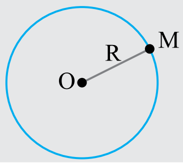
فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

تعریف **فرض کنید O نقطه‌ای ثابت و R عددی حقیقی و مثبت باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی O برابر R باشد.**

به شکل نگاه کنید:



$M \Leftrightarrow OM = R$ روی دایره است.

قرارداد: دایره‌ی C به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O, R)$ نمایش می‌دهیم.

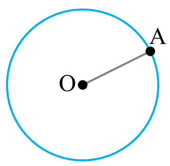
نکته **دو دایره با شعاع‌های مساوی با هم برابرند.**

وضع نقطه و دایره

نقطه‌ی A و دایره‌ی $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره یکی از سه حالت زیر است:

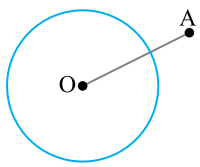
۱- نقطه‌ی A روی دایره است.

A روی دایره است. $\Leftrightarrow OA = R$



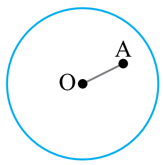
۲- نقطه‌ی A بیرون دایره است.

A بیرون دایره است. $\Leftrightarrow OA > R$



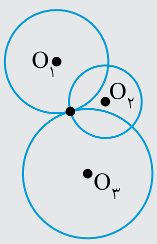
۳- نقطه‌ی A درون دایره است.

A درون دایره است. $\Leftrightarrow OA < R$



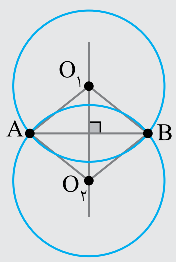
نکته

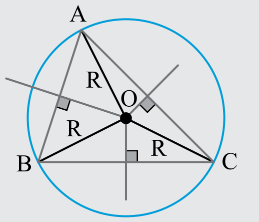
۱) از یک نقطه در صفحه، نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها، هر نقطه‌ی دلخواه از صفحه، به غیر از نقطه‌ی موردنظر است.



۲) از دو نقطه‌ی متمایز A و B در صفحه نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند.

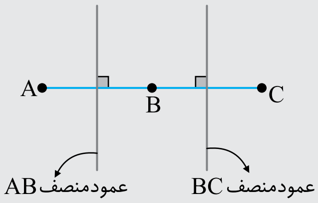
توجه کوچک‌ترین دایره‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی A و B، دایره‌ای به قطر AB است.





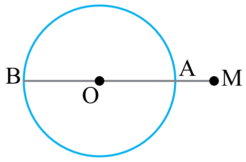
۳) سه نقطه‌ی A، B و C را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار نداشته باشند، فقط یک دایــره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایــره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است.

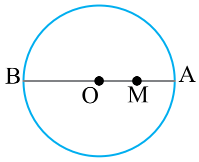


ب) اگر سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار داشته باشند، هیچ دایره‌ای وجود ندارد که از هر ســه نقطه عبور کند. چون عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایــی که این نقطه‌ها را به هــم وصل می‌کنند موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره به یک نقطه



نقطه‌ی M و دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. با توجه به شکل، در هر دو حالــت، در بین نقطه‌های روی دایــره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و نقطه‌ی B دورترین نقطه‌ی دایره به M هستند. همچنین



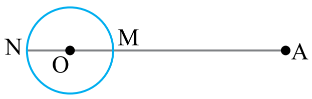
$$MA = |OM - R|$$

$$MB = OM + R$$

تست ۱

کمترین و بیشــترین فاصله‌ی نقطه‌ی A خارج دایره از این دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ اســت. شــعاع این دایره چقدر است؟

