱۶}{۸}=۲ \Rightarrow \frac{\text{طول}}{\text{عرض}}=\frac{۸}{۲}=۴$$

توجه کنید که چون طول بزرگ‌تر از عرض است، $x=۸$ را در نظر گرفتیم.

۱۱

$$m^{۲}+۲m+۲=۶m-۱ \Rightarrow m^{۲}-۴m+۳=۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۱ \\ m=۳ \end{cases}$$

$$m=۱ \Rightarrow m^{۲}+۱=۲ \Rightarrow (m^{۲}+۱=۲,۴),(۲,۵)\in f \Rightarrow \text{تابع نیست } f$$

پس $m=۱$ غیرقابل قبول می‌باشد.

$$m=۳ \Rightarrow x^{۳}-۱۰x^{۲}+۲۵x=۰ \Rightarrow x(x^{۲}-۱۰x+۲۵)=۰ \Rightarrow x(x-۵)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۰, x=۵$$

۱۲ با توجه به اینکه حتماً رأس A را دارند، پس می‌خواهیم از ۷ نقطهٔ باقیمانده، سه نقطه انتخاب کنیم.

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\times ۴!}=\frac{۷\times \cancel{۶}\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۳\times ۲}\times \cancel{۴!}}=۳۵$$

۱۳ می‌دانیم یک مجموعهٔ n عضوی دارای ۲^{n} زیرمجموعه است. $\binom{۶}{۰}$ تعداد زیرمجموعه‌های صفرعضوی یک مجموعه ۶ عضوی، $\binom{۶}{۱}$ تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی یک مجموعهٔ شش عضوی و ... و $\binom{۶}{۶}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی این مجموعه می‌باشد. پس مجموع آن‌ها $۶۴=۲^{۶}$ می‌باشد. به خاطر بسپاریم:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^{n}$$

۱۴ تعداد کل کلمات را حساب می‌کنیم. سپس تعداد کلماتی که E ها کنار هم باشند را بدست می‌آوریم و از آن کسر می‌کنیم:

$$\text{تعداد کل کلمات}=\frac{۵!}{\underbrace{۲!}_{\text{برای تکرار E}}}=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$$

تعداد کلماتی که دو حرف E کنار هم باشند $=۴!=۲۴ \Rightarrow$ تعداد کلماتی که E ها کنار هم نباشند $=۶۰-۲۴=۳۶$

۱۵ اگر A پیشامد مورد نظر باشد، داریم:

$$n(S)=۶\times ۶=۳۶$$

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\} \Rightarrow n(A)=۱۰ \Rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۱۶ گروه خونی افراد یک متغیر قابل شمارش نیست، بنابراین از نوع کیفی است. همچنین ترتیب خاصی ندارد، بنابراین کیفی اسمی می‌باشد.

پاسخنامهٔ آزمون جامع (۲)

۱ با توجه به اینکه باید بعد از عدد ۵ سه عدد صحیح باشد، کافیست $۸<۲a+۱\le ۹$ باشد.

۵ ۶ ۷ ۸ ۹

$$۸<۲a+۱\le ۹ \Rightarrow ۷<۲a\le ۸ \Rightarrow ۳/۵<a\le ۴$$

۲

روش اول:

$$a_{۲}=۲a_{۱}+۱=۲(۱)+۱=۳$$

$$a_{۳}=۲a_{۲}+۱=۲(۳)+۱=۷$$

$$\vdots$$

$$a_{۸}=۲a_{۷}+۱=۲(۱۲۷)+۱=۲۵۵$$

روش دوم:

$$a_{۲}=۲a_{۱}+۱=۲(۱)+۱=۳ \Rightarrow a_{۲}=۲^{۲}-۱$$

$$a_{۳}=۲a_{۲}+۱=۲(۳)+۱=۷ \Rightarrow a_{۳}=۲^{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow a_{n}=۲^{n}-۱ \Rightarrow a_{۸}=۲^{۸}-۱=۲۵۵$$

۳ طبق تعریف و دنبالهٔ هندسی داریم:

$$\begin{cases} a_{۵}+a_{۶}=۴۸ \\ a_{۷}-a_{۵}=۴۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{۵}+a_{۵}q=۴۸ \\ a_{۵}q^{۲}-a_{۵}=۴۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{۵}(۱+q)=۴۸ \\ a_{۵}(q^{۲}-۱)=۴۸ \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{۵}(q+۱)}_{\text{طبق}(I)}(q-۱)=۴۸ \Rightarrow ۴۸(q-۱)=۴۸ \Rightarrow q-۱=۱ \Rightarrow q=۲$$

