

## حل معادله‌ی درجه ۲ و کاربردها



برای پیدا کردن جواب‌های یک معادله‌ی درجه‌دوم، روش‌های مختلفی وجود دارد. ما در این جا سه روش زیر را به طور کامل بررسی می‌کنیم:

۱ حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش تجزیه

۲ حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش مربع کامل‌سازی

۳ حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش کلی ( $\Delta$ )

## ۱) حل معادله‌ی درجه دوم به روش تجزیه

یک خاصیت مهم در اعداد داریم به اسم «خاصیت عامل صفر» که می‌گوید: اگر حاصل ضرب دو عدد (یا چند عدد) صفر شود، حداقل یکی از آن‌ها صفر است؛ یعنی اگر  $ab = 0$  باشد، آن‌گاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

یکی از روش‌های حل معادله‌ی درجه‌دوم، روش تجزیه است. در این روش این‌گونه عمل می‌کنیم:

**مرحله‌ی ۱** معادله را به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  در می‌آوریم (یعنی تمام جملات را به سمت چپ می‌بریم).

**مرحله‌ی ۲** عبارت سمت چپ را تجزیه می‌کنیم (تجزیه‌ی یک عبارت درجه‌دوم به صورت ضرب دو عبارت درجه یک است).

**مرحله‌ی ۳** طبق «خاصیت عامل صفر» حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. با مساوی قرار دادن هر کدام از عبارت‌های مرحله‌ی (۲) با صفر، جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

**نکته** برای این‌که عبارت‌های درجه‌دوم را راحت‌تر تجزیه کنیم، باید فصل ۱ را خوب بلد باشیم. ما در فصل ۱، به صورت کامل تجزیه‌ی عبارت‌های درجه‌دوم را بررسی کرده‌ایم.

روش‌های تجزیه‌ای که برای حل معادله‌های درجه‌دوم<sup>۱</sup> در این فصل مورد استفاده قرار می‌دهیم، عبارت‌اند از:

**الف)** فاکتورگیری **ب)** تجزیه با کمک اتحاد مربع

**ج)** تجزیه با کمک اتحاد مزدوج **د)** تجزیه با کمک اتحاد جمله‌مشتک

**مثال** معادله‌های زیر را به روش فاکتورگیری حل کنید.

$$\text{الف)} \quad (x+5)^2 - 3(x+5) = 0$$

$$\text{ب)} \quad 2x^2 - 8x = 0$$

**پاسخ الف)** بین دو عبارت  $2x$  و  $8x$  از  $2x$  فاکتور می‌گیریم:

$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

**پس)** بین دو عبارت  $(x+5)^2$  و  $3(x+5)$  از  $x+5$  فاکتور می‌گیریم:

$$(x+5)^2 - 3(x+5) = 0 \Rightarrow (x+5)\underbrace{((x+5)-3)}_{x+5-3} = 0 \Rightarrow (x+5)(x+2) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x+5 = 0 \Rightarrow x = -5 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

**نکته** معادله‌های درجه‌دوم به فرم  $ax^2 + bx = 0$  (یعنی  $c = 0$  است) را با روش فاکتورگیری حل می‌کنیم. (مثل قسمت الف) مثال بالا)

**مثال** معادله‌های زیر را به روش تجزیه با کمک اتحاد مربع حل کنید.

$$\text{الف)} \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\text{ب)} \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

**پاسخ الف)** عبارت  $x^2 - 6x + 9$  بازشده‌ی  $(x-3)^2$  است، پس:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

**پس)** عبارت  $4x^2 + 4x + 1$  بازشده‌ی  $(2x+1)^2$  است، پس:

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

اگر یک معادله‌ی درجه دوم را با کمک اتحاد مربع تجزیه کنیم، در نهایت معادله دارای یک جواب است که آن را «جواب مضاعف» یا «ریشه‌ی مضاعف» معادله می‌نامیم.

معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌ی مضاعف دارد به شکل  $(x - \alpha)^2 = 0$  درمی‌آید (یعنی یک سمت تساوی به صورت اتحاد مربع و سمت دیگر آن صفر است).

**مثال** معادله‌های زیر را به روش تجزیه با کمک اتحاد مزدوج حل کنید.

الف)  $x^2 - 25 = 0$

$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$   
تجزیه با کمک اتحاد مزدوج

ب)  $4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(2x + 3) = 0$   
تجزیه با کمک اتحاد مزدوج

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$   
تجزیه با کمک اتحاد مزدوج

جواب حقیقی ندارد  $\Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x^2 + 4 = 0$

پاسخ الف)

ب)

ج)

معادله‌هایی به شکل «عدد منفی =  $x^2$ » جواب حقیقی ندارند، مثلاً معادله‌ی  $x^2 = -1$  جواب حقیقی ندارد.

**مثال** معادله‌های زیر را به روش تجزیه با کمک اتحاد جمله مشترک حل کنید.

الف)  $x^2 + 5x + 6 = 0$

ب)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

ج)  $x^2 + 2x - 40 = 0$

د)  $2x^2 - 8x - 10 = 0$

ه)  $4x^2 - 8x + 3 = 0$

و)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

**پاسخ** سمت چپ تمام معادله‌های بالا را در فصل ۱ (قسمت اتحاد جمله مشترک) تجزیه کرده‌ایم، پس جای سمت چپ تساوی، عبارت

تجزیه شده‌ی آن را می‌نویسیم و سپس از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

الف)  $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0$   
ضرب جمع

ب)  $3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x - 5) = 0$   
ضرب جمع

ج)  $4x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 4(2x) + 3 = 0 \Rightarrow (2x - 1)(2x - 3) = 0$   
ضرب جمع

د)  $2x^2 - 8x - 10 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۲}} (3x)^2 - 7(3x) + 6 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(3x - 6) = 0$   
ضرب جمع

ه)  $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$   
و)  $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$   
خاصیت عامل صفر

ز)  $2x^2 - 8x - 10 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$   
ضرب جمع

ح)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$   
ضرب جمع اتحاد مزدوج

$\Rightarrow (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0$   
خاصیت عامل صفر

برای دیدن روند کامل تجزیه‌ی عبارتهای این مثال به درس‌نامه‌ی فصل ۱ (اتحاد جمله‌مشتربک) مراجعه کنید.  
در آخر هم با چند نصیحت! بحث را تمام می‌کنیم:

- ◀ اگر معادله به شکل  $ax^2 + bx = 0$  (یعنی  $c = 0$ ) بود، معادله را با فاکتورگیری از  $x$  حل می‌کنیم.
- ◀ اگر معادله به شکل  $ax^2 - c = 0$  بود (یعنی ضریب  $x$  صفر باشد)، معادله را به کمک اتحاد مزدوج حل می‌کنیم.
- ◀ اگر معادله به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  بود و هیچ کدام از ضرایب صفر نبودند، معادله را باید با کمک اتحاد مزدوج یا جمله‌مشتربک تجزیه کنیم.
- 🔊 اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌دوم باشند، می‌توان گفت آن معادله به صورت  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$  است. به عنوان مثال  $x = 2$  و  $x = 5$  ریشه‌های معادله‌ی  $(x - 2)(x - 5) = 0$  هستند که آن را می‌توان به صورت  $x^2 - 7x + 10 = 0$  نیز نوشت.

**مثال** معادله‌ی درجه‌دومی بنویسید که  $x = -1$  و  $x = 3$  ریشه‌های آن باشند.

**پاسخ**  $(x - (-1))(x - 3) = 0 \Rightarrow \underbrace{(x + 1)(x - 3)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow x^2 + (1 + (-3))x + (1 \times (-3)) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

**حل يك معادله‌ی خاص!**

می‌دانیم اگر توان عبارتی زوج باشد، حاصل آن عبارت حتماً نامنفی (مثبت یا صفر) است. حالا اگر چند عبارت نامنفی با هم جمع شوند و حاصل برابر صفر شود، چه نتیجه‌ای می‌توانیم بگیریم؟ فقط و فقط می‌توانیم نتیجه بگیریم که تک‌تک آن عبارتهای نامنفی برابر صفر هستند، چون حتی اگر یکی از آن‌ها هم عددی مثبت باشد، آن وقت برای این که جمعشان صفر شود، باید یکی از آن‌ها منفی شود (که قراره تشه! چون نامنفی‌ان).

**مثال** اگر  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$  باشد، مقدار  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

**پاسخ** خُب توان‌های دو عبارت  $(x - 2)^2$  و  $(y + 3)^2$  زوج است، پس هر دو نامنفی هستند و چون جمعشان صفر شده، پس هر دو برابر با صفر هستند:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

**پرسش‌های چهارگزینه‌ای**

- ۱۸- جواب‌های معادله‌ی  $9x^2 = 3x$  کدام است؟  
 (۱) ۰ و ۳ (۲)  $\frac{1}{3}$  و ۳ (۳) ۰ و  $\frac{1}{3}$  (۴) ۳ و  $\frac{1}{9}$
- ۱۹- جواب‌های معادله‌ی  $x(x + 3) - 4(x + 3) = 0$  کدام است؟  
 (۱) ۳ و ۴ (۲) -۳ و ۴ (۳) ۳ و -۴ (۴) -۳ و -۴
- ۲۰- برای حل معادله‌ی درجه‌دوم  $x - 1 = (x - 1)(x + 1)$  به روش تجزیه، آن را به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه یک مساوی صفر در آورده‌ایم. یکی از این دو عبارت درجه یک کدام می‌تواند باشد؟  
 (۱)  $x$  (۲)  $x + 1$  (۳)  $x - 2$  (۴)  $x + 2$
- ۲۱- اگر تجزیه‌شده‌ی عبارت  $ax^2 + bx + c$  به صورت  $(2x - 1)(x + 5)$  باشد، مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{9}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $-\frac{9}{2}$  (۴)  $-\frac{5}{2}$
- ۲۲- اعداد  $\frac{1}{2}$  و -۲ ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر هستند؟  
 (۱)  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  (۲)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  (۳)  $2x^2 + 5x - 2 = 0$  (۴)  $2x^2 + 3x - 2 = 0$
- ۲۳- جواب معادله‌ی  $x^2 + 36 = 12x$  کدام است؟  
 (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۶ (۴) ۶

۲۴- کدام یک از معادله‌های زیر ریشه‌ی مضاعف  $x = \frac{1}{4}$  دارد؟

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (f) \quad 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (g) \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (h) \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (i)$$

۲۵- اگر معادله‌ی  $4x^2 - 12x = k$  ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

$$3 \quad (f) \quad -3 \quad (g) \quad 9 \quad (h) \quad -9 \quad (i)$$

۲۶- اگر  $a^2 - 9 = 6a - 9$  باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

$$\frac{9}{4} \quad (f) \quad -\frac{9}{4} \quad (g) \quad \frac{9}{2} \quad (h) \quad -\frac{9}{2} \quad (i)$$

۲۷- اگر  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a + b + c)$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$$4 \quad (f) \quad 3 \quad (g) \quad 2 \quad (h) \quad 1 \quad (i)$$

۲۸- جواب‌های معادله‌ی  $12x^2 - 24 = 0$  کدام است؟

$$\pm 4 \quad (f) \quad \pm 2\sqrt{2} \quad (g) \quad \pm 2 \quad (h) \quad \pm \sqrt{2} \quad (i)$$

۲۹- ریشه‌ی کدام یک از معادله‌های زیر  $\pm \frac{2}{5}$  است؟

$$4x^2 - 25 = 0 \quad (f) \quad 25x^2 - 4 = 0 \quad (g) \quad 25x^2 + 4 = 0 \quad (h) \quad 4x^2 + 25 = 0 \quad (i)$$

۳۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی  $(x-5)^2 = (3x+1)^2$  کدام است؟

$$-4 \quad (f) \quad 4 \quad (g) \quad -2 \quad (h) \quad 2 \quad (i)$$

۳۱- ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 25 = 0$  بیشتر است؟

$$x^2 - 36 = 0 \quad (f) \quad x^2 - 2x - 24 = 0 \quad (g) \quad x^2 + 2x - 24 = 0 \quad (h) \quad x^2 - 16 = 0 \quad (i)$$

۳۲- جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x - 10 = 0$  کدام است؟

$$-5 \text{ و } -2 \quad (f) \quad 5 \text{ و } -2 \quad (g) \quad 5 \text{ و } 2 \quad (h) \quad -5 \text{ و } 2 \quad (i)$$

۳۳- جواب کوچک‌تر معادله‌ی  $25x^2 - 10x = 24$  کدام است؟

$$\frac{6}{5} \quad (f) \quad \frac{4}{5} \quad (g) \quad -\frac{4}{5} \quad (h) \quad -\frac{6}{5} \quad (i)$$

۳۴- حاصل ضرب عددی در سه واحد بیشتر از قرینه‌اش برابر ۲۸ شده است. این عدد کدام می‌تواند باشد؟

$$-1 \quad (f) \quad -4 \quad (g) \quad -7 \quad (h) \quad 4 \quad (i)$$

۳۵- مجموع دو جواب بزرگ‌تر معادله‌ی  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  کدام است؟

$$13 \quad (f) \quad 9 \quad (g) \quad 7 \quad (h) \quad 5 \quad (i)$$

## ۲) حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل سازی

به خاصیت مهم در اعداد داریم به اسم «خاصیت ریشه‌ی زوج» که می‌گوید:

اگر  $x^2 = a$  و  $a \geq 0$  باشد، آن‌گاه  $x = \pm\sqrt{a}$ . به طور مثال اگر  $x^2 = 24$  (چون امروز ۲۴ فروردین ۹۵ است!) باشد، آن‌گاه  $x = \pm\sqrt{24}$ .

**مثال** معادله‌های زیر را با استفاده از خاصیت ریشه‌ی زوج حل کنید.

(الف)  $x^2 - 9 = 0$

(ب)  $(x+1)^2 = 5$

(ج)  $(x+3)^2 = (2x-9)^2$

(الف)  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

(ب)  $(x+1)^2 = 5 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5} - 1 \\ x+1 = -\sqrt{5} \Rightarrow x = -\sqrt{5} - 1 \end{cases}$

(ج)  $(x+3)^2 = (2x-9)^2 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+3 = \pm(2x-9) \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 2x-9 \Rightarrow x-2x = -9-3 \Rightarrow x = 12 \\ x+3 = -2x+9 \Rightarrow x+2x = 9-3 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

(سبزش ۹۰)

حالا که خاصیت ریشه‌ی زوج را فهمیدیم می‌رویم سراغ حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش مربع کامل‌سازی.

