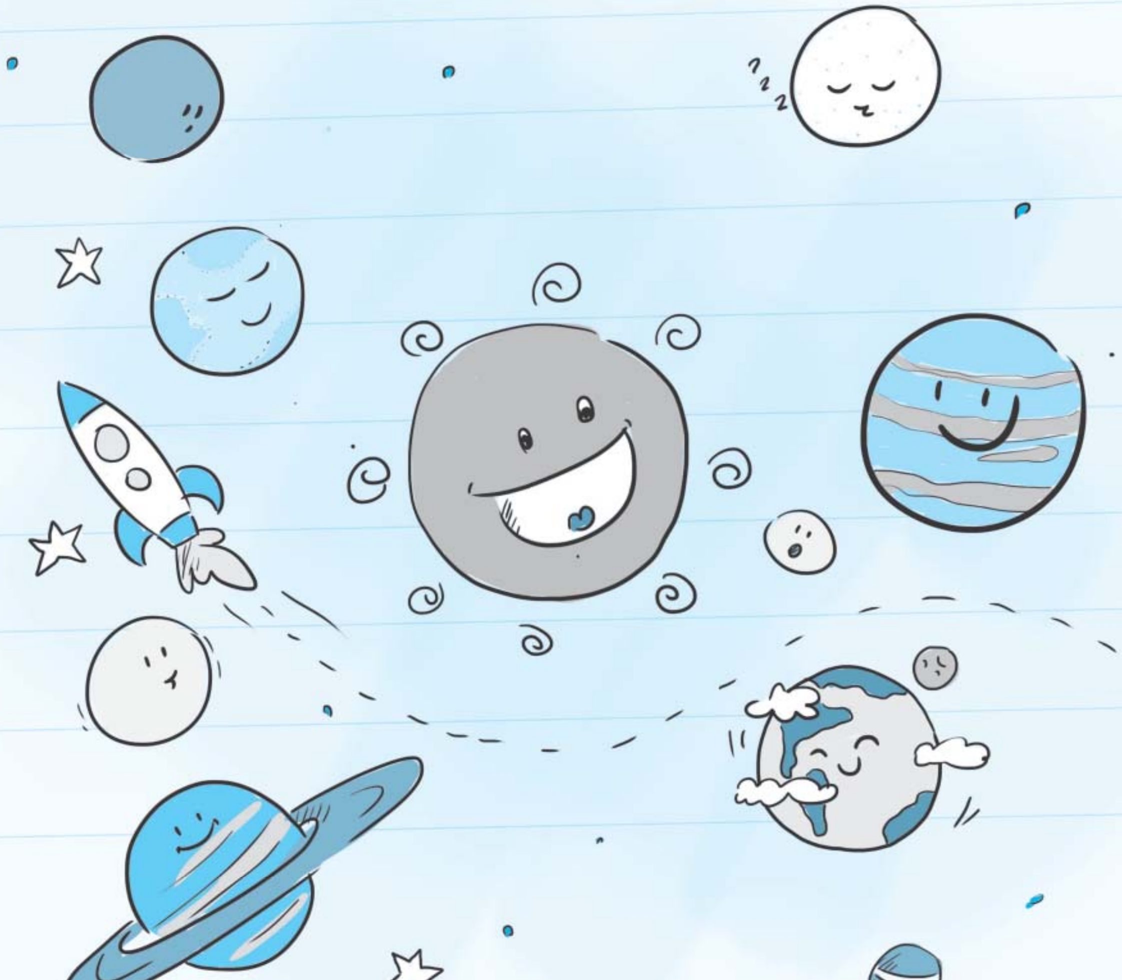
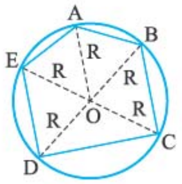
فصل ۱

دایره



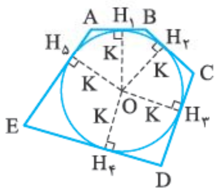
درس ۴

چندضلعی‌های محاطی و محیطی



(شکل ۱)

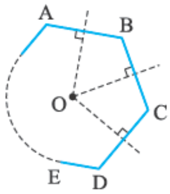
شکل‌های روبه‌رو را نگاه کنید! در شکل (۱) یک دایره از تمام رأس‌های یک شکل گذشته است، به پنج ضلعی ABCDE یک چندضلعی محاطی و به دایره هم، دایرهٔ محیطی چندضلعی گفته می‌شود. معلوم است که اگر O مرکز دایرهٔ محیطی باشد، داریم: $OA = OB = OC = \cdots$



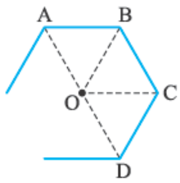
(شکل ۲)

در شکل (۲) یک دایره درون یک چندضلعی قرار دارد و بر تمام ضلع‌ها مماس شده است، به این جور چندضلعی‌ها، محیطی گفته می‌شود. دایره هم، دایرهٔ محاطی نامیده می‌شود. در این‌جا فاصلهٔ مرکز دایره از همهٔ ضلع‌ها برابر است، یعنی: $OH_1 = OH_2 = \cdots$

تذکر محیط به کجای شکل می‌گن؟! بیرونش دیگه! پس همیشه یادت باشه اون شکلی که بیرونه می‌شه محیطی و اون یکی میشه محاطی!



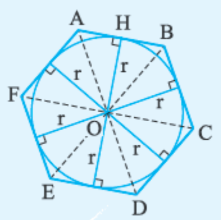
برای این‌که یک چندضلعی محاطی باشد، یعنی بتوانیم دایره‌ای رسم کنیم که از تمام رئوسش عبور کند، باید عمود منصف‌های اضلاعش در یک نقطه همرس باشند، این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی است. مثلاً مثلث همیشه محاطی است! (چرا؟)



برای محیطی‌بودن یک چندضلعی هم، باید همهٔ نیمسازهای زاویه‌ها در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی است که درون چندضلعی قرار می‌گیرد.

مثال اگر دایره‌ای به شعاع r در یک شش‌ضلعی به مساحت S و محیط ۲P، محاط شده باشد، ثابت کنید: $r = \dfrac{S}{P}$.

پاسخ شکل را ببینید! اگر از مرکز دایره به رأس‌های شش‌ضلعی وصل کنیم، ۶ مثلث به وجود می‌آید که در همهٔ آن‌ها، ارتفاع برابر r است.



حالا می‌توانیم بگوییم که اگر مساحت ۶ مثلث را با هم جمع کنیم باید به مساحت کل شش‌ضلعی برسیم:

$$S = S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} + \cdots + S_{\overset{\Delta}{AOF}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r \times AB}{۲} + \frac{r \times BC}{۲} + \cdots + \frac{r \times AF}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r}{۲}(\underbrace{AB + BC + \cdots + AF}_{۲P}) \Rightarrow S = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

اگر شعاع دایرهٔ محاطی یک چندضلعی محیطی r باشد، همواره داریم:

$$r = \frac{S}{P} \quad \begin{array}{l} S \rightarrow \text{مساحت چند ضلعی} \\ P \rightarrow \text{نصف محیط چندضلعی} \end{array}$$

چندضلعی‌های منتظم

n ضلعی‌های منتظم هم دایرهٔ محیطی دارند هم محاطی. اگر ضلع چندضلعی a، شعاع دایرهٔ محیطی R و شعاع دایرهٔ محاطی r باشد، داریم:

۱) $a = ۲R\sin\dfrac{۱۸۰^\circ}{n}$

۲) $a = ۲r\tan\dfrac{۱۸۰^\circ}{n}$

مثال شعاع دایرهٔ محیطی یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ را بیابید. $(\sin 22/5^\circ \simeq 0/4)$

پاسخ $a = 4$، $n = 8$ است و R را از ما می‌خواهند:

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow 4 = 2(R)\times\sin\frac{180^\circ}{8} \Rightarrow 4 = 2R\times\sin 22/5^\circ \Rightarrow R = \frac{4}{0/8} = 5$$

تست در یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، مساحت دایرهٔ محیطی چند برابر مساحت دایرهٔ محاطی است؟

۱) $\frac{3}{4}a$ ۲) $\frac{4}{3}a$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ گزینهٔ ۴ در این‌جا $n = 6$ است پس $\frac{180^\circ}{n}$ هم می‌شود: $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$. برای به دست آوردن مساحت دایره فقط به شعاع آن احتیاج داریم، پس قبل از هر کاری برویم و شعاع دایره های محاطی و محیطی را به دست بیاوریم:

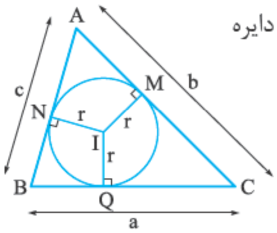
$$a = 2R\sin 30^\circ \Rightarrow a = 2R\times\frac{1}{2} \Rightarrow R = a$$

$$a = 2r\tan 30^\circ \Rightarrow a = 2r\times\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

حالا نسبت مساحت‌ها را بیابیم:

$$\frac{\text{مساحت دایرهٔ محیطی}}{\text{مساحت دایرهٔ محاطی}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = (\frac{R}{r})^2 = \frac{(a)^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2} \Rightarrow \frac{a^2}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{4}{3}$$

دایره‌های محاطی و محیطی مثلث



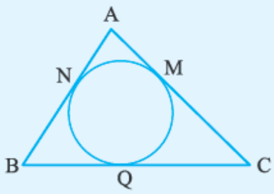
۱ **دایرهٔ محاطی داخلی:** می‌دانیم که نیمسازهای هر مثلثی همرس‌اند. پس دایره‌ای وجود دارد که در داخل مثلث محاط شود. به این دایره، دایرهٔ محاطی داخلی گفته می‌شود که شعاع آن را با r و مرکزش را با I نشان می‌دهیم. دربارهٔ این دایره نکات زیر را باید بلد باشیم:

۱ $r = \frac{S}{P}$ (که S مساحت مثلث و P نصف محیط است.)

۲ $AM = AN = P - a$ و $BN = BQ = P - b$ و $CM = CQ = P - c$

۳ I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.

تست در شکل روبه‌رو، اگر $BQ = 3$، $AB = 5$ و $BC = 7$ باشد، محیط مثلث کدام است؟



۱) ۱۷ ۲) ۱۸
۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ ۲ اطلاعات مسئله را کمی راحت‌تر بنویسیم:

$$a = 7\ ,\ c = 5\ ,\ BP = 3 \Rightarrow P - b = 3$$

دو ضلع مثلث را داریم فقط باید b را پیدا کنیم که کار تمام شود:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+b}{2} = \frac{12+b}{2} = 6 + \frac{b}{2}$$

حالا اگر P را در رابطهٔ $BQ = P - b = 3$ جای‌گذاری کنیم داریم:

$$P - b = 3 \Rightarrow (6 + \frac{b}{2}) - b = 3 \Rightarrow 6 - \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

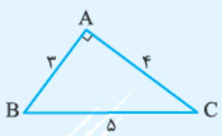
پس محیط مثلث می‌شود:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

تست در مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴

پاسخ گزینهٔ ۱ چون $5^2 = 4^2 + 3^2$ پس مثلث، قائم‌الزاویه است:

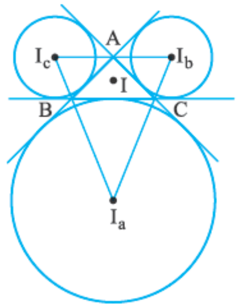


$$S = \frac{3\times 4}{2} = 6\ ,\ P = \frac{5+4+3}{2} = 6$$

شعاع هم که از رابطهٔ $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{6} = 1$$

۲ دایره‌های محاطی خارجی مثلث: هر مثلث ۳تا دایره دارد که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس هستند. به این دایره‌ها محاطی خارجی گفته می‌شود. مراکز این دایره‌ها با I_a و I_b و I_c نمایش داده می‌شوند.



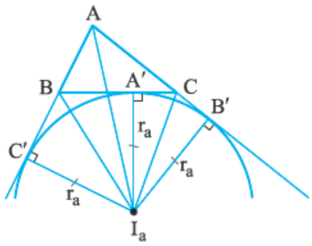
یکی از این دایره‌ها را به نمایندگی از بقیه بررسی می‌کنیم:

۱ مرکز این دایره محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ A و نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C است.

۲ چون روبه‌روی رأس A است، اسم مرکزش I_a شده است.

۳ شعاعش را با r_a نشان می‌دهیم که برابر است با: $r_a = \dfrac{S}{P-a}$

۴ $AB' = AC' = P$ (P نصف محیط مثلث است.)



مثال اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و r_a، r_b و r_c شعاع‌های دوایر محاطی خارجی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

پاسخ می‌دانیم که: $r=\dfrac{S}{P}$، $r_a=\dfrac{S}{P-a}$، $r_b=\dfrac{S}{P-b}$ و $r_c=\dfrac{S}{P-c}$ حالا از سمت چپ تساوی شروع می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{\frac{S}{P-a}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-b}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-c}}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}$$

$$=\frac{۳P-\overbrace{(a+b+c)}^{۲P}}{S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}$$

تست در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۸\sqrt{۳}$، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ گزینهٔ ۴ در مثلث متساوی‌الاضلاع معلوم است که r_a، r_b و r_c مساوی و همگی برابر با $\dfrac{S}{P-a}$ هستند.

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع: $S=\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}(a)^۲=\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}(۸\sqrt{۳})^۲=\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۶۴\times ۳=۴۸\sqrt{۳}$

محیط $=۲P=۳(۸\sqrt{۳})=۲۴\sqrt{۳} \Rightarrow P=۱۲\sqrt{۳}$

$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۱۲\sqrt{۳}-۸\sqrt{۳}}=\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}}=۱۲$$

تست در مثلث ABC، $b=۸$ و $c=۶$ است. اگر M و N محل تماس دایره‌های محاطی داخلی و خارجی با ضلع BC باشند. اندازهٔ MN کدام است؟

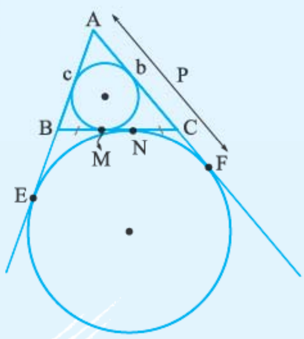
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

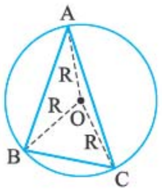
پاسخ گزینهٔ ۱ برای به دست آوردن MN می‌خواهیم CM و CN را پیدا کنیم و از هم کمشان کنیم. CM که می‌دانیم برابر است با: $CM=P-c$.