۱) ۳ **۲)** ۲ **۳)** ۶ **۴)** ۴



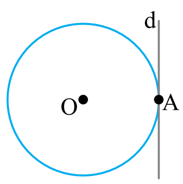
پاسخ: از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. M نزدیک‌ترین و N دورترین نقطه‌ی دایره تا نقطه‌ی A است. اکنون توجه کنید که

$$AN = OA + R = ۱۲\,, \quad AM = OA - R = ۸$$

با کم کردن برابری‌های به‌دست آمده می‌توان نوشت $۲R = ۴$، پس $R = ۲$. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

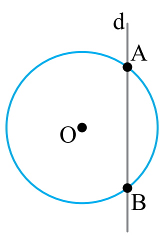
اوضاع نسبی خط و دایره

خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایره‌ی $C(O,R)$، این خط با دایره یکی از سه حالت زیر را دارد:



۱- خط d بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس است.

در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک‌اند.

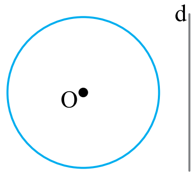


۲- خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ متقاطع‌اند.

در این حالت، خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند.

۳- خط d خارج دایره‌ی $C(O,R)$ است.

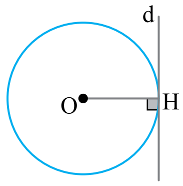
در این حالت، خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.



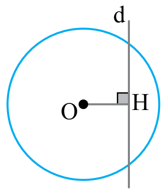
نکته می‌توان وضعیت خط و دایره را با مقایسه‌ی فاصله‌ی مرکز دایره از خط با شعاع دایره به دست آورد.

دایره‌ی $C(O,R)$ و خط d را در نظر بگیرید:

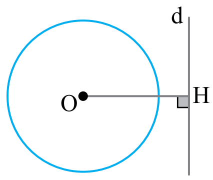
۱- اگر $OH=R$، آن‌گاه خط بر دایره مماس است و برعکس.



۲- اگر $OH<R$، آن‌گاه خط و دایره متقاطع هستند و برعکس.



۳- اگر $OH>R$، آن‌گاه خط خارج دایره است و برعکس.



تست ۲ **مرکز دایره‌ی $C(O,۳)$ به فاصله‌ی $۲x-۱$ از خط d است. اگر این خط دایره را در دو نقطه قطع کند، حدود x کدام است؟**

۱) $x<۲$ ۲) $x>۲$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}\leq x<۲$

پاسخ: چون خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، پس

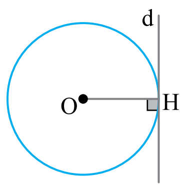
فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $<$ شعاع دایره $\Rightarrow ۲x-۱<۳ \Rightarrow x<۲$

از طرف دیگر $۲x-۱\geq ۰$، پس $x\geq\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب $\frac{۱}{۲}\leq x<۲$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

چند مطلب درباره‌ی خط مماس بر دایره

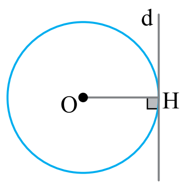
۱- اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، آن‌گاه این خط بر دایره مماس است.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر شعاع OH بر خط d عمود باشد، آن‌گاه خط d بر دایره مماس است.



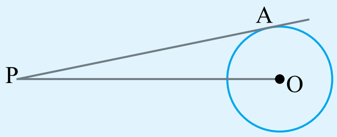
۲- شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر خط d بر دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع OH بر خط d عمود است.

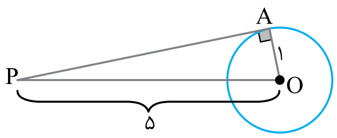


تست ۳

در شـکل مقابل طول PO برابر ۵ و شـعاع دایره برابر ۱ است. طول PA کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۲}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۶}$



پاسخ: می‌دانیم شـعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود اسـت. پس مثلث OAP در رأس A قائم‌الزاویه اسـت (شـکل را ببینید). اکنون بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OAP،

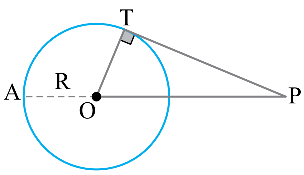
$$PA=\sqrt{OP^{۲}-OA^{۲}}=\sqrt{۲۵-۱}=۲\sqrt{۶}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۴

فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی دایره از نقطه‌ی P برابر ۹ و فاصله‌ی P تا مرکز دایره $\frac{۱۳}{۲}$ است. طول مماس رسم شده از نقطه‌ی P بر دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۶
۳) $\sqrt{۱۳}$
۴) $\sqrt{۶}$



پاسخ: از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. دورترین نقطه‌ی دایره به نقطه‌ی P نقطه‌ی A است. پس

$$PA=۹\Rightarrow OP+OA=۹$$

از طرف دیگر $OP=\frac{۱۳}{۲}$. در نتیجه

$$\frac{۱۳}{۲}+R=۹$$

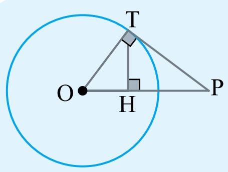
یعنی $R=\frac{۵}{۲}$. در مثلث‌قائم‌الزاویه‌ی OPT بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$PT=\sqrt{OP^{۲}-OT^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱۳}{۲})^{۲}-(\frac{۵}{۲})^{۲}}=۶$$

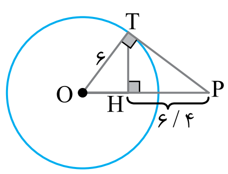
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۵

اندازه‌ی تصویر مماس PT روی قطر گذرنده از نقطه‌ی P در دایره‌ای به شـعاع ۶ برابر با ۶/۴ است. اندازه‌ی مماس PT چقدر است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸



پاسخ: راه‌حل اول می‌دانیم که PH تصویر PT روی OP اسـت و $PT>PH$، پس $PT>۶/۴$ و تنها گزینه‌ای که از ۶/۴ بزرگ‌تر است گزینه‌ی (۴) است.
راه‌حـل دوم فرض کنیـد PH تصویر مماس PT روی PO باشـد. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTP،

$$OT^{۲}=OH\times OP\Rightarrow ۶^{۲}=OH(OH+۶/۴)\Rightarrow OH^{۲}+۶/۴OH-۳۶=۰$$

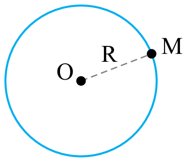
$$(OH+۱۰)(OH-۳/۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}OH=۳/۶\\ OH=-۱۰ \quad (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

پس اندازه‌ی OP برابر با $۳/۶+۶/۴=۱۰$ است. در نتیجه

$$\Delta OTP: PT^{۲}=OP^{۲}-OT^{۲}=۱۰^{۲}-۶^{۲}=۶۴\Rightarrow PT=۸$$

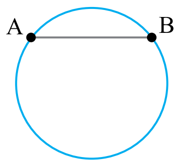
بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

یادآوری برخی از مفاهیم اولیه



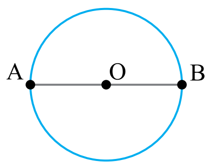
OM شعاع دایره است.

۱- **شعاع دایره:** پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است **شعاع** دایره می‌گوییم.



AB وتر است.

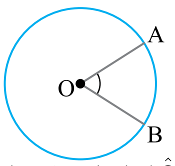
۲- **وتر دایره:** پاره‌خطی که دو ســر آن روی محیط دایره قرار دارد **وتر** نامیده می‌شود.



AB قطر است.

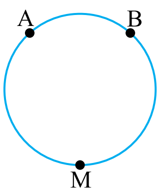
۳- **قطر دایره:** قطر وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد.

توجه اگر R اندازه‌ی شعاع دایره باشد، آن‌گاه اندازه‌ی تمام قطرهای این دایره برابر $2R$ است.



$A\hat{O}B$ زاویه‌ای مرکزی است.

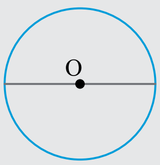
۴- **زاویه‌ی مرکزی:** زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره اســت **زاویه‌ی مرکزی** آن دایره می‌گوییم.

