

(فصل ۴)

معادلات و نامعادلات

۱۳۹	معادلات و نامعادلات
۱۴۰	معادله‌ی درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۱۵۴	سهمی
۱۶۴	تعیین علامت و نامعادله‌ها
۱۷۵	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

(فصل ۵)

تابع

۲۰۷	تابع
۲۰۸	مفهوم تابع
۲۱۷	دامنه و برد توابع
۲۲۵	رسم نمودار تابع
۲۳۵	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

(فصل ۶)

ترکیبیات

۲۶۷	ترکیبیات
۲۶۸	شمارش
۲۷۴	جایگشت
۲۸۰	ترکیب
۲۸۷	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

(فصل ۷)

آمار و احتمال

۳۰۱	آمار و احتمال
۳۲۲	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

(فصل ۱)

مجموعه، الگو و دنباله

۷	مجموعه، الگو و دنباله
۸	مجموعه‌ها
۱۱	متمم یک مجموعه
۱۵	الگو و دنباله
۱۹	دنباله‌های حسابی و هندسی
۲۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

(فصل ۲)

مثلثات

۴۳	مثلثات
۴۴	نسبت‌های مثلثاتی
۵۲	دایره‌ی مثلثاتی
۵۸	روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۶۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

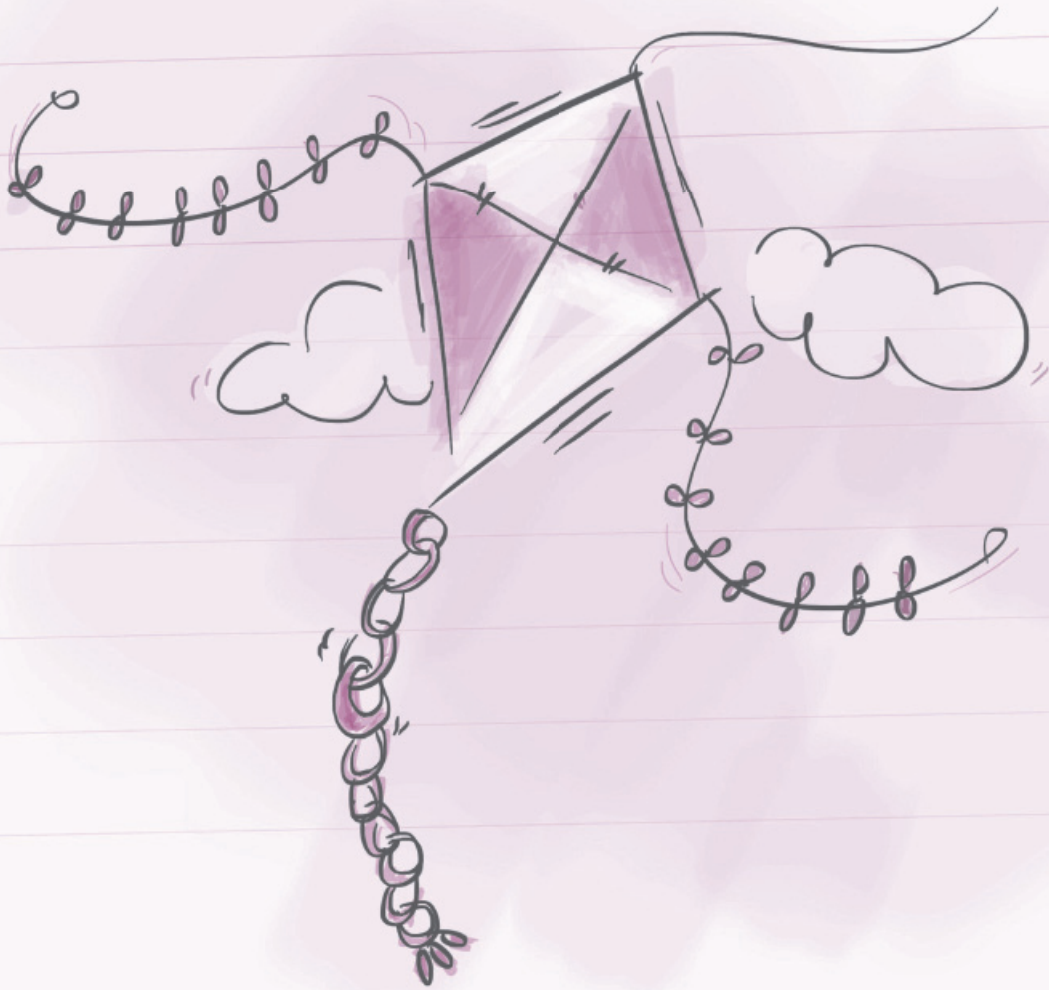
(فصل ۳)

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۸۱	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۹۲	اتحادهای جبری
۱۱۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

(فصل ١)

مجموعه الكوونباله





مجموعه‌ها

در سال‌های قبل با مجموعه‌های مهم از اعداد آشنا شده‌اید.

(الف) N یا مجموعه‌ی عددهای طبیعی شامل ۱، ۲، ۳ و ... است.

(ب) W یا مجموعه‌ی اعداد حسابی، شامل ۰، ۱، ۲، ۳ و ... است.

پس $\{0\} = N \cup W$ ، به بیان دیگر $W - N$ یک‌عضوی است.

(پ) Z مجموعه‌ی اعداد صحیح شامل صفر و اعداد طبیعی و قرینه‌ی اعداد طبیعی است. یعنی $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. بنابراین $Z - W$ شامل اعداد صحیح منفی است.

(ت) مجموعه‌ی Q شامل اعداد گویا (کسری) است. این اعداد همان کسرهای با صورت و مخرج صحیح هستند. می‌نویسیم:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

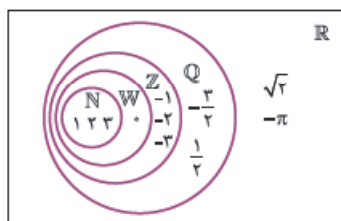
(ث) $Q' = R - Q$ مجموعه‌ی اعداد گنگ است. این اعداد را نمی‌توان به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد یعنی نمایش کسری ندارند.

$\sqrt{2}$ و π نمونه‌هایی از اعداد گنگ هستند.

(ج) R مجموعه‌ی اعداد حقیقی است که شامل تمام اعداد گویا و گنگ می‌شود. هر نقطه روی محور اعداد، یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد و هر عدد حقیقی جایی روی محور اعداد دارد، بنابراین $Q' = R - Q$.

(ک) میان این مجموعه‌ها رابطه‌ی زیر مجموعه‌بودن به صورت $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ و $Q' \subseteq R$ برقرار است.