CN با CF برابر است چرا که دو مماسی هستند که از نقطهٔ C بر دایرهٔ محاطی خارجی رسم شده‌اند. کل AF برابر P و تکهٔ AC از آن هم که همان b است پس $CF=AF-AC=P-b$. در نتیجه CN هم برابر است با: $P-b$.

خُب حالا نوبت MN شده است: $MN=CM-CN=(P-c)-(P-b)=b-c$

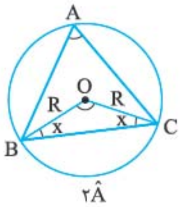
$b-c$ هم که می‌شود: $۸-۶=۲$





۳ **دایرهٔ محیطی مثلث:** عمود منصف‌های هر مثلثی همرس‌اند. این نقطه از سه رأس به یک فاصله است. اگر این فاصله را R بنامیم و مرکز پرگار را روی این نقطه قرار دهیم و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ R باز کنیم دایره‌ای رسم می‌شود که از رأس عبور می‌کند، به این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث گفته می‌شود.

دربارهٔ این مثلث باید بدانیم که:



۱ مرکزش محل همرسی عمودمنصف‌ها است.

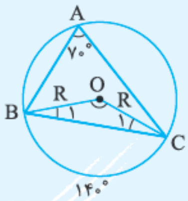
۲ $R=\dfrac{abc}{۴S}$ (S مساحت مثلث است.)

۳ $B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}=۲\hat{A}$

۴ و چون مثلث BOC متساوی‌الساقین است، داریم: $x=\dfrac{۱۸۰^\circ-۲\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\hat{A}$

تست در مثلث ABC، $\hat{A}=۷۰^\circ$ و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است، زاویهٔ OBC چند درجه است؟

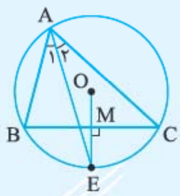
۱) ۴۰° ۲) ۲۰° ۳) ۱۰° ۴) ۳۰°



پاسخ **گزینه ۲** چون $\hat{A}=۷۰^\circ$ است، $\overset{\frown}{BC}=۲\hat{A}=۱۴۰^\circ$ خواهد بود. از طرفی $\hat{O}$ زاویهٔ مرکزی است بنابراین $\hat{O}=\overset{\frown}{BC}=۱۴۰^\circ$، چون $BO=CO$ است، در مثلث متساوی‌الساقین BOC داریم:

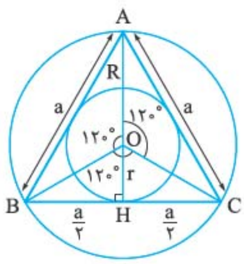
$$\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{O}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{B}_۱+۱۴۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{B}_۱=۴۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=۲۰^\circ$$

مثال **ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه و عمودمنصف ضلع نظیر آن زاویه بر روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می کنند.**



پاسخ چون $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ است پس $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$ یعنی E وسط کمان BC است. از طرفی عمودمنصف وتر BC از وسط کمان BC می‌گذرد، پس E که نقطه‌ای بر روی دایرهٔ محیطی مثلث است، محل تلاقی نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC است.

در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a و ارتفاع h، داریم:



۱ $R=\dfrac{۲}{۳}h=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}a$

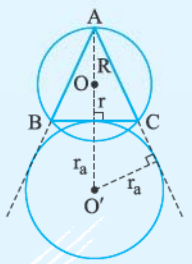
۲ $r=\dfrac{۱}{۳}h=\dfrac{\sqrt{۳}}{۶}a$

۳ $r_a=r_b=r_c=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}a$

۴ $\dfrac{r}{۱}=\dfrac{R}{۲}=\dfrac{r_a}{۳}$

تست در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

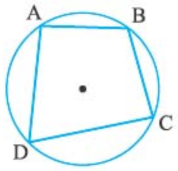


پاسخ **گزینه ۱** با توجه به شکل، طول خط‌المرکزین برابر $OO'=r+r_a$ است، بنابراین داریم:

$$OO'=r+r_a=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a+\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

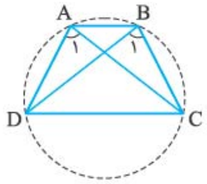
$$=\frac{\sqrt{۳}}{۶}(\sqrt{۳})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳})=\frac{۳}{۶}+\frac{۳}{۲}=۲$$

چهارضلعی‌های محیطی و محاطی



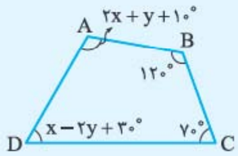
چهارضلعی محاطی: یک چهارضلعی محاطی فقط در صورتی محاطی است که زاویه‌های مقابلش مکمل باشند.

$ABCD$ محاطی $\Leftrightarrow \hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$



وقتی یک چهارضلعی محاطی است همیشه باید یک دایره (مثل هالهٔ نور!) دورش ببینیم، مثلاً در هر چهارضلعی محاطی داریم: $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$، چرا که در آن دایره‌ای که هست ولی کشیده نشده است $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}_۱$ دو زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان CD هستند پس با هم برابرند. (عکس این مطلب هم درست است یعنی اگر $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$ باشد چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.)

تست چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. y کدام است؟



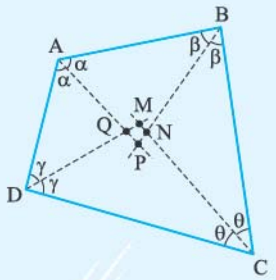
۱) ۶° ۲) ۸°

۳) ۱۰° ۴) ۱۲°

پاسخ گزینهٔ ۲ در چهارضلعی محاطی مجموع زاویه‌های روبه‌روی هم، ۱۸۰° است:

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(۲x+y+۱۰^\circ)+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ\\ (x-۲y+۳۰^\circ)+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+y=۱۰۰^\circ\\ x-۲y=۳۰^\circ\end{cases}\Rightarrow ۵y=۴۰^\circ\Rightarrow y=۸^\circ$$

مثال ثابت کنید: از برخورد نیمسازهای داخلی هر چهارضلعی محدب، یک چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود.



پاسخ باید ثابت کنیم $\hat{M}+\hat{P}=۱۸۰^\circ$ است، در چهارضلعی $ABCD$ داریم:

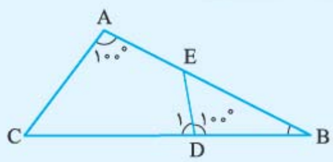
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha+۲\beta+۲\theta+۲\gamma=۳۶۰^\circ\Rightarrow\alpha+\beta+\theta+\gamma=۱۸۰^\circ$$

از طرفی دیگر:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{APB}:\hat{P}=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)\\ \overset{\Delta}{DMC}:\hat{M}=۱۸۰^\circ-(\theta+\gamma)\end{cases}$$

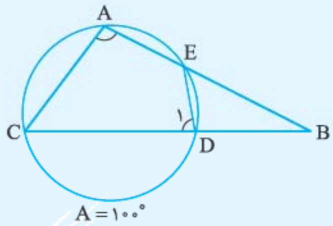
$$\Rightarrow\hat{M}+\hat{P}=۳۶۰^\circ-(\alpha+\beta+\theta+\gamma)=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

مثال در شکل مقابل، ثابت کنید: $BE\times BA=BD\times BC$.



پاسخ چهارضلعی $AEDC$ که محاطی است، چرا که در آن داریم:

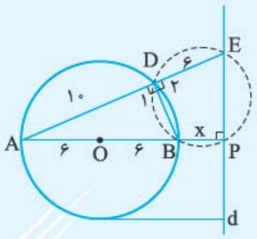
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=۱۰۰^\circ\\ \hat{D}_۱=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{A}+\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ$$



شکل را که خوب نگاه کنید، می‌فهمید که AE و CD دو وتر از یک دایره‌اند که امتداد آن‌ها یکدیگر را در B قطع کرده است، بنابراین: $BE\times BA=BD\times BC$

تست **نقطهٔ P در امتداد قطر AB از دایرهٔ C(O,۶) قرار دارد، خط d را در نقطهٔ P عمود بر AP رسم می‌کنیم، اگر E نقطه‌ای از خط d و D محل برخورد EA و دایره باشد، به طوری که $AD=۱۰$ و $DE=۶$، BP کدام است؟**

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۱/۵

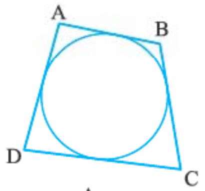


پاسخ گزینهٔ ۳ زاویهٔ ADB محاطی و روبه‌رو به قطر AB است، پس $\hat{D}_1=\hat{D}_2=۹۰^\circ$. در نتیجه چهارضلعی DEPB که در آن $\hat{D}_2+\hat{P}=۱۸۰^\circ$ است، محاطی بوده و در آن قضیهٔ وترها را می‌نویسیم:

$$AD\times AE=AB\times AP \Rightarrow ۱۰\times ۱۶=۱۲(۱۲+x)$$

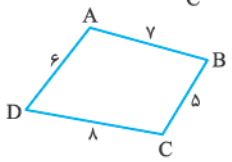
$$\Rightarrow ۱۶۰=۱۴۴+۱۲x \Rightarrow ۱۶=۱۲x \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

چهارضلعی محیطی: اگر یک چهارضلعی بخواهد محیطی باشد، یک راه بیشتر ندارد، راهش این است که: جمع دوتا ضلع روبه‌روی هم آن برابر با جمع آن دوتا روبه‌رویی‌های دیگر باشد، یعنی:



$$\text{محیطی } ABCD \Leftrightarrow AB+CD=BC+AD$$

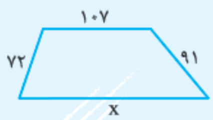
مثلاً چهارضلعی روبه‌رو محیطی نیست چرا که:



$$\begin{cases} AB+DC=۷+۸=۱۵ \\ AD+BC=۶+۵=۱۱ \end{cases} \Rightarrow AB+DC\neq AD+BC$$

تست **نیمسازهای داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می‌گذرند، اگر اندازهٔ سه ضلع متوالی آن به ترتیب ۷۲، ۱۰۷ و ۹۱ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع چهارم کدام است؟**

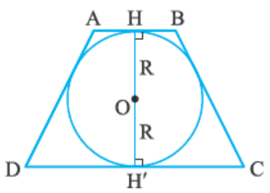
۱) ۵۶ ۲) ۸۸ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۶



پاسخ گزینهٔ ۱ چهارضلعی که نیمسازهایش همرس باشند، محیطی است (یادتان که نرفته!) پس باید داشته باشیم:

$$۱۰۷+x=۹۱+۷۲ \Rightarrow x=۵۶$$

اگر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین محیطی باشد، داریم:

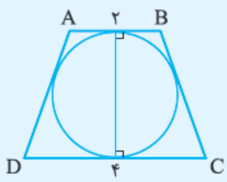


۱) ارتفاع ذوزنقه برابر است با: $HH'=۲R$

۲) $(۲R)^۲=AB\times DC$

۳) $\text{طول ساق}=\frac{\text{مجموع قاعده‌ها}}{۲} \Rightarrow AD=BC=\frac{AB+DC}{۲}$

تست **در شکل زیر، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD بر دایره محیط شده است. مساحت آن کدام است؟** (سراسری ۸۱)



۱) $۶\sqrt{۲}$
۲) ۶
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) ۸

پاسخ گزینهٔ ۱ قاعده‌ها را که داریم، فقط ارتفاع را می‌خواهیم تا مساحت را حساب کنیم، ارتفاع هم که ۲R است پس باید R را پیدا کنیم، در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی داریم:

$$(۲R)^۲=AB\times DC \Rightarrow ۴R^۲=۲\times ۴ \Rightarrow R^۲=۲ \Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

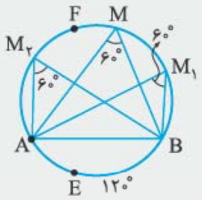
پس ارتفاع $۲\sqrt{۲}$ است و مساحت می‌شود:

$$S=\frac{(\text{مجموع دو قاعده})\times \text{ارتفاع}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}\times(۲+۴)}{۲}=۶\sqrt{۲}$$

در جدول زیر تمام اشکال مهم را از لحاظ محیطی و محاطی بودن بررسی کرده‌ایم:

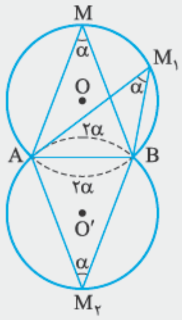
شکل / نوع	مثلث	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین	مستطیل	لوزی	مربع	nضلعی منتظم
محیطی	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓
محاطی	✓	×	×	✓	✓	×	✓	✓

زاویهٔ دید[1]

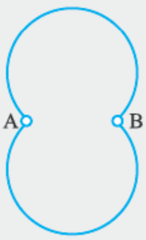


در دایرهٔ $C(O,R)$ کمان $\widehat{AEB}=۱۲۰^\circ$ و وتر AB را رسم می‌کنیم.
هر نقطهٔ دلخواه مانند M را که روی کمان دیگر $\widehat{AB}$ (روی $\widehat{AFB}$) در نظر بگیریم و از این نقطه به A و B وصل کنیم، داریم:

$$A\hat{M}B=\frac{\widehat{AEB}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$



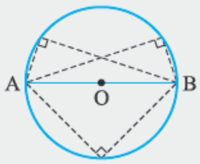
از هر نقطهٔ دیگری مانند $M_۱$ و $M_۲$ و ... نیز به A و B وصل می‌کردیم، زاویه‌ای که تشکیل می‌شد، نصف $\widehat{AEB}$ و همان ۶۰° بود. یعنی هر نقطه از کمان $\widehat{AFB}$ رأس زاویه‌ای برابر ۶۰° است که ضلع‌هایش از A و B می‌گذرند.
به بیان دیگر تمام نقاط روی کمان $\widehat{AFB}$، پاره‌خط AB را با زاویهٔ ۶۰° می‌بینند.
به کمان $\widehat{AFB}$، کمان‌درخور یا کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره خط AB گفته می شود. به صورت کلی‌تر: مجموعه نقاطی از صفحه که پاره‌خط AB را با زاویهٔ α می‌بینند، کمان‌هایی از دو دایرهٔ مساوی هستند که از B و A می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر ۲α است. به شکل حاصل کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌گویند.



تذکر۱ مفهوم این قضیه این است که تمام نقاطی که پاره‌خط ثابت AB را با زاویهٔ مشخص α می‌بینند، با هم یک شکل (مکان هندسی) را تشکیل می‌دهند. که این شکل دو کمان از دو دایرهٔ مساوی است، چون خود A و B جزء مکان هندسی نیستند، این شکل به صورت ساده‌تر به صورت مقابل است:

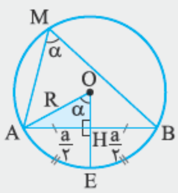
تذکر۲ در شکل قضیه، نقاط روی دو کمان کوچک‌تر $\widehat{AB}$، پاره‌خط AB را با زاویهٔ $۱۸۰^\circ-\alpha$ می‌بینند.

تذکر۳ اندازهٔ کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB، برابر با $۳۶۰^\circ-۲\alpha$ است، یعنی: $\widehat{AMB}=۳۶۰^\circ-۲\alpha$



تذکر۴ مجموعهٔ نقاطی که پاره‌خط AB را با زاویهٔ ۹۰° می‌بینند، دایره‌ای به قطر AB است. (دقت کنید که خود A و B هیچ وقت جزء شکل حاصل نیستند).

دو رابطهٔ مهم در کمان‌درخور



کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط $AB=a$، بخشی از یک دایره است، اگر شعاع این دایره را R در نظر بگیریم، با توجه به شکل مقابل داریم:
از O عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا AB را در H و کمان $\widehat{AB}$ را در E نصف کند، در نتیجه $A\hat{O}H=\widehat{AE}=\widehat{EB}=\alpha$ خواهد بود و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:

$$① \ \overset{\Delta}{OAH}:\hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{AH}{OA}=\frac{\frac{a}{۲}}{R}\Rightarrow R=\frac{a}{۲\sin\alpha}$$

$$② \ \overset{\Delta}{OAH}:\hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow |\tan\alpha|=\frac{AH}{OH}=\frac{\frac{a}{۲}}{OH}\Rightarrow OH=\frac{a}{۲|\tan\alpha|}$$

دقت کنید که OH فاصلهٔ مرکز دایره تا پاره‌خط AB است.

تذکر در واقع این دایره همان دایرهٔ محیطی مثلث MAB است.

1– سلام دوست خوبم، این قسمت از درسنامه را ترام‌دار کردیم به خاطر این که در کتاب درسی تحت عنوان مجلهٔ ریاضی آمده و این یعنی لازم نیست آن را بخوانید ولی ما آن را به خاطر آدم‌های علاقه‌مند به ریاضی (به قول خارجی‌ها)، برای برای آدم‌های دیوانهٔ ریاضی (به قول خودمان) آوردیم. همین!

مثال نقطهٔ M پاره‌خط AB به طول $۳\sqrt{۲}$ را با زاویهٔ ۴۵° می‌بینند، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث MAB و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.

پاسخ با توجه به نتایجی که به دست آوردیم، با جای‌گذاری $\alpha = ۴۵^\circ$ و $a = ۳\sqrt{۲}$ داریم:

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲\sin ۴۵^\circ} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = ۳$$

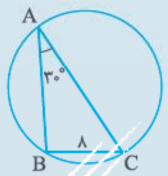
و

$$OH = \frac{a}{۲|\tan\alpha|} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(۱)} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

تست در مثلث ABC طول ضلع $BC = ۸$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$، شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۶　　۳) $۴\sqrt{۳}$　　۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ گزینهٔ ۱ دایرهٔ محیطی مثلث ABC همان دایره‌ای است که کمان‌درخور زاویهٔ ۳۰° روبه‌رو به ضلع $BC = ۸$، بخشی از آن دایره است، پس شعاع آن برابر است با:



$$R = \frac{a}{۲\sin\hat{A}} = \frac{۸}{۲(\frac{۱}{۲})} = ۸$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

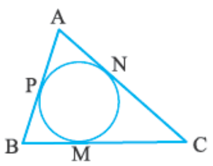
۱۸۹- در مثلثی به اضلاع ۱۵، ۱۲ و ۹، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۹۰- در مثلثی مساحت از نظر عددی ۲ برابر محیط است. مساحت دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

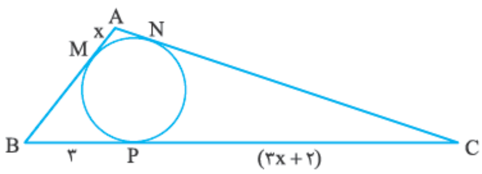
۱) ۸π　　۲) ۱۶π　　۳) ۴π　　۴) π

۱۹۱- در شکل روبه‌رو اگر $BM = ۳$، $AB = ۵$ و $BC = ۷$ باشد، محیط مثلث کدام است؟



۱) ۱۹　　۲) ۲۰
۳) ۱۸　　۴) ۱۷

۱۹۲- در شکل مقابل، اگر محیط مثلث برابر ۳۴ باشد، x کدام است؟

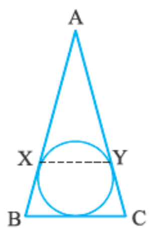


۱) ۳　　۲) ۱/۵
۳) ۲/۵　　۴) ۳/۵

۱۹۳- دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به اضلاع ۵، ۷ و ۸، ضلع بزرگ را در محل تماس به دو تکه به اندازه‌های x و y تقسیم می‌کند، اگر $x > y$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$　　۲) $\frac{۸}{۵}$　　۳) $\frac{۴}{۳}$　　۴) $\frac{۵}{۳}$

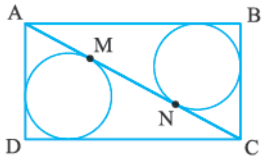
۱۹۴- در شکل مقابل، $AB = AC = ۲BC$ و محیط مثلث برابر ۴۰ است. محیط مثلث AXY کدام است؟



۱) ۲۸
۲) ۳۰
۳) ۲۶
۴) ۳۴

۱۹۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، r شعاع دایرهٔ محاطی است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $r = \frac{S}{P}$　　۲) $۲r = b + c - a$　　۳) $r = \frac{ab}{P}$　　۴) $۲r = \frac{bc}{P}$



۱۹۶- چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است. مطابق شکل، قطر AC را رسم نموده و دایره‌های محاطی دو مثلث ایجادشده را کشیده‌ایم. اگر اضلاع مستطیل ۵ و ۳ باشند، طول MN کدام است؟

۱) ۲ ‏‏ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳ ‏‏ ۴) $۳\sqrt{۲}$

عمران ۱۹۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اندازهٔ شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABH و ACH به ترتیب $r_۱$ و $r_۲$ و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است. اگر $r_۱ = ۶$ و $r_۲ = ۸$ باشد، r کدام است؟

۱) ۱۴ ‏‏ ۲) ۱۲ ‏‏ ۳) ۱۱ ‏‏ ۴) ۱۰

۱۹۸- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶، $r + r_a$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ‏‏ ۲) $۲+۳\sqrt{۳}$ ‏‏ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ‏‏ ۴) $۴+۳\sqrt{۳}$

۱۹۹- اضلاع مثلثی ۱۳، ۱۴ و ۱۵ و مساحت آن ۸۴ است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی که مماس بر ضلع متوسط باشد، کدام است؟

۱) ۱۰ ‏‏ ۲) ۱۲ ‏‏ ۳) ۱۵ ‏‏ ۴) ۲۰

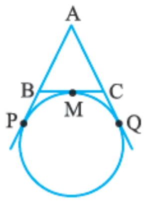
۲۰۰- در مثلث با اضلاع $a = ۵$، $b = ۱۲$ و $c = ۱۳$، شعاع بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۱۵ ‏‏ ۲) ۱۲ ‏‏ ۳) ۱۰ ‏‏ ۴) ۳

۲۰۱- در مثلث ABC که $BC > AC > AB$ کدام صحیح است؟

۱) $r_a > r_b > r_c$ ‏‏ ۲) $r_a > r_c > r_b$ ‏‏ ۳) $r_c > r_b > r_a$ ‏‏ ۴) $r_b > r_c > r_a$

۲۰۲- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC برابر ۲۰ است. اندازه ی AP کدام است؟



۱) ۲۰

۲) ۱۵

۳) ۱۲

۴) ۱۰

۲۰۳- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟ (ریاضی ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ‏‏ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ‏‏ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ‏‏ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۲۰۴- در مثلث ABC، $b = ۵$ و $c = ۲$ است. اگر M و N محل تماس دایره‌های محاطی داخلی و خارجی با ضلع BC باشند، اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۱ ‏‏ ۲) ۲ ‏‏ ۳) ۳ ‏‏ ۴) ۴

۲۰۵- در مثلث ABC، $r_a = ۳$، $r_b = ۴$ و $r_c = ۱۲$ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۱/۵ ‏‏ ۲) ۲ ‏‏ ۳) ۲/۵ ‏‏ ۴) ۳

۲۰۶- اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی دایره‌ای ۱/۵ و اندازهٔ دو ارتفاع مثلث ۶ و ۴ باشد، اندازهٔ ارتفاع سوم مثلث کدام است؟

۱) ۱ ‏‏ ۲) ۲ ‏‏ ۳) ۳ ‏‏ ۴) ۴

۲۰۷- در مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۶ ‏‏ ۲) ۷ ‏‏ ۳) ۵ ‏‏ ۴) ۸

۲۰۸- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ داریم: $a = ۱۲$ و $b = ۲c$، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ‏‏ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ‏‏ ۳) ۶ ‏‏ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۰۹- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایرهٔ محاطی داخلی ۳ است. شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۵ ‏‏ ۲) ۶ ‏‏ ۳) ۷ ‏‏ ۴) ۹

۲۱۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت دایرهٔ محیطی چند برابر مساحت دایرهٔ محاطی داخلی است؟

۱) ۳ ‏‏ ۲) ۴ ‏‏ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ‏‏ ۴) $۳\sqrt{۲}$

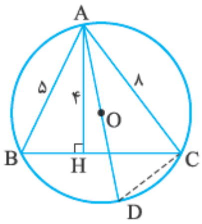
۲۱۱- در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۱۲- در مثلث ABC، حاصل‌ضرب اضلاع ۱۲۰ و مساحت مثلث ۶ است. شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

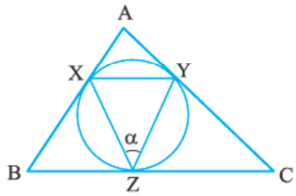
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۱۳- در مثلث ABC، $AB = ۵$ ، $AC = ۸$ و $AH = ۴$ است. قطر دایرهٔ محیطی کدام است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۲۱۴- در شکل مقابل مقدار α کدام است؟



۱) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ۲) $۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$

۳) $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ ۴) به طور دقیق نمی‌توان تعیین کرد.

۲۱۵- در متوازی‌الاضلاع ABCD، دایرهٔ محیطی مثلث ACD، امتداد ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. مثلثABM، همواره از کدام نوع است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) متشابه با مثلث ACD ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه

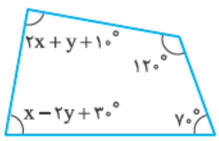
۲۱۶- نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و نقطهٔ O' قرینهٔ آن نسبت به ضلع BC است. اگر $OO' = BC$ باشد، زاویهٔ A کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۲۱۷- می‌توان ثابت کرد که در هر مثلث دلخواه ABC، قرینهٔ مرکز ارتفاعی (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازهٔ زاویهٔ DCB برابر است با:

۱) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ۲) $\frac{\hat{B}}{۲}$ ۳) $۹۰^\circ - \hat{A}$ ۴) $۹۰^\circ - \hat{B}$

۲۱۸- در شکل مقابل ABCD چهارضلعی محاطی است. y کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) ۱۶°

۳) ۱۰° ۴) ۸°

۲۱۹- دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است؛ قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر چه‌قدر است؟

۱) ۲۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۳۰°

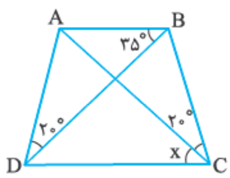
۲۲۰- نیمسازهای زاویه‌های یک ذوزنقه را رسم می‌کنیم و از برخوردشان یک چهارضلعی به دست می‌آید، این چهارضلعی .... *(ریاضی ۸۱)*

۱) مربع است. ۲) مستطیل است. ۳) لوزی است. ۴) محاطی است.

۲۲۱- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟ *(ریاضی ۸۸)*

۱) مستطیل ۲) لوزی ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) محاطی

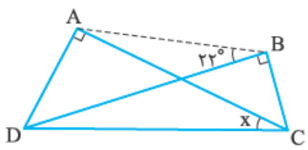
۲۲۲- در شکل مقابل، زاویهٔ x کدام است؟



۱) ۵۵° ۲) ۴۰°

۳) ۳۵° ۴) ۳۰°

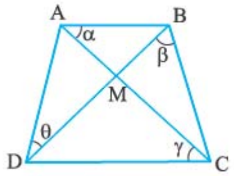
۲۲۳- در شکل مقابل، x چند درجه است؟



۱) ۲۲° ۲) ۴۶°

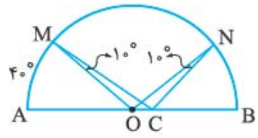
۳) ۶۸° ۴) ۴۴°

۲۲۴- در شکل مقابل، ABCD محاطی است، $\alpha+\beta+\gamma+\theta$ چند درجه است؟



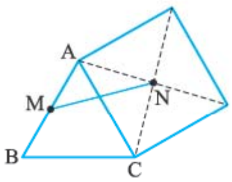
۱) ۱۸۰°
۲) ۲۴۰°
۳) ۲۷۰°
۴) غیرقابل تعیین

عمران ۲۲۵- در نیم‌دایرهٔ روبه‌رو اگر O مرکز نیم‌دایره بوده و $\hat{M}=\hat{N}=10^\circ$ و $\widehat{AM}=40^\circ$ باشند، اندازهٔ کمان BN کدام است؟



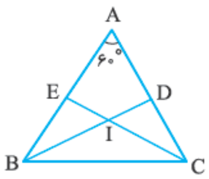
۱) ۱۰°
۲) ۲۰°
۳) ۳۰°
۴) ۴۰°

عمران ۲۲۶- بر روی ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مربعی بنا می‌کنیم. مرکز مربع را N و وسط ضلع AB را M می‌نامیم. اندازهٔ زاویهٔ AMN کدام است؟



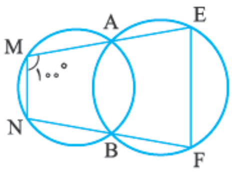
۱) ۴۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۲۲۷- در مثلث ABC، $\hat{A}=60^\circ$ است. اگر نیمسازهای BD و CE یکدیگر را در I قطع کنند و داشته باشیم $AC=8$، $DC=5$ و $CI=6$ اندازهٔ EC کدام است؟