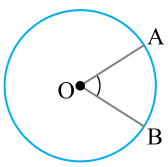


۵- **کمان:** دو نقطه‌ی A و B روی محیط دایره را در نظر بگیرید (شکل را ببینید). این دو نقطه، محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن‌ها، **کمان** یا **قوس** می‌گوییم.

توجه معمولاً کمان ایجاد شــده توســط دو نقطه‌ی A و B را با $\widehat{AB}$ نشان می‌دهیم و برای نشان دادن کمان دیگر، از نقطه‌ای کمکی مانند M روی محیط دایره استفاده می‌کنیم (شکل را ببینید) و آن را به صورت $\widehat{AMB}$ می‌نویسیم.

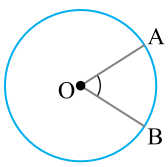
نکته هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که به آن کمان‌ها **نیم‌دایره** می‌گوییم.





کمان AB، کمان زاویه‌ی AOB است.

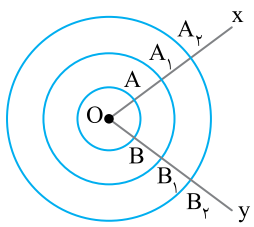
۶- **کمــان زاویه‌ی مرکزی:** کمانی از دایره که یک زاویه‌ی مرکزی روی محیط دایره ایجاد می‌کند، **کمان نظیر آن زاویه** نامیده می‌شود.



$A\hat{O}B = \widehat{AB}$

۷- **اندازه‌ی کمان:** اندازه‌ی کمان، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه است.

توجه توجه کنید که نباید اندازه‌ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. به شکل روبه‌رو نگاه کنید. سه دایره هم‌مرکز هستند:



$$x\hat{O}y=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A_۱B_۱}=\overset{\frown}{A_۲B_۲}$$

یعنی اندازه‌ی کمان‌های AB، $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ برابرند اما طول این کمان‌ها برابر نیستند:

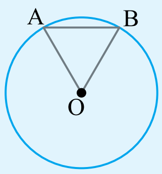
$$\text{طول کمان } A_۲B_۲ < \text{طول کمان } A_۱B_۱ < \text{طول کمان } AB$$

رابطه‌ی بین طول و اندازه‌ی کمان

بین طول و اندازه‌ی کمان تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}$$

تست ۶ **در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر ۴π است. اندازه‌ی وتر AB برابر کدام است؟**



۱) ۶ **۲)** $۱۲\sqrt{۳}$

۳) ۱۲ **۴)** $۶\sqrt{۳}$

پاسخ: طول کمان AB از رابطه‌ی زیر برحسب اندازه‌ی کمان AB به دست می‌آید:

$$\text{طول کمان } AB=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)\Rightarrow ۴\pi=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times۱۲)$$

$$۴\pi=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۱۵^\circ}\times\pi\Rightarrow \text{اندازه‌ی کمان } AB=۶۰^\circ$$

بنابراین اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی O برابر ۶۰° است. چون $OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه $AB=۱۲$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۷ **طول کمان دایره‌ای به مرکز O و با اندازه‌ی ۳۰° با طول کمان دایره‌ای به مرکز O' و با اندازه‌ی ۴۵° برابر است. نسبت مساحت دایره‌ی به مرکز O به مساحت دایره‌ی به مرکز O' کدام است؟**

۱) $\frac{۹}{۴}$ **۲)** $\frac{۵}{۹}$ **۳)** $\frac{۶}{۹}$ **۴)** $\frac{۷}{۹}$

پاسخ: شعاع دایره‌ها را R و R' در نظر می‌گیریم. چون $\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان}}{۳۶۰^\circ}$، پس

$$\text{طول کمان}=\frac{\text{محیط دایره}\times\text{اندازه‌ی کمان}}{۳۶۰^\circ}$$