ریاضی دهم

۴ به کمک اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$5\sin\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{3}{25}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{22}{25}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\frac{47}{22}-x=\frac{25}{22}\Rightarrow x=\frac{22}{22}+\frac{47}{22}-\frac{25}{22}\Rightarrow x=\frac{44}{22}=2$$

۵ ابتدا شیب خط را می‌یابیم:

$$(4m-1)y=mx-(5m+2)$$

$$y=\frac{m}{4m-1}x-\frac{5m+2}{4m-1}\Rightarrow \text{شیب خط}=\frac{m}{4m-1}$$

از طرفی خط با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ 45° ساخته است، پس شیب آن برابر $\tan 45^\circ=1$ می‌باشد.

$$\frac{m}{4m-1}=1\Rightarrow 4m-1=m\Rightarrow 3m=1\Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

۶ مساحت شش‌ضلعی به ضلع a برابر است با:

$$S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{2}a^2=9\cancel{\sqrt{3}}\Rightarrow 3a^2=2\times 9\Rightarrow a^2=6\Rightarrow a=\sqrt{6}$$

$$\text{طول قطر کوچک}=a\sqrt{3}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$$

۷

$$(\sqrt{25\times 2}+\sqrt[12]{2^6}-\sqrt{16\times 2}-\sqrt[10]{2^5})^4=(5\sqrt{2}+\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\sqrt{2})^4=(\sqrt{2})^4=((\sqrt{2})^2)^2=2^2=4$$

۸

$$(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta)^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha^4+\beta^4+(\alpha\beta)^2$$

$$=(3\sqrt{2}-4)+(3\sqrt{2}+4)+\sqrt{(3\sqrt{2}-4)+(3\sqrt{2}+4)}=6\sqrt{2}+\sqrt{18-16}=6\sqrt{2}+\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

۹ می‌دانیم x^2+1 همواره مثبت است و در نتیجه $|x^2+1|=x^2+1$ می‌باشد.

$$\begin{cases} x\ge 2\Rightarrow 2x+1-(x-2)>x^2+1\Rightarrow x+3>x^2+1\Rightarrow x^2-x-2<0\Rightarrow (x+1)(x-2)<0\Rightarrow -1<x<2 \xRightarrow{\text{اشتراک با } x\ge 2} \varnothing \\ x<2\Rightarrow 2x+1+x-2>x^2+1\Rightarrow x^2-3x+2<0\Rightarrow (x-1)(x-2)<0\Rightarrow 1<x<2 \xRightarrow{\text{اشتراک با } x<2} 1<x<2 \end{cases}$$

۱۰ روش اول:

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-3}<3\Rightarrow \frac{3x+1}{x-3}-3<0\Rightarrow \frac{10}{x-3}<0\Rightarrow x-3<0\Rightarrow x<3 & \text{(I)} \\ \frac{3x+1}{x-3}>-1\Rightarrow \frac{3x+1}{x-3}+1>0\Rightarrow \frac{4x-2}{x-3}>0\Rightarrow x<\frac{1}{2}\ \text{یا}\ x>3 & \text{(II)} \end{cases}\Rightarrow \text{(I)}\cap\text{(II)}\Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

روش دوم (تستی): جواب نامعادله در آن صدق می‌کند، بنابراین با توجه به گزینه‌ها به x عدد دلخواهی می‌دهیم، که در برخی گزینه‌ها باشد.

$$x=1\Rightarrow -1<\frac{3+1}{1-3}<3\Rightarrow -1<-2<3\ \text{غ ق ق}$$

بنابراین هر گزینه‌ای که شامل $x=1$ باشد، نادرست است. یعنی گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نادرست می‌باشند و گزینهٔ (۱) پاسخ صحیح تست است.

۱۱ با تغییر متغیر $x^2-2x=t$ داریم:

$$x^2-2x=t\Rightarrow t^2-t-2=0\Rightarrow \begin{cases} t=-1\Rightarrow x^2-2x=-1\Rightarrow x=1 \\ t=2\Rightarrow x^2-2x-2=0\Rightarrow \Delta>0\Rightarrow \text{دو ریشه دارد} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۲ عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{-3\le x\le -2}_{\text{منفی}},f(x)\le 0\Rightarrow xf(x)\ge 0 \\ \underbrace{0\le x\le 2}_{\text{مثبت}},f(x)\ge 0\Rightarrow xf(x)\ge 0 \end{array}\right\}\Rightarrow D_f=[-3,-2]\cup[0,2]$$