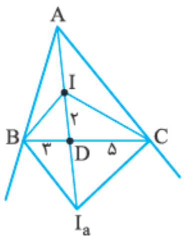
۱) ۸/۵
۲) ۷/۵
۳) $\frac{20}{3}$
۴) ۷

۲۲۸- در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ E کدام است؟



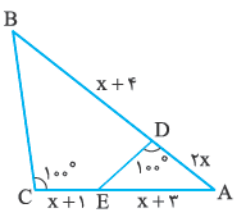
۱) ۱۰۰°
۲) ۹۰°
۳) ۸۰°
۴) ۷۰°

۲۲۹- در شکل مقابل، I و I_a به ترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ABC هستند. طول DI_a کدام است؟



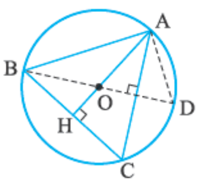
۱) ۶
۲) ۷
۳) ۷/۵
۴) ۹

۲۳۰- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

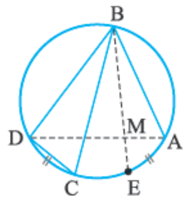


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۳۱- در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویهٔ AOD برابر کدام گزینه است؟ (ریاضی ۹۲)



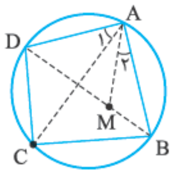
۱) $O\hat{B}C$
۲) $C\hat{A}D$
۳) $O\hat{A}C$
۴) $A\hat{D}O$



۲۳۲- در شکل مقابل، $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ ، $CD = ۳$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ است. اندازهٔ AM کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵



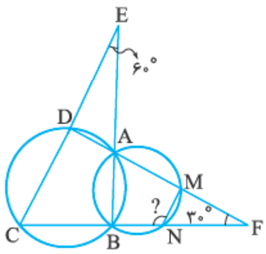
۲۳۳- در شکل مقابل $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ است. حاصل $AD \times BC$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $DM \times AC$

۲) $BM \times AC$

۳) $AB \times CD$

۴) $BD \times BM$



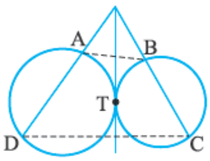
عمران ۲۳۴- در شکل مقابل، اگر $A\hat{F}B = ۳۰^\circ$ و $A\hat{E}D = ۶۰^\circ$ باشند، محیط MNB برابر است با:

۱) ۱۰۵°

۲) ۱۲۰°

۳) ۱۳۵°

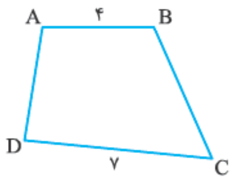
۴) ۱۵۰°



۲۳۵- در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۱) محیطی ۲) محاطی

۳) ذوزنقه ۴) کایت



۲۳۶- در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ محیطی است. محیط چهارضلعی کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱

۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۳۷- در چهارضلعی محیطی $ABCD$، $AB + CD = ۸$ است. محیط چهارضلعی کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰

۲۳۸- در یک چهارضلعی سه نیمساز داخلی همرس‌اند و اندازهٔ سه ضلع متوالی آن، ۱۱، ۱۳ و ۱۷ است. اندازهٔ ضلع چهارم کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۹

۲۳۹- اگر محیط یک چهارضلعی محیطی برابر با ۱۲ و مساحت آن ۱۸ باشد، شعاع دایرهٔ محاطی آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

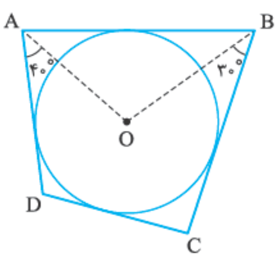
۲۴۰- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر همواره محیطی است؟

۱) متوازی الاضلاع ۲) مستطیل ۳) لوزی ۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۲۴۱- وسط اضلاع مستطیلی را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم، چهارضلعی حاصل ....

۱) محاطی است. ۲) محیطی و محاطی است.

۳) نه محیطی و نه محاطی است. ۴) محیطی است.



۲۴۲- در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی $ABCD$ است. اندازهٔ زاویهٔ AOB کدام است؟

۱) ۷۰°

۲) ۹۰°

۳) ۱۰۰°

۴) ۱۱۰°

۲۴۳- در چهارضلعی محیطی ABCD می‌دانیم که محیط برابر ۲۸ و $\frac{AB}{DC}=\frac{۲}{۵}$ است. حاصل عبارت $\frac{AB^{۲}\times DC^{۲}}{AD+BC}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۰۰}{۷}$ ۲) $\frac{۶۰۰}{۷}$ ۳) $\frac{۸۰۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۷۲۰}{۷}$

۲۴۴- اگر شعاع دایره‌ای که در یک لوزی محاط است برابر ۲ و یکی از قطرهای لوزی ۸ باشد، مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۳۲   ۲) $\frac{۳۲}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۳۵}{\sqrt{۵}}$

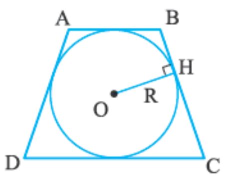
۲۴۵- طول قاعده‌های یک ذوزنقهٔ محیطی ۲ و ۸ است. ارتفاع این ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۲۴۶- یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع ۵ محیط است. اگر مساحت ذوزنقه، ۷۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۲/۵   ۳) ۱۵   ۴) ۷/۵

۲۴۷- اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD $(AB \parallel DC)$ بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده باشد، کدام گزینه نادرست است؟



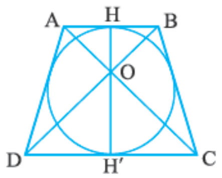
۱) ارتفاع ذوزنقه برابر است با میانگین هندسی دو قاعده.

۲) قطر دایره برابر است با میانگین هندسی دو قاعده.

۳) شعاع دایره برابر است با میانگین هندسی دو ساق.

۴) مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل‌ضرب میانگین حسابی دو قاعده در میانگین هندسی دو قاعده.

۲۴۸- اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD بر دایره به شعاع ۳ محیط باشد، به طوری که $AB=۲\sqrt{۳}$، مساحت مثلث OCD کدام است؟



۱) $\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۱۵\sqrt{۳}$

۳) $۱۸\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

۲۴۹- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{۳۲}{۳}$ واحد بر دایره‌ای محیط است. کوتاه‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا نقاط دایره، چند واحد است؟ *(ریاضی ۸۷)*

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) ۱   ۴) $\sqrt{۳}$

۲۵۰- اگر یک پنج‌ضلعی منتظم درون یک دایره باشد و این دایره درون یک پنج‌ضلعی منتظم دیگر محاط باشد، نسبت محیط و مساحت این دو پنج‌ضلعی به ترتیب کدام است؟ $(\cos ۳۶^\circ \simeq ۰/۸)$

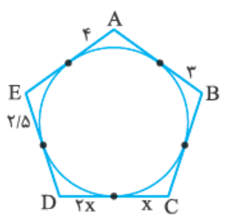
۱) ۰/۶ و ۰/۳۶   ۲) ۰/۸ و ۰/۶۴

۳) $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) بستگی به شعاع دایره دارد.

۲۵۱- شش ضلعی ABCDEF محیطی است. اگر $AB=۲۰$، $BC=۲۲$، $CD=۱۶$، $DE=۱۸$ و $EF=۲۵$، اندازهٔ ضلع AF کدام است؟

۱) ۲۳   ۲) ۱۷   ۳) ۲۱   ۴) ۲۰

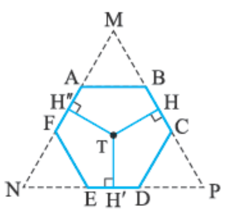
۲۵۲- در شکل مقابل اگر محیط پنج‌ضلعی برابر ۳۱ باشد، x برابر است با:



۱) ۱/۵   ۲) ۲

۳) ۲/۵   ۴) ۳

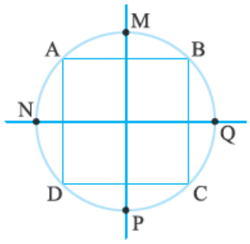
۲۵۳- در شکل مقابل شش‌ضلعی ABCDEF منتظم است. اگر T نقطهٔ دلخواهی درون شش‌ضلعی باشد و بدانیم $TH+TH'+TH''=\sqrt{۳}$ است. مساحت مثلث MNP برابر کدام گزینه می‌شود؟



۱) ۲   ۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۴   ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۵۴- عمودمنصف‌های اضلاع مربعی را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مربع را در چهار نقطه قطع کند. اگر این چهار نقطه را به هم وصل کنیم مساحت چهارضلعی حاصل چند برابر مساحت مربع است؟



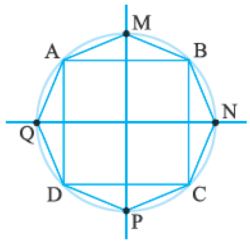
۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۵۵- عمودمنصف‌های اضلاع مربع ABCD را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مربع را در نقاط M، N، P و Q قطع کند. مساحت هشت‌ضلعی AMBNCPDQ کدام است؟ (ضلع مربع ۲ است.)



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۸\sqrt{۲}$

۲۵۶- M نقطه‌ای دلخواه درون یک هفت‌ضلعی منتظم است. اگر مجموع فاصلهٔ نقطهٔ M از اضلاع این هفت‌ضلعی برابر ۱۴ باشد، شعاع دایرهٔ محاطی این هفت‌ضلعی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) بستگی به محل نقطهٔ M دارد.

● از سؤال ۲۵۷ تا ۲۷۱ مربوط است به همان درس‌نامهٔ «زاویهٔ دید» که برای علاقه‌مندان به ریاضی نوشته بودیم. می‌توانید این تست‌ها را حل نکنید.

۲۵۷- شکل مقابل کمان‌درخور کدام زاویه می‌تواند باشد؟

۱) ۷۰° ۲) ۸۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۰°

۲۵۸- دایره‌ای به شعاع ۱/۵ درون یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه محاط است. اگر یکی از زوایای ذوزنقه ۶۰° باشد، محیط آن برابر کدام است؟

۱) $۲(۳+\sqrt{۳})$ ۲) $۲(۳+۲\sqrt{۳})$ ۳) $۳(۳+\sqrt{۳})$ ۴) $۳+۲\sqrt{۳}$

۲۵۹- کمان ۱۲۰° از یک دایره، کمان‌درخور چه زاویه‌ای است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۲۶۰- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط پاره‌خط $AB=\sqrt{۲}$ به زاویهٔ ۴۵° رؤیت می‌شود، قسمتی است از:

۱) دو دایره به شعاع واحد ۲) دو دایره به شعاع $\sqrt{۲}$

۳) دو دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ ۴) دو دایره به شعاع ۲

۲۶۱- کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط $AB=۴$، قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۴ است. زاویهٔ α کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۲۶۲- در مثلث ABC ضلع $BC=۶$ و زاویهٔ $\hat{A}=۳۰^\circ$ است، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن از ضلع BC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۶۳- در مثلث ABC طول ضلع $BC=۸$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$، شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

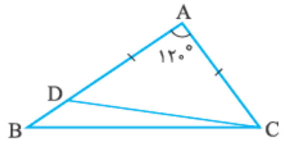
۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۲۶۴- (عمران) مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث‌هایی که ضلع BC در آن‌ها ثابت و $\hat{A}=۸۰^\circ$ باشد، کدام است؟

۱) پاره‌خطی موازی BC ۲) یک دایره

۳) کمانی بزرگ‌تر از نیم‌دایره ۴) کمانی کوچک‌تر از نیم‌دایره

۲۶۵- در شکل مقابل، $\hat{A} = 120^\circ$ و $AD = AC$ است. اگر $BC = 9$ باشد، شعاع کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط BC که از نقطهٔ D عبور می‌کند، کدام است؟



۱) $4/5$
۲) 9
۳) $3\sqrt{3}$
۴) $6\sqrt{3}$

۲۶۶- در مثلث ABC، $BC = 6$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است. اگر محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ B و نیمساز خارجی زاویهٔ C را D بنامیم، مکان هندسی نقطهٔ D کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز وسط BC
۲) قسمتی از دو دایرهٔ برابر به شعاع $2\sqrt{3}$
۳) قسمتی از دو دایرهٔ برابر به شعاع ۶
۴) خطی به موازات ضلع BC

۲۶۷- پاره‌خط AB به طول ۴ واحد در یک صفحه قرار دارد. چند نقطه در این صفحه وجود دارد به طوری که از آن نقاط، AB با زاویهٔ 45° دیده می‌شود و فاصلهٔ آن‌ها از AB برابر $4\sqrt{3}$ باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۲۶۸- پاره‌خط $AB = 3$ در صفحه مفروض است. در این صفحه، چند نقطه مانند P وجود دارند به طوری که $A\hat{P}B = 45^\circ$ و فاصلهٔ نقطهٔ P از وسط پاره‌خط AB برابر ۲ می‌باشد؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) بی‌شمار

۲۶۹- در مثلث ABC، ضلع $BC = 7$ و زاویهٔ $\hat{A} = 45^\circ$ است. بیشترین مقدار h_a کدام است؟

۱) $\frac{7\sqrt{2}}{2} + 7$
۲) $\frac{7\sqrt{2} + 7}{2}$
۳) $7\sqrt{2} + \frac{7}{2}$
۴) $7\sqrt{2} + 7$

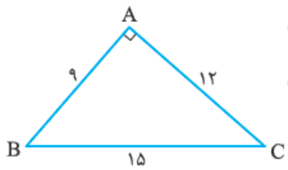
۲۷۰- وتر ثابت AB به فاصلهٔ $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره‌ای به شعاع R می‌باشد و نقطهٔ C روی دایره متحرک است، در حالتی که مساحت مثلث ABC، ماکسیمم باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۷۵

۲۷۱- در مثلثی اندازهٔ یک ضلع $4\sqrt{3}$ و اندازهٔ زاویهٔ مقابل آن 60° است. مساحت دایرهٔ محیطی آن چند برابر π است؟

۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۸۹- گزینهٔ ۱ می‌دانیم شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث از رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$ به دست می‌آید که در آن S مساحت و P نصف محیط مثلث است. با توجه به این‌که اعداد ۱۵، ۱۲ و ۹ فیثاغورسی هستند، می‌توان دریافت که مثلث مذکور قائم‌الزاویه است. بنابراین داریم:



$$S=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{۹\times ۱۲}{۲}=۵۴$$

$$۲P=AB+AC+BC=۹+۱۲+۱۵=۳۶\Rightarrow P=۱۸$$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۵۴}{۱۸}=۳$$

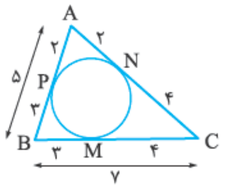
۱۹۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث، از رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$ به دست می‌آید که در آن S مساحت و P نصف محیط مثلث است. لذا داریم: $r=\frac{S}{P}\xrightarrow{S=۲\times ۲P=۴P} r=\frac{۴P}{P}=۴$

دایرهٔ محاطی $S=\pi r^۲\xrightarrow{r=۴} S=\pi\times ۴^۲=۱۶\pi$

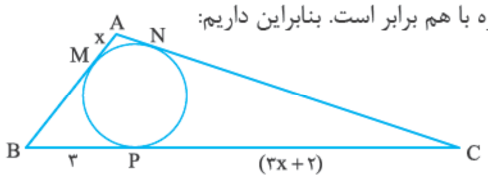
۱۹۱- گزینهٔ ۴ $BC=۷$ و $BM=۳$ است، پس $MC=۴$. حالا به خاطر برابری مماس‌ها می‌رسیم به $BP=BM=۳$ و $CN=CM=۴$. حالا $AB=۵$ بود و این یعنی $AP=۲$ و در نتیجه $AN=AP=۲$.