در نمودار ون هم داریم:



مثال در معرفی مجموعه‌های زیر به جای \square از مجموعه‌های N, Z, W, Q, R یا ترکیب آن‌ها بنویسید تا تساوی برقرار شود.

(الف) $\{x \in \square \mid x^2 = \frac{4}{9}\} = \emptyset$

(ب) $\{x \in \square \mid -4 < x \leq -1\} = \emptyset$

(پ) $\{x \in \square \mid |2 < x^2 < 8|\} = \{-2\}$

(ت) $\{x \in \square \mid (x-2)(2x-1) = 0\} = \{\frac{1}{2}\}$

پاسخ (الف) این یعنی در مجموعه‌ی \square هیچ عضوی نبوده که مربع آن $\frac{4}{9}$ باشد، پس در \square می‌توان N یا W یا Z قرار داد. اما در Q و R چنین عددی وجود دارد $(\pm\frac{2}{3})$. راستی Q' هم می‌توان قرار داد.

(ب) این یعنی در مجموعه‌ی \square عددی بین -4 و -1 نیست. پس اصلن عدد منفی ندارد و حتمن N یا W است.

(پ) تنها عدد -2 در مجموعه‌ی \square بوده که x^2 بین 2 و 8 قرار گرفته. پس این مجموعه فقط اعداد صحیح منفی را داشته و می‌تواند $Z - N$ یا $Z - W$ باشد.

(ت) از معادله‌ی $(x-2)(2x-1) = 0$ جواب‌های x اعداد 2 و $\frac{1}{2}$ هستند که فقط $\frac{1}{2}$ در مجموعه‌ی \square بوده. پس می‌تواند $Q - N$ یا $Q - W$ یا $Q - Z$ یا $R - N$ یا $R - Z$ یا $R - W$ قرار گیرد.

بازه‌ها

بازه‌ها زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} هستند که آن‌ها را روی محور به صورت یک قسمت نمایش می‌دهیم. بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص هستند. ۴ نوع بازه برای اعداد بین a تا b داریم:

$$b \text{ و } a \text{ بین بسته: } [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



$$b \text{ و } a \text{ نیم‌باز بین: } (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$b \text{ و } a \text{ نیم‌باز بسته: } [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$b \text{ و } a \text{ باز: } (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



همان‌طور که می‌بینید بازه‌ها را با نمایش مجموعه‌ای یا هندسی یا نماد بازه می‌توان نشان داد. اگر در یک طرف پرانتز باشد خود آن عدد در بازه نیست و اگر کروشه باشد خود آن عدد در بازه هست.

بازه‌ی (a, a) مجموعه‌ی تهی است و بازه‌ی $[a, a]$ مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{a\}$ را نشان می‌دهد.

یک نوع دیگر از بازه‌ها، بازه‌هایی هستند که اعداد بیشتر از a یا کمتر از a را نشان می‌دهند. برای نشان دادن این بازه‌ها از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌شود. دقت کنید که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

$$a \text{ از بیشتر: } (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



$$a \text{ مساوی یا بیشتر: } [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



$$a \text{ از کمتر: } (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



$$a \text{ مساوی یا کمتر: } (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



با نشان دادن بازه‌ها روی محور اعداد می‌توانیم اجتماع و اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص کنیم.

مثال اگر $A = [-2, 3]$ و $B = (1, 4]$ باشد، بازه‌های A و B را روی محور نشان دهید و حاصل عبارات $A \cup B$ ، $B - A$ ، $A - B$ و $A \cap B$ را مشخص کنید.



پاسخ

$$A \cup B = [-2, 4] \text{ قسمتی که در } A \text{ یا در } B \text{ باشد}$$

$$A \cap B = (1, 3) \text{ قسمت مشترک بین } A \text{ و } B$$

$$A - B = [-2, 1) \text{ قسمتی که در } A \text{ هست و در } B \text{ نیست}$$

$$B - A = (3, 4] \text{ قسمتی که در } B \text{ هست و در } A \text{ نیست}$$

مثال حاصل عبارات زیر را به صورت بازه نشان دهید.

$$(پ) \quad (-\infty, 1) - (0, 6)$$

$$(ب) \quad (1, 4] - [2, +\infty)$$

$$(الف) \quad (-2, +\infty) \cap (-3, 1)$$

$$(ج) \quad \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$$(د) \quad \mathbb{R} - [1, 4]$$

$$(ت) \quad (0, 4] - \{1\}$$

پاسخ

(الف) اشتراک $= (-2, 1)$

(ب) تفاضل $= (1, 2)$

(پ) تفاضل $= (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$

(ت) تفاضل $= (0, 1) \cup (1, 4]$

(د) تفاضل $= (-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$

(ج) تفاضل $= (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$

مثال چندتا از روابط زیر درست‌اند؟

(الف) $(-1, 1) \subseteq (-1, 1)$ (ب) $\{1, 2\} \subseteq (0, 2)$ (پ) $-2 \in (-2, 0)$ (ت) $-2 \in [-3, 1)$

پاسخ (الف) نادرست است. بازه $(-1, 1)$ زیرمجموعه‌ی بازه $(-1, 1)$ نیست. چون اولی عدد ۱ را دارد و دومی ندارد.

پاسخ (ب) درست است. چون اعداد ۱ و ۲ در بازه $(0, 2)$ هستند پس مجموعه $\{1, 2\}$ زیرمجموعه‌ی $(0, 2)$ خواهد بود.

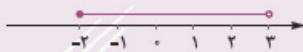
پاسخ (پ) نادرست است. چون -2 عضو بازه‌ی باز $(-2, 0)$ نیست.

پاسخ (ت) درست است. چون -2 عضو بازه‌ی بسته $[-3, 1)$ هست.

مثال در بازه $[-2, 2]$ چند عدد صحیح، چند عدد حسابی و چند عدد طبیعی وجود دارد؟

(الف) ۱، ۲، ۵، ۲ (ب) ۲، ۳، ۳ (پ) ۲، ۳، ۵ (ت) ۱، ۳، ۲، ۴

پاسخ گزینه‌ی (ب) اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2$ در این بازه هستند پس ۵ عدد صحیح دارد، ۳ تا عدد حسابی و دو تا عدد طبیعی هم دارد:



$0, 1, 2 \in \mathbb{N}$ و $0, 1, 2 \in \mathbb{W}$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد عضوهای یک مجموعه همواره عددی حسابی است؛ یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ یا ... است. اگر مجموعه‌ای فاقد عضو باشد آن را مجموعه‌ی تهی می‌نامیم و با \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

اگر مجموعه‌ای k عضوی باشد (تعداد محدودی عضو داشته باشد) آن را متناهی (یا باپایان) می‌نامیم.