در زیر مراحل حل یک معادله‌ی درجه‌دوم به روش مربع کامل‌سازی را بیان می‌کنیم. تمام مراحل را هم روی معادله‌ی  $3x^2 - 12x - 15 = 0$  انجام می‌دهیم.

۱ جملات شامل متغیر (x) را به سمت چپ تساوی و عدد ثابت را به سمت راست تساوی می‌بریم:

$$3x^2 - 12x = 15$$

۲ تمام جملات را به ضریب  $x^2$  تقسیم می‌کنیم (اگر ضریب  $x^2$ ، یک بود، می‌رویم مرحله‌ی بعد):

$$3x^2 - 12x = 15 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} x^2 - 4x = 5$$

۳ نصف ضریب x را به توان دو می‌رسانیم و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x \text{ نصف ضریب } x \text{ را به توان } 2 \text{ می‌رسانیم و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم: } (-2)^2 = 4$$

$$\xrightarrow{\text{به دو طرف } +4 \text{ اضافه می‌کنیم}} x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 9$$

۴ سمت چپ را به صورت یک اتحاد مربع می‌نویسیم:

$$(x - 2)^2 = 9$$

۵ از خاصیت ریشه‌ی زوج استفاده می‌کنیم:

$$x - 2 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x - 2 = \pm 3$$

$$\begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۶ دو معادله‌ی به دست آمده را حل می‌کنیم:

**مثال** معادله‌ی  $2x^2 - 6x - 20 = 0$  را به روش مربع کامل‌سازی حل کنید.

**پاسخ** اول  $-20$  را به سمت راست تساوی می‌بریم:

$$2x^2 - 6x - 20 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 20$$

حالا طرفین تساوی را به ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 - 6x = 20 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^2 - 3x = 10$$

مربع نصف ضریب x را حساب می‌کنیم:

$$x \text{ نصف ضریب } x \text{ را به توان } 2 \text{ می‌رسانیم و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم: } \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$\frac{9}{4}$  را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 10 + \frac{9}{4}$$

سمت چپ اتحاد مربع است و سمت راست را هم با مخرج مشترک‌گیری ساده می‌کنیم:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

از خاصیت ریشه‌ی زوج استفاده می‌کنیم:

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5 \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۶- برای حل معادله‌ی درجه‌دوم  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  به روش مربع کامل‌سازی، پس از تبدیل ضریب  $x^2$  به یک، کدام عدد را باید به دو طرف

معادله اضافه کنیم؟

(کتاب درس)

$$\frac{3}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۱)$$

۳۷- در حل معادله‌ی  $2x^2 - 6x - 1 = 0$  به روش مربع کامل‌سازی، (بعد از تبدیل ضریب  $x^2$  به عدد یک) از چه عددی جذر گرفته می‌شود؟

(کتاب درس)

$$\frac{15}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{11}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۱)$$

(کتاب درس)

۳۸- قطر مربعی  $4\sqrt{3}$  است. محیط آن کدام است؟

$$8\sqrt{6} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$8\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۱)$$

۳۹- اگر بتوانیم معادله‌ی درجه‌دوم  $x^2 - 2bx - 16 = 0$  را به شکل  $(x - b)^2 = 25$  تبدیل کنیم، مقدار  $b^2$  کدام است؟

$$41 \quad (۴)$$

$$25 \quad (۳)$$

$$16 \quad (۲)$$

$$9 \quad (۱)$$

۴۰- کدام معادله جواب حقیقی ندارد؟

$$x^2 + 2 = 0 \quad (۴)$$

$$1 - 2x^2 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - \sqrt{2} = 0 \quad (۲)$$

$$2 - x^2 = 0 \quad (۱)$$

(کتاب درسی)

$$1/6 \quad (۴)$$

$$1/4 \quad (۳)$$

$$1/2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۴۱- تفاضل ریشه‌های معادله  $1 = 8 - (4x - 5)^2$  کدام است؟

۴۲- ریشه‌ی کوچک‌تر معادله  $(4 - x)^2 = (3x - 1)^2$  کدام است؟

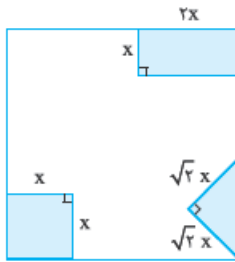
$$\frac{-3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{-5}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۱)$$

۴۳- از مربعی به ضلع ۶ cm سه شکل زیر بریده شده است. مساحت باقی‌مانده  $24 \text{ cm}^2$  است. طول ضلع



(کتاب درسی)

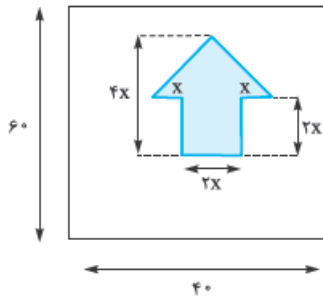
کوچک بریده شده چه قدر است؟

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$



۴۴- برای ساخت تابلوی روبه‌رو، هزینه‌ی هر  $1 \text{ cm}^2$  برچسب آبی ۳۰ تومان و هزینه‌ی هر  $1 \text{ cm}^2$

برچسب سفید ۱۰ تومان است. اگر مجموع هزینه‌های برچسب‌های سفید و آبی برابر با ۶۰۰۰ تومان

(کتاب درسی)

شده باشد،  $x$  چه قدر است؟

$$10 \quad (۱)$$

$$15 \quad (۲)$$

$$20 \quad (۳)$$

$$25 \quad (۴)$$

## ۳) حل معادله‌ی درجه دوم به روش کلی

برای آن که از شر روش مربع کامل‌سازی خلاص شویم و هر دفعه، مراحل ۶ گانه‌ی بالا را انجام ندهیم، یک بار حالت کلی معادله‌ی درجه دوم یعنی

$ax^2 + bx + c = 0$  را به روش مربع کامل‌سازی حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده از این روش عبارت‌اند از:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت  $b^2 - 4ac$  را «مُتین» معادله‌ی درجه دوم می‌نامیم و آن را با نماد  $\Delta$  (دلتا) نشان می‌دهیم. پس جواب‌های معادله‌ی درجه دوم

$ax^2 + bx + c = 0$  عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}, \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

بی‌دردسرت‌ترین روش حل معادله‌ی درجه دوم همین روش است. فقط کافی است این رابطه‌ها را حفظ باشیم. اصلاً هم نیاز به سوزاندن قفسه نداردا

در زیر، مراحل حل یک معادله‌ی درجه دوم به روش کلی را بیان می‌کنیم. تمام مراحل را روی معادله‌ی  $3x^2 - 7x - 2 = 0$  انجام می‌دهیم:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

۱) باید تمام جملات در یک سمت تساوی قرار بگیرند و در سمت دیگر تساوی صفر باشد:

$$a = 3, \quad b = -7, \quad c = 2$$

۲)  $a$  و  $b$  و  $c$  را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25$$

۳)  $\Delta$  را حساب می‌کنیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۴)  $x$  را از فرمول گفته شده به دست می‌آوریم:

**مثال** معادله‌های زیر را به روش کلی حل کنید.

الف)  $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = 5, b = -7, c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(5)(2) = 49 - 40 = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2(5)} = \frac{7 \pm 3}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+3}{10} = \frac{10}{10} = 1 \\ x_2 = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$a = 1, b = -2, c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{3} \\ x_2 = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

ب)  $x^2 - 2x - 2 = 0$

**پاسخ** ضرایب را تعیین می‌کنیم:

$\Delta$  را حساب می‌کنیم:

$x$  را به دست می‌آوریم:

**پس** ضرایب را تعیین می‌کنیم:

$\Delta$  را حساب می‌کنیم:

$x$  را به دست می‌آوریم:

**مثال** اگر  $x = 1$  یکی از جواب‌های معادله‌ی  $2x^2 + kx + 5 = 0$  باشد،  $k$  و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

**پاسخ** جواب‌های معادله در معادله صدق می‌کنند، پس در  $x = 1$  در  $2x^2 + kx + 5 = 0$  صدق می‌کند:

$2x^2 + kx + 5 = 0 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=1} 2(1)^2 + k(1) + 5 = 0 \Rightarrow 2 + k + 5 = 0 \Rightarrow k + 7 = 0 \Rightarrow k = -7$

حالا که  $k = -7$  شد، معادله‌ی  $2x^2 - 7x + 5 = 0$  را با روش کلی حل می‌کنیم:

$a = 2, b = -7, c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(5) = 49 - 40 = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

جواب دیگر معادله  $x = \frac{5}{2}$  است.

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۵- جواب کوچک‌تر معادله‌ی  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $-3$       ۴)  $3$

۴۶- یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم  $x(x-2) = 2$  کدام است؟

- ۱)  $1 + \sqrt{12}$       ۲)  $1 + \sqrt{3}$       ۳)  $\sqrt{3} - 1$       ۴)  $1 - \sqrt{12}$

۴۷- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم  $6x^2 + 5x - 1 = 0$  باشند، حاصل  $x_1^2 + x_2^2$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{13}{36}$       ۲)  $\frac{23}{36}$       ۳)  $\frac{37}{36}$       ۴)  $\frac{43}{36}$

۴۸- مجموع جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 2kx + 15 = 0$  کدام است؟

- ۱)  $2k$       ۲)  $-2k$       ۳)  $2\sqrt{k^2 - 15}$       ۴)  $-2\sqrt{k^2 - 15}$

۴۹- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم  $mx^2 - 3x + 4 = 0$  برابر ۲ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

- ۱)  $-4$       ۲)  $-3$       ۳)  $3$       ۴)  $4$

(سنجش ۱۹)

## ۴ دو معادله‌ی درجه دوم پرکاربرد

در معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دو حالت خاص وجود دارد که زیاد مورد سؤال قرار می‌گیرند. این دو حالت را با هم بررسی می‌کنیم:

۱)  $a + b + c = 0$  (جمع ضرایب صفر باشد): در این حالت ریشه‌های معادله ۱ و  $\frac{c}{a}$  هستند.

مثلاً در معادله‌ی  $2x^2 - 7x + 5 = 0$  که  $a = 2$ ,  $b = -7$ ,  $c = 5$  است، چون  $a + b + c = 0$  است، پس ریشه‌های معادله عبارت‌اند از:  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$

۲)  $a - b + c = 0$  (یا  $a + c = b$  باشد): در این حالت ریشه‌های معادله  $-1$  و  $-\frac{c}{a}$  هستند.

مثلاً در معادله‌ی  $3x^2 - 5x - 8 = 0$  که  $a = 3$ ,  $b = -5$ ,  $c = -8$  است، چون  $a - b + c = 0$  است، پس ریشه‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3}$$

**مثال** معادله‌های زیر را حل کنید.

**الف)**  $7x^2 - 9x + 2 = 0$

**ب)**  $5x^2 + 11x + 6 = 0$

**پاسخ الف)** در این معادله  $a = 7$ ,  $b = -9$ ,  $c = 2$  است، پس در شرط  $a + b + c = 0$  صدق می‌کند و ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{7}$$

**پاسخ ب)** در این معادله  $a = 5$ ,  $b = 11$ ,  $c = 6$  است، پس در شرط  $a - b + c = 0$  صدق می‌کند و ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{6}{5}$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۰- جواب کوچک‌تر معادله‌ی  $17x^2 - 20x + 3 = 0$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $-\frac{1}{17}$       ۳)  $\frac{3}{17}$       ۴)  $-\frac{3}{17}$

۵۱- در معادله‌ی  $x(11x + 10) = 1$  نصف ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{22}$       ۴)  $-\frac{1}{22}$

۵۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + kx - 7 = 0$  برابر با  $\frac{7}{3}$  باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $-1$       ۳)  $\frac{3}{7}$       ۴)  $-\frac{3}{7}$

۵۳- یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $(m+3)x^2 - (2m+1)x = 2 - m$  (که  $m \neq -3$ ) کدام است؟

- ۱)  $\frac{m+3}{m-2}$       ۲)  $\frac{2-m}{m+3}$       ۳)  $-1$       ۴) ۱

## ۵ حل معادله‌ی درجه دوم به روش تغییر متغیر

در برخی از معادلات با جای‌گذاری  $t$  به جای عبارتی بر حسب  $x$ ، می‌توان معادله را به شکل یک معادله‌ی درجه دوم ساده‌تر نوشت. سپس معادله‌ی

بر حسب  $t$  را حل می‌کنیم، مقادیر  $t$  را به دست می‌آوریم. در نهایت باید عبارتی که جای آن  $t$  را قرار داده‌ایم، مساوی با جواب‌های  $t$  قرار دهیم

و  $x$  را به دست آوریم.

**مثال** معادله‌ی  $2(3x-1)^2 - 3(3x-1) - 2 = 0$  را حل کنید.

**پاسخ**  $3x-1$  را  $t$  می‌گیریم:

پس معادله به شکل روبه‌رو درمی‌آید:

با روش کلی این معادله را حل می‌کنیم:

$$3x - 1 = t$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \\ t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

حالا که  $t$  به دست آمد، جواب‌های آن را در  $3x-1=t$  جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$3x - 1 = t \xrightarrow{t_1=2} 3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1, \quad 3x - 1 = t \xrightarrow{t_2=-\frac{1}{2}} 3x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$



### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۵۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $4(2x-1)^2 - 5(2x-1) + 1 = 0$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{5}{8}$  (۲)  $\frac{7}{8}$  (۳)  $\frac{11}{8}$  (۴)  $\frac{13}{8}$  (سنجش ۹۰)
- ۵۵- در معادله‌ی درجه‌دوم  $6 = (x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1)$ ، بزرگ‌ترین جواب  $x$  کدام است؟  
 (۱)  $4 - \sqrt{3}$  (۲)  $2 - \sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$  (سراسری ۸۷)
- ۵۶- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی  $0 = x^2 + 10x^2 + 9 = 0$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ (ظرح ۹۲)
- ۵۷- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $0 = (x^2 + x) - 18(x^2 + x) + 72 = 0$  کدام است؟  
 (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴ (تبری ۹۰)

### ۶ ترکیب تمام روش‌های گفته شده!

در حل سؤال‌های این قسمت، انتخاب روش حل معادله‌ی درجه‌دوم با خودتان است. البته باید حواسمان هم باشد که سرعت حل روش‌ها در مثال‌های مختلف با هم متفاوت هستند. ما پیشنهادهای زیر را برای شما داریم!