خب محیط مثلث آماده است:

$$۵+۶+۷=۱۸$$



۱۹۲- گزینهٔ ۱ می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است. بنابراین داریم:



$$AM=AN=x$$

$$BP=BM=۳\qquad\qquad \Rightarrow\begin{cases}AB=AM+BM=x+۳\\AC=AN+CN=۴x+۲\\BC=BP+CP=۳x+۵\end{cases}$$

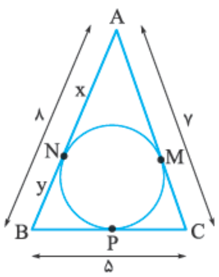
$$CN=CP=۳x+۲$$

محیط $\overset{\Delta}{ABC}:AB+AC+BC=$

$$(x+۳)+(۴x+۲)+(۳x+۵)$$

$$\Rightarrow ۳۴=۸x+۱۰\Rightarrow ۲۴=۸x\Rightarrow x=۳$$

۱۹۳- گزینهٔ ۴ می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه، با هم برابر است. بنابراین داریم:



$$AM=AN\ (۱)$$

$$MC=PC\ (۲)$$

$$BP=BN\ (۳)$$

$$\begin{cases}AM+MC=۷\\PB+PC=۵\end{cases}\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)}۲AN+۲PC+۲PB=۲۰$$

$$AN+NB=۸$$

$$\Rightarrow AN+PC+PB=۱۰\xrightarrow{PB+PC=۵}AN=x=۵$$

$$AB=x+y=۸\xrightarrow{x=۵}y=۸-۵=۳\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۵}{۳}$$

۱۹۴- گزینهٔ ۲

$$BC+AB+AC=۵BC=۴۰$$

$$\Rightarrow BC=۸\Rightarrow AC=AB=۱۶$$

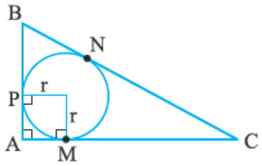
$$\Rightarrow AX=AY=۱۶-\frac{BC}{۲}=۱۲$$

$$\Rightarrow XY=\frac{۱۲}{۱۶}\times ۸=۶$$

$$\Rightarrow ۲P=۱۲+۱۲+۶=۳۰$$

۱۹۵- گزینهٔ ۳ یک فرمول که همه بلدیم $r=\frac{S}{P}$ است.

حالا در مثلث قائم‌الزاویه $S=\frac{bc}{۲}$ و در نتیجه $r=\frac{bc}{۲P}$. این یعنی $۲r=\frac{bc}{P}$. بنابراین (۱) و (۴) درست هستند.

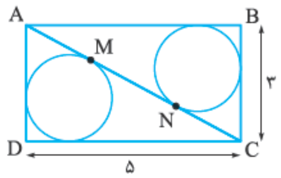


حالا به این شکل نگاه کنید. قبول دارید که $AM=AP=P-a$؟ خب نتیجه می‌شود که $r=P-a$. بیایید رابطه را ساده‌تر کنیم:

$$r=P-a \Rightarrow ۲r=۲P-۲a$$
$$\Rightarrow ۲r=a+b+c-۲a=b+c-a$$

این هم از درستی (۲).

۱۹۶- گزینهٔ ۱ فرض کنیم محیط مثلث‌های ABC و ADC برابر $۲P$ باشد. پس در مثلث ABC می‌توانیم بگوییم:

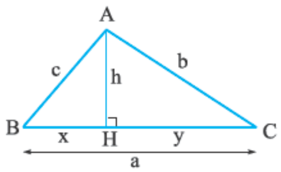


$$AN=P-BC=P-۳ \qquad NC=P-AB=P-۵$$

حالا حتماً قبول دارید که $AM=NC$ است، پس $AM=P-۵$

و این یعنی: $MN=AN-AM=P-۳-(P-۵)=۲$

۱۹۷- گزینهٔ ۴ (۴) در مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را بکشیم، دو مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آید. حالا سه مثلث قائم‌الزاویه داریم و خیالتان را راحت‌تر کنیم. بین هر سه جزء متناظر در مثلث‌های ABC، ABH و ACH رابطهٔ فیثاغورس برقرار است. پس در این‌جا $r^۲=r_۱^۲+r_۲^۲$ یعنی $r=۱۰$.



اگر اثباتش را می‌خواهید، دقت کنید: $r=\frac{S}{P}$

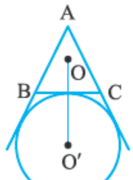
مثلث‌های ABH و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه $\frac{c}{a}$ است. پس:

$$S_۱=(\frac{c}{a})^۲S \quad , \quad P_۱=(\frac{c}{a})P \Rightarrow r_۱=(\frac{c}{a})r$$

به همین ترتیب می‌رسیم به $r_۲=(\frac{b}{a})r$. حالا برویم سراغ رابطهٔ فیثاغورس:

$$r_۱^۲+r_۲^۲=(\frac{c}{a})^۲r^۲+(\frac{b}{a})^۲r^۲$$
$$=r^۲(\frac{c^۲+b^۲}{a^۲})=r^۲(\frac{a^۲}{a^۲})=r^۲$$

۱۹۸- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر یک ضلع در مثلث متساوی‌الاضلاع مماس خارج‌اند، خواهیم داشت:



$$OO'=r+r_a=\frac{S}{P}+\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a}+\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{a}{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a+\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \xrightarrow{a=۶} OO'=\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$$

۱۹۹- گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{۱۵+۱۴+۱۳}{۲}=۲۱ \\ S=۸۴ \end{array}\right\} \Rightarrow r_b=\frac{S}{P-b}=\frac{۸۴}{۲۱-۱۴}=۱۲$$

۲۰۰- گزینهٔ ۱ دقت کنید که این مثلث، قائم‌الزاویه است؛ چون $۱۳^۲=۱۲^۲+۵^۲$ یا به قول خفن‌ها اضلاعشان فیثاغورسی است! پس مساحت مثلث می‌شود $P=\frac{۱۳+۱۲+۵}{۲}=۱۵ , S=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۵=۳۰$. حالا برویم سراغ شعاع‌ها:

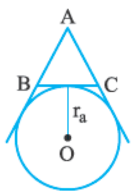
$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳$$

$$r_b=\frac{S}{P-b}=\frac{۳۰}{۳}=۱۰$$

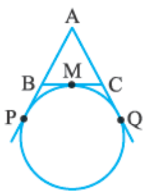
$$r_c=\frac{S}{P-c}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

بنابراین بزرگ‌ترین شعاع می‌شود ۱۵.

۲۰۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر هر ضلع مثلث ABC، با مساحت S و محیط $۲P$ برابر است با:



$$r_a=\frac{S}{P-a} \quad , \quad r_b=\frac{S}{P-b} \quad , \quad r_c=\frac{S}{P-c}$$



$$BC>AC>AB$$
$$\Rightarrow P-BC<P-AB$$
$$\Rightarrow \frac{S}{P-BC}>\frac{S}{P-AC}>\frac{S}{P-AB}$$
$$\Rightarrow \frac{S}{P-a}>\frac{S}{P-b}>\frac{S}{P-c}$$
$$r_a>r_b>r_c$$

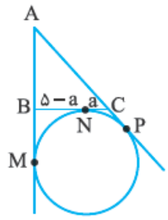
۲۰۲- گزینهٔ طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است، بنابراین داریم:

$$CQ = CM \quad \text{و} \quad BM = BP \quad \text{و} \quad AP = AQ$$

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC} = AB + AC + BC$$
$$= AB + AC + (BM + CM)$$
$$= AB + AC + (BP + CQ)$$
$$= AP + AQ = ۲AP$$

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC} = ۲AP \Rightarrow ۲۰ = ۲AP \Rightarrow AP = ۱۰$$

۲۰۳- گزینهٔ با توجه به این‌که طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} CN = a \Rightarrow CP = a \\ BN = ۵-a \Rightarrow BM = ۵-a \end{array}\right\}$$

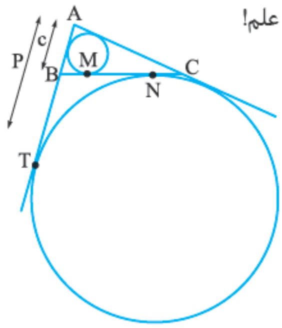
$$\xrightarrow{AM=AP} AB + BM = AC + CP$$

$$\Rightarrow ۳ + ۵ - a = ۷ + a \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{CN}{BN} = \frac{a}{۵-a} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۱}{۹}$$

۲۰۴- گزینهٔ MN برابر است با $b - c$ یعنی ۳.

این هم اثباتش برای علاقه‌مندان به علم!



$$BM = P - b$$
$$AT = P \quad \text{و} \quad AB = c$$
$$\Rightarrow BT = P - c$$
$$\Rightarrow BN = P - c$$

درنتیجه MN می‌شود $BN - BM$ یعنی $P - c - (P - b) = b - c$

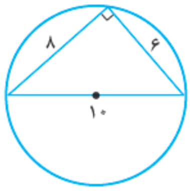
۲۰۵- گزینهٔ این‌جا فرمول معروف $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$ به دردمان می‌خورد. پس $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$ واین یعنی $r = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$.

۲۰۶- گزینهٔ می‌توانیم از این فرمول معروف استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

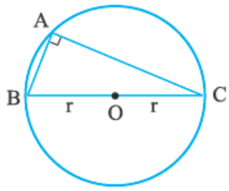
پس در این‌جا می‌رسیم به این معادله: $\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳}$ و در نتیجه $\frac{۱}{h_a} = \frac{۱}{۴}$ و این یعنی $h_a = ۴$.

۲۰۷- گزینهٔ از اضلاع این مثلث مشخص است که قائم‌الزاویه است. $(۱۰^۲ = ۶^۲ + ۸^۲)$



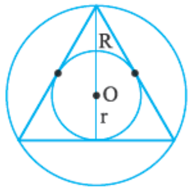
در مثلث قائم‌الزاویه می‌دانیم که وتر یکی از قطرهای دایرهٔ محیطی است و این یعنی $۲r = ۱۰$. پس $r = ۵$.

۲۰۸- گزینهٔ می‌دانیم مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث قائم‌الزاویه، وسط وتر است و در نتیجه شعاع آن برابر با نصف طول وتر است. بنابراین داریم:



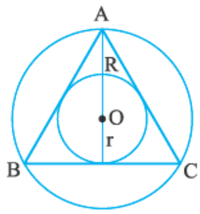
$$r = \frac{BC}{۲} \xrightarrow{BC=a=۱۲} r = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

۲۰۹- گزینهٔ شعاع دایرهٔ محیطی در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع دو برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است. پس در این‌جا شعاع دایرهٔ محیطی می‌شود ۶. به شکل روبه‌رو نگاه کنید.



محل برخورد میانه‌ها $O \Rightarrow \frac{R}{r} = ۲$

۲۱۰- گزینهٔ در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکز دایره‌های محیطی و محاطی داخلی و مرکز ثقل بر هم منطبق‌اند. همچنین می‌دانیم که در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند. بنابراین، می‌توان گفت که شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، دو برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن است. لذا خواهیم داشت:



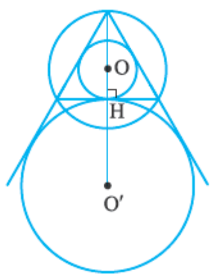
$$R = ۲r \Rightarrow \frac{S_{\text{محیطی}}}{S_{\text{محاطی}}} = \frac{\pi R^۲}{\pi r^۲} = \frac{۴r^۲}{r^۲} = ۴$$

۲۱۱- گزینهٔ شعاع دایرهٔ محیطی در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌شود:

$$R = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

شعاع دایرهٔ محاطی خارجی در همین مثلث می‌شود: $r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هم می‌شود: $r = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$



حالا در این‌جا OO' را می‌خواهیم که اگر به این شکل نگاه کنید، می‌شود: $OH + HO'$ یعنی $r + r_a$. پس:

$$OO' = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

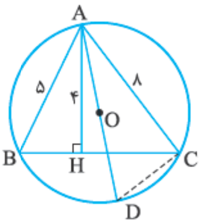
$$= \frac{\sqrt{۳}}{۶} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۶} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۱۲- گزینهٔ

شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با $\frac{abc}{۴S}$، پس $R=\frac{۱۲۰}{۲۴}=۵$.