اما وقتی تعداد اعضای یک مجموعه از هر عددی بزرگ‌تر شود (بی‌نهایت شود) آن را نامتناهی می‌نامیم. نمونه‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را می‌بینیم.

نامتناهی	متناهی
اعداد صحیح کم‌تر یا مساوی ۳	اعداد طبیعی نابیشتر از ۲۰
تمام خط‌های گذرنده از مبدأ	اعداد اول دورقمی
اعداد طبیعی زوج	انسان‌ها (اتم‌ها یا درختان) روی زمین
کسرهای مثبت با مخرج ۲	مولکول‌ها و اتم‌ها در یک مول آب
مضارب صحیح ۳	سلول‌های بدن انسان
بازه $(-1, 2)$	اعداد صحیح بازه $[-1, 6]$

مثال

کدام‌یک از موارد زیر وجود دارد؟ یک مثال بیاورید.

پاسخ (الف) دو مجموعه نامتناهی که اشتراک آن‌ها نیز نامتناهی است.

پاسخ (ب) دو مجموعه نامتناهی که اشتراک آن‌ها متناهی است.

پاسخ (پ) $A \subseteq B$ باشد و A نامتناهی و B متناهی باشد.

پاسخ (ت) دو زیرمجموعه نامتناهی از اعداد طبیعی که یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

پاسخ (ث) سه زیرمجموعه نامتناهی از \mathbb{Z} که هیچ‌کدام اشتراکی با دیگری ندارند.

پاسخ (ج) دو مجموعه نامتناهی که هم $A - B$ و هم $B - A$ تک‌عضوی باشند.

پاسخ (الف) وجود دارد. مثلن \mathbb{Z} و \mathbb{N} هر دو نامتناهی‌اند و اشتراک آن‌ها هم \mathbb{N} است که نامتناهی است.

پاسخ (ب) وجود دارد. مثلن $[2, +\infty)$ و $(-\infty, 2]$ هر دو نامتناهی‌اند اما اشتراک آن‌ها می‌شود $\{2\}$ که متناهی است.

پاسخ (پ) اگر $A \subseteq B$ باشد و A نامتناهی باشد، B حتمن نامتناهی است (چون B تمام A را در خودش دارد) پس (پ) وجود ندارد.

پاسخ (ت) وجود دارد. مثلن اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۴ باشد، هر دو نامتناهی‌اند و $B \subseteq A$ است.

مثال وجود دارد. دقت کنید:

اگر A مجموعه اعداد صحیح مضرب ۳ باشد، B مجموعه اعداد صحیح که بر ۳ باقی مانده ۱ دارند و C شامل اعداد صحیح که بر ۳ باقی مانده ۲ دارند باشند، آن گاه A, B و C نامتناهی و دویله دو فاقد اشتراک اند.

به عنوان مثالی دیگر، A مجموعه اعداد اول، B مجموعه مربع های کامل و C مجموعه قرینه های اعداد طبیعی است.

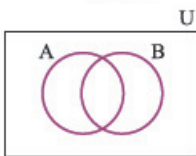
چرا وجود دارد. مثلن اگر $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $B = \mathbb{N} \cup \{-2\}$ آن گاه هم $A - B$ و هم $B - A$ تک عضوی اند.

مثال بین دو عدد ۰ و ۲ چند عدد گویا وجود دارد؟

پاسخ بین دو عدد گویا، بی شمار عدد گویای دیگر وجود دارد. پس مجموعه اعداد گویا نامتناهی است. مثلن بین ۰ و ۲ اعداد گویای

$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ و اعداد گویایی مانند $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ و ... را داریم.

متمم يك مجموعه



مجموعه مرجع یا جهانی، مجموعه ای است که تمام مجموعه های مورد بحث زیرمجموعه ای آن باشند. در واقع مجموعه مرجع، چارچوب بحث را نشان می دهد. آن را با U یا M یا W نشان می دهیم. در نمایش هندسی، مجموعه مرجع شامل تمام مجموعه های دیگر است:

حالا اگر A زیرمجموعه ای از U باشد، به مجموعه $U - A$ می گوئیم متمم A و آن را با A' نشان می دهیم. پس داریم:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

$$\emptyset' = U, U' = \emptyset, (A')' = A, A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset$$

با این تعریف داریم:

دقت کنید که اگر $A \subseteq B$ باشد حتمن $B' \subseteq A'$ است. اگر حاصل اجتماع یا اشتراک را متمم کنیم، تک تک مجموعه ها متمم شده و علامت برعکس می شود:

$$(A \cap B)' = A' \cup B', (A \cup B)' = A' \cap B'$$

این روابط را «قوانین دمرگان» می نامند.

چرا اگر مجموعه مرجع متناهی باشد تمام مجموعه ها و متمم آن ها نیز متناهی اند. وقتی مجموعه مرجع نامتناهی باشد داریم:

A' نامتناهی است $\Rightarrow A$ متناهی است

در مورد A' نظری نمی توان داد $\Rightarrow A$ نامتناهی است

مثال نسبت $\frac{n(A)}{n(U)}$ نشان می دهد چه کسری از اعضای مجموعه مرجع در مجموعه A هستند. مثلن اگر U مجموعه تمام افراد واجد شرایط ازدواج و A مجموعه متأهلین باشد، $\frac{n(A)}{n(U)}$ نرخ متأهل بودن و $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ مجرد است.

مثال اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم متمم مجموعه های زیر را نشان دهید.

(الف) $(1, +\infty)$ **پاسخ** $(-\infty, -2]$ **ب**

(ب) $(-\infty, -2]$ **پاسخ** $(-2, 5)$ **ت**

(ت) $(-2, 5)$ **پاسخ** $[-1, 4]$ **ث**

(ث) $[-1, 4]$ **پاسخ** \mathbb{W}' شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی است:

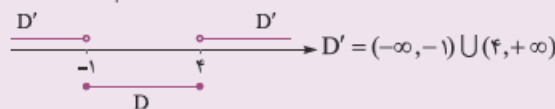
پاسخ \mathbb{W}' شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی است:

ب متمم بازه ی نیم باز $(-\infty, -2]$ به صورت $(-2, +\infty)$ است:

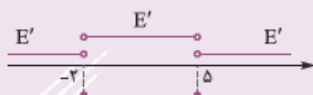
پ متمم $(1, +\infty)$ به صورت $(-\infty, 1]$ بیان می شود:

ت متمم بازه ی $[-1, 4]$ به صورت اجتماعی از دو بازه است:

ث متمم مجموعه $\{-2, 5\}$ به صورت اجتماع ۳ بازه است:



$$E' = (-\infty, -2) \cup (-2, 5) \cup (5, +\infty)$$



تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

می‌توان نشان داد که:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

اگر دو مجموعه‌ی A و B اشتراکی نداشته باشند می‌گوییم جدا از هم یا مجزا هستند. در این حالت:

در بیان فارسی $n(A \cup B)$ تعداد عضوهایی است که در A یا در B یا در هر دوی آن‌ها باشند. به بیان دیگر تعداد عضوهایی که به حداقل یکی از این دو مجموعه تعلق دارند.