- ۱- اول از هر چیز حواسمان به دو نوع پرکاربرد معادله‌ی درجه‌دوم باشد؛ یکی حالتی که  $a + b + c = 0$  است که در این حالت جواب‌های معادله ۱ و  $\frac{c}{a}$  هستند و دومی حالتی که  $a - b + c = 0$  است که در این حالت هم جواب‌های معادله  $-1$  و  $-\frac{c}{a}$  هستند.
- ۲- اگر معادله با یک نگاه، با تجزیه حل می‌شود، بهترین راه تجزیه است. اگر هم تجزیه برایتان سخت است، می‌رویم سراغ روش‌های دیگر!
- ۳- اگر یک معادله به شکل  $\square = \bigcirc^2$  بود، آن را با خاصیت ریشه‌ی زوج حل می‌کنیم. مثلاً معادله‌ی  $9 = (x+4)^2$  را این گونه حل می‌کنیم:  
 $(x+4)^2 = 9 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+4 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x+4=3 \Rightarrow x=-1 \\ x+4=-3 \Rightarrow x=-7 \end{cases}$
- ۴- اگر از تجزیه و مربع کامل قطع امید کردید، روش حل کلی معادله‌ی درجه‌دوم هیچ وقت شما را تنها نمی‌گذارد!  $\Delta$  را محاسبه می‌کنیم و بعد از رابطه‌ی  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۵۸- جواب کوچک‌تر معادله‌ی  $0 = x^2 - 2x - 48 = 0$  در کدام محدوده است؟  
 (۱)  $7 < x < 9$  (۲)  $-9 < x < -7$  (۳)  $-8 < x < -6$  (۴)  $-7 < x < -5$
- ۵۹- جواب‌های معادله‌ی  $0 = x^2 - x - 1 = 0$  متعلق به چه مجموعه‌ای هستند؟  
 (۱) اعداد صحیح منفی (۲) اعداد گویا (۳) اعداد گنگ (۴) اعداد طبیعی
- ۶۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی  $5 = (x+2)^2$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۵ (۴) -۵
- ۶۱- جواب کوچک‌تر معادله‌ی  $13x^2 - 5x = 2(x+3)$  کدام است؟  
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $-\frac{6}{13}$  (۴)  $\frac{6}{13}$
- ۶۲- حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی  $(3x-5)(2x+4) = x(3x-5)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{20}{9}$  (۲)  $-\frac{20}{9}$  (۳)  $\frac{20}{3}$  (۴)  $-\frac{20}{3}$
- ۶۳- اگر  $x=1$  یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم  $0 = 5x^2 - 3x + k = 0$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟  
 (۱)  $0/4$  (۲)  $0/3$  (۳)  $0/2$  (۴)  $0/4$  (سراسری ۸۳ و سنجش ۸۸)
- ۶۴- یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم  $3x^2 + mx = m - 1$  برابر  $\frac{1}{3}$  است. ریشه‌ی دیگر کدام است؟  
 (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{2}{3}$  (۳)  $-\frac{4}{3}$  (۴)  $-\frac{5}{3}$  (سنجش ۸۹)

۶۵- یکی از جواب‌های معادله‌ی  $2(x+6) = 5x(x-1)$  کدام است؟

- (۱)  $2/4$       (۲)  $-2/4$       (۳)  $1/2$       (۴)  $-1/2$

۶۶- جواب بزرگ‌تر معادله‌ی  $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$  کدام است؟

- (۱)  $1$       (۲)  $\sqrt{2}$       (۳)  $\sqrt{2}+1$       (۴)  $\sqrt{2}-1$

۶۷- تعداد جواب‌های معادله‌ی  $2x^2 - 7x^2 - 9 = 0$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲)  $1$       (۳)  $2$       (۴)  $4$

## ۷ تعیین تعداد جواب‌های معادله‌ی درجه دوم

همان‌طور که قبلاً از این گفتیم، جواب‌های معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  به صورت  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  هستند. چون قرار است  $\Delta$  زیر رادیکال برود، پس کمی محدودیت دارد.

$\Delta$  می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد، پس  $\Delta$  سه حالت دارد:

۱ اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز (غیر یکسان) است:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲ اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف (دو جواب یکسان) است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a}$$

۳ اگر  $\Delta < 0$  باشد، از آنجایی که اعداد منفی نمی‌توانند زیر رادیکال بروند، معادله در این حالت جواب حقیقی ندارد.

**نتیجه** اگر  $\Delta \geq 0$  باشد، معادله‌ی درجه دوم جواب دارد.

**مثال** تعداد جواب‌های معادله‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $3x^2 + 7x + 5 = 0$

ب)  $x(x+1) = 5$

پ)  $9x^2 - 30x + 25 = 0$

**پاسخ** فقط کافی است مقدار  $\Delta$  را حساب کنیم. اگر  $\Delta > 0$  شد، دو جواب متمایز، اگر  $\Delta = 0$  شد، یک جواب مضاعف و اگر  $\Delta < 0$  شد معادله جواب حقیقی ندارد.

$a=3, b=7, c=5$

الف) معادله جواب حقیقی ندارد.  $\Delta < 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11$

ب) اول معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم و بعد دلتا می‌گیریم:

$x(x+1) = 5 \Rightarrow x^2 + x = 5 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0$

$a=1, b=1, c=-5$

ب) معادله دو جواب متمایز دارد.  $\Delta > 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-5) = 1 + 20 = 21$

$a=9, b=-30, c=25$

پ) معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد.  $\Delta = 0 \rightarrow \Delta = (-30)^2 - 4(9)(25) = 900 - 900 = 0$

در قسمت ریشه‌ی مضاعف برابر با  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$  است.

**مثال** اگر معادله‌ی  $x^2 - 10x + m = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، مقدار  $m$  و مقدار ریشه‌ی مضاعف را به دست آورید.

**پاسخ** برای این‌که معادله‌ی درجه دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد باید  $\Delta = 0$  باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \xrightarrow{a=1, b=-10, c=m} (-10)^2 - 4(1)(m) = 0 \Rightarrow 100 - 4m = 0 \Rightarrow 4m = 100 \Rightarrow m = \frac{100}{4} = 25$$

ریشه‌ی مضاعف برابر با  $x = -\frac{b}{2a}$  است، پس:

$$x_{\text{مضاعف}} = \frac{-(-10)}{2(1)} = \frac{10}{2} = 5$$

تمام جملات زیر یک معنی دارند و در این حالت‌ها، دلتای معادله‌ی درجه دوم برابر صفر است:

۱ معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

۲ معادله فقط یک جواب دارد.

۳ معادله دارای دو جواب یکسان است.

۴ تفاضل ریشه‌ها صفر است.

**مثال** به ازای چه محدوده‌ای از  $m$ ، معادله  $x^2 + 2x = m$  ریشه‌ی حقیقی ندارد؟

$$x^2 + 2x - m = 0$$

**پاسخ** اول معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$a = 1, b = 2, c = -m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-m) = 4 + 4m$$

حالا دلتا را حساب می‌کنیم:

برای آن که معادله، ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باید  $\Delta < 0$  باشد، پس:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 + 4m < 0 \Rightarrow 4m < -4 \Rightarrow m < -\frac{4}{4} \Rightarrow m < -1$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۸- کدام یک از معادله‌های زیر دارای دو جواب است؟

$$x(2x-1) = -3 \quad (۴)$$

$$x^2 - x = -2 \quad (۳)$$

$$x^2 + x = 1 \quad (۲)$$

$$x^2 + 2x = -3 \quad (۱)$$

۶۹- به ازای چه مقداری از  $m$ ، معادله  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  دارای ریشه‌های برابر است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$-۲ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۷۰- به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله  $(2x+1)^2 - (x+m) = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

$$\frac{7}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{-7}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{-7}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{2} \quad (۱)$$

۷۱- معادله‌ی درجه دوم  $m^2x^2 - mx + m - 1 = 0$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، فقط دارای یک جواب است؟

$$\frac{-5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(سراسری ۹۱)

۷۲- معادله‌ی درجه دوم  $x(2x-5) = a$  به ازای یک مقدار  $a$  ریشه‌ی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (۱)$$

۷۳- اگر معادله  $(m+1)x^2 - 4x + 1 = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، مقدار این ریشه‌ی مضاعف چه قدر است؟

$$\frac{-1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-۳ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

(شماره ۸۱)

۷۴- اگر در معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 - 12x + 9 = 0$ ، تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟

$$۳ \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$

(سپیش ۹۱)

۷۵- سه جمله‌ای درجه دوم  $4x^2 + bx + 9$  مربع کامل است. حاصل جمع ریشه‌های آن کدام است؟

$$\pm ۱۲ \quad (۴)$$

$$\pm ۶ \quad (۳)$$

$$\pm ۴ \quad (۲)$$

$$\pm ۳ \quad (۱)$$

(کتاب درسی)

۷۶- کدام یک از معادلات زیر، به ازای هر مقدار  $k$  دارای جواب‌های حقیقی است؟

$$\text{هر سه مورد} \quad (۴)$$

$$kx^2 - x - 1 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 + kx - 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - x + k = 0 \quad (۱)$$

۷۷- معادله  $(x-2)^2 = k$  به ازای چه مجموعه مقادیری از  $k$  دارای جواب حقیقی است؟

$$k \neq 0 \quad (۴)$$

$$k = 0 \quad (۳)$$

$$k \leq 0 \quad (۲)$$

$$k \geq 0 \quad (۱)$$

۷۸- به ازای چه مجموعه مقادیری از  $k$  معادله  $kx^2 - (2k+1)x + k + 3 = 0$  دارای جواب حقیقی است؟

$$k \leq -\frac{1}{8} \quad (۴)$$

$$k \geq -\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$k \leq \frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$k \geq \frac{1}{8} \quad (۱)$$

(سپیش ۹۴)

۷۹- اگر معادله‌ی درجه دوم  $2ax^2 - 4ax + 2a + 1 = 0$  ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، حدود  $a$  کدام است؟

$$a < -۱ \quad (۴)$$

$$a < 0 \quad (۳)$$

$$a > ۱ \quad (۲)$$

$$a > 0 \quad (۱)$$

(شماره ۹۱)

۸۰- به ازای کدام مقدار  $a$  معادله‌ی درجه دوم  $3x^2 + ax - 3 = 0$  دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

$$\text{فقط } a > ۶ \quad (۴)$$

$$\text{فقط } a = \pm ۶ \quad (۳)$$

$$\text{هیچ مقدار} \quad (۲)$$

$$\text{هر مقدار} \quad (۱)$$

## ۸) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

می‌دانیم ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر با  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  و  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  هستند که در آن‌ها دلتا برابر با  $\Delta = b^2 - 4ac$  است. حالا می‌خواهیم رابطه‌ای بین  $x_1 + x_2$  و  $x_1 x_2$  با ضرایب معادله یعنی  $a$ ،  $b$  و  $c$  پیدا کنیم.

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها: } x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

حاصل جمع ریشه‌ها را با حرف  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌ها را با حرف  $P$  نشان می‌دهیم، پس:

$$\boxed{\text{حاصل جمع ریشه‌ها: } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

**مثال** در معادله‌ی  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ ، حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها چه قدر است؟

**پاسخ** ضرایب معادله عبارت‌اند از:  $a = 2$ ،  $b = -4$ ،  $c = 1$ . مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را با جای‌گذاری در روابط به دست می‌آوریم:

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها: } S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

**مثال** اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 + mx + 12 = 0$  برابر با  $7$  باشد، مقدار  $m$  و هر دو ریشه را به دست آورید.

**پاسخ** ضرایب معادله را می‌نویسیم:  $a = 2$ ،  $b = m$ ،  $c = 12$ . مجموع ریشه‌ها برابر  $7$  است، پس:

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow 7 = \frac{-m}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -m = 14 \Rightarrow m = -14$$

حالا با جای‌گذاری  $m = -14$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$2x^2 - 14x + 12 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین را به 2 تقسیم می‌کنیم}} x^2 - 7x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با کمک اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

**مثال** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند، حاصل عبارت‌های زیر چه قدر است؟

$$\text{الف) } \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{ب) } 2\alpha^2 + 4\beta$$

$$S = \alpha + \beta = 2 \quad P = \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

**پاسخ**  $S$  و  $P$  این معادله را در دو مثال قبل به دست آورده بودیم:

**الف)**  $\alpha^2 + \beta^2$  دو جمله از اتحاد مربع هستند، پس آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underbrace{(\alpha + \beta)^2}_S - 2 \underbrace{\alpha\beta}_P = S^2 - 2P = 2^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3$$

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$$

**الف)** جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس می‌توانیم جای  $x$ ،  $\alpha$  را قرار دهیم:

$$2\alpha^2 = 4\alpha - 1$$

از این معادله  $2\alpha^2$  را تنها می‌کنیم:

$$\frac{2\alpha^2}{2\alpha - 1} + 4\beta = 4\alpha - 1 + 4\beta = \frac{4\alpha + 4\beta}{S=2} - 1 = 4(\alpha + \beta) - 1 = 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$$

پس جای  $2\alpha^2$ ، عبارت  $4\alpha - 1$  را قرار می‌دهیم:

$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها} = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

**ب)** قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها برابر با  $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$  است:

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۸۱- در معادله‌ی درجه دوم  $3x^2 - 7x - 2 = 0$  نسبت حاصل ضرب ریشه‌ها به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{3}$       (۲)  $\frac{2}{7}$       (۳)  $-\frac{7}{2}$       (۴)  $-\frac{2}{7}$

۸۲- اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 + (3k-1)x + k + 1 = 0$  برابر با ۲ باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۵      (۳)  $\frac{7}{3}$       (۴)  $-\frac{5}{3}$

۸۳- در معادله‌ی  $2x(x-1) = 8$ ، مجموع معکوس ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) ۴      (۳)  $-\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

۸۴- در معادله‌ی  $3x^2 - 8x - 3 = 0$  اختلاف ریشه‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{10}$       (۲)  $\frac{10}{3}$       (۳)  $\frac{8}{10}$       (۴)  $\frac{10}{8}$