۲۱۳- گزینهٔ

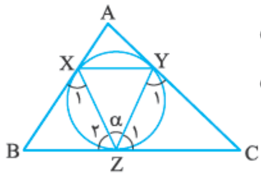
چهارضلعی ACDB محاطی است. پس $\hat{B}=\hat{D}$. از طرفی $A\hat{H}B=A\hat{C}D=۹۰^\circ$. (دقت کنید که زاویهٔ ACD روبه‌روی نیم‌دایره است) بنابراین نتیجه می‌گیریم: $\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ADC}$. برویم سراغ نسبت تشابه:



$$\frac{AB}{AD}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۵}{AD}=\frac{۴}{۸}$$
$$\Rightarrow AD=۱۰$$

۲۱۴- گزینهٔ

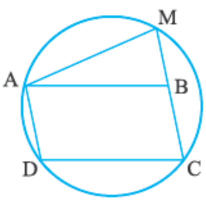
می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره، با هم برابر است، پس مثلث‌های BXZ و CYZ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{CYZ}:\hat{Y}_۱+\hat{Z}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{Y}_۱=\hat{Z}_۱}۲\hat{Z}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow\hat{Z}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{C}}{۲}\qquad(۱)$$
$$\overset{\Delta}{BXZ}:\hat{X}_۱+\hat{Z}_۲+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{\hat{X}_۱=\hat{Z}_۲}۲\hat{Z}_۲+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow\hat{Z}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}\qquad(۲)$$
$$\hat{Z}_۱+\hat{Z}_۲+\alpha=۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۱۸۰^\circ-\hat{C}}{۲}+\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}+\alpha=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow\alpha=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}$$
$$\xrightarrow{\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}}\alpha=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}$$

۲۱۵- گزینهٔ

با توجه به این‌که کمان‌های محصور بین دو خط موازی با هم برابرند، داریم:



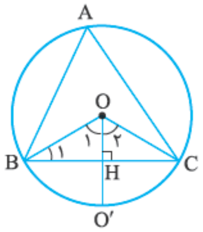
$$AD\parallel BC\Rightarrow\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow AM=CD\ (۱)$$

متوازی‌الاضلاع $ABCD\begin{cases}AB=CD\\AM=CD\ (۱)\end{cases}\Rightarrow AB=AM$

با توجه به این‌که دو ضلع AB و AM با هم برابرند، می‌توان نتیجه گرفت مثلث AMB متساوی‌الساقین است.

۲۱۶- گزینهٔ

از نقطهٔ O به رأس B و C وصل می‌کنیم و با توجه به این‌که نقطهٔ O نسبت به ضلع BC متقارن است، داریم:

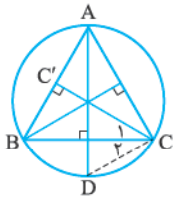


$$OO'=BC\xrightarrow{BC=۲BH}OH+O'H=۲BH$$
$$\xrightarrow{OH=O'H}۲OH=۲BH\Rightarrow OH=BH$$
$$\overset{\Delta}{OBH}:OH=BH\Rightarrow\hat{O}_۱=\hat{B}_۱=۴۵^\circ$$
$$O_۱=۴۵^\circ\xrightarrow{O_۱=\overset{\frown}{O'B}}\overset{\frown}{O'B}=۴۵^\circ$$
$$\xrightarrow{\overset{\frown}{O'B}=\overset{\frown}{O'C}}\overset{\frown}{O'B}=\overset{\frown}{O'C}=۴۵^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ$$

می‌دانیم: زاویهٔ محاطی $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\xrightarrow{\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ}\hat{A}=\frac{۹۰}{۲}=۴۵^\circ$

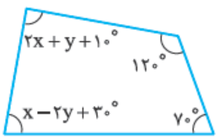
۲۱۷- گزینهٔ

زاویهٔ $C_۲$ را می‌خواهیم که به دلیل تقارن، همان $\hat{C}_۱$ است و این زاویه هم برابر می‌شود با $۹۰^\circ-\hat{B}$ (به مثلث BCC' نگاه کنید.)



۲۱۸- گزینهٔ

در چهارضلعی محاطی مجموع زوایای مقابل ۱۸۰° است. خب بیایید این را پیاده کنیم:

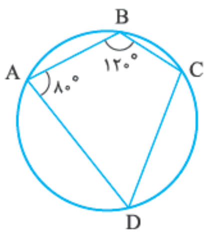


$$\begin{cases}x-۲y+۳۰^\circ+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\\۲x+y+۱۰^\circ+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲y=۳۰^\circ\\۲x+y=۱۰۰^\circ\end{cases}$$

با حل این دو معادله و دو مجهول می‌رسیم به $x=۴۶^\circ$ و $y=۸^\circ$.

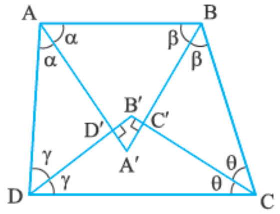
۲۱۹- گزینهٔ

می‌دانیم مجموع زوایای مقابل در هر چهارضلعی محاطی برابر ۱۸۰° است. بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{A}=۸۰^\circ}\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}=۱۰۰^\circ\\\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{B}=۱۲۰^\circ}\hat{D}=۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ=۶۰^\circ\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\hat{C}-\hat{D}=۱۰۰^\circ-۶۰^\circ=۴۰^\circ$$

۲۲۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در هر ذوزنقه، زوایای مجاور به یک ساق مکمل یکدیگرند.



بنابراین، با توجه به شکل داریم:

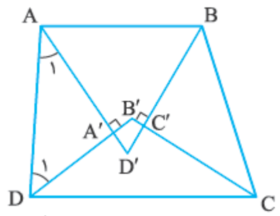
$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta+۲\theta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta+\theta=۹۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۲\gamma=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\gamma=۹۰^\circ\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{BCC'}:\hat{\beta}+\hat{\theta}+\hat{C}'=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}'=۹۰^\circ\\ \overset{\Delta}{ADD'}:\alpha+\gamma+\hat{D}'=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}'=۹۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{C}'+\hat{D}'=۱۸۰^\circ$$

با توجه به این‌که در هر چهارضلعی که زوایای مقابل مکمل باشند، آن چهارضلعی محاطی است، پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است.

۲۲۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در هر ذوزنقه زوایای مجاور به یک ساق مکمل یکدیگرند. بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{AA'D}:\hat{A}_۱+\hat{D}_۱+\hat{A}'=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}'=۱۸۰^\circ-(\hat{A}_۱+\hat{D}_۱)$$

$$\xrightarrow{A_۱=\frac{\hat{A}}{۲},D_۱=\frac{\hat{D}}{۲}} \hat{A}'=۱۸۰^\circ-(\frac{\hat{A}+\hat{D}}{۲})$$

$$\xrightarrow{\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ} \hat{A}'=۱۸۰^\circ-\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

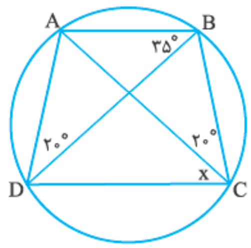
به همین ترتیب، در مثلث BCC' نیز می‌توان نتیجه گرفت: $\hat{C}'=۹۰^\circ$.
بنابراین، در چهارضلعی $A'B'C'D'$ نیز خواهیم داشت:

$$\hat{A}'+\hat{C}'=۹۰^\circ+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

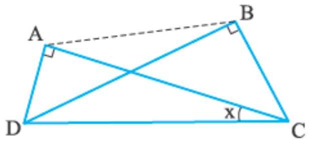
$$\Rightarrow \hat{B}'+\hat{D}'=۳۶۰^\circ-(\hat{A}'+\hat{C}')=۱۸۰^\circ$$

لذا با توجه به تعریف چهارضلعی محاطی، می‌توان نتیجه گرفت $A'B'C'D'$ یک چهارضلعی محاطی است.

۲۲۲- گزینهٔ ۴ دو زاویهٔ ۲۰° که داده‌شده به ما این پیام را می‌دهد که چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. پس x هم ۳۵° می‌شود چون این دو زاویهٔ روبه‌روی کمان AD قرار می‌گیرند.

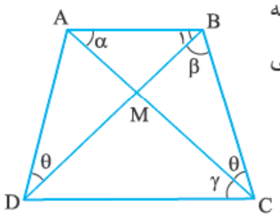


۲۲۳- گزینهٔ ۱ زوایای مقابل به یک ضلع (کمان) در هر چهارضلعی محاطی با هم برابرند. با توجه به این که زوایای روبه‌رو به ضلع CD $(\hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ)$ با هم برابرند، می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. پس، زوایای مقابل به ضلع AD نیز با هم برابرند و داریم:



$ABCD$ محاطی است. $\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}=۲۲^\circ$

۲۲۴- گزینهٔ ۱ زوایای مقابل به یک ضلع (کمان) در هر چهارضلعی محاطی برابرند. بنابراین داریم:



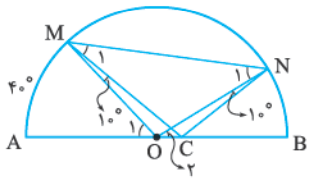
$$A\hat{C}B=A\hat{D}B=\theta$$

$$C\hat{D}B=B\hat{A}C=\alpha$$

$$\overset{\Delta}{BCD}:D\hat{B}C+B\hat{C}D+C\hat{D}B=۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow[C\hat{D}B=\alpha]{D\hat{B}C=\beta,\,B\hat{C}D=\gamma+\theta} \alpha+\beta+\gamma+\theta=۱۸۰^\circ$$

۲۲۵- گزینهٔ ۲ زوایای مقابل به یک ضلع و کمان، در هر چهارضلعی محاطی با هم برابرند؛ پس داریم:



$\hat{N}=\hat{M}=۱۰^\circ \Rightarrow$ چهارضلعی $OMNC$ محاطی بوده

$$\Rightarrow \hat{O}_{۱\,مرکزی}=۴۰^\circ \Rightarrow \hat{N}=۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{N}=\hat{N}_۱+۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۴۰^\circ=\hat{N}_۱+۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{N}_۱=۳۰^\circ$$

و از آن‌جا که ON و OM هر دو شعاع دایره‌اند، پس مثلث OMN متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat{M}=\hat{N}_۱$

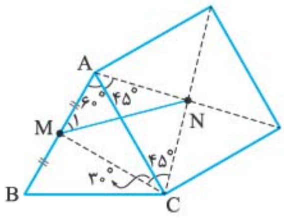
$$\hat{M}=\hat{N}_۱ \Rightarrow \hat{M}_۱+۱۰^\circ=۳۰^\circ \Rightarrow M_۱=۲۰^\circ$$

و در چهارضلعی محاطی $OCNM$، $M_۱$ و $O_۲$ رو به یک ضلع‌اند؛ پس با هم برابرند.

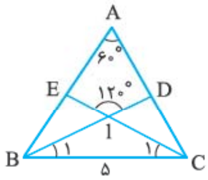
$$\hat{O}_۲=\hat{M}_۱ \Rightarrow \hat{O}_۲=۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BN}=\hat{O}_{۲\,مرکزی}=۲۰^\circ$$

۲۲۶- گزینهٔ ۱ بیایید در مثلث ABC میانهٔ CM را بکشیم. قبول دارید که این میانه نیمساز هم هست؟ پس زوایای نوشته‌شده در شکل را تأیید می‌کنید. حالا اگر دقت کنیم، می‌بینیم در چهارضلعی ANCM مجموع دو زاویهٔ مقابل ۱۸۰° است. بنابراین این چهارضلعی محاطی است و در نتیجه: $A\hat{M}N = A\hat{C}N = ۴۵^\circ$.



۲۲۷- گزینهٔ ۳ چهارضلعی AEID محاطی است، یعنی از رئوس آن دایره‌ای عبور می‌کند؛ زیرا:



$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}=۱۲۰^\circ$$

$$\xrightarrow[\hat{C}=۲\hat{C}_۱]{\hat{B}=۲\hat{B}_۱} ۲\hat{B}_۱+۲\hat{C}_۱=۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۶۰^\circ$$

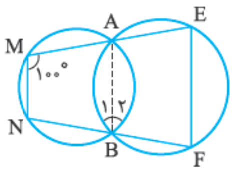
$$\hat{I}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۱+\hat{C}_۱)=۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{I}=۱۸۰^\circ$$

در نتیجه طبق روابط طولی دایره داریم:

$$۱)\ CD\times CA = CI\times CE$$

$$\Rightarrow ۵\times ۸ = ۶\times CE \Rightarrow CE=\frac{۴۰}{۶}=\frac{۲۰}{۳}$$

۲۲۸- گزینهٔ ۳ بیایید A را به B وصل کنیم. حالا دو چهارضلعی محاطی داریم: AMNB و AEFB. پس $\hat{M}+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ$ و این یعنی $\hat{B}_۱=۸۰^\circ$. در نتیجه $\hat{B}_۲=۱۰۰^\circ$. از طرفی هم $\hat{B}_۲+\hat{E}$ ‏۱۸۰° است. بنابراین در نهایت می‌رسیم به $\hat{E}=۸۰^\circ$.

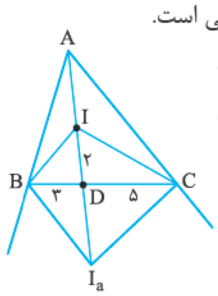


می‌توان گفت که چنین چهارضلعی‌هایی ذوزنقه هستند؛ یعنی در این‌جا $MN \parallel EF$.

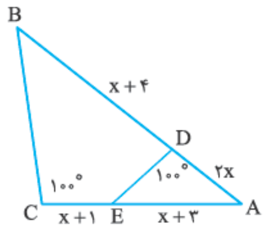
۲۲۹- گزینهٔ ۳ دقت کنید که چهارضلعی $BICI_a$ محاطی است، چون BI و BI_a نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ B هستند. (چرا؟) پس $I\hat{B}I_a=۹۰^\circ$. همین‌جوری می‌رسیم به $I\hat{C}I_a=۹۰^\circ$ و این یعنی این چهارضلعی که گفتیم، محاطی است.

حالا می‌توانیم از روابط طولی استفاده کنیم که به ما می‌گوید $ID\times DI_a = BD\times DC$.

در نتیجه $DI_a = ۷/۵$.



۲۳۰- گزینهٔ ۲ زاویهٔ BDE می‌شود $۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$. پس زوایای مقابل چهارضلعی BDEC مکمل‌اند و این یعنی چهارضلعی BDEC محاطی است.



بنابراین می‌توانیم روابط طولی را برای امتداد وترهای BD و CE بنویسیم:

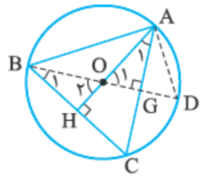
$$AD\times AB = AE\times AC$$

$$\Rightarrow ۲x(۳x+۴)=(x+۳)(۲x+۴)$$

$$\Rightarrow ۶x^۲+۸x=۲x^۲+۱۰x+۱۲$$

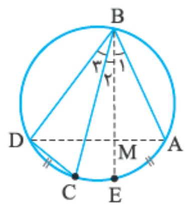
$$\Rightarrow ۴x^۲-۲x-۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \checkmark \\ x=-\frac{۳}{۲} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۳۱- گزینهٔ ۴ در مثلث AOG می‌توانیم بگوییم $\hat{O}_۱+\hat{A}_۱=۹۰^\circ$.