متمم $A \cup B$ یعنی $(A \cup B)'$ یا $A' \cap B'$ ، مجموعه‌ی اعضای است که نه در A هستند و نه در B ؛ یعنی در هیچ‌یک از این دو مجموعه نیستند. تعداد این‌گونه اعضا برابر است با:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

هم‌چنین تعداد عضوهایی که در A هستند و در B نیستند (یعنی فقط در A هستند) برابر است با:

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

◀ بد نیست یک بار ببینید که در مورد سه مجموعه داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

و اگر سه مجموعه دوبه‌دو جدا از هم باشند:

مثال در میان ۶۶ مشتری یک روز فروشگاه، ۳۶ نفر کارت اعتباری و ۲۹ نفر پول نقد و ۱۱ نفر هر دو را داشته‌اند.

الف) چند نفر حداقل یکی از این دو پرداخت را داشته‌اند؟

ب) چند نفر فقط پول نقد داشته‌اند؟

پ) چند نفر فقط کارت اعتباری داشته‌اند؟

ت) چند نفر هیچ‌کدام را ارائه نکرده‌اند؟

ث) چند نفر کارت اعتباری نداشته‌اند؟

پاسخ اگر کارت اعتباری را با A و پول نقد را با B نشان دهیم سؤال می‌گوید:

$$n(U) = 66, n(A) = 36, n(B) = 29, n(A \cap B) = 11$$

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 36 + 29 - 11 = 54$ پس داریم:

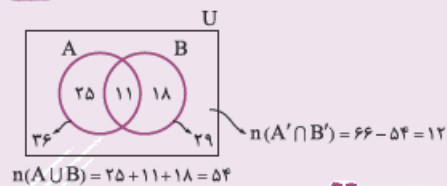
ب) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 29 - 11 = 18$

پ) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 36 - 11 = 25$

ت) $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 66 - 54 = 12$

ث) $n(A') = n(U) - n(A) = 66 - 36 = 30$

راه‌دوم به نمودار روبه‌رو دقت کنید:



مثال از ۵۱ دانش‌آموز کلاس دهم، ۸ نفر در دو کلاس تقویتی ریاضی و فیزیک و ۳۳ نفر در کلاس ریاضی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۳ نفر

در هیچ کلاسی نباشند، تعداد نفرات کلاس فیزیک کدام عدد می‌تواند باشد؟

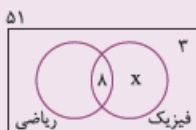
۴۸ (۴)

۲۸ (۳)

۲۳ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ گزینه‌ی **د** نمودار ون را ببینید:



$$x = 51 - 8 - 25 - 3 = 15$$

$$n(\text{فیزیک}) = x + 8 = 23$$

با توجه به شکل تعداد داوطلبان کلاس فیزیک برابر است با:

[A] سری

۱- اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه‌ی اعداد صحیح با قدرمطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در \mathbb{Z} با پایان است؟

- (۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۲- کدام مجموعه غیر تهی و با پایان (متناهی) است؟

- (۱) مضارب ۶ (۲) مضارب مشترک ۶ و ۷
(۳) مقسوم‌علیه‌های مشترک ۶ و ۷ (۴) مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۷

۳- تعداد اعضای کدام مجموعه کمتر است؟

- (۱) اعداد اول کمتر از ۲۰ (۲) اعداد طبیعی مربع کامل کمتر از ۷۰
(۳) مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ (۴) کسره‌های بین ۰ و ۱ با مخرج ۷

۴- کدام مجموعه نامتناهی است؟

- (۱) اتم‌های کره‌ی زمین (۲) درختان جنگل‌های ایران
(۳) حشرات ساکن زمین (۴) تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز (۱, ۲)

۵- کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) مثلث‌ها با مساحت ۶ (۲) مربع‌ها با مساحت ۶ و یک رأس روی مبدأ
(۳) خط‌ها با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ (۴) خط‌های گذرنده از مبدأ

۶- اگر $k \in \mathbb{Z}$ (عدد صحیح نسبی) آن‌گاه مجموعه‌ی اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

- (۱) $2k - 5$ (۲) $2k + 6$ (۳) $3k - 1$ (۴) $3k + 1$

۷- کدام جمله درست است؟ (\mathbb{N} مجموعه‌ی مرجع است.)

- (۱) اگر A نامتناهی باشد A' حتمن متناهی است. (۲) اگر $A \subseteq B$ و مجموعه‌ی B نامتناهی باشد A هم نامتناهی است.
(۳) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند $A \cup B$ برابر با \mathbb{N} است. (۴) اگر $A \subseteq B$ و مجموعه‌ی A نامتناهی باشد آن‌گاه B هم نامتناهی است.

۸- کدام مجموعه دارای بزرگ‌ترین عضو است؟

- (۱) \mathbb{Z} (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 4\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$

۹- کدام مجموعه تهی نیست؟

- (۱) $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}'$ (۳) $\{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < x < 3\}$

۱۰- اشتراک دو مجموعه‌ی $[-5, 4]$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ چندعضوی است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۵

۱۱- کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) اعداد صحیح کمتر از ۱۰۰ (۲) اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰
(۳) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ (۴) اعداد حقیقی بین ۱ و ۲

۱۲- اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $A - B = C$ (۲) $B - C = \emptyset$ (۳) $B - C = \{1, 2\}$ (۴) $A - B = \{C\}$

۱۳- اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $B \subset C$ (۲) $A \subset B$ (۳) $A \in B$ (۴) $B \in C$

۱۴- اگر $A = (-3, 1]$ ، $B = (0, 4)$ و $C = [-2, 2]$ ، آن‌گاه $(A \cup C) - B$ دارای چند عضو صحیح است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۵- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $\mathbb{A}_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 3^m \leq n\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{A}_n$ چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶



۱۶- اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آن گاه مجموعه $(A_7 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, -1) \cup [1, 2]$ (۲) $[-2, -1) \cup [1, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) \emptyset