بنابراین با توجه به فرض تست می‌توان نوشت

$$\frac{۳۰^\circ\times۲\pi R}{۳۶۰^\circ}=\frac{۴۵^\circ\times۲\pi R'}{۳۶۰^\circ}$$

در نتیجه

$$\frac{R}{R'}=\frac{۳}{۲}$$

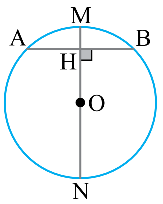
بنابراین

$$\frac{S}{S'}=\frac{\pi R^۲}{\pi R'^۲}=(\frac{R}{R'})^۲=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

نکاتی در مورد وتر و کمان نظیر آن

۱- در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



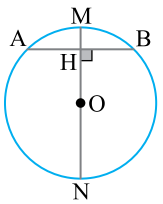
به عبارت دیگر، در شکل مقابل اگر قطر MN بر وتر AB عمود باشد، آن‌گاه

$$AH=BH$$

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$$

$$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$$

۲- خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو، اگر H وسط وتر AB باشد، آن‌گاه

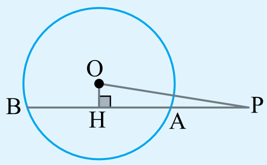
$$MN\perp AB$$

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$$

$$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$$

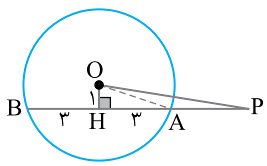
نتیجه وسط کمان‌های نظیر یک وتر، مرکز دایره و وسط وتر مورد نظر روی یک خط راست قرار دارند.

تست ۸ **در شکل مقابل** $AB=۶$ ، $OH=۱$ و $O\hat{H}A=۹۰^\circ$. **طول شعاع دایره چقدر است؟**



۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

پاسخ: چون OH بر AB عمود است، پس آن را نصف می‌کند. در نتیجه $AH=\frac{AB}{۲}=۳$. در مثلث OAH، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،



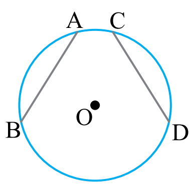
$$OA=\sqrt{OH^۲+AH^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکاتی در مورد دو وتر از یک دایره

۱- کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.

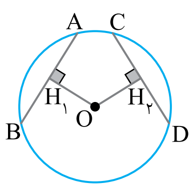
به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



$$AB=CD\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

۲- در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

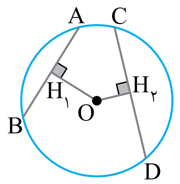
به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



$$AB=CD\Leftrightarrow OH_۱=OH_۲$$

۳- در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

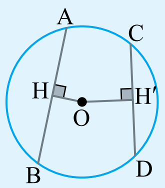
به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



$$AB < CD \Leftrightarrow OH_{۱} > OH_{۲}$$

نکته قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است زیرا از مرکز دایره کمترین فاصله را دارد.

تست ۹ در دایره‌ی شکل مقابل اگر $AB > CD$، $OH = ۴x + ۲$ و $OH' = x + ۸$، کدام رابطه برقرار است؟



۱) $-\frac{۱}{۲} < x < ۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲} \leq x < ۲$

۳) $x < ۲$ ۴) $۰ \leq x < ۳$

پاسخ: از دو وتر نابرابر در دایره، هرکدام که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است. بنابراین

$$AB > CD \Rightarrow OH < OH'$$

$$۴x + ۲ < x + ۸ \Rightarrow x < ۲$$

از طرف دیگر،

$$۴x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۲}$$

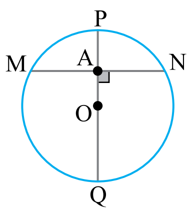
$$x + ۸ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۸$$

پس $-\frac{۱}{۲} \leq x < ۲$. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

وتر مینیمم

نقطه‌ی A که مرکز دایره نیست، درون دایره قرار دارد. از این نقطه، نامتناهی وتر می‌گذرد که بزرگ‌ترین آن‌ها قطر دایره است و کوچک‌ترین آن‌ها وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است.