در مثلث AHC می‌توانیم بگوییم $\hat{C}+\hat{A}_۱=۹۰^\circ$. پس $\hat{O}_۱=\hat{C}$ است. حالا چهارضلعی ABCD محاطی است و در نتیجه $\hat{C}=\hat{D}$. بنابراین $\hat{O}_۱=\hat{D}$.

۲۳۲- گزینهٔ ۲ چهارضلعی ABCD محاطی است. پس $\hat{A}=\hat{C}$. کمان‌های AE و CD هم برابرند، در نتیجه $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$. پس دو مثلث ABM و CBD متشابه‌اند. این هم نسبت تشابه:

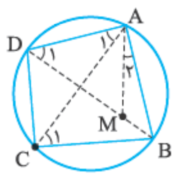


$$\frac{AB}{CB}=\frac{AM}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{۸}=\frac{AM}{۳}$$

$$\Rightarrow AM=\frac{۱۸}{۸}=۲/۲۵$$

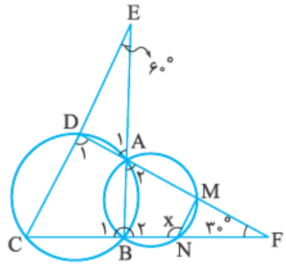
۲۳۳- گزینهٔ ۱ چهارضلعی ABCD محاطی است، پس $\hat{C}_۱=\hat{D}_۱$. بنابراین با توجه به این‌که $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ می‌رسیم به این‌که دو مثلث ABC و AMD متشابه‌اند. این هم از نسبت تشابه:



$$\frac{AD}{AC}=\frac{DM}{BC}$$

$$\Rightarrow AD\times BC = AC\times DM$$

۲۳۴- گزینهٔ ۳ در هر چهارضلعی محاطی، زوایای روبه‌رو مکمل یکدیگرند. بنابراین داریم:



$\overset{\Delta}{ADE}$: زاویهٔ خارجی $\hat{D}_۱ = A_۱ + \hat{E} = \hat{A}_۱ + ۶۰°$ (۱)

$\overset{\Delta}{ABF}$: زاویهٔ خارجی $\hat{B}_۱ = A_۲ + \hat{F} = \hat{A}_۲ + ۳۰°$ (۲)

$ABCD$ چهارضلعی محاطی: $\hat{B}_۱ + \hat{D}_۱ = ۱۸۰° \xrightarrow{(۱),(۲)}$

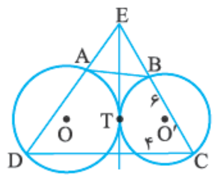
$A_۱ + ۶۰° + A_۲ + ۳۰° = ۱۸۰° \xrightarrow{\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲}$

$۲\hat{A}_۲ = ۹۰° \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۴۵°$

چهارضلعی $ABNM$ محاطی است، لذا خواهیم داشت:

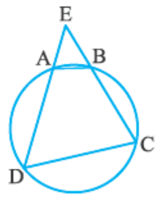
$\hat{A}_۲ + \hat{N} = ۱۸۰° \xrightarrow{\hat{A}_۲ = ۴۵°} \hat{N} = ۱۸۰° - ۴۵° = ۱۳۵°$

۲۳۵- گزینهٔ ۲ با توجه به روابط طولی در دایره داریم:



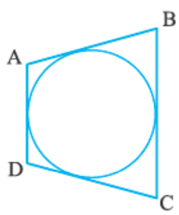
$$\begin{cases} ET^۲ = EB \times CE \\ ET^۲ = AE \times DE \end{cases} \Rightarrow BE \times CE = AE \times DE$$

با توجه به رابطهٔ به دست آمده در بالا، می‌توان نتیجه گرفت که $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی بوده به طوری که وترهای BC و AD در خارج دایره متقاطع می‌باشند.



۲۳۶- گزینهٔ ۳ در چهارضلعی محیطی $AB + DC$ می‌شود $AD + BC$. پس $AD + BC = ۱۱$ و این یعنی محیط برابر است با $۲ \times ۱۱ = ۲۲$.

۲۳۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابر است. بنابراین داریم:

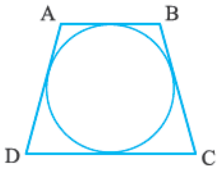


$AB + CD = AD + BC \xrightarrow{AB + CD = ۸} AD + BC = ۸$

پس محیط چهارضلعی برابر است با:

$AB + CD + AD + BC = ۱۶$

۲۳۸- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که چهارضلعی سه نیمساز همرس دارد، پس می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز رأس چهارم نیز از محل همرسی سه نیمساز دیگر می‌گذرد و در نتیجه چهارضلعی محیطی است. با توجه به این‌که در هر چهارضلعی محیطی، مجموع طول‌های اضلاع مقابل با هم برابر است، بنابراین داریم:



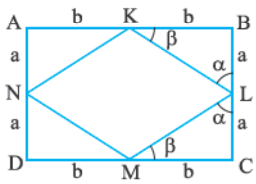
$AB + CD = AD + BC$

$\Rightarrow \overset{۲۸}{\cancel{۱۱ + ۱۷}} = ۱۳ + x \Rightarrow x = ۱۵$

۲۳۹- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ محاطی برای هر شکلی می‌شود $\frac{S}{P}$ پس $r = \frac{۱۸}{۶} = ۳$.

۲۴۰- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که مجموع اضلاع مقابل در هر لوزی با هم برابر است، می‌توان گفت این چهارضلعی در تمامی حالات، محیطی است.

۲۴۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع مقابل با هم برابر است. با توجه به این‌که مثلث‌های BKL، DNM، CLM و AKN بنا بر دو ضلع و زاویهٔ بین برابرند، داریم:



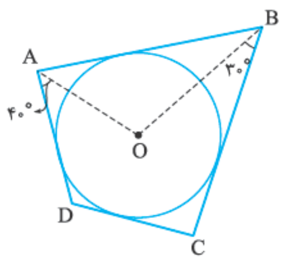
$\overset{\Delta}{AKN} \equiv \overset{\Delta}{DNM} \equiv \overset{\Delta}{CLM} \equiv \overset{\Delta}{BKL}$

$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} KL = LM = MN = KN$

$\Rightarrow KN + LM = KL + MN$

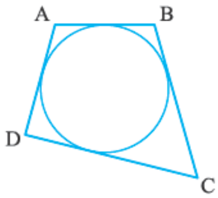
و این شرط لازم و کافی برای چهارضلعی محیطی‌بودن $KLMN$ است. و از آن‌جا که در مورد مکمل‌بودن زوایای مقابل در چهارضلعی $KLMN$ نمی‌توان اظهارنظری کرد، پس چهارضلعی مذکور در حالت کلی چهارضلعی محاطی نیست.

۲۴۲- گزینهٔ ۴ مرکز دایرهٔ محاطی محل برخورد نیمساز زوایا است. پس BO و AO نیمساز هستند. این یعنی $O\hat{A}B = ۴۰°$ و $O\hat{B}A = ۳۰°$. در نتیجه در مثلث ABO:



$\hat{O} = ۱۸۰° - ۷۰° = ۱۱۰°$

۲۴۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابر بوده و مساوی با نصف محیط چهارضلعی است، پس:



$$AB+CD=AD+BC=$$

$$\frac{۲۸}{۲}=۱۴ \Rightarrow AB+CD=۱۴\ (۱)$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow AB=\frac{۲}{۵}CD\ (۲)$$

حال با استفاده از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

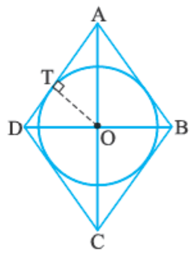
$$AB+CD=۱۴ \xrightarrow{AB=\frac{۲}{۵}CD} \frac{۲}{۵}CD+CD=۱۴$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۵}CD=۱۴$$

$$\Rightarrow CD=۱۰\ ,\ AB=۴$$

$$\frac{AB^۲\times DC^۲}{AD+BC} \xrightarrow{AD+BC=۱۴} \frac{۴^۲\times ۱۰^۲}{۱۴}=\frac{۱۶۰۰}{۱۴}=\frac{۸۰۰}{۷}$$

۲۴۴- گزینهٔ ۳ با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AOT}$ داریم:



$$OA^۲=OT^۲+AT^۲$$

$$\xrightarrow{OA=\frac{AC}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴} ۱۶=۴+AT^۲$$

$$\Rightarrow AT^۲=۱۲ \Rightarrow AT=۲\sqrt{۳}$$

حال طبق رابطهٔ زیر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD داریم:

$$OA^۲=AT\times AD \Rightarrow ۱۶=۲\sqrt{۳}(۲\sqrt{۳}+DT)$$

$$\Rightarrow ۱۶=۱۲+۲\sqrt{۳}DT$$

$$\Rightarrow ۲=\sqrt{۳}DT \Rightarrow DT=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

حال طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ODT داریم:

$$OD^۲=OT^۲+DT^۲$$

$$\Rightarrow OD^۲=۴+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$

$$\Rightarrow OD=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

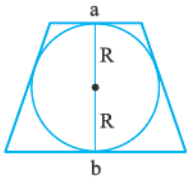
$$BD=۲OD=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

$$ABCD \text{ مساحت لوزی } =\frac{AC\times BD}{۲}=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}\times ۸\times\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{۳۲\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$

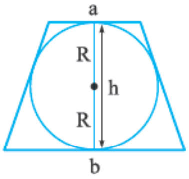
۲۴۵- گزینهٔ ۲ ارتفاع ذوزنقهٔ محیطی، می‌شود میانگین هندسی دو قاعده. پس $h^۲=۲\times ۸=۱۶$ و $h=۴$.

۲۴۶- گزینهٔ ۴ مساحت ذوزنقه برابر است با $\frac{a+b}{۲}\times h$ که h برابر است با قطر دایره، یعنی ۱۰، پس $۷۵=\frac{a+b}{۲}\times ۱۰$ و در نتیجه $a+b=۱۵$. حالا می‌دانیم که در ذوزنقهٔ محیطی ساق برابر می‌شود با میانگین حسابی دو قاعده. پس در اینجا طول ساق ۷/۵ است.



۲۴۷- گزینهٔ ۳ ۱ و ۲ که تابلو درست هستند.

۴



$$S=\frac{a+b}{۲}\times h=\underbrace{(\frac{a+b}{۲})}_{\text{میانگین‌حسابی‌دوقاعده}}\times\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{میانگین‌حسابی‌دوقاعده}}$$

۲۴۸- گزینهٔ ۳

$$۴r^۲=AB\times CD$$

$$\Rightarrow ۴\times ۹=۲\sqrt{۳}\times CD$$

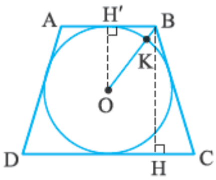
$$\Rightarrow CD=۶\sqrt{۳}$$

$$\frac{OH'}{OH}=\frac{CD}{AB}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=۳$$

$$\Rightarrow OH'=\frac{۳}{۴}\times ۶=۴/۵$$

$$\Rightarrow S_{OCD}=\frac{۴/۵\times ۶\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۴۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع مقابل با هم برابر است. بنابراین داریم:



$$AB+CD=AD+BC$$

$$\xrightarrow{AD=BC} ۲BC=۶+\frac{۳۲}{۳}=\frac{۵۰}{۳} \Rightarrow BC=\frac{۲۵}{۳}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} HC=\frac{CD-AB}{۲}=\frac{۷}{۳} \\ BC=\frac{۲۵}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow BC^۲=BH^۲+HC^۲$$

$$\Rightarrow BH^۲=(\frac{۲۵}{۳})^۲-(\frac{۷}{۳})^۲=۶۴ \Rightarrow BH=۸$$

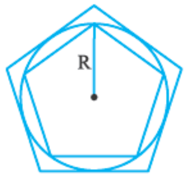
طول ارتفاع ذوزنقه با طول قطر دایره برابر است، لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OH'=\frac{BH}{۲}=۴ \\ BH'=\frac{AB}{۲}=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow OB^۲=OH'^۲+BH'^۲$$

$$=۴^۲+۳^۲=۲۵ \Rightarrow OB=۵$$

$$BK=OB-OK=۵-۴=۱$$

۲۵۰- گزینهٔ ۲ ضلع پنج‌ضلعی کوچک‌تر می‌شود $2R\sin\frac{180^\circ}{5}$ یعنی $2R\sin 36^\circ$ و ضلع پنج‌ضلعی بزرگ‌تر هم $2R\tan\frac{180^\circ}{5}$ یعنی $2R\tan 36^\circ$ است.

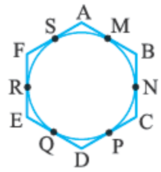


این دو پنج‌ضلعی متشابه‌اند و نسبت تشابه‌شان می‌شود $\frac{2R\sin 36^\circ}{2R\tan 36^\circ}$ که اگر ساده کنیم، می‌رسیم $\frac{\sin 36^\circ}{\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}} = \cos 36^\circ = 0/8$. پس نسبت محیط‌ها $0/8$ و نسبت مساحت‌ها $(0/8)^2 = 0/64$ است.

۲۵۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است. پس خواهیم داشت:

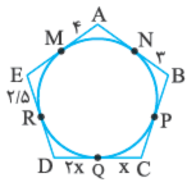
$$AM = AS = x\,,\ BN = BM = y$$
$$CN = CP = z\,,\ DP = DQ = u$$
$$ER = EQ = s\,,\ FS = FR = t$$

حال طول اضلاع را برحسب متغیرهای جدید می‌نویسیم:



$$x+y=20\,,\ y+z=22\,,\ z+u=16$$
$$u+s=18\,,\ s+t=25\,,\ AF=x+t=?$$
$$\Rightarrow x+t=(x+y)-(y+z)+(z+u)$$
$$-(u+s)+(s+t)=21$$

۲۵۲- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است، بنابراین داریم:



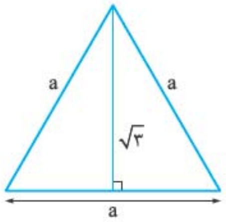
$$AM = AN = 4\,,\ BN = BP = 3\,,$$
$$CQ = PC = x\,,\ DQ = DR = 2x\,,$$
$$EM = ER = 2/5\ \ (1)$$

$$\text{محیط پنج‌ضلعی } ABCDE = AB+BC+CD+DE+EA = 31$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به روابط (۱)}} (AN+BN)+(BP+CP)$$
$$+(CQ+DQ)+(DR+ER)+(AM+EM)=31$$

$$\Rightarrow \overset{10}{\cancel{4+3+3}}+x+x+2x+2x+\overset{9}{\cancel{2/5+4+2/5}}=31$$
$$\Rightarrow 6x+19=31 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2$$

۲۵۳- گزینهٔ ۲ مجموع $TH+TH'+TH''$ را سال قبل دیدیم که می‌شود ارتفاع مثلث. پس ارتفاع مثلث ما $\sqrt{3}$ است. ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر ضلعش است و این یعنی ضلع این مثلث ۲ است:

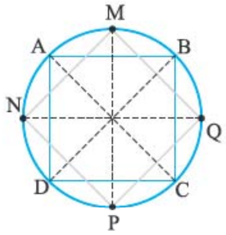


$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

بنابراین مساحت مثلث می‌شود

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2 = \sqrt{3}$$

۲۵۴- گزینهٔ ۱ چهارضلعی حاصل باز هم مربع است و دقیقاً مثل مربع اولیه است.