۸۵- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 - 6x + 2 = 0$  باشند، مقدار  $x_1^2 + x_2^2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{8}{3}$       (۲)  $\frac{10}{3}$       (۳) ۲      (۴) ۳

۸۶- در کدام معادله، ریشه‌های معادله معکوس یکدیگرند؟

- (۱)  $2x^2 - 7x - 2 = 0$       (۲)  $3x^2 + 11x + 3 = 0$       (۳)  $7x^2 - 6x - 1 = 0$       (۴)  $x^2 - 8x + 16 = 0$

(کتاب درسی)

۸۷- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی  $7x^2 - ax + 35 = 0$  برابر با -۴ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

- (۱)  $-\frac{5}{4}$       (۲)  $\frac{5}{4}$       (۳)  $-\frac{4}{5}$       (۴)  $\frac{4}{5}$

۸۸- اگر حاصل ضرب و مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3kx + 2k + 2 = 0$  با هم برابر باشند، ریشه‌ی کوچک‌تر معادله کدام است؟

- (۱)  $3 + \sqrt{12}$       (۲)  $3 - \sqrt{12}$       (۳)  $3 - \sqrt{3}$       (۴)  $3 + \sqrt{3}$

۸۹- در معادله‌ی درجه دوم  $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر  $\frac{1}{6}$  باشد، ریشه‌ی مثبت آن کدام است؟

(سراسری ۹۴)

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳) ۱      (۴)  $\frac{4}{3}$

(فارج ۹۴)

۹۰- در معادله‌ی درجه دوم  $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱)  $2/5$       (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

(فارج ۹۵)

۹۱- به ازای یک مقدار  $m$ ، ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 + 2mx + 2m + 6 = 0$  معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه، کدام است؟

- (۱)  $-1/5$       (۲)  $1/5$       (۳) ۲      (۴) ۳

## (۹) کاربرد معادله‌ی درجه دوم در حل مسائل

در برخی از مسائل با اطلاعاتی که سؤال داده، می‌توانیم یک معادله بنویسیم. بعضی وقت‌ها این معادله یک معادله‌ی درجه دوم می‌شود. معادله‌ی درجه دوم را با هر روشی که دوست داریم حل می‌کنیم، فقط در آخر باید جوابمان را به آنالیز عقلی یکنیم! مثلاً اگر مجهول اولیه‌ی معادله سن باشد و بعد از تشکیل و حل معادله‌ی درجه دوم به دو جواب  $x_1 = 38$  و  $x_2 = -21$  رسیده باشیم، جواب  $x_2 = -21$  رد می‌شود، زیرا سن نمی‌تواند منفی باشد!

**مثال** مربع عددی طبیعی با دو برابر آن عدد به علاوه ۳، برابر است. این عدد را به دست آورید.

**پاسخ** این عدد را  $x$  می‌گیریم! مربع آن  $x^2$  و دو برابر آن به علاوه ۳ برابر با  $2x + 3$  است. طبق گفته‌ی سؤال  $x^2$  و  $2x + 3$  با هم برابرند:

$$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

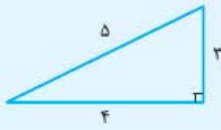
با روش کلی معادله را حل می‌کنیم:  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 - (-12) = 4 + 12 = 16$

$$a = 1, b = -2, c = -3 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 - (-12) = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \checkmark \text{ (عددی طبیعی است، پس قبول است)} \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \times \text{ (چون عددی طبیعی نیست، رد می‌شود!)} \end{cases}$$

اگر در صورت سؤال، جای کلمه‌ی «طبیعی»، کلمه‌ی «صحیح» آمده بود، هر دو جواب قابل قبول بودند.

**مثال** با توجه به شکل روبه‌رو، مقدار  $x$  چه قدر است؟



**پاسخ** چون مثلث قائم‌الزاویه است، پس رابطه‌ی قیثاغورس را برای آن می‌نویسیم:

$$(2x+3)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 9 + 2(2x)(3) = x^2 + 4 + 2(x)(2) + x^2 + 9 + 2(x)(3)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9 + 12x = x^2 + 4 + 4x + x^2 + 9 + 6x \xrightarrow{\text{همه‌ی جملات را به سمت چپ می‌بریم}} 4x^2 + 9 + 12x - x^2 - 4 - 4x - x^2 - 9 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{یا روش تجزیه}} (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \times \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad \checkmark \end{cases}$$

$x = -2$  قابل قبول نیست، زیرا با جای گذاری  $x = -2$  در اضلاع مثلث، وتر عددی منفی می‌شود!

$$\text{وتر} = 2x + 3 \xrightarrow{x=-2} \frac{2(-2) + 3}{-4} = -1$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۹۲- اگر طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر با  $2k+1$ ،  $2k$  و  $2k+2$  باشند، اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

- ۱/ ۵ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

۹۳- حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش، از سه برابر آن عدد ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

- ۶ (۱)      ۷ (۲)      ۸ (۳)      ۹ (۴)

(سنجش ۹۰)

۹۴- مربع دو برابر عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

- ۲/۳ (۱)      ۳/۴ (۲)      ۴/۳ (۳)      ۵/۶ (۴)

۹۵- عبارت گویای  $\frac{2x^2+5}{x^2-3x-4}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟

- {۱، ۴} (۱)      {-۱، ۴} (۲)      {-۱، -۴} (۳)      {-۱، -۴} (۴)

(سنجش ۹۰)

۹۶- در معادله‌ی  $\frac{1}{5} = \frac{5^{9x^2-6x}}{5}$ ، مقدار  $x$  کدام است؟

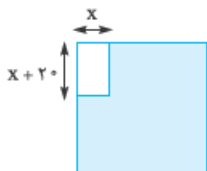
- ۱/۵ (۱)      ۱/۴ (۲)      ۱/۳ (۳)      ۱/۲ (۴)

۹۷- محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۵۴ متر و ۱۸۰ متر مربع است. اختلاف طول و عرض آن چه قدر است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

۹۸- در شکل زیر، ضلع مربع برابر با ۸۰ واحد است و مستطیلی با ابعاد  $x$  و  $x+20$  در آن قرار دارد. اگر مساحت قسمت رنگی ۴۹۰۰ واحد مربع

باشد،  $x$  کدام است؟



۲۰ (۱)

۳۰ (۲)

۴۰ (۳)

۵۰ (۴)

۹۹- در شکل زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم‌شده با هم برابر است. محیط مستطیل چه قدر است؟



۲۲ (۱)

۲۴ (۲)

۲۶ (۳)

۲۸ (۴)

(سپش ۹۰)

۱۰۰- اگر سه جمله‌ای درجه دوم  $(k-1)x^2 + 2kx + 4$  مربع کامل باشد، مقدار  $\sqrt{k}$  کدام است؟

- ۵ (۱)  $\sqrt{2}$  (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴)

۱۰۱- فاصله‌ی هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد،

(سپش ۹۳)

مساحت قالی کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۱۰۲- اختلاف مربع عدد  $\frac{3}{y}$  از خود  $\frac{3}{y}$ ، برابر اختلاف مربع چه عددی از خود آن عدد است؟

- $\frac{2}{y}$  (۱)  $\frac{4}{y}$  (۲)  $\frac{5}{y}$  (۳)  $\frac{6}{y}$  (۴)

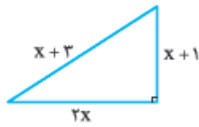
۱۰۳- محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل کدام است؟

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۸ (۳)

۲۴ (۴)



(سپش ۱۹)

۱۰۴- مربع نصف عددی از ۱۲ برابر آن عدد، ۸۱ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

- ۴۸ (۱) ۵۴ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴)

## ۲۴- گزینه‌ی

اگر  $x = \alpha$  ریشه‌ی مضاعف یک معادله‌ی درجه‌ی دوم باشد، آن معادله به صورت  $(x - \alpha)^2 = 0$  بوده است.

پس در این‌جا معادله به صورت  $(x - \frac{1}{4})^2 = 0$  است:

$$\underbrace{(x - \frac{1}{4})^2}_{\text{اتحاد مربع}} = 0 \Rightarrow x^2 - 2(x)(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

طریقین معادله‌ی به دست‌آمده را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

## ۲۵- گزینه‌ی

عبارت سمت چپ را باید به شکل اتحاد مربع درآوریم.  $4x^2 - 12x$  یک عدد کم دارد تا اتحاد مربع شود.

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{4x^2} & - & \textcircled{12x} & + & \textcircled{\quad} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله‌ی } a^2 & & \text{جمله‌ی } 2ab & & \text{جمله‌ی } b^2 \end{array}$$

جمله‌ی  $a^2$  برابر  $4x^2$  شده است، پس  $a$  برابر  $2x$  است. جمله‌ی  $2ab$

برابر با  $12x$  شده است، پس  $ab$  برابر با  $6x$  است و از آن جایی که

$a = 2x$  است، پس  $b$  باید ۳ باشد. در نتیجه  $b^2$  برابر با  $9 = 3^2$  است.

پس در معادله‌ی  $4x^2 - 12x + k = 0$ ،  $k$  برابر ۹ است و در نتیجه

$$k = -9$$

## ۲۶- گزینه‌ی

$$(a + 2b)^2 + a^2 = 6a - 9 \Rightarrow (a + 2b)^2 + \underbrace{a^2 - 6a + 9}_{\text{بازشده‌ی اتحاد مربع}} = 0$$

$$\Rightarrow (a + 2b)^2 + (a - 3)^2 = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی (چون توانشان زوج است) برابر با صفر شده

است، پس هر کدام برابر با صفر هستند:  $\underbrace{(a + 2b)^2}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{(a - 3)^2}_{\text{نامنفی}} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ a + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -a \xrightarrow{a=3} 2b = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{سؤال : } ab = 3 \left( \frac{-3}{2} \right) = \frac{-9}{2}$$

## ۲۷- گزینه‌ی

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a + b + c)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2a + 2b + 2c$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c + 1 + 1 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = 0$$

## ۱۸- گزینه‌ی

جملات را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$9x^2 - 3x = 0$$

حالا در سمت چپ از  $3x$  فاکتور می‌گیریم:

$$3x(3x - 1) = 0$$

با استفاده از خاصیت عامل صفر، داریم:

$$\begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

## ۱۹- گزینه‌ی

در سمت چپ تساوی از عبارت  $x + 3$  می‌توانیم

$$x(x + 3) - 4(x + 3) = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 4) = 0$$

و بعد از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

## ۲۰- گزینه‌ی

عبارت سمت راست تساوی (یعنی  $x - 1$ ) در

عامل‌های تشکیل‌دهنده‌ی سمت چپ تساوی قرار دارد، پس اگر آن

را به سمت چپ تساوی بیاوریم و از آن فاکتور بگیریم، می‌توانیم

معادله را به روش تجزیه حل کنیم:

$$(x - 1)(x + 1) = (x - 1) \Rightarrow (x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } (x - 1) \text{ فاکتور می‌گیریم}} (x - 1)((x + 1) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 1 - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x) = 0$$

$x$  و  $x - 1$  دو عبارت درجه‌یک موردنظر هستند که  $x$  در گزینه‌ها هست.

## ۲۱- گزینه‌ی

تجزیه‌شده‌ی عبارت  $ax^2 + bx + c$  را جایش

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (2x - 1)(x + 5) = 0$$

قرار می‌دهیم:

حالا از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + (-5) = \frac{1 - 10}{2} = -\frac{9}{2}$$

مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

## ۲۲- گزینه‌ی

گفتیم  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی

دوم  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$  هستند، پس معادله‌ی درجه‌دومی که

ریشه‌هایش  $\frac{1}{4}$  و  $-2$  باشد، به صورت زیر است:

$$(x - (-2))(x - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - \frac{1}{4}) = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow x^2 + (2 - \frac{1}{4})x + (2 \times \frac{-1}{4}) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{7}{4}x - 1 = 0$$

می‌توانیم طریقین تساوی را در عدد دلخواهی مثل ۲ ضرب کنیم:

$$x^2 + \frac{7}{4}x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} 2x^2 + 7x - 2 = 0$$

## ۲۳- گزینه‌ی

تمام جملات را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

سمت چپ تساوی، بازشده‌ی یک اتحاد مربع است:

$$(x - 6)^2 = 0$$

پس  $x - 6 = 0$  و در نتیجه  $x = 6$ .



عبارتی که توان آن زوج است حتماً نامنفی است (یعنی یا مثبت است یا صفر). در این جا مجموع سه عبارت نامنفی، صفر شده است، پس هر سه عبارت باید مساوی صفر باشند و داریم:

$$(a-1)^2=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$(b-1)^2=0 \Rightarrow b-1=0 \Rightarrow b=1$$

$$(c-1)^2=0 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1$$

### ۲۸- گزینه‌ی

$$12x^2 - 24 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۱۲}} x^2 - 2 = 0$$

$x^2 - 2$  را با کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

حالا از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

### ۲۹- گزینه‌ی

گفتیم  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$  هستند، پس معادله‌ای که ریشه‌های آن  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{2}{5}$  باشند، به این صورت است:

$$(x - (\frac{2}{5}))(x - (\frac{2}{5})) = 0 \Rightarrow (x + \frac{2}{5})(x - \frac{2}{5}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (\frac{2}{5})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{25} = 0$$

حالا طرفین را در ۲۵ ضرب می‌کنیم:

$$25(x^2 - \frac{4}{25}) = 25 \times 0 \Rightarrow 25x^2 - 4 = 0$$

### ۳۰- گزینه‌ی

$$(3x+1)^2 - (x-5)^2 = 0$$

تمام جملات را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$((3x+1) - (x-5))((3x+1) + (x-5)) = 0$$

اگر داخل پرانتزها را ساده کنیم، داریم:

$$(4x+6)(4x-4) = 0 \Rightarrow (2x+3)(2x-2) = 0$$

حالا با استفاده از خاصیت عامل صفر داریم:

$$\begin{cases} 2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} = -1.5 \\ 2x-2=0 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با:  $-1.5 + 1 = -0.5$

### ۳۱- گزینه‌ی

اول معادله‌ی  $x^2 - 25 = 0$  را با کمک اتحاد مزدوج حل می‌کنیم:

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-5 \end{cases}$$

حالا یک واحد به هر کدام از ریشه‌ها اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 5+1=6 \\ -5+1=-4 \end{cases}$$

پس باید معادله‌ای را بنویسیم که ریشه‌هایش  $+6$  و  $-4$  باشند:

$$(x-6)(x-(-4))=0 \Rightarrow (x-6)(x+4)=0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow x^2 + (-6+4)x + (-6 \times 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

### ۳۲- گزینه‌ی

معادله‌ی داده‌شده را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \xrightarrow{\text{دو عدد ۲ و ۵ هستند ضرب جمع}} (x-5)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

### ۳۳- گزینه‌ی

تمام جملات را به سمت چپ می‌بریم:

$$25x^2 - 10x - 24 = 0$$

از جمله‌ی  $25x^2$  می‌فهمیم که جمله‌ی مشترک  $5x$  است:

$$25x^2 - 10x - 24 = 0 \Rightarrow (5x) (5x) = 0$$

حاصل ضرب جمله‌ی مشترک  $(5x)$  در مجموع غیرمشترک‌ها برابر

$$5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک هم  $-24$  است، پس باید دو عدد

$$\frac{-10 \times x}{5x} = -2$$

پیدا کنیم که مجموعشان  $-2$  و حاصل‌ضربشان  $-24$  است. این دو

عدد  $-6$  و  $+4$  هستند، پس معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(5x-6)(5x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-6=0 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \\ 5x+4=0 \Rightarrow x = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

### ۳۴- گزینه‌ی

عدد موردنظر را  $x$  می‌گیریم. سه واحد بیشتر

$$\text{از قرینه‌اش یعنی } -x+3 \text{ حاصل ضرب این دو عدد برابر } -28 \text{ است، پس:}$$

$$x(-x+3) = -28 \Rightarrow -x^2+3x = -28 \Rightarrow x^2-3x-28 = 0$$

باید دو عدد پیدا کنیم که جمعشان  $-3$  و حاصل‌ضربشان  $-28$

$$\text{است؛ این دو عدد } -7 \text{ و } +4 \text{ هستند، پس:}$$

$$x^2-3x-28 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-7=0 \Rightarrow x=7 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط  $x = -4$  وجود دارد.

### ۳۵- گزینه‌ی

معادله را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

جمله‌ی مشترک را  $x^2$  می‌گیریم. باید دو عدد پیدا کنیم که

$$\text{مجموعشان } -13 \text{ و حاصل‌ضربشان } +36 \text{ باشد. این دو عدد } -9 \text{ و } -4$$

هستند، پس:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow (x^2-9)(x^2-4) = 0$$

$$2x^2 = 16 \times 3 \Rightarrow 2x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 24$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه زوج}} x = \pm\sqrt{24} \xrightarrow{\text{ضلع مربع مثبت است}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

پس ضلع مربع  $2\sqrt{6}$  است و در نتیجه محیط آن برابر است با:

$$P = 4x = 4(2\sqrt{6}) = 8\sqrt{6}$$

Ⓐ محیط مربع به ضلع  $x$  برابر با  $4x$  است.

۳۹- گزینه‌ی Ⓐ معادله‌ی دوم را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(x-b)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 2bx + b^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 2bx = 25 - b^2$$

معادله‌ی اول هم که به شکل  $x^2 - 2bx = 16$  است، پس:

$$25 - b^2 = 16 \quad \text{و در نتیجه } b^2 = 9$$

۴۰- گزینه‌ی Ⓐ

$$\text{Ⓐ } 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{Ⓑ } x^2 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x = \pm\sqrt{\sqrt{2}} = \pm\sqrt[4]{2}$$

$$\text{Ⓒ } 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ⓓ } x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$$

معادله جواب حقیقی ندارد!  $x^2$  نمی‌تونه عددی منفی بشه

۴۱- گزینه‌ی Ⓐ  $(5x-4)^2 - 8 = 1 \Rightarrow (5x-4)^2 = 9$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} 5x-4 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow 5x-4 = \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-4=3 \Rightarrow 5x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{5} \\ 5x-4=-3 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{تفاضل ریشه‌ها} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{5}$$

۴۲- گزینه‌ی Ⓐ

$$(3x-1)^2 = (4-x)^2 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} 3x-1 = \pm(4-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-1=4-x \Rightarrow 4x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{4} \\ 3x-1=-4+x \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \end{cases} \text{ریشه‌ی کوچک‌تر}$$

۴۳- گزینه‌ی Ⓐ مساحت کل مربع برابر است با:

$$S_{\text{مربع}} = (ضلع)^2 = 6^2 = 36$$

مساحت هر شکل بریده‌شده را جدا حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = 2x \cdot x = 2x^2$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}x}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

هر کدام از پرانتزها با کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌شوند:

$$(x^2-4)(x^2-9) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

دو جواب بزرگ‌تر  $x=2$  و  $x=3$  هستند که مجموعشان ۵ است.

۳۶- گزینه‌ی Ⓐ تمام مراحل را طبق درس‌نامه انجام می‌دهیم

(البته تا جایی که لازمه)

$$\text{Ⓐ } 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x = 5$$

$$\text{Ⓑ } 2x^2 + 3x = 5 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Ⓒ } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ نصف ضریب } x$$

پس باید  $\frac{9}{16}$  را به دو طرف تساوی اضافه کنیم. دیگر لازم نیست

ادامه بدهیم چون سؤال همین را از ما خواسته است.

۳۷- گزینه‌ی Ⓐ تمام مراحل را طبق درس‌نامه انجام می‌دهیم:

$$\text{Ⓐ } 2x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 1$$

$$\text{Ⓑ } 2x^2 - 6x = 1 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ⓒ } \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \text{ نصف ضریب } x$$

حالا  $\frac{9}{4}$  را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{Ⓓ } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\text{Ⓔ } x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{11}{4}}$$

پس از عدد  $\frac{11}{4}$  جذر گرفته می‌شود.

$$\text{Ⓔ } \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{11}+3}{2} \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{11}+3}{2} \end{cases}$$

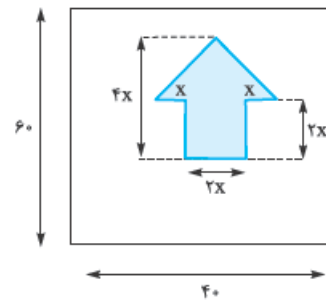
۳۸- گزینه‌ی Ⓐ

ضلع مربع را  $x$  می‌گیریم.

برای مثلث رنگی، رابطه‌ی

پیتاگورس را می‌نویسیم:

$$x^2 + x^2 = (4\sqrt{3})^2$$



۴۶- **گزینه‌ی** اول قیافه‌ی معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$x(x-2)=2 \Rightarrow x^2-2x=2 \Rightarrow x^2-2x-2=0$$

حالا می‌رویم سراغ  $\Delta$  و محاسبه‌ی جواب‌ها:

$$a=1, b=-2, c=-2$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-2)=4+8=12$$

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2(1)}=\frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

رادیکال ۱۲ را می‌توانیم بهتر بنویسیم:

$$\sqrt{12}=\sqrt{4 \times 3}=\sqrt{4} \times \sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}=\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2}=1 \pm \sqrt{3}$$

پس  $x_1=1+\sqrt{3}$  و  $x_2=1-\sqrt{3}$  جواب‌های معادله هستند.

۴۷- **گزینه‌ی** معادله‌ی  $6x^2+5x-1=0$  را به روش کلی

$$a=6, b=5, c=-1$$

حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4(6)(-1)=25+24=49$$

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(6)}=\frac{-5 \pm 7}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-5+7}{12}=\frac{1}{6} \\ x_2=\frac{-5-7}{12}=-1 \end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2+(-1)^2=\frac{1}{36}+1=\frac{1+36}{36}=\frac{37}{36}$$

پس:

۴۸- **گزینه‌ی** معادله‌ی  $x^2-2kx+15=0$  را با روش کلی

$$a=1, b=-2k, c=15$$

حل می‌کنیم:

اول  $\Delta$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2k)^2-4(1)(15)=4k^2-60$$

حالا در فرمول نهایی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2k) \pm \sqrt{4k^2-60}}{2(1)}=\frac{2k \pm \sqrt{4k^2-60}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{2k+\sqrt{4k^2-60}}{2} \\ x_2=\frac{2k-\sqrt{4k^2-60}}{2} \end{cases}$$

در نتیجه، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1+x_2=\frac{2k+\sqrt{4k^2-60}}{2}+\frac{2k-\sqrt{4k^2-60}}{2}$$

$$=\frac{2k+\sqrt{4k^2-60}+2k-\sqrt{4k^2-60}}{2}=\frac{2k+2k}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

البته این سؤال را کمی جلوتر، با روش ساده‌تر می‌توانیم حل کنیم.

۴۹- **گزینه‌ی** جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم در آن صدق

می‌کنند، پس  $x=2$  را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$mx^2-3x+4=0 \xrightarrow{x=2 \text{ جای‌گذاری}} m(2)^2-3(2)+4=0$$



$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = x^2$$

مجموع مساحت این سه قسمت بریده‌شده برابر است با:

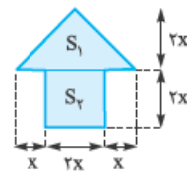
$$2x^2+x^2+x^2=4x^2$$

پس از مساحت کل (یعنی ۳۶) باید  $4x^2$  را کم کنیم (می‌شود  $36-4x^2$ ), این مقدار برابر ۲۴ است، پس:

$$36-4x^2=24 \Rightarrow -4x^2=-12 \Rightarrow x^2=3$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{3} \xrightarrow{\text{ضلع } > 0} x=\sqrt{3}$$

کوچک‌ترین ضلع شکل بریده شده همان  $x$  است، پس جواب  $\sqrt{3}$  است.



۴۴- **گزینه‌ی** اول مساحت

فلش آبی را به دست می‌آوریم. فلش از یک مثلث و یک مستطیل تشکیل شده است.

$$S_1=\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}=\frac{(x)(4x)}{2}=2x^2$$

$$S_p=\text{طول} \times \text{عرض}=(2x)(2x)=4x^2$$

پس مساحت کل فلش برابر است با:

$$S_{\text{فلش}}=S_1+S_p=2x^2+4x^2=6x^2$$

حالا باید مساحت فلش آبی (یعنی  $8x^2$ ) را از مساحت کل مستطیل (یعنی  $60 \times 40$ ) کم کنیم که می‌شود:

$$2400-8x^2$$

پس مساحت برجسب سفید برابر با  $2400-8x^2$  است. هزینه‌ی

برجسب آبی برابر با  $30 \times 8x^2=240x^2$  و هزینه‌ی برجسب سفید

برابر با  $10 \times (2400-8x^2)=24000-80x^2$  است.

مجموع این دو هزینه روی هم ۶۰۰۰۰ تومان می‌شود، پس:

$$(240x^2)+(24000-80x^2)=60000$$

$$\Rightarrow 240x^2+24000-80x^2=60000$$

$$\Rightarrow 160x^2=36000 \Rightarrow x^2=\frac{36000}{160}=225 \Rightarrow x=15$$

۴۵- **گزینه‌ی** با روش کلی، معادله‌ی  $2x^2-5x-3=0$  را

$$a=2, b=-5, c=-3$$

حل می‌کنیم:

اول  $\Delta$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(-3)=25-(-24)=25+24=49$$

حالا در فرمول نهایی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(2)}=\frac{5 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3 \\ x_2=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب کوچک‌تر:  $-\frac{1}{2}$

۵۴- **گزینه‌ی ۱** اول  $2x-1$  را  $t$  می‌گیریم، معادله این شکلی می‌شود:

حالا معادله‌ی بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(4)} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1 \\ t_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

حالا جای  $t$  عبارت  $2x-1$  را قرار می‌دهیم و  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow 2x-1=1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ t=\frac{1}{4} \Rightarrow 2x-1=\frac{1}{4} \Rightarrow 2x=\frac{1}{4}+1 \Rightarrow 2x=\frac{5}{4} \Rightarrow x=\frac{5}{8} \end{cases}$$

مجموع جواب‌های معادله:  $1 + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

۵۵- **گزینه‌ی ۱** اول  $x-1$  را  $t$  می‌گیریم. معادله این شکلی می‌شود:

حالا معادله‌ی بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 12 - (-24) = 12 + 24 = 36$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در صورت از ۲}} \frac{\cancel{2}(-\sqrt{3} \pm 3)}{\cancel{2}} = -\sqrt{3} \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\sqrt{3} + 3 \\ t_2 = -\sqrt{3} - 3 \end{cases}$$

حالا جای  $t$  عبارت  $x-1$  را قرار می‌دهیم و  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$t = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x-1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} + 4 = 4 - \sqrt{3}$$

$$t = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x-1 = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} - 2$$

بین دو عدد  $4 - \sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3} - 2$  که جواب‌های معادله هستند، عدد  $4 - \sqrt{3}$  جواب بزرگ‌تر است.

۵۶- **گزینه‌ی ۱** معادله‌ی  $x^2 + 10x^2 + 9 = 0$  را می‌توانیم به شکل  $(x^2)^2 + 10(x^2) + 9 = 0$  بنویسیم. اگر  $x^2$  را  $t$  بگیریم، معادله به معادله‌ی درجه‌دو تبدیل می‌شود:

$$(x^2)^2 + 10(x^2) + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + 10t + 9 = 0$$

حالا معادله‌ی  $t^2 + 10t + 9 = 0$  را حل می‌کنیم:

$$\underbrace{t^2 + 10t + 9 = 0}_{\text{تجزیه با جمله مشترک}} \Rightarrow (t+1)(t+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+1=0 \Rightarrow t=-1 \\ t+9=0 \Rightarrow t=-9 \end{cases}$$

حالا باید جای  $t$ ، عبارت  $x^2$  را قرار دهیم:

$$t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \xrightarrow{x^2 \text{ نمی‌تونه منفی باشه}} \text{جواب حقیقی ندارد.}$$

$$t = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \xrightarrow{x^2 \text{ نمی‌تونه منفی باشه}} \text{جواب حقیقی ندارد.}$$

پس معادله صفر جواب حقیقی داره!

$$\Rightarrow 4m - 6 + 4 = 0 \Rightarrow 4m - 2 = 0 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

حالا  $m = \frac{1}{2}$  را در معادله جای‌گذاری و معادله را حل می‌کنیم تا جواب دیگر هم به دست آید:

$$mx^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین ضرب در ۲}]{m=\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

معادله‌ی  $x^2 - 6x + 8 = 0$  را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$a = 1, b = -6, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

پس جواب دیگر معادله (غیر از ۲) برابر با ۴ است.