در شکل مقابل، PQ بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A و MN کوچک‌ترین وتر گذرنده از A است که به آن **وتر مینیمم** گذرنده از A می‌گوییم.

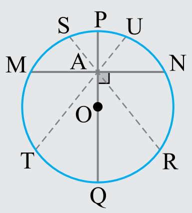


نکته نقطه‌ی A که مرکز دایره نیست درون دایره‌ی $C(O, R)$ قرار دارد. در این صورت:

۱- فقط یک وتر به طول $۲R$ وجود دارد که از A می‌گذرد، که همان قطر گذرنده از A است (قطر PQ در شکل).

۲- فقط یک وتر مینیمم وجود دارد که از A می‌گذرد (وتر MN در شکل).

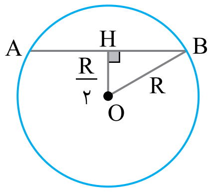
۳- دو وتر به طول L که در این‌جا L بین اندازه‌ی وتر مینیمم و قطر دایره است وجود دارد که از A می‌گذرند (وترهای RS و TU در شکل).



تست ۱۰ از نقطه‌ی H به فاصله‌ی $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره‌ی $C(O, R)$ وتری مینیمم در دایره رسم کرده‌ایم. طول این وتر مینیمم کدام است؟

۱) $\sqrt{3}R$ ۲) $\sqrt{2}R$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

پاسخ: از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. AB وتر مینیمم است.



بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH،

$$BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

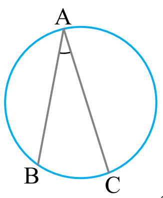
اکنون می‌توان نوشت

$$AB=2BH=\sqrt{3}R$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

زاویه‌ی محاطی

زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره است و ضلع‌های آن دو وتر از دایره هستند، **زاویه‌ی محاطی** می‌گوییم.



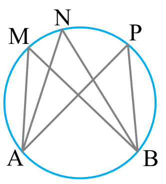
$B\hat{A}C$ زاویه‌ای محاطی است.

نکته اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن است. یعنی در شکل بالا،

$$B\hat{A}C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

نتایج بسیار مهم

۱- در هر دایره اندازه‌ی زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان، با هم برابرند.

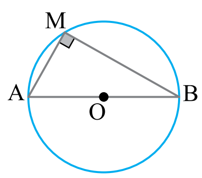


$\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

۲- اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر دایره برابر 90° است.

در شکل روبه‌رو، اگر AB قطر دایره باشد، آن‌گاه

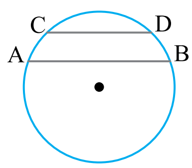
$$A\hat{M}B=90^\circ$$



۳- کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند.

در شکل مقابل، اگر دو وتر AB و CD با هم موازی باشند، آن‌گاه

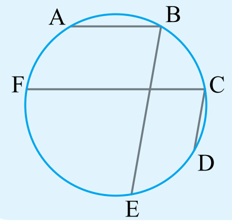
$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$



تذکر توجه کنید که عکس مطلب بالا لزوماً درست نیست.

تست ۱۱

در شکل روبه‌رو، اگر $AB || FC$، $CD || BE$، $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD}=۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF}=۱۱۰^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی FCD کدام است؟



۱) ۹۰° ۲) ۵۵°

۳) ۷۰° ۴) ۸۰°

پاسخ: می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند. پس

$$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}=m$$

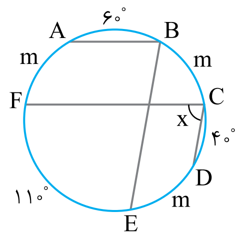
از طرف دیگر محیط دایره برابر ۳۶۰° است. بنابراین

$$۳m+۶۰^\circ+۱۱۰^\circ+۴۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

پس $m=۵۰^\circ$. اکنون می‌توان نوشت

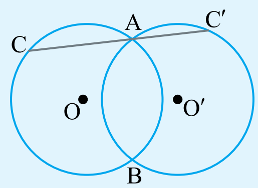
$$F\hat{C}D=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FED}=\frac{۱}{۲}(۱۱۰^\circ+۵۰^\circ)=۸۰^\circ$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.