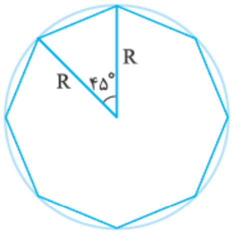
در این‌جا دقت کنید که:

۱) M، N، P و Q وسط کمان‌های AB، AD، CD و BC هستند.

۲) قطر مربع‌ها، قطر دایره است.

۳) هشت نقطهٔ روی دایره، رئوس یک هشت‌ضلعی منتظم هستند.

۲۵۵- گزینهٔ ۴ دیدیم که هشت‌ضلعی حاصل منتظم است. پس هشت‌تا مثلث با اضلاع R و R زاویهٔ 45° داریم. بنابراین:



$$S = (\frac{1}{2}R\times R\times \sin 45^\circ)\times 8$$
$$= 2\sqrt{2}R^2$$

قطر دایره همان قطر مربع است. در نتیجه:

$$2R = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

خب، این‌ها یعنی مساحت هشت‌ضلعی ما هست $4\sqrt{2}$.

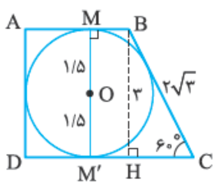
۲۵۶- گزینهٔ ۱ مجموع فاصلهٔ هر نقطه درون یک n ضلعی منتظم از اضلاع برابر است با nr که r شعاع دایرهٔ محاطی است. پس در این‌جا $nr = 14$ یعنی $r = 2$ است.

۲۵۷- گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که کمان AB کوچک‌تر از نیم‌دایره است، پس کمان‌درخور بزرگ‌تر از 90° خواهد بود.

α: اندازهٔ زاویه

$$\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 2\alpha < 180^\circ$$
$$\Rightarrow 180^\circ < 2\alpha \Rightarrow 90^\circ < \alpha$$

۲۵۸- گزینهٔ ۲ طول ارتفاع BH با طول قطر دایره یعنی MM' برابر است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم:



$$\overset{\Delta}{BHC}: \sin\hat{C} = \frac{BH}{BC}$$
$$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BH}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

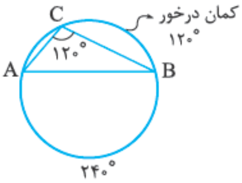
می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی مجموع طول‌های اضلاع مقابل با هم برابر است، لذا خواهیم داشت:

$$AB+CD=BC+AD$$

$$\xrightarrow[BC=۲\sqrt{۳}]{AD=BH=۳} AB+CD=۳+۲\sqrt{۳}$$

$$P=AB+CD+BC+AD=۲(۳+۲\sqrt{۳})$$

۲۵۹- گزینهٔ نقاطی که روی کمان ۱۲۰° از یک دایره واقع‌اند، روبه‌رو به کمان ۲۴۰° می‌باشند $(۳۶۰°-۲\alpha)$؛ بنابراین نقاط موردنظر کمان‌درخور زاویهٔ ۱۲۰° می‌باشند.



۲۶۰- گزینهٔ اگر کمان‌درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB قسمتی از دایرهٔ C باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ C از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R=\frac{AB}{۲\sin\alpha}$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$R=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sin ۴۵°}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱$$

پس جواب قسمتی از دو دایره به شعاع ۱ خواهد بود.

۲۶۱- گزینهٔ با توجه به رابطهٔ مقابل داریم: $R=\frac{AB}{۲\sin\alpha}$

$$R=\frac{AB}{۲\sin\alpha}\Rightarrow ۴=\frac{۴}{۲\sin\alpha}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha=۳۰° \text{ یا } ۱۵۰°$$

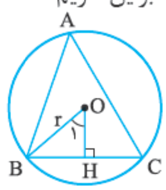
۲۶۲- گزینهٔ اگر کمان‌درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط BC قسمتی از دایرهٔ C باشد، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز دایره از پاره‌خط AB برابر است با:

$$OH=\frac{BC}{۲|\tan\alpha|}$$

با توجه به رابطهٔ بالا داریم:

$$OH=\frac{BC}{۲|\tan\alpha|}=\frac{۶}{۲\tan ۳۰°}=\frac{۶}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۹}{\sqrt{۳}}=۳\sqrt{۳}$$

۲۶۳- گزینهٔ **راه‌حل ۱**: از O (مرکز دایره) به رأس B و نقطهٔ H (وسط ضلع BC) وصل می‌کنیم. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است؛ بنابراین داریم:



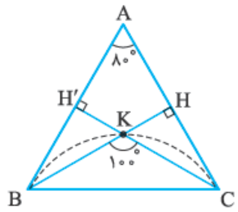
$$\hat A=۳۰°\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۲\hat A=۶۰°$$

$$\Rightarrow \hat O_۱=\frac{B\hat OC}{۲}=۳۰°$$

از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است، لذا خواهیم داشت:

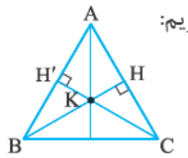
$$\hat O_۱=۳۰°\Rightarrow BH=\frac{OB}{۲}\Rightarrow OB=r=۸$$

راه‌حل ۲: با توجه به این‌که A روی کمان‌درخور زاویهٔ ۳۰° وابسته به ضلع BC قرار دارد، خواهیم داشت:



$$R=\frac{BC}{۲\sin\hat A}=\frac{۸}{۲\sin ۳۰°}=۸$$

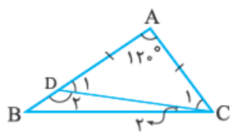
۲۶۴- گزینهٔ با توجه به این‌که مجموع زوایای داخلی چهارضلعی AHKH′ برابر با ۳۶۰° است، داریم:



$$H'\hat KH=۳۶۰-(۹۰+۹۰+۸۰)=۱۰۰°$$

بنابراین زاویهٔ بین دو ارتفاع برابر با ۱۰۰° می‌باشد و از این نقطه ضلع BC همواره با زاویهٔ ۱۰۰° دیده می‌شود. لذا این نقطه، روی کمان درخور زاویهٔ ۱۰۰° وابسته به ضلع BC قرار دارد که اندازهٔ این کمان از یک نیم‌دایره کوچک‌تر است.

۲۶۵- گزینهٔ با توجه به این‌که ADC مثلث متساوی‌الساقین است، پس داریم:



$$AD=AC\Rightarrow \hat C_۱=\hat D_۱$$

$$\overset{\Delta}{ACD}:\hat A+\hat C_۱+\hat D_۱=۱۸۰°$$

$$\xrightarrow[\hat A=۱۲۰°]{\hat C_۱=\hat D_۱} ۱۲۰°+۲\hat C_۱=۱۸۰°$$

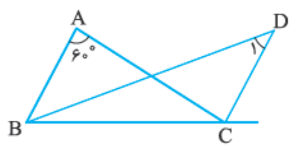
$$\Rightarrow \hat C_۱=۳۰°\Rightarrow \hat D_۱=۳۰°$$

$$\hat D_۲+\hat D_۱=۱۸۰°\Rightarrow \hat D_۲=۱۵۰°$$

پس رأس D روی کمان‌درخور زاویهٔ $\hat D=۱۵۰°$ وابسته به ضلع $BC=۹$ قرار دارد؛ بنابراین داریم:

$$R=\frac{BC}{۲\sin\alpha}=\frac{۹}{۲\sin ۱۵۰°}=\frac{۹}{۲\times\frac{۱}{۲}}=۹$$

۲۶۶- گزینهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی رأس B و خارجی رأس C برابر با $\frac{\hat A}{۲}$ است؛ لذا خواهیم داشت:



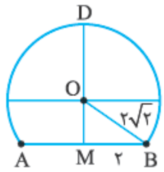
$$\hat D_۱=\frac{\hat A}{۲}=۳۰°$$

پس رأس D روی کمان‌درخور زاویهٔ ۳۰° وابسته به ضلع BC قرار

دارد؛ بنابراین داریم:

$$R=\frac{BC}{۲\sin\alpha}=\frac{۶}{۲\sin ۳۰^\circ}=۶$$

۲۶۷- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ نقاطی که ضلع AB را با زاویهٔ ۴۵° می‌بینند، نقاطی روی کمان‌درخور زاویهٔ $\alpha=۴۵^\circ$ و وابسته به ضلع $AB=۴$ هستند که قسمتی از یک دایره به شعاع زیر می‌باشند:



$$R=\frac{AB}{۲\sin\alpha}=\frac{۴}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

حال باید فاصلهٔ دورترین نقطه روی کمان‌درخور را از ضلع AB به دست آوریم:

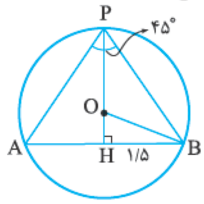
$$\overset{\Delta}{OMB}: OM^۲+MB^۲=OB^۲$$
$$\Rightarrow OM^۲=۸-۴ \Rightarrow OM=۲$$
$$MD=OM+OD=۲+۲\sqrt{۲}$$

مجموعهٔ نقاطی که از AB فاصله‌ای برابر با $۴\sqrt{۳}$ دارند، خطی موازی AB به فاصلهٔ $۴\sqrt{۳}$ است.

$$MD<۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۲+۲\sqrt{۲}<۴\sqrt{۳}$$

پس هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که هر دو ویژگی را داشته باشد.

۲۶۸- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ نقاطی که ضلع AB را با زاویهٔ ۴۵° می‌بینند، قسمتی از یک دایره هستند. به شعاع:



$$R=\frac{AB}{۲\sin\alpha} \Rightarrow R=\frac{۳}{۲\sin ۴۵^\circ}$$
$$=\frac{۳}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=۱/۵\sqrt{۲}$$

بیشترین فاصلهٔ P از وتر AB زمانی رخ می‌دهد که P روی عمودمنصف AB باشد؛ بنابراین داریم:

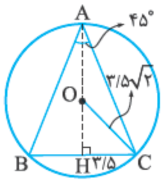
$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^۲=OH^۲+BH^۲$$
$$\xrightarrow{OB=R=۱/۵\sqrt{۲}} (۱/۵\sqrt{۲})^۲=OH^۲+۱/۵^۲$$
$$\Rightarrow OH=\sqrt{(۱/۵\sqrt{۲})^۲-۱/۵^۲} \Rightarrow OH=۱/۵$$
$$PH=OP+OH$$
$$\xrightarrow{OP=R=۱/۵\sqrt{۲}} PH=۱/۵\sqrt{۲}+۱/۵$$
$$(PH)_{max}=۱/۵\sqrt{۲}+۱/۵>\sqrt{۲}$$

با توجه به این‌که $(PH)_{max}>۳$ است، می‌توان گفت که برای P، ۴ جواب داریم.

۲۶۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم شعاع دایرهٔ C از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

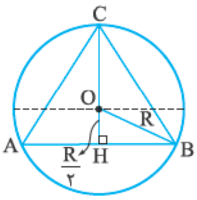
$$R=\frac{BC}{۲\sin\alpha}=\frac{۷}{۲\sin ۴۵^\circ}=\frac{۷}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۲}}=۳/۵\sqrt{۲}$$

حداکثر مقدار h_a هنگامی به دست می‌آید که رأس A روی عمودمنصف BC قرار بگیرد؛ بنابراین برای محاسبهٔ حداکثر مقدار AH خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{OHC}: OC^۲=OH^۲+CH^۲$$
$$\Rightarrow (۳/۵\sqrt{۲})^۲=OH^۲+(۳/۵)^۲$$
$$\Rightarrow OH=\sqrt{(۳/۵\sqrt{۲})^۲-(۳/۵)^۲}=۳/۵$$
$$AH=OA+OH=۳/۵\sqrt{۲}+۳/۵=\frac{۷+۷\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۷۰- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که مساحت مثلث ABC باید ماکسیمم باشد، رأس C باید روی عمودمنصف AB واقع شود. حال با توجه به روابط مقابل داریم:

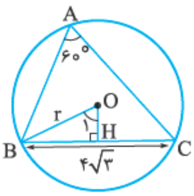


$$\begin{cases} OH=\dfrac{AB}{۲|\tan\alpha|} \Rightarrow \dfrac{R}{۲}=\dfrac{AB}{۲|\tan\alpha|}(۱) \\ R=\dfrac{AB}{۲\sin\alpha}(۲) \end{cases}$$

پس با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$OH=\frac{R}{۲} \Rightarrow \frac{AB}{۲\tan\alpha}=\frac{AB}{۴\sin\alpha}$$
$$\Rightarrow ۲\sin\alpha=\tan\alpha \Rightarrow \cos\hat{\alpha}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=۶۰^\circ$$

۲۷۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل ۱:** از O مرکز دایره به رأس B و نقطهٔ H، وسط ضلع BC، وصل می‌کنیم. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان روبه‌رو است. لذا داریم:



$$\hat{A}=۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۲\hat{A}=۱۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{O}_۱=\frac{B\hat{O}C}{۲}=۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OBH}: \sin\hat{O}_۱=\frac{BH}{r} \Rightarrow \underbrace{\sin ۶۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{r} \Rightarrow r=۴$$

$$S_{\text{دایرهٔ محیطی}}=\pi r^۲=۱۶\pi$$

راه‌حل ۲: با توجه به این‌که A روی کمان‌درخور زاویهٔ ۶۰° وابسته به ضلع BC قرار دارد، خواهیم داشت:

$$r=\frac{BC}{۲\sin\hat{A}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۲\sin ۶۰^\circ}=۴$$
$$\Rightarrow S_{\text{دایرهٔ محیطی}}=\pi r^۲=۱۶\pi$$