۵۷- **گزینه‌ی ۱** در معادله‌ی  $17x^2 - 20x + 3 = 0$  داریم:  $a = 17, b = -20, c = 3$

بین این ضرایب رابطه‌ی  $a + b + c = 0$  برقرار است پس ریشه‌های آن  $\frac{c}{a}$  و ۱ هستند:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{17}$$

که ریشه‌ی کوچک‌تر  $\frac{3}{17}$  است.

۵۸- **گزینه‌ی ۱** معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$x(11x+10) = 1 \Rightarrow 11x^2 + 10x = 1 \Rightarrow 11x^2 + 10x - 1 = 0$$

پس  $a = 11, b = 10, c = -1$  است و بین آن‌ها رابطه‌ی  $a - b + c = 0$  برقرار است، پس ریشه‌های آن  $-\frac{c}{a}$  و  $-1$  هستند:

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-1}{11} = \frac{1}{11}$$

پس ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله  $\frac{1}{11}$  است و نصف آن برابر است با:

$$\frac{1}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{22}$$

۵۹- **گزینه‌ی ۱** اگر خوب به معادله‌ی  $3x^2 + kx - 7 = 0$  دقت

کنیم، می‌بینیم که نسبت  $-\frac{c}{a}$  یعنی  $\frac{7}{3}$  یکی از ریشه‌های معادله شده است، پس نتیجه می‌گیریم که ریشه‌ی دیگر معادله حتماً  $-1$  است و نیازی به محاسبه‌ی  $k$  نیست.

۶۰- **گزینه‌ی ۱** معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\underbrace{(m+3)x^2}_a - \underbrace{(2m+1)x}_b + \underbrace{m-2}_c = 0$$

که در آن  $a = m+3, b = -2m-1, c = m-2$  هستند. با کمی تیزبازی می‌فهمیم که  $a + b + c = 0$  است:

$$a + b + c = (m+3) + (-2m-1) + m-2 = 0$$

پس جواب‌های معادله ۱ و  $\frac{c}{a}$  هستند:  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{m+3}$

که در گزینه‌ها فقط **۱** آمده است.

۵۷- **گزینه‌ی ۱** اول  $x^2 + x$  را  $t$  می‌گیریم. معادله به شکل

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \text{ درمی‌آید. } \Delta \text{ را حساب می‌کنیم:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4(1)(72) = 324 - 288 = 36$$

حالا ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{18 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{18+6}{2} = 12 \\ t_2 = \frac{18-6}{2} = 6 \end{cases}$$

حالا با جای گذاری  $t = x^2 + x$  مقادیر  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:  $-2 = -2 + (-3) + 2 = -4$

۵۸- **گزینه‌ی ۱** معادله‌ی  $x^2 - 2x - 48 = 0$  را به کمک تجزیه ضرب جمع

به راحتی حل می‌کنیم. سمت چپ تساوی، باز شده‌ی یک اتحاد جمله مشترک است. باید دنبال دو عدد باشیم که جمعشان  $-2$  و

ضربشان  $-48$  است. این دو عدد  $-8$  و  $6$  است، پس:

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

جواب کوچک‌تر این معادله  $x = -6$  است که فقط در محدوده‌ی **۴**

قرار دارد.

۵۹- **گزینه‌ی ۱** معادله‌ی  $x^2 - x - 1 = 0$  را به روش کلی حل

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

می‌کنیم:

اول  $\Delta$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

حالا در فرمول نهایی جای گذاری می‌کنیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

جواب‌های معادله برابر با  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  هستند، که هر دو

عددی گنگ می‌باشند.

۶۰- **گزینه‌ی ۱**

$$(x+2)^2 = 5 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+2 = \pm\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = \sqrt{5} - 2 \\ x+2 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{5} - 2 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1 + x_2 = (\sqrt{5} - 2) + (-\sqrt{5} - 2) = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} - 2 = -4$$

۶۱- **گزینه‌ی ۱** اول معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$13x^2 - 5x = 2(x+3) \Rightarrow 13x^2 - 5x = 2x + 6$$

$$\Rightarrow 13x^2 - 7x - 6 = 0$$

اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم مجموع ضرایب معادله صفر

است ( $a+b+c=0$ )، پس ریشه‌های معادله  $1$  و  $\frac{c}{a}$  هستند:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{13}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله،  $x_2 = \frac{-6}{13}$  است.

۶۲- **گزینه‌ی ۱** در هر دو سمت تساوی عامل  $(3x-5)$  وجود

دارد، پس اگر آن‌ها را به یک طرف تساوی ببریم، می‌توانیم از این

عامل مشترک فاکتور بگیریم:  $x(3x-5) = (2x+4)(3x-5)$

$$\Rightarrow (2x+4)(3x-5) - x(3x-5) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور می‌گیریم}} (3x-5)[(2x+4) - x] = 0$$

$$\Rightarrow (3x-5)(2x+4-x) = 0 \Rightarrow (3x-5)(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \\ x+4=0 \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{5}{3} \times (-4) = \frac{-20}{3}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها:

۶۳- **گزینه‌ی ۱** چون  $x=1$  جواب معادله است، پس در آن

صدق می‌کند:

$$5x^2 - 3x + k = 0 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=1} 5(1)^2 - 3(1) + k = 0$$

$$\Rightarrow 5 - 3 + k = 0 \Rightarrow 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$$

حالا  $k = -2$  را در معادله جای‌گذاری و معادله را حل می‌کنیم:

$$5x^2 - 3x + k = 0 \xrightarrow{k=-2} 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

معادله را با روش کلی حل می‌کنیم:  $a = 5, b = -3, c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 - (-40) = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(5)} = \frac{3 \pm 7}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+7}{10} = \frac{10}{10} = 1 \\ x_2 = \frac{3-7}{10} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

پس جواب دیگر معادله  $-2/5$  است.

۶۴- **گزینه‌ی ۱** چون  $x = \frac{1}{2}$  جواب معادله است، پس در آن

صدق می‌کند:

$$3x^2 + mx = m - 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=\frac{1}{2}} 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m\left(\frac{1}{2}\right) = m - 1$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{m}{2} = m - 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{m}{2} = m - 1$$

حالا باید جای  $x^2$ ،  $t$  را قرار دهیم و  $x$  را به دست آوریم:

جواب ندارد.  $x^2$  نمی‌تواند منفی شود  $\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow t_1 = -1$

$$t_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

پس معادله دارای دو جواب  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  و  $-\frac{3}{\sqrt{2}}$  است.

### ۶۸- گزینه‌ی $\bullet\bullet$ معادله‌ی درجه‌ی دومی دارای دو جواب

تمایز است که شرط  $\Delta > 0$  را داشته باشد. برای همگی گزینه‌ها  $\Delta$  را حساب می‌کنیم، هر کدام مثبت شد، جواب است:

$$\textcircled{1} x^2 + 2x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{a=1, b=2, c=3} \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 2^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 \rightarrow \text{مثبت نشد}$$

$$\textcircled{2} x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a=1, b=1, c=-1} \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-1)$$

$$= 1 - (-4) = 5 \rightarrow \text{مثبت شد.}$$

نیازی به بررسی دو گزینه‌ی دیگر نیست ولی وجدانم نمی‌ذاره!

$$\textcircled{3} x^2 - x = -2 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a=1, b=-1, c=2} \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7$$

$$\textcircled{4} x(2x-1) = -3 \Rightarrow x(2x) - 1(x) = -3 \Rightarrow 2x^2 - x = -3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 3 = 0 \xrightarrow{a=2, b=-1, c=3} \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23$$

### ۶۹- گزینه‌ی $\bullet$ معادله‌ی درجه‌ی دوم داده‌شده دارای ریشه‌های

برابر است، یعنی دو ریشه‌ی یکسان یا همان یک ریشه‌ی مضاعف داردا

پس  $\Delta = 0$  است:

$$x^2 - mx + m - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{1}_{a} x^2 - \underbrace{m}_{b} x + \underbrace{(m-1)}_{c} = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4(m-1) = 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 - 4m + 4}_{\text{اتحاد مربع}} = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

### ۷۰- گزینه‌ی $\bullet\bullet\bullet$ اول معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\underbrace{(2x+1)^2}_{\text{اتحاد مربع}} - (x+m) = 0 \Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(1) + 1^2 - x - m = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 - x - m = 0 \Rightarrow \underbrace{4}_{a} x^2 + \underbrace{3}_{b} x + \underbrace{(1-m)}_{c} = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow 3^2 - 4(4)(1-m) = 0 \Rightarrow 9 - 16(1-m) = 0$$

$$\Rightarrow 9 - 16 + 16m = 0 \Rightarrow -7 + 16m = 0 \Rightarrow 16m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{16}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۴}} 4\left(\frac{3}{4} + \frac{m}{2}\right) = 4(m-1) \Rightarrow 3 + 2m = 4m - 4$$

$$\Rightarrow 2m - 4m = -4 - 3 \Rightarrow -2m = -7 \Rightarrow m = \frac{7}{2}$$

حالا  $m = \frac{7}{2}$  را در معادله جای‌گذاری و معادله را حل می‌کنیم:

$$3x^2 + mx = m - 1 \xrightarrow{m=\frac{7}{2}} 3x^2 + \frac{7}{2}x = \frac{7}{2} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} 6x^2 + 7x = 7 - 2 \Rightarrow 6x^2 + 7x - 5 = 0$$

معادله را با روش کلی حل می‌کنیم:  $a=6$ ,  $b=7$ ,  $c=-5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(6)(-5) = 49 - (-120) = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2(6)} = \frac{-7 \pm 13}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7+13}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-7-13}{12} = \frac{-20}{12} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

پس جواب دیگر معادله  $-\frac{5}{3}$  است.

### ۶۵- گزینه‌ی $\bullet$ معادله‌ی داده‌شده را به شکل استاندارد

می‌نویسیم:  $5x(x-1) = 2(x+6) \Rightarrow 5x^2 - 5x = 2x + 12$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x - 2x - 12 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 7x - 12 = 0$$

ضرایب این معادله به صورت  $a=5$ ,  $b=-7$ ,  $c=-12$  هستند. اگر

دقت کنیم این ضرایب در رابطه‌ی  $a-b+c=0$  صدق می‌کنند، پس

ریشه‌های این معادله  $-1$  و  $-\frac{c}{a}$  هستند:

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-12}{5} = \frac{12}{5}$$

عدد اعشاری متناظر با کسر  $\frac{12}{5}$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{12}{5} = \frac{12 \times 2}{5 \times 2} = \frac{24}{10} = 2/4$$

### ۶۶- گزینه‌ی $\bullet\bullet$ ضرایب معادله‌ی $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$ را

می‌نویسیم:  $a=1$ ,  $b=-(\sqrt{2}+1)=-\sqrt{2}-1$ ,  $c=\sqrt{2}$

مجموع این ضرایب صفر است یعنی  $a+b+c=0$ ، پس جواب‌های

این معادله  $1$  و  $\frac{c}{a}$  هستند.

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله،  $x_2 = \sqrt{2}$  است.

### ۶۷- گزینه‌ی $\bullet\bullet\bullet$ معادله‌ی $2x^2 - 7x^2 - 9 = 0$ را به صورت

$2(x^2)^2 - 7x^2 - 9 = 0$  می‌نویسیم. با انتخاب  $x^2 = t$  معادله به

$$2t^2 - 7t - 9 = 0$$

صورت روبه‌رو درمی‌آید:

اگر دقت کنیم بین ضرایب این معادله، رابطه‌ی  $a-b+c=0$  برقرار

است، پس ریشه‌های آن  $-1$  و  $-\frac{c}{a}$  هستند:

$$t_1 = -1, t_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-9}{2} = \frac{9}{2}$$

۷۴- **گزینه‌ی ۳** اگر تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یعنی دو ریشه با هم برابرند. پس معادله‌ی  $ax^2 - 12x + 9 = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف است و دلتای آن باید صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-12)^2 - 4(a)(9) = 0$$

$$\Rightarrow 144 - 36a = 0 \Rightarrow 36a = 144 \Rightarrow a = \frac{144}{36} = 4$$

پس معادله به صورت  $4x^2 - 12x + 9 = 0$  است.

می‌دانیم اگر  $\Delta = 0$  باشد، ریشه‌ی مضاعف معادله به صورت  $x = \frac{-b}{2a}$  است، پس در این‌جا داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۷۵- **گزینه‌ی ۳** اگر یک عبارت درجه‌دوم، مربع کامل باشد، دلتای آن صفر است! با توجه به نکته‌ی بالا، باید دلتای عبارت  $4x^2 + bx + 9 = 0$  صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(4)(9) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = \pm\sqrt{144} \Rightarrow b = \pm 12$$

اگر  $b = 12$  باشد، عبارت به صورت  $4x^2 + 12x + 9$  در می‌آید. ریشه‌های  $4x^2 + 12x + 9$ ، یعنی جواب‌های معادله‌ی زیر:

$$\frac{4x^2 + 12x + 9}{\text{اتحاد مربع}} = 0 \Rightarrow (2x + 3)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

حواستان باشد که این معادله دارای دو جواب  $x_1 = \frac{-3}{2}$  و  $x_2 = \frac{-3}{2}$  است، پس حاصل جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{-3}{2} + \frac{-3}{2} = -3$$

اگر  $b = -12$  باشد، هر دو ریشه‌ی معادله برابر با  $\frac{3}{2}$  می‌شوند، پس حاصل جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

۷۶- **گزینه‌ی ۳** معادله‌ی درجه‌دومی دارای جواب حقیقی است که در شرط  $\Delta \geq 0$  صدق کند. در تمام گزینه‌ها، دلتا را حساب می‌کنیم:

①  $a = 1, b = -1, c = k \quad \Delta = (-1)^2 - 4(1)(k) = 1 - 4k$

②  $a = 1, b = k, c = -1 \quad \Delta = k^2 - 4(1)(-1) = k^2 + 4$

③  $a = k, b = -1, c = -1 \quad \Delta = (-1)^2 - 4(k)(-1) = 1 + 4k$

در بین عبارت‌های  $1 - 4k$ ،  $1 + 4k$  و  $k^2 + 4$ ، عبارت  $k^2 + 4$  همواره مثبت است، پس تنها ④ در بین گزینه‌ها، به ازای هر مقدار  $k$  دارای جواب حقیقی است (مقدار  $1 - 4k$  به ازای  $k > \frac{1}{4}$  و مقدار  $1 + 4k$  به ازای  $k < -\frac{1}{4}$ ، منفی می‌شود و نمی‌تواند همواره مثبت باشند).

عبارت‌هایی که به شکل  $(a)x^2 + (b)x + (c)$  هستند، همواره مثبت‌اند، مثل  $x^2 + 1$ ،  $2x^2 + 3$  و ...

۷۱- **گزینه‌ی ۳** زمانی معادله‌ی درجه‌دوم فقط دارای یک جواب است که ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی باید  $\Delta = 0$  باشد:

$$m^2x^2 - mx + m - 1 = 0 \Rightarrow \frac{m^2}{a}x^2 - \frac{m}{b}x + \frac{(m-1)}{c} = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(m^2)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4(m^2 - m^3) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m^2 + 4m^3 = 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 4m^3 = 0 \xrightarrow{\text{از } m^2 \text{ فاکتور می‌گیریم}} m^2(-4m + 4) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل ضرب دو عبارت صفر است پس یکی از آن‌ها باید صفر باشد}} \begin{cases} m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \\ -4m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

دقت کنید اگر  $m = 0$  باشد، ضریب  $x^2$  برابر با صفر می‌شود و معادله از فرم درجه‌دوم بودن درمی‌آید، پس فقط  $m = 1$  قابل قبول است. معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  با شرط  $a \neq 0$  و  $b, c \in \mathbb{R}$  یک معادله‌ی درجه‌دوم است.

۷۲- **گزینه‌ی ۳** اول معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$x(2x - 5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، حتماً  $\Delta = 0$  و ریشه‌ی مضاعف برابر با  $x = \frac{-b}{2a}$  است (a ضریب  $x^2$  و b ضریب x است)، پس در این‌جا، ریشه‌ی مضاعف برابر است با:

$$x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

می‌شد دلتا را مساوی صفر قرار دهیم و a را به دست آوریم و سپس با جای‌گذاری a در معادله، مقدار ریشه‌ی مضاعف را به دست آوریم. فقط کارهای اضافی، زیاد انجام می‌دادیم! وقت طلاست!

۷۳- **گزینه‌ی ۳** اگر معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، این ریشه برابر با  $x = \frac{-b}{2a}$  است. این‌جا نمی‌توانیم مثل سؤال قبل کلک بزنیم و زود به جواب برسیم! حتماً باید m به دست

آید! پس اول  $\Delta$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا m به دست بیاید:

$$(m+1)x^2 - \frac{4}{b}x + 1 = 0$$

شرط ریشه‌ی مضاعف داشتن:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(m+1)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 16 - 4(m+1) = 0 \Rightarrow 16 - 4m - 4 = 0 \Rightarrow -4m + 12 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{12}{4} = 3$$

حالا که  $m = 3$  شد، ریشه‌ی مضاعف را به دست می‌آوریم:

$$x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(m+1)}$$

$$\xrightarrow{m=3} x_{\text{مضاعف}} = \frac{4}{2(3+1)} = \frac{4}{2(4)} = \frac{1}{2}$$

۸۱- گزینه‌ی **د** ضرایب معادله را می‌نویسیم:

$$a = 3, b = -7, c = -2$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{مجموع ریشه‌ها برابر است با:}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:}$$

$$\frac{P}{S} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{2 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 7} = -\frac{2}{7} \quad \text{نسبت P به S را به دست می‌آوریم:}$$

۸۲- گزینه‌ی **د** در معادله  $2x^2 + (3k-1)x + (k+1) = 0$

$$a = 2, b = 3k-1, c = k+1 \quad \text{ضرایب عبارت‌اند از:}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با ۳ است، پس:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{k+1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} k+1=6 \Rightarrow k=5$$

۸۳- گزینه‌ی **د** معادله را استاندارد می‌کنیم و ضرایب را

می‌نویسیم:

$$2x(x-1) = 8 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 8 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$a = 2, b = -2, c = -8 \quad \text{ضرایب عبارت‌اند از:}$$

اگر ریشه‌ها را  $x_1$  و  $x_2$  بنامیم، سؤال مجموع معکوس ریشه‌ها یعنی  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  را می‌خواهد که با مخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-(-2)}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

۸۴- گزینه‌ی **د** همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم، قدرمطلق

تفاضل ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌دوم برابر با  $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$  است:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-8)^2 - 4(3)(-3)}}{|3|} \\ = \frac{\sqrt{64 + 36}}{3} = \frac{\sqrt{100}}{3} = \frac{10}{3}$$

۸۵- گزینه‌ی **د** برای محاسبه‌ی  $x_1^2 + x_2^2$  از اتحاد مربع کمک

$$x_1^2 + x_2^2 = \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_S - \underbrace{2x_1x_2}_P = S^2 - 2P \quad \text{می‌گیریم:}$$

پس لازم است S و P را حساب کنیم:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{3} = 2 \quad P = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

حالا  $S=2$  و  $P=\frac{2}{3}$  را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

۸۶- گزینه‌ی **د** اگر دو عدد معکوس هم باشند (مثل  $\frac{5}{3}$  و  $\frac{3}{5}$ )،

حاصل‌ضربشان حتماً ۱ است، پس باید دنبال معادله‌ای باشیم که حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر یک باشد ( $P=1$ ):

$$P = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$$

۷۷- گزینه‌ی **د** در معادله‌ی درجه‌دوم به فرم  $(x-a)^2 = k$

داریم:

۱) اگر  $k > 0$  باشد، معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز است (از خاصیت ریشه‌ی زوج استفاده می‌کنیم).

۲) اگر  $k = 0$  باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف است ( $x=a$ ).

۳) اگر  $k < 0$  باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد (چون سمت چپ تساوی که همواره نامنفی است، نمی‌تواند با  $k$  که عددی منفی است برابر شود).

پس اگر  $k > 0$  یا  $k = 0$  باشد، معادله ریشه حقیقی دارد، پس در کل به ازای  $k \geq 0$  معادله دارای ریشه‌ی حقیقی است.

۷۸- گزینه‌ی **د** اول دلتا را حساب می‌کنیم:

$$a = k, b = -(2k+1) = -2k-1, c = k+3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2k-1)^2 - 4(k)(k+3) \\ = (4k^2 + 4k + 1) - 4(k^2 + 3k) \\ = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 12k = -8k + 1$$

برای آن‌که معادله دارای جواب حقیقی باشد، باید  $\Delta \geq 0$  باشد، پس:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow -8k + 1 \geq 0 \Rightarrow -8k \geq -1 \Rightarrow k \leq \frac{-1}{-8} \Rightarrow k \leq \frac{1}{8}$$

دقت کنید از  $-8k \geq -1$  به  $k \leq \frac{1}{8}$  رسیدیم و جهت نامساوی عوض شد. در نامساوی‌ها هر وقت طرفین را در عدد منفی، ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

۷۹- گزینه‌ی **د** برای آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم،

ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید  $\Delta < 0$  باشد. در معادله‌ی

$$\frac{2a}{a}x^2 - \frac{4a}{b}x + \frac{2a}{c} + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4a)^2 - 4(2a)(2a+1) = 16a^2 - 8a(2a+1) \\ = 16a^2 - 16a^2 - 8a = -8a$$

$$= 16a^2 - 16a^2 - 8a = -8a$$

حالا شرط  $\Delta < 0$  را اعمال می‌کنیم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow -8a < 0 \Rightarrow 8a > 0 \Rightarrow a > 0$$

۸۰- گزینه‌ی **د** کلاً وقتی در مورد تعداد جواب بحث می‌شود

باید برویم سراغ  $\Delta$ . پس اول  $\Delta$  را حساب می‌کنیم:

$$\frac{3}{a}x^2 + \frac{a}{b}x - \frac{3}{c} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(3)(-3) = a^2 + 36$$

برای این‌که معادله‌ی درجه‌دوم دو جواب حقیقی و متمایز داشته

باشد باید شرط  $\Delta > 0$  را داشته باشد. از آن‌جایی که عبارت  $a^2 + 36$

عبارتی همواره مثبت است، پس شرط  $\Delta > 0$  همواره برقرار است.

یعنی به ازای هر مقدار  $a$ ، دلتای معادله مثبت است.



پس می‌توانیم نکته‌ی زیر را داشته باشیم:

اگر در معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو مقدار  $a$  و  $c$  برابر باشند ( $a = c$ )، آن‌گاه ریشه‌های معادله، معکوس یکدیگرند. این ویژگی فقط در معادله‌ی (۲) وجود دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

پس ریشه‌ی مثبت معادله  $x_1 = 2$  است.

۹۰- **گزینه‌ی** اول ضرایب معادله را می‌نویسیم:  $a = 2$

$b = k$  و  $c = 1 - k$  و حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ است، پس:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow 5 = \frac{1-k}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 10 = 1 - k \Rightarrow k = -9$$

حالا معادله را با  $k = -9$  بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^2 + kx + 1 - k = 0 \xrightarrow{k=-9} 2x^2 - 9x + 1 - (-9) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

معادله‌ی بالا را با روش کلی حل می‌کنیم:  $a = 2$ ،  $b = -9$ ،  $c = 10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(10) = 81 - 80 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{9 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

پس ریشه‌ی بزرگ‌تر  $x_1 = 5/2$  است.

۹۱- **گزینه‌ی** اگر دو عدد معکوس هم باشند (مثل  $\frac{5}{3}$ ،  $\frac{3}{5}$ )

حتماً ضربشان یک است، پس در این‌جا هم که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم معکوس هم هستند، حاصل ضربشان برابر یک است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم برابر با  $\frac{c}{a}$  بود.

$$2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 3m, c = 2m + 6$$

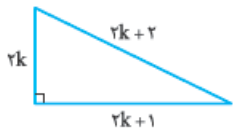
$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \Rightarrow 2m+6 = 2$$

$$\Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2$$

حالا سؤال مجموع دو ریشه را می‌خواهد که برابر است با:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-3m}{2} = \frac{-3(-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۹۲- **گزینه‌ی** بین سه عدد



$2k+1$ ،  $2k$  و  $2k+2$ ، عدد  $2k+2$  از

بقیه بزرگ‌تر است، پس وتر  $2k+2$  است.

رابطه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$(2k+2)^2 = (2k+1)^2 + (2k)^2$$

$$\Rightarrow (2k)^2 + 2(2k)(2) + 2^2 = (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2 + (2k)^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 8k + 4 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 4k - 4 = 0 \Rightarrow -3 = 0$$

برای حل معادله‌ی درجه دوم بالا اول دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(-3) = 16 - (-48) = 64$$

۸۷- **گزینه‌ی** این سؤال یک راه‌حل کلی دارد که اول با

جای‌گذاری  $x = -4$  مقدار  $a$  را به دست می‌آوریم. بعد با جای‌گذاری  $a$ ، معادله را با هر روشی که دوست داریم حل می‌کنیم تا ریشه‌هایش به دست آید. یکی از این ریشه‌ها قطعاً  $-4$  است و ریشه‌ی دیگر همان جواب موردنظر سؤال است. اما این‌جا می‌توانیم با کمی زرنگی، سؤال را راحت‌تر حل کنیم. اول  $S$  و  $P$  را تشکیل می‌دهیم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-a)}{a} = \frac{a}{a} = 1, P = \frac{c}{a} = \frac{25}{a} = 5$$

پس  $P$  را داریم. از آن‌جایی که یکی از ریشه‌ها  $-4$  و حاصل ضرب ریشه‌ها  $5$  است، می‌توانیم ریشه‌ی دیگر را هم به دست آوریم:

$$P = 5 \Rightarrow x_1 x_2 = 5 \Rightarrow (-4)(x_2) = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

۸۸- **گزینه‌ی** ضرایب معادله‌ی  $x^2 - 2kx + 2k + 2 = 0$  را

$$a = 1, b = -2k, c = 2k + 2$$

می‌نویسیم:

حاصل ضرب ( $P$ ) و حاصل جمع ( $S$ ) ریشه‌ها با هم برابر است، پس:

$$P = S \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow c = -b$$

$$\Rightarrow 2k + 2 = -(-2k) \Rightarrow 2k + 2 = 2k \Rightarrow k = 2$$

معادله را با  $k = 2$  بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2 - 2kx + 2k + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{k=2} x^2 - 2(2)x + 2(2) + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$$

معادله را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(6) = 16 - 24 = -8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-8}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

پس ریشه‌ی کوچک‌تر معادله  $2 - \sqrt{2}$  است.

۸۹- **گزینه‌ی** ضرایب معادله را می‌نویسیم:  $a = 6$

$b = k + 1$  و  $c = k$ ، مجموع ریشه‌ها  $\frac{1}{6}$  است، پس:

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{-(k+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1 = -k - 1 \Rightarrow k = -2$$

معادله را با  $k = -2$  بازنویسی می‌کنیم:

$$6x^2 + (k+1)x + k = 0$$

$$\xrightarrow{k=-2} 6x^2 + (-2+1)x - 2 = 0 \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$$

معادله‌ی بالا را با روش کلی حل می‌کنیم:  $a = 6$ ،  $b = -1$ ،  $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

۹۶- **گزینه‌ی ۱** با یک معادله‌ی توانی رویه‌رو هستیم. اول

پایه‌های دو طرف را یکسان می‌کنیم. فقط کافیست  $\frac{1}{5}$  را به صورت  $5^{-1}$

$$5^{9x^2-6x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{9x^2-6x} = 5^{-1}$$

بنویسیم:

$$9x^2 - 6x = -1 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

پایه‌ها برابرند، پس  
توان‌ها هم برابرند

به یک معادله‌ی درجه‌دوم رسیدیم که به روش تجزیه به راحتی حل می‌شود:

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)^2 = 0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

اتحاد مربع

۹۷- **گزینه‌ی ۱** طول مستطیل را  $x$  و عرض آن را  $y$  در نظر

می‌گیریم. محیط مستطیل برابر با ۵۴ است، پس:

$$2x + 2y = 54 \Rightarrow x + y = 27$$

مساحت مستطیل برابر با ۱۸۰ است، پس:

$$xy = 180$$

از معادله‌ی  $x + y = 27$  می‌توان  $y$  را بر حسب  $x$  نوشت:  $y = 27 - x$

و آن را در معادله‌ی دوم جای گذاری کرد:

$$xy = 180 \xrightarrow{y=27-x} x(27-x) = 180 \Rightarrow 27x - x^2 = 180$$

$$\Rightarrow x^2 - 27x + 180 = 0$$

معادله‌ی درجه‌دوم بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-27)^2 - 4(1)(180) = 729 - 720 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{27 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{27-3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ x_2 = \frac{27+3}{2} = \frac{30}{2} = 15 \end{cases}$$

دو عدد برای طول به دست آمد. به ازای هر کدام مقدار عرض را از

رابطه‌ی  $y = 27 - x$  به دست می‌آوریم:

$$\text{اگر } x = 12 \text{ باشد } y = 27 - 12 = 15$$

$$\text{اگر } x = 15 \text{ باشد } y = 27 - 15 = 12$$

پس اختلاف طول و عرض برابر است با:  $15 - 12 = 3$ .

۹۸- **گزینه‌ی ۱** مساحت مربع برابر است با مجموع مساحت

مستطیل و قسمت رنگی:

مساحت قسمت رنگی + مساحت مستطیل = مساحت مربع

$$\Rightarrow 80^2 = x(x+20) + 4900 \Rightarrow 6400 = x^2 + 20x + 4900$$

$$\Rightarrow x^2 + 20x + 4900 - 4900 = 0 \Rightarrow x^2 + 20x - 1500 = 0$$

معادله‌ی بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4(1)(-1500) = 400 - (-6000) = 6400$$

حالا با جای گذاری در فرمول کلی، مقدار مجهول ( $k$ ) را به دست می‌آوریم:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2(4)} = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ k_2 = \frac{4-8}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$k = \frac{-1}{2}$  باعث می‌شود یکی از اضلاع مثلث (یعنی  $2k$ ) عددی منفی

شود، پس قابل قبول نیست و فقط  $k = \frac{3}{2}$  قابل قبول است.

سؤال اندازه‌ی وتر را می‌خواهد:  $2k + 2 = 2(\frac{3}{2}) + 2 = 3 + 2 = 5$  و وتر

۹۳- **گزینه‌ی ۱** عدد مثبت گفته‌شده در سؤال را  $x$  می‌گیریم.

حاصل ضرب این عدد مثبت در خودش (یعنی  $x \cdot x$  یا همان  $x^2$ ) از

سه برابر آن (یعنی  $3x$ )،  $40$  واحد بیشتر است، پس:

$$x^2 - 3x = 40 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0$$

سمت چپ تساوی بالا را به راحتی می‌توان با اتحاد جمله‌ی مشترک

تجزیه کرد، پس معادله‌ی بالا را با روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x-8)(x+5) = 0$$

این دو عدد عبارت اند از:  $-8$  و  $+5$   
تا عدد که جمعشون  $-3$  و ضربشون  $-40$  باشه

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 \quad \checkmark \\ x = -5 \quad \times \text{ (سؤال گفته عدد مثبت!)} \end{cases}$$

۹۴- **گزینه‌ی ۱** عدد مورد نظر را  $x$  می‌گیریم. مربع دو برابر

این عدد (یعنی  $(2x)^2$  یا  $4x^2$ ) از  $12$  برابر آن (یعنی  $12x$ )،  $9$  واحد

کم‌تر است، پس:

$$4x^2 = 12x - 9$$

معادله‌ی به دست آمده را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$4x^2 = 12x - 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

معکوس  $\frac{3}{2}$  برابر است با  $\frac{2}{3}$ .

۹۵- **گزینه‌ی ۱** یک عبارت گویا به ازای ریشه‌های مخرج

(اعدادی که مخرج کسر را صفر می‌کنند) تعریف نشده است، پس

کافیست مخرج را مساوی صفر قرار دهیم و معادله را حل کنیم:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

معادله‌ی به دست آمده را به روش کلی حل می‌کنیم:

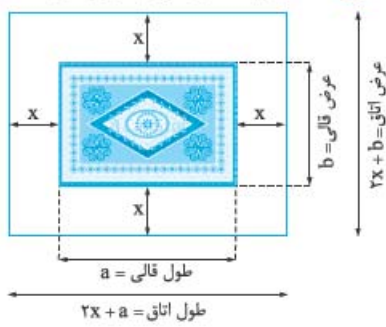
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 - (-16) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

پس این عبارت گویا به ازای  $\{4, -1\}$  تعریف نشده است.

۱۰۱- گزینه‌ی **ب** اول به شکل برای سؤال می‌کشیم!



فاصله‌ی هر طرف قالی از دیوار را  $x$  و طول و عرض قالی را به ترتیب  $a$  و  $b$  می‌گیریم.

$$محیط قالی = 12 \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) = \frac{12}{2} \Rightarrow a+b=6$$

$$محیط اتاق = 20 \Rightarrow \frac{1}{2}((2x+a)+(2x+b)) = \frac{20}{2}$$

$$\Rightarrow 2x+a+2x+b=10 \Rightarrow 4x+a+b=10$$

$$\Rightarrow 4x+6=10 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$$

$$مساحت اتاق = 24 \Rightarrow (2x+a)(2x+b) = 24$$

$$\xrightarrow{x=1} (2+a)(2+b) = 24 \Rightarrow 4 + \underbrace{2b+2a}_{2(b+a)} + ab = 24$$

$$\Rightarrow 4 + 2(b+a) + ab = 24 \Rightarrow 4 + 12 + ab = 24$$

$$\Rightarrow 16 + ab = 24 \Rightarrow \underbrace{ab}_{\text{مساحت قالی}} = 24 - 16 = 8$$

۱۰۲- گزینه‌ی **ب** اختلاف مربع  $\frac{3}{y}$  از خود  $\frac{3}{y}$  برابر است با:

$$\left(\frac{3}{y}\right)^2 - \frac{3}{y} = \frac{9}{y^2} - \frac{3}{y} = \frac{9}{y^2} - \frac{3 \times y}{y^2} = \frac{9-3y}{y^2} = \frac{9-21}{49} = \frac{-12}{49}$$

عدد موردنظر را  $x$  می‌گیریم. اختلاف مربع این عدد از خود آن عدد برابر

$$است با:  $x^2 - x = \frac{-12}{49}$ . که باید با  $\frac{-12}{49}$  برابر شود. پس:$$

با یک معادله‌ی درجه دوم روبه‌رو هستیم، اول آن را استاندارد می‌کنیم:

$$x^2 - x = \frac{-12}{49} \Rightarrow x^2 - x + \frac{12}{49} = 0$$

معادله‌ی به دست آمده را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$a=1, b=-1, c=\frac{12}{49}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)\left(\frac{12}{49}\right) = 1 - \frac{48}{49} = \frac{49-48}{49} = \frac{1}{49}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{49}}}{2(1)} = \frac{1 \pm \frac{1}{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \frac{1}{7}}{2} = \frac{\frac{6}{7}}{2} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{1 + \frac{1}{7}}{2} = \frac{\frac{8}{7}}{2} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \end{cases} \checkmark$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{6400}}{2(1)} = \frac{-20 \pm 80}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-20+80}{2} = \frac{60}{2} = 30 \checkmark \\ x_2 = \frac{-20-80}{2} = \frac{-100}{2} = -50 * \end{cases}$$

(ضلع نمی‌تواند منفی باشد)

۹۹- گزینه‌ی **ب**

$$مساحت مستطیل = عرض \times طول = (3x+2)(2x-1)$$

$$= (3x)(2x) - (3x)(1) + 2(2x) - 2(1) = 6x^2 - 3x + 4x - 2 = 6x^2 + x - 2$$

$$مساحت مثلث = \frac{قاعده \times ارتفاع}{2} = \frac{7x(2x+6)}{2} = 3x^2 + 6x$$

سؤال گفته مساحت مستطیل و مثلث برابر است، پس:

$$6x^2 + x - 2 = 3x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow 6x^2 + x - 2 - 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

معادله‌ی درجه دوم به دست آمده را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-2) = 25 - (-24) = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \checkmark \\ x_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} * \end{cases}$$

(باعث می‌شود ارتفاع مثلث منفی باشد)

حالا با  $x=2$ ، طول و عرض مستطیل را حساب می‌کنیم:

$$طول = 3x+2 = 3(2)+2 = 6+2 = 8$$

$$عرض = 2x-1 = 2(2)-1 = 4-1 = 3$$

$$مساحت مستطیل = 2 \times (طول+عرض) = 2(8+3) = 2(11) = 22$$

۱۰۰- گزینه‌ی **ب** اگر یک عبارت درجه دوم مربع

کامل باشد، حتماً دلتای آن صفر است. پس برای عبارت درجه دوم

$$\underbrace{(k-1)}_a x^2 + \underbrace{2k}_b x + \underbrace{4}_c$$

باید  $\Delta = 0$  باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4(k-1)(4) = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 16(k-1) = 0 \Rightarrow 4k^2 - 16k + 16 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به 4 تقسیم می‌کنیم}} k^2 - 4k + 4 = 0$$

معادله‌ی درجه دوم به دست آمده به روش تجزیه به راحتی حل می‌شود:

$$\underbrace{k^2 - 4k + 4}_\text{اتحاد مربع} = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0 \Rightarrow k-2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

پس مقدار  $\sqrt{k}$  برابر است با  $\sqrt{2}$ .


$$\Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$$

اول دلتا: حالا هم جواب‌ها:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{4-1}{2} \right| = \left| \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر است با: 

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

۱۰۷- **گزینه‌ی ۲**  مخرج‌ها تجزیه نمی‌شوند. تمام کسرها را در

$x(x-2)$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x(x-2)} \frac{x}{x-2} \cdot x(x-2) + \frac{1}{x} \cdot x(x-2)$$

$$= 3x(x-2) \Rightarrow x^2 + (x-2) = 3x(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 3(x^2 - 2x) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم برابر با  $\frac{c}{a}$  است، پس:

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۰۸- **گزینه‌ی ۲**  مخرج‌ها برابر است، پس مشکلی نیست!

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4} = 2x \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x-4} = 2x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x(x-4) = x^2 - 2x - 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x = x^2 - 2x - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جملی مشترک}} (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \quad \checkmark \\ x_2 = 4 \quad \times \end{cases}$$

$x=4$  مخرج کسرهای معادله‌ی اولیه را صفر می‌کند، پس قابل

قبول نیست و تنها جواب معادله  $x=2$  است. تفاضل معکوس جواب

$$\left( \frac{1}{2} \right) \text{ از خود جواب (یعنی ۲) برابر است با: } 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۰۹- **گزینه‌ی ۲**  چون  $x=1$  جواب معادله است، پس آن را در

معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{x+a} = \frac{a}{x} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=1} \frac{1+1}{1+a} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{2}{1+a} = \frac{a}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a(1+a) = 2(1) \Rightarrow a + a^2 = 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

معادله‌ی درجه‌دوم به دست آمده را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک تجزیه و حل می‌کنیم:

$$a + 1 \quad a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \quad \checkmark \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \quad \checkmark \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده مخرج هیچ‌کدام از کسرهای معادله‌ی

$$\frac{2}{1+a} = \frac{a}{1} \text{ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل‌قبول‌اند.}$$

۱۰۳- **گزینه‌ی ۲**  اول رابطه‌ی قیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه‌ی

داده‌شده می‌نویسیم تا  $x$  به دست آید:

$$(x+3)^2 = (x+1)^2 + (2x)^2 \Rightarrow x^2 + 2(x)(3) + 3^2$$

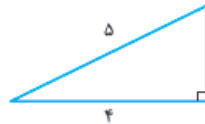
$$= x^2 + 2(x)(1) + 1^2 + 4x^2 \Rightarrow 6x + 9 = 2x + 1 + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2x + 1 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 8 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین را به ۴ تقسیم می‌کنیم}} x^2 - x - 2 = 0$$

معادله‌ی بالا را به روش تجزیه کردن حل می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2 - x - 2}_{\text{جملی مشترک}} = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$



$x = -1$  قابل قبول نیست، چون به ازای

آن ضلع  $2x$ ، عددی منفی می‌شود.

حالا با  $x=2$  اضلاع مثلث را به دست

می‌آوریم: محیط این مثلث برابر است با:

$$.3 + 4 + 5 = 12$$

۱۰۴- **گزینه‌ی ۲**  عدد مورد نظر را  $x$  می‌گیریم.

مربع نصف این عدد (یعنی  $\left(\frac{x}{2}\right)^2$  یا  $\frac{x^2}{4}$ ) از  $12$  برابر آن (یعنی  $12x$ )

$$\frac{x^2}{4} - 12x = 81$$

،  $81$  واحد بیشتر است، پس:

معادله‌ی به دست آمده را اول استاندارد می‌کنیم، بعد به روش کلی

$$\text{حل می‌کنیم: } \frac{x^2}{4} - 12x = 81 \xrightarrow{\text{ضرب در ۴}} x^2 - 48x = 324$$

$$\Rightarrow x^2 - 48x - 324 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-48)^2 - 4(1)(-324)$$

$$= 2304 - (-1296) = 2304 + 1296 = 3600$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-48) \pm \sqrt{3600}}{2(1)} = \frac{48 \pm 60}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{48+60}{2} = \frac{108}{2} = 54 \\ x_2 = \frac{48-60}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط عدد  $54$  هست. (عدد  $-6$  هم درست است ولی در

گزینه‌ها نیست!)

۱۰۵- **گزینه‌ی ۲**  بهترین کار طرفین وسطین!

$$\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (2x-4)^2 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0$$

مجموع ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم برابر  $-\frac{b}{a}$  است، پس:

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-(-18)}{3} = 6$$

۱۰۶- **گزینه‌ی ۲**  کافیه طرفین را در  $2x$  ضرب کنیم که هیچ

مخرجی باقی نماند:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 2x} x(2x) + \frac{1}{x}(2x) = \frac{5}{x}(2x)$$