۱۷- اگر هیچ یک از مجموعه‌های $A \cap (-1, 2)$ و $A - (-1, 2)$ تهی نباشند، کدام بازه به عنوان A مورد قبول است؟

(۱) $(0, 3)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(2, 3)$

۱۸- اگر n عدد طبیعی و $A_n = [(-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ تعلق دارد؟ $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۹- اگر $A_n = [n-1, n+1]$ باشد، آن گاه مجموعه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

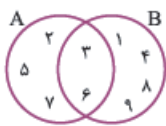
(۱) $\{x : 1 \leq x \leq 5\}$ (۲) $\{x : 0 \leq x \leq 5\}$ (۳) $\{x : 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$ (۴) $\{x : 1 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

۲۰- اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۱- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۲۲- اگر A مجموعه اعداد دورقمی و $B = \{7k : k \in A\}$ باشد، آن گاه مجموعه $A \cap B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۳- اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ باشد، مجموعه $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۳۱ (۴) ۱۵

(تکاور ۸۹)

۲۴- کدام نادرست است؟

(۱) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$ (۲) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

(۳) $A = B \Leftrightarrow A \cap C = B \cap C$ (۴) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

۲۵- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام مجموعه است؟

(۱) A (۲) B (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۲۶- متمم مجموعه $(B - A)' - A$ ، نسبت به مجموعه جهانی کدام است؟

(۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) A (۴) B

۲۷- متمم مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ نسبت به مجموعه مرجع $[\frac{1}{7}, 4]$ از اجتماع حداقل چند بازه ساخته شده است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸- اگر مجموعه مرجع دارای ۲۲ عضو و دو زیرمجموعه A و B در آن دارای ۱۷ و ۱۲ عضو باشند، $A - B$ حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۱۷ (۴) ۷

۲۹- اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آن گاه:

(۱) $A \subseteq B$ (۲) $B \subseteq A$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) $B = \emptyset$

۳۰- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

(۱) B' (۲) \emptyset (۳) $A \cap B$ (۴) $A - B$

۳۱- مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

(۱) $B - A$ (۲) B (۳) \emptyset (۴) A'

۳۲- متمم مجموعه $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$ کدام است؟

(۱) A (۲) B' (۳) $A' \cup B'$ (۴) \emptyset

۳۳- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ برابر کدام است؟

(۱) $A' - B'$ (۲) $(A - B)'$ (۳) A' (۴) \emptyset

۳۴- اگر A, B و C سه مجموعه غیر تهی به طوری که $A \subset B$ باشد، آن‌گاه مجموعه $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ ، کدام است؟

- (۱) $A \cap C'$ (۲) $A \cap C$ (۳) A (۴) B

۳۵- متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ ، نسبت به مجموعه جهانی با کدام مجموعه برابر نیست؟

- (۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$ (۲) $(A - C) \cup (B - C)$ (۳) $A \cap (B - C)$ (۴) $(A \cap B) - C$

۳۶- اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C \neq \emptyset$ (۳) $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ (۴) $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

۳۷- اگر مجموعه A دارای ۵ عضو، مجموعه B دارای ۶ عضو و مجموعه $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشد، مجموعه $(A \cap B') \cup (A \cup B)'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۳۸- مجموعه A دارای ۱۴ و مجموعه B دارای ۱۷ و مجموعه $A \cap B$ دارای ۵ عضو است، چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲ (کنگور ۸)

۳۹- مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B ، کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵

۴۰- اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌های اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید، کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

[Z] سری

۴۱- اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq 8 - i\}$ باشد، مجموعه $\bigcup_{i=1}^n A_i - \bigcap_{i=1}^n A_i$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۴۲- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $2^m \leq 2n$ ، $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq n\}$ آن‌گاه مجموعه $(A_6 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ تشریحی مجموعه، الگو و دنباله

- ۱- **گزینه ۱** شامل تمام اعداد صحیح $0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots$ است و در B اعداد صحیح بین -99 تا 99 را داریم. پس $A \cap B$ شامل اعداد صحیح مضرب 3 بین -99 تا 99 است که تعدادشان محدود می‌شود (67 تا هستند). در سایر گزینه‌ها، $A \cap B'$ نامتناهی است (مضارب بزرگ 3 را دارد)؛ همچنین $A' \cup B$ نامتناهی است (اعداد خیلی بزرگ در B هستند)؛ $A \cup B$ نیز همین‌طور است.
- ۲- **گزینه ۱** مضارب 6 ، کلیه‌ی اعداد به صورت $6k$ هستند. (نامتناهی)
مضارب مشترک 6 و 7 ، تمام اعداد به صورت $42k$ هستند. (نامتناهی)
مقسوم‌علیه‌های مشترک 6 و 7 اعداد ± 1 هستند. (متناهی است)
مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اول عدد 1 هم تهی است. چون 1 هیچ مقسوم‌علیه اولی ندارد.
- ۳- **گزینه ۱** مجموعه‌ی اعداد اول کم‌تر از 20 ، هشت عضوی است:
 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل و کم‌تر از 70 نیز هشت عضوی است:
 $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$
مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صحیح 6 نیز هشت عضو دارد:
 $C = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$
اما مجموعه‌ی کسره‌های بین 0 و 1 با مخرج 7 دارای شش عضو است:
 $D = \{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{6}{7}\}$
- ۴- **گزینه ۱** مجموعه‌ی اتم‌ها، درختان یا حشرات قطعاً انتها دارد و تعداد اعضای آن‌ها عددی مشخص است (هر چه قدر بزرگ باشد باز هم محدود است)؛ اما تعداد تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز $(1, 2)$ تا بی‌نهایت می‌رود و متناهی نیست.
- ۵- **گزینه ۱** فقط یک خط یا شیب 2 و گذرنده از مبدأ وجود دارد. اما تعداد «مثلث‌ها با مساحت 6 »، «مربع‌ها با مساحت 6 و رأس روی مبدأ» و «خط‌های گذرنده از مبدأ» نامتناهی است.
- ۶- **گزینه ۱** اعداد $2k+6$ همواره زوج‌اند. اعداد $2k+1$ یا $3k-1$ می‌توانند زوج یا فرد باشند. اما اعداد $5-2k$ همیشه فرد هستند.
- ۷- **گزینه ۱** نادرست است. مثلن اگر A مجموعه‌ی اعداد زوج باشد A' مجموعه‌ی اعداد فرد است و هر دو نامتناهی‌اند. در (2) اگر B نامتناهی باشد، زیرمجموعه‌ی آن یعنی A می‌تواند متناهی باشد. مثلن B اعداد فرد ولی $A = \{1\}$ زیرمجموعه‌ی آن متناهی است. (3) نیز نادرست است. مثلن A مجموعه‌ی مضارب 5 و B مجموعه‌ی اعداد اول است و هر دو نامتناهی‌اند و اجتماع آن‌ها N نیست. (4) درست است. وقتی A نامتناهی می‌شود حتمن B هم نامتناهی است چون B تمام عضوهای A را دارد!
- ۸- **گزینه ۱** بزرگ‌ترین عدد صحیح یا بزرگ‌ترین عدد بازه‌ی $(2, +\infty)$ وجود ندارد. بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از 3 هم وجود ندارد (اگر k بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از 3 باشد، $\frac{k+3}{4}$ از آن بیشتر است و به 3 هم نزدیک‌تر؛ پس اصلن k وجود ندارد)؛ اما در (2) بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر یا مساوی 4 ، برابر 2 است و وجود دارد!
- ۹- **گزینه ۱** تمام اعداد حسابی، صحیح هم هستند پس $W - Z$ تهی است. تمام اعداد طبیعی، گویا هستند پس $N \cap Q'$ عضوی ندارد. عدد صحیح بین 2 و 3 هم نداریم. اما در (2) ، اعداد طبیعی بین 2 و 2 عبارت‌اند از: $\{1, 2\}$
- ۱۰- **گزینه ۱** در Z اعداد صحیح و در W عددهای حسابی داریم؛ پس $Z - W$ شامل اعداد صحیح منفی است و اشتراک آن با بازه‌ی $(-5, 4)$ به صورت $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$ خواهد بود که 5 عضو دارد.
- ۱۱- **گزینه ۱** در (1) اعداد صحیح کم‌تر از 100 تا $-\infty$ می‌روند، پس نامتناهی است. در (2) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ نامتناهی‌اند. چون بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس نامتناهی است. در (4) هم بی‌شمار عدد حقیقی در $(1, 2)$ وجود دارد، پس نامتناهی است؛ اما در (2) اعداد طبیعی کم‌تر از 100 ، دقیقن از 1 تا 99 هستند که مجموعه‌ای متناهی با 99 عضو است.