تست ۱۲

در شکل روبه‌رو، دو دایره‌ی مساوی متقاطع‌اند. قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. مثلث CBC' همواره ....



۱) متساوی‌الاضلاع است.

۲) قائم‌الزاویه است.

۳) متساوی‌الساقین است.

۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

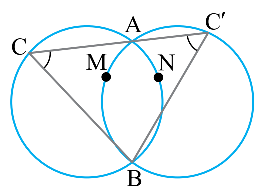
پاسخ: چون دو دایره مساوی هستند، پس

$$\overset{\frown}{ANB}=\overset{\frown}{AMB}$$

از طرف دیگر،

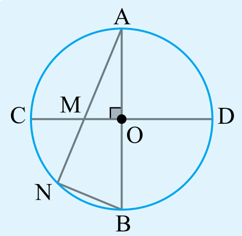
$$\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ANB}\,,\quad \hat{C}'=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AMB}$$

در نتیجه $\hat{C}=\hat{C}'$، یعنی $BC=BC'$. پس مثلث CBC' متساوی‌الساقین است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



تست ۱۳

در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $MN=NB$، اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟



۱) $۲۲/۵^\circ$ ۲) ۳۰°

۳) ۴۵° ۴) ۶۰°

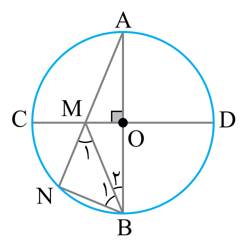
پاسخ: چون $MN=NB$، پس مثلث MNB متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر،

$$\hat{N}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

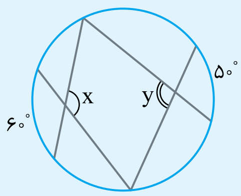
پس $\hat{M}_۱=\hat{B}_۱=۴۵^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases}\hat{M}_۱=\hat{A}+\hat{B}_۲\\ MA=MB\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_۲\end{cases}\Rightarrow ۴۵^\circ=۲\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=۲۲/۵^\circ$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.



تست ۱۴ در دایره‌ی شکل مقابل مقدار $x+y$ برابر کدام است؟

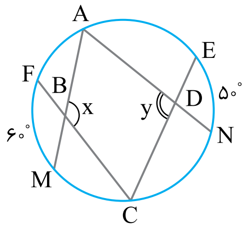


۱) 235°

۲) 225°

۳) 215°

۴) 110°



پاسخ: از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. در چهارضلعی ABCD مجموع زاویه‌های داخلی 360° است. از طرف دیگر، زاویه‌های A و C محاطی هستند. بنابراین

$$\begin{cases} \hat{A}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MCN} \\ \hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{FAE} \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{MCN}+\overset{\frown}{FAE})$$

در ضمن

$$\overset{\frown}{MCN}+50^\circ+\overset{\frown}{FAE}+60^\circ=360^\circ$$

پس

$$\overset{\frown}{MCN}+\overset{\frown}{FAE}=250^\circ$$

بنابراین

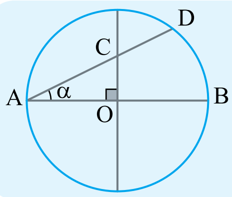
$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{250^\circ}{2}=125^\circ$$

اکنون در چهارضلعی ABCD می‌نویسیم

$$\hat{A}+\hat{C}+\hat{B}+\hat{D}=360^\circ \Rightarrow 125^\circ+x+y=360^\circ \Rightarrow x+y=235^\circ$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۱۵ در شکل مقابل دو قطر دایره بر هم عمود هستند. نسبت $\frac{CD}{CA}$ برابر با کدام است؟

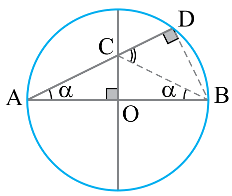


۱) $2\sin^2\alpha$

۲) $2\cos^2\alpha$

۳) $\cos 2\alpha$

۴) $\sin 2\alpha$



پاسخ: نقطه‌های C و D را به B وصل می‌کنیم. چون قطرها بر هم عمود هستند، پس

$$BC=CA$$

در نتیجه

$$\hat{A}=A\hat{B}C=\alpha$$

از طرف دیگر زاویه‌ی BCD زاویه‌ی خارجی مثلث ABC است، پس

$$B\hat{C}D=\hat{A}+A\hat{B}C=\alpha+\alpha=2\alpha$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCD، بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت

$$\cos(B\hat{C}D)=\frac{CD}{BC}$$

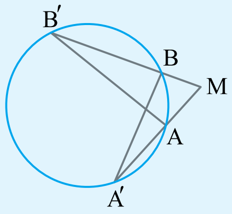
در نتیجه

$$\frac{CD}{CA}=\cos 2\alpha$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۱۶

در دایره‌ی شکل مقابل اگر $MA=۴$، $BB'=۹$، $AB'=۱۲$ و $A'B=۹$، طول AA' کدام است؟



۱) ۶

۲) ۵

۳) ۸

۴) ۴

پاسخ: دو زاویه‌ی محاطی A' و B' روبه‌رو به کمان AB هستند، پس مساوی‌اند. در نتیجه

$$\begin{cases}\hat{A}'=\hat{B}' \\ \hat{M}=\hat{M}\end{cases} \xrightarrow{(ز\,ز)} \Delta A'BM \sim \Delta B'AM$$

بنابراین اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه، متناسب‌اند:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{AB'}{A'B}=\frac{MB'}{MA'} \Rightarrow \frac{۴}{MB}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{MB+۹}{۴+AA'}$$

از این تساوی‌ها نتیجه می‌گیریم

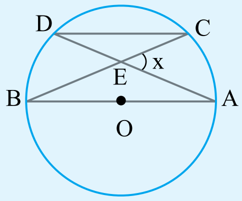
$$\frac{۴}{MB}=\frac{۱۲}{۹} \Rightarrow MB=۳$$

$$\frac{۱۲}{۹}=\frac{MB+۹}{۴+AA'} \Rightarrow \frac{۴}{۳}=\frac{۳+۹}{۴+AA'} \Rightarrow AA'=۵$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۱۷

در دایره‌ی مقابل وتر DC را موازی قطر AB رسم کرده‌ایم. نسبت مساحت مثلث ECD به مساحت مثلث EAB کدام است؟



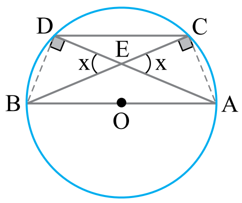
۱) $\sin x$

۲) $\cos x$

۳) $\cos^۲ x$

۴) $\sin^۲ x$

پاسخ: از A بـه C و از D بـه B وصل می‌کنیم. در این صـورت دو زاویه‌ی ACB و BDA محاطی روبه‌رو به قطر هستند، پس قائمه هستند. با توجه به تعریف کسینوس در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم



$$\Delta ACE: \cos x=\frac{EC}{EA}$$

$$\Delta BDE: \cos x=\frac{ED}{EB}$$

اکنون می‌توانیم نسبت مساحت دو مثلث ECD و EAB را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{S_{ECD}}{S_{EAB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EC\times ED\sin(۱۸۰^\circ-x)}{\frac{۱}{۲}EA\times EB\sin(۱۸۰^\circ-x)}=\frac{EC}{EA}\times\frac{ED}{EB}$$

از تساوی‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{ECD}}{S_{EAB}}=\cos x\times\cos x=\cos^۲ x$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.