۱۲- گزینه‌ی ۳ به بررسی تک‌تک گزینه‌ها بپردازیم:

۱) مجموعه‌ی $A - B$ شامل عضوهایی از A است که در B نباشند. فقط عضو چهارم یعنی $\{1, 2, 3\}$ در مجموعه‌ی A در B نیست (اعضای ۱ و ۲ از B هم هستند)، پس $A - B = \{1, 2, 3\}$ که با C مساوی نیست.

۲) در واقع $A - B = \{C\}$ و ۴ درست است.

۳) $B - C$ مجموعه‌ی اعضای B است که در C نیستند که $\{1, 2\}$ این‌طور است پس $B - C = \{1, 2\}$ و تهی نیست.

۴) همان‌طور که دیدیم $B - C = \{1, 2\}$ پس ۴ درست شد!

۱۳- گزینه‌ی ۱ B زیرمجموعه‌ی C نیست چون ۲ عضو مجموعه‌ی B است که آن را در C نمی‌بینیم (به عنوان عضو نمی‌بینیم).

۲) A زیرمجموعه‌ی B است چون تنها عضو A را در B می‌بینیم.

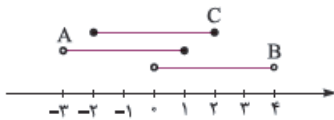
۳) A عضو B هم هست چون A را به صورت عضو در B داریم. ببینید:

$$B = \{2, \{\underbrace{2}_{\text{این } A \text{ است}}\}\} = \{A, B\}$$

$$C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\} = \{A, B\}$$

۴) B عضو C است. چون خود B را به طور کامل در C داریم:

۱۴- گزینه‌ی ۲ بازه‌ها را روی محور ببینید:



پس $A \cup C$ به صورت بازه‌ی $(-3, 2]$ است و اگر از آن B را برداریم، تفاضل موردنظر $[-3, 0]$ خواهد بود که ۳ عضو صحیح $\{-2, -1, 0\}$ را دارد.

۱۵- گزینه‌ی ۳ مجموعه‌های A_4 و A_3 را می‌نویسیم (به جای n اعداد ۳ و ۴ را می‌گذاریم):

$$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -4, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

پس $A_3 \subset A_4$ و اشتراک آن‌ها می‌شود A_3 که ۵ عضو و ۳۲ زیرمجموعه دارد.

۱۶- گزینه‌ی ۲ بازه‌های A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 و A_7 را می‌نویسیم:

$$A_1 = [-i, \frac{9-i}{4}] \Rightarrow A_1 = [-1, 4], A_2 = [-2, \frac{7}{4}]$$

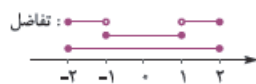
$$A_3 = [-5, 2], A_4 = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_3 = [-2, \frac{7}{4}] \cap [-5, 2] = [-2, 2], A_1 \cap A_4 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$

پس:

$$[-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

تفاضل آن‌ها برابر است با:



۱۷- گزینه‌ی ۲ بازه‌ی A حتمن با $(-1, 2)$ اشتراک دارد و حتمن قسمتی دارد که در $(-1, 2)$ نیست. پس بین گزینه‌ها فقط ۱ مناسب است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ بازه‌ی اول را بنویسیم:

$$A_n = ((-1)^n n, 2n) \Rightarrow A_1 = (-1, 2), A_2 = (2, 4)$$

$$A_3 = (-3, 6), A_4 = (4, 8)$$

اجتماع این‌ها می‌شود $(-3, 8)$ که در آن اعداد صحیح $2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ هستند یعنی ۱۰ عدد صحیح دارد.

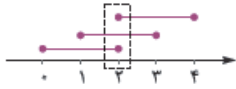


۱۹- گزینه‌ی **د** مجموعه‌های A_1 تا A_4 را بنویسیم:

$$A_n = [n-1, n+1]$$

$$A_1 = [0, 2], A_2 = [1, 3], A_3 = [2, 4], A_4 = [3, 5]$$

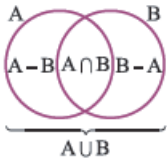
$$\bigcap_{n=1}^4 A_n = \{2\}$$



اشتراک ۳ تایی اول برابر است با:

$$\bigcup_{n=1}^4 A_n = [0, 5]$$

اجتماع ۴ تایی اول هم برابر است با: $[0, 5]$ و تفاضل این‌ها $\{2\} - [0, 5]$ است که در **د** آمده است.



۲۰- گزینه‌ی **د** اول به نمودار دقت کنید: $A - (A \cap B)$ می‌شود $A - B$. حالا سؤال تفاضل $A \cup B$ و این مجموعه را می‌خواهد یعنی $(A \cup B) - (A - B)$ که

با توجه به شکل می‌شود B پس:

$$(A \cup B) - \underbrace{[A - (A \cap B)]}_{(A-B)} = (A \cup B) - (A - B) = B = \{2, 4, 5, 6\}$$

و دارای ۴ عضو است.



۲۱- گزینه‌ی **د** $A - (A - B)$ همان $A \cap B$ است. $B - (B - A)$ نیز همان $A \cap B$ است. به نمودار دقت کنید:

پس در واقع اجتماع $A \cap B$ با خودش را می‌خواهیم که همان $A \cap B = \{3, 6\}$ می‌شود که دو عضو دارد.

$$A = \{0, 11, 12, \dots, 98, 99\}$$

$$B = \{70, 77, 84, \dots, 93\}$$

7×99

۲۲- گزینه‌ی **د** اعضای A عبارت‌اند از:

حالا B شامل ۷ برابر اعضای A است:

عضوهای مشترک A و B عبارت‌اند از $70, 77, 84, 91, 98$ یعنی $A \cap B$ پنج عضو دارد.

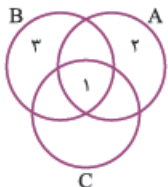
$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\}$$

۲۳- گزینه‌ی **د** اول $A - \{B\}$ را تشکیل دهیم:

پس این مجموعه سه‌عضوی است و $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد و بنابراین ۷ زیرمجموعه غیرتهی دارد.

۲۴- گزینه‌ی **د** درست است. می‌دانیم اگر در رابطه‌ی زیرمجموعه‌بودن، مجموعه‌ها را متمم کنیم جهت برعکس می‌شود یعنی از

رابطه‌ی $A \subset B$ نتیجه می‌شود $B' \subset A'$.



۲۵- درست است. اگر $A - B$ تهی باشد تمام اعضای A در B هستند و در نتیجه A زیرمجموعه‌ی B خواهد بود.

۲۶- نادرست است. اگر $A \cap C = B \cap C$ باشد نمی‌توان نتیجه گرفت $A = B$ را برابر است. مثلن این را ببینید:

$$A \neq B \text{ اما } A \cap C = B \cap C = \{1\}$$

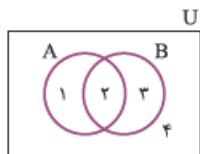
۲۷- درست است. اگر اشتراک A و B برابر A باشد یعنی تمام اعضای A با B مشترک‌اند پس A زیرمجموعه‌ی B است.



۲۸- گزینه‌ی **د** $B - (A \cap B)$ همان $B - A$ است.

$$A - (B - A) = A$$

پس $A - (B - A)$ را می‌خواهیم و چون A و $B - A$ اشتراکی ندارند، جواب تفاضل همان A می‌شود:



۲۹- گزینه‌ی **د** شکل را ببینید:

$B - A$ ناحیه‌ی ۳ است؛ پس $(B - A)'$ نواحی ۱، ۲، ۴ است؛ حالا $(B - A)' - A$ می‌شود $\{1, 2, 4\} - \{1, 2\}$ یعنی ۴.

صورت سؤال متمم این را می‌خواهد، متمم ناحیه‌ی ۴ می‌شود نواحی ۱، ۲، ۳ یعنی $A \cup B$.

از روابط مجموعه‌ها داریم:

$$(B - A)' - A \xrightarrow{\text{تعریف تفاضل}} = (B \cap A')' \cap A' \xrightarrow{\text{دمرگان}} = (B' \cup A) \cap A' \xrightarrow{\text{بخشی}} = (B' \cap A') \cup \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} = B' \cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{متمم}} = B \cup A$$

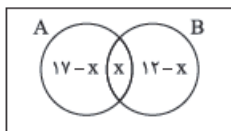


۲۷- گزینه‌ی **د** بازه‌ی $[\frac{1}{4}, 4]$ را ببینید:

اگر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را حذف کنیم داریم:
این مجموعه از اجتماع ۴ بازه‌ی $(\frac{1}{4}, 1)$ ، $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ ، $(3, 4)$ ساخته شده است.

۲۸- گزینه‌ی **د** $A - B$ یعنی عضوایی از A که در B نباشند.

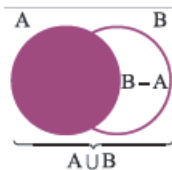
برای این که تعداد عضوهای $A - B$ حداکثر شود باید تا حد امکان A و B کمترین اشتراک را داشته باشند. اگر تعداد عضوهای مشترک را x بگیریم داریم:



$$17 - x + x + 12 - x \leq 22 \Rightarrow 29 - x \leq 22 \Rightarrow x \geq 7$$

یعنی حداقل ۷ عضو مشترک لازم است؛ پس $A - B$ حداکثر ۱۰ عضو دارد.

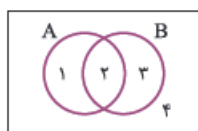
۲۹- گزینه‌ی **ب** $A \cup (B - A)$ همان $A \cup B$ است:



پس سؤال گفته $A \cup B = B$ و این یعنی $A \subset B$ بوده است.

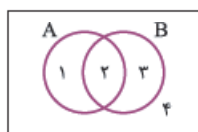
۳۰- گزینه‌ی **د** $A \cap B'$ همان $A - B$ است. پس $(A - B) - (B - A)$ را می‌خواهیم. چون $A - B$ و $B - A$ اشتراک ندارند، تفاضل آن‌ها

همان $A - B$ خواهد بود.



۳۱- گزینه‌ی **ب** اول به نمودار دقت کنید:

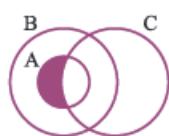
$A - B$ ناحیه‌ی ۱ است پس $(A - B)'$ نواحی ۲، ۳، ۴ است. $A \cup B$ نواحی ۱، ۲، ۳ است و A' ناحیه‌ی ۳ و ۴ است. بنابراین اشتراک این‌ها می‌شود ناحیه‌ی ۳ که همان $B - A$ است.



۳۲- گزینه‌ی **د** $A - (A - B)$ همان $A \cap B$ است:

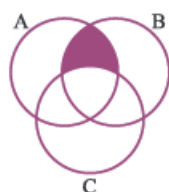
پس متمم $(A \cap B) \cup (A \cap B)'$ را می‌خواهیم و جواب می‌شود $U' = \emptyset$. این برابر مجموعه‌ی مرجع است

۳۳- گزینه‌ی **ب** $A \cup (A \cap B)$ همان A است. اجتماع $B \cap A$ و $B - A$ هم خود B است. پس $A' \cap B$ را می‌خواهیم که می‌شود $B - A$ یا $A' - B'$.



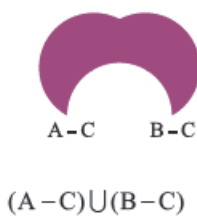
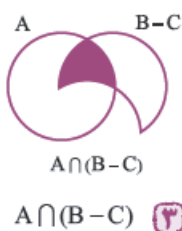
۳۴- گزینه‌ی **ب** اول شکل را ببینید:

دقت کنید که A زیرمجموعه‌ی B است و باید درون B قرار گیرد. حالا $A \cap (B - C)$ ناحیه‌ی سایه‌زده از A است و $A \cap B \cap C$ ناحیه‌ی سایه‌تخورده‌ی A است که اشتراکی ندارند. پس جواب می‌شود همان $A \cap (B - C)$ که با توجه به شکل $A \cap C'$ است.



۳۵- گزینه‌ی **د** متمم $C \cup A' \cup B'$ می‌شود $C' \cap A \cap B$. حالا به نمودار دقت کنید:

(ناحیه‌ی موردنظر در A و B هست و در C نیست)
حالا گزینه‌ها:



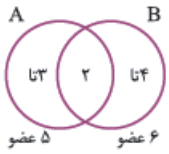


۳۶- گزینه‌ی **د** با هیچ کدام از مجموعه‌های B و C اشتراک ندارد. این شکلی:

$$A \cap (B \cup C) = \emptyset$$

پس A با اجتماع آن‌ها هم اشتراکی ندارد.

در مورد اشتراک B و C نظری نمی‌توان داد (۱ و ۲ نیستند) و چون $B - C$ قسمتی از B است با A اشتراکی ندارد.

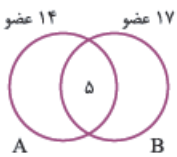


۳۷- گزینه‌ی **ب** به نمودار دقت کنید:

پس $A - B$ دارای ۳ و $B - A$ دارای ۴ عضو است. حالا خواسته‌ی سؤال:

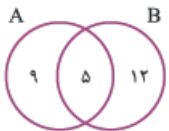
$$(A \cap B') \cup (A \cup B')' = (A - B) \cup \underbrace{(A' \cap B)}_{B - A} = (A - B) \cup (B - A)$$

که با توجه به شکل، $3 + 4 = 7$ عضو دارد.



۳۸- گزینه‌ی **د** به نمودار و دقت کنید:

۵ عضو در ناحیه‌ی مشترک‌اند، پس $14 - 5 = 9$ عضو فقط در A قرار دارند و $17 - 5 = 12$ عضو فقط در B هستند.



بنابراین $9 + 12 = 21$ عضو فقط در یکی از دو مجموعه هستند.

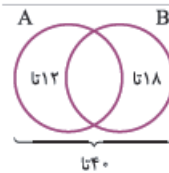
۳۹- گزینه‌ی **د** اجتماع دو مجموعه در حالت اول $36 + 28 - 15 = 49$ عضو دارد. حالا ۱۶ عضو از A کم شده که ۹ تایی آن‌ها از اشتراک

حذف شده‌اند. پس الان A دارای $36 - 16 = 20$ عضو است و اشتراک جدید هم $15 - 9 = 6$ عضو دارد. مجموعه‌ی B که تغییری نکرده پس تعداد

$$20 + 28 - 6 = 42$$

اعضای اجتماع مجموعه‌ی A جدید با B برابر است با:

۱۶ عضو از A کم شده که ۹ تایی آن‌ها در اشتراک‌اند یعنی در B حضور دارند. پس عملن ۷ عضو از اجتماع کم می‌شود: $42 - 7 = 35$

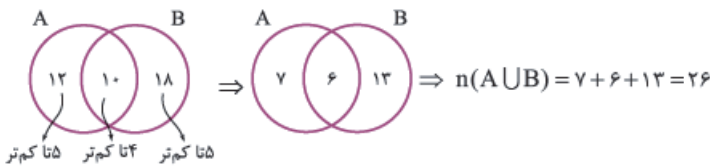


۴۰- گزینه‌ی **ب** به نمودار دقت کنید:

پس در ناحیه‌ی وسط یعنی $A \cap B$ باید $40 - 12 - 18 = 10$ عضو باشد.

حالا از هر یک از مجموعه‌های A و B ۱۰ عضو برداشته شده و از اشتراک آن‌ها ۴ تا کم شده است. پس از قسمت

غیرمشترک هر کدام، ۵ تا کم می‌شود.



اجتماع دو مجموعه‌ی اولیه ۴۰ تا عضو دارد. ما $9 + 9 = 18$ تا را برداشته‌ایم که ۴ تایش مشترک بوده پس $40 - 18 + 4$ یعنی ۲۶ تا می‌ماند.

۴۱- گزینه‌ی **د** اول مجموعه‌های A_1 تا A_8 را معلوم کنیم:

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 7\} = \{-1, 0, 1, 2, \dots, 7\}$$

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m \leq 6\} = \{-2, -1, 0, \dots, 6\}$$

⋮

$$A_7 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -7 \leq m \leq 1\} = \{-7, -6, \dots, 1\}$$

$$A_8 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -8 \leq m \leq 0\} = \{-8, -7, \dots, 0\}$$

اجتماع همه‌ی این‌ها از -8 تا 7 را دربرمی‌گیرد و اشتراک همه‌ی این‌ها اعداد صحیح -1 و 0 است.

$$\bigcup_{i=1}^8 A_i = \{-8, -7, -6, \dots, 6, 7\} \Rightarrow \text{شانزده عضو}$$

$$\bigcap_{i=1}^8 A_i = \{-1, 0\} \Rightarrow \text{دو عضو}$$

و تفاضل این‌ها $16 - 2 = 14$ عضو دارد.

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 4, 2^m \leq 8\}$$

$$A_6 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 6, 2^m \leq 12\}$$

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 1, 2^m \leq 2\}$$


$$A_4 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A_6 = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}$$

$$(A_6 - A_4) \cup A_1 = \{-6, -5, \pm 1, 0\}$$

پس $A_6 - A_4$ می‌شود $\{-6, -5\}$ و اجتماع آن با A_1 دارای ۵ عضو است: $\{-6, -5, \pm 1, 0\}$

۴۲- گزینه‌ی  به جای n اعداد ۱، ۴، ۶ را بگذاریم:

می‌دانیم که جواب $|m| \leq k$ به صورت $-k \leq m \leq k$ است.

پس: