

ریاضی و آمار

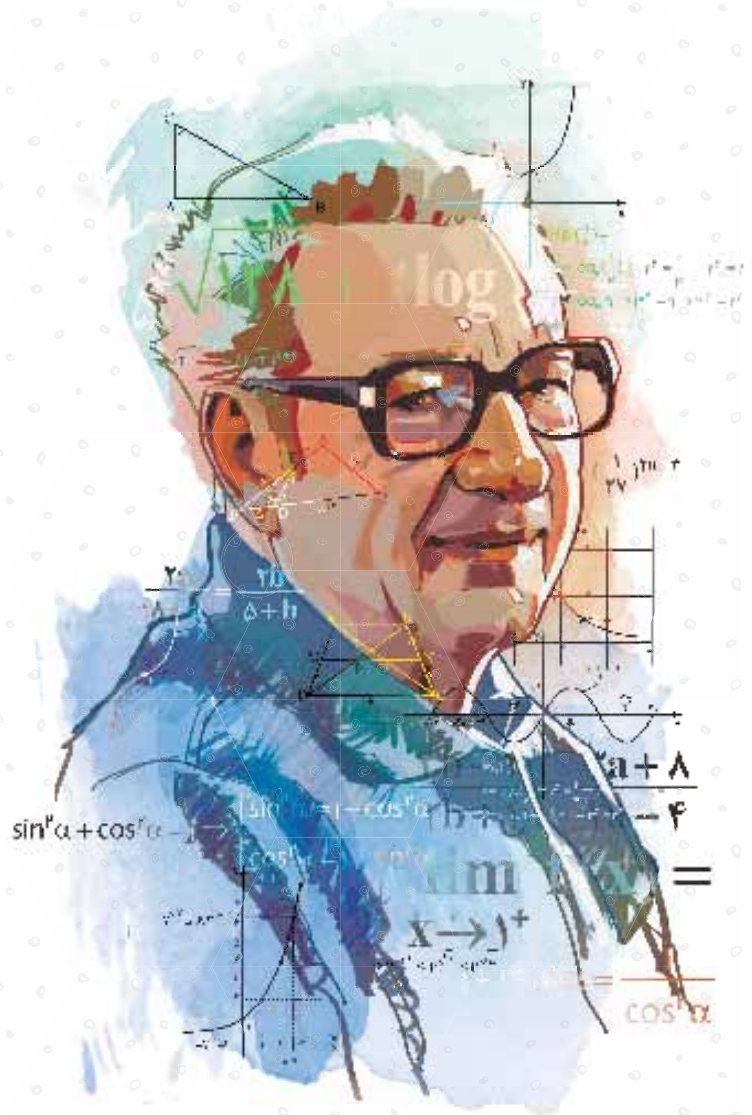
آموزش و تست
پُر از تست‌های دوست‌داشتنی

دهم انسانی

♦ امیرحسین نصیری ♦ روزبه سیگارودی
مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه



تقدیم به استاد پرویز شهریاری

پرویز شهریاری (۲ آذر ۱۳۰۵، کرمان - ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، تهران) ریاضی‌دان و از چهره‌های ماندگار در زمینه‌ی دانش و آموزش ایران است.

دوران کودکی شهریاری دوران سختی از نظر معیشتی بود. او تا سال سوم دبیرستان را در دبیرستان ایرانشهر در شهر کرمان گذراند و وارد دانشسرای مقدماتی کرمان شد. در خرداد ۱۳۲۳ دانش‌آموخته شد و برای ادامه تحصیل به تهران آمد. در تهران در سال ۱۳۳۲ در رشته ریاضی در دانشکده علوم دانشگاه تهران دانش‌آموخته شد. پس از آن یک سال در شیراز آموزگار بود. در ۱۳۳۳ به تهران بازگشت و به فعالیت‌های درخشان علمی و آموزشی خود ادامه داد. استاد پرویز شهریاری سرانجام در ۸۶ سالگی و در روز جمعه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ به علت مشکل تنفسی در بیمارستان جم تهران زندگی را بدرود گفت.

فعالیت‌ها: ■ انتشار نشریاتی چون اندیشه ما، وهومن و چیستا، آشتی با ریاضیات (بعدها: آشنایی با ریاضیات) و سردبیری مجله دانشمند ■ تأسیس دبیرستان‌های خوارزمی، مرجان و مدرسه عالی اراک ■ تألیف کتاب‌های ریاضی و هم‌زمان با آن تألیف و ترجمه صدها کتاب در تاریخ و آموزش ریاضیات ■ انتشار ماهنامه «اندیشه ما» ■ تهیه یک دوره کتاب درسی ریاضی دوره اول دبیرستان ■ راه‌اندازی اولین کلاس کنکور در ایران با نام گروه فرهنگی خوارزمی ■ تأسیس و ثبت بنیاد فرهنگی پرویز شهریاری

سخن نخست



بیا تا گل برافشانیم و می در ساغر اندازیم فلک را سقف بشکافیم و طرحی نو دراندازیم

«حضرت حافظ»

دانش‌آموزان عزیز! فرزندان دلیندم!

انتشارات مهروماه وارد مرحله جدیدی از فعالیت‌های آموزشی خود شده است. هم‌زمان با تحول اساسی در سیستم آموزش کشور و ایجاد تغییرات بنیادین در کتاب‌های درسی، جمعی از بهترین اساتید و مؤلفین توانمند کشور در «مهروماه» گرد هم آمده‌اند تا برای شما کتاب‌هایی را به رشته تحریر درآورند که از خواندن آن‌ها لذت برده و دوستشان داشته باشید. کتاب‌هایی که در شکوفایی توانمندی‌های شما عزیزان دلیندم، جداً اثرگذار باشند.

اساتید و مؤلفانی که در کتاب‌های جدید مهروماه (دهم، یازدهم و سال آینده، دوازدهم) دست به قلم شدند، علاوه بر برخورداری از تمام ویژگی‌های یک مؤلف آموزشی خوب مانند سواد علمی بالا، تجربه کافی در تدریس و تألیف و ...، یک ویژگی دیگر هم دارند؛ ویژگی که شاید محور زندگی اینجانب و رکن اساسی تمام فعالیت‌های آموزشی مهروماه را تشکیل می‌دهد: عشق به فرزندانمان. ما این مهر و عشق را با هیچ مبلغ و ثروتی عوض نمی‌کنیم، حتی اگر آن مبلغ در حد عدد آووگادرو باشد!

فرزندان همچون ماه من!

برای این‌که کتاب‌های مهروماه در این دوره جدید، بیش‌ترین کارایی آموزشی را در جهت موفقیت شما داشته باشند، تدابیر فراوانی اندیشیدیم: شورای تألیف تشکیل دادیم، کارآمدترین مدیران آموزشی و مؤلفان برجسته را گرد هم آوردیم، کتاب‌ها براساس شیوه‌نامه‌هایی متکی بر چند دهه تجربه موفق نگاشته شدند، چندین لایه ویراستار (از دانشجویان فرهیخته و نابغه گرفته تا اساتید بنام کشور) به کار گرفتیم تا از غلط‌های علمی، محاسباتی، تاپیی و... اثری باقی نماند. گروه‌های تولید و هنری مهروماه نیز با هدایت مستقیم مدیر فرزانه مهروماه، جناب احمد اختیاری، سنگ تمام گذاشتند تا کتاب‌هایی تولید شوند همچون ماه! کتاب‌هایی که برازنده نام وزین «مهروماه» اند. شاید مناسب باشد که تعدادی از مهم‌ترین انواع کتاب‌های کمک آموزشی مهروماه را برای شما معرفی کنم:

۱ کتاب‌های آموزش و کار: در این کتاب در مورد هر مبحثی که در مدرسه توسط دبیر محترم تدریس می‌شود یا خودتان از کتاب درسی مطالعه می‌کنید، ابتدا آموزش مختصر و مفید و البته کاملی از آن مبحث داده شده و سپس تمرین‌هایی ارائه شده که با حل آن‌ها می‌توانید تمام قسمت‌های تدریس‌شده یا مطالعه‌شده از کتاب درسی را، به خوبی فرا گرفته تا بر کتاب درسی با تمام جزئیات آن، مسلط شوید.



۲ کتاب‌های تست: در این کتاب‌ها، برای هر مبحث معین، ابتدا درس‌نامه‌ای مفید و جذاب و سپس تست‌های مربوط به آن مبحث ارائه شده است. درس‌نامه‌ها شامل مفاهیم و مطالب اصلی و بنیادی بوده و به نکات حاشیه‌ای که دور از موضوع محوری و اصلی‌اند، پرداخته نشده است. از طرفی، ضمن ارائه پاسخ تشریحی تست‌ها، برخی از نکات ویژه تستی در قالب «راهندهای آموزشی» بسیار کاربردی و منحصر به فرد آورده شده است. همین‌طور، در برخی از کتاب‌های تست (مانند درس شیرین شیمی!) در کنار پاسخ تشریحی تعدادی از تست‌ها، ایستگاه‌های «شارژینگ» آمده است تا دانش‌آموزان در موضوعات مورد نظر، خیلی خوب شارژ شوند. با حل تست‌های این کتاب‌ها و مطالعه پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن‌ها و نیز درس‌نامه‌ها، راهندها و شارژینگ‌ها، موفقیت در آزمون‌ها و کنکور امری طبیعی و آسان خواهد بود.





۳ کتاب‌های آموزش ۳۶۰ درجه: ویژگی اساسی این کتاب‌ها، ارائه آموزش کامل درس و مفاهیم و همین‌طور، پرسش‌هایی است که دانش‌آموزان با حل آن‌ها، در امتحانات مدرسه با قطعیت به نمره ۲۰ رسیده و از طرفی، پایه آموزشی لازم برای حمله به تست‌ها را پیدا خواهند کرد. ضمناً، در این کتاب‌ها، ضمن ارائه درس در هر مبحث، پرسش‌های جالبی از طرف سه دانش‌آموز به ترتیب قوی، متوسط و نسبتاً ضعیف پرسیده می‌شوند که پاسخ به این پرسش‌ها، مکمل خوبی برای درس‌های ارائه شده است.



۴ کتاب‌های لقمه: ابعاد این کتاب‌ها، کوچک بوده و بنابراین می‌توانند همانند تلفن همراه، همه جا همراهتان باشند. اندازه و فرم این کتاب‌ها و نیز مطالب تألیف‌شده در آن‌ها به گونه‌ای تنظیم شده‌اند که مطالعه این کتاب‌ها همه جا میسر است: در مترو و اتوبوس، توی هواپیما، توی رختخواب و حتی شاید زیر دوش حمام!



۵ کتاب‌های امتحانوفن: این کتاب برای هفته‌های آخر قبل از امتحان و شب امتحان طراحی و تألیف شده است. یکی از ویژگی‌های این کتاب، مجهز بودن آن به خلاصه درس‌های «کپسولی» منحصر به فرد است. در مجموع ده سری امتحان بارمبندی شده استاندارد با رعایت تمام ضوابط آموزش و پرورش در آن ارائه شده و علاوه بر پاسخ‌های لازم برای گرفتن نمره کامل، توضیحات اضافی جهت شيرفهم شدن دانش‌آموزان نیز در کنار پاسخ‌ها آمده است.

غير از پنج نوع کتاب مذکور انتشارات مهروماه، کتاب‌های دیگری هم برای نظام جدید آموزشی منتشر خواهد کرد که هر کدام به جای خود، مفید و دوست داشتنی هستند! از جمله سری کتاب‌های معجزه کنکور، کتاب‌های آزمون، کتاب‌های جمع‌بندی و کتاب‌های جامع کنکور. اطلاعات لازم در مورد تک‌تک این کتاب‌ها را می‌توانید از طریق سایت مهروماه به آدرس mehromah.ir به دست آورید.

با آرزوی توفیق روزافزون همه فرزندان میهنم
مدیر شورای تألیف
محمدحسین انوشه

مقدمه



ورود دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی و تجربی به این کتاب ممنوع است!
به نام خدای باحال و بامرام و دوست‌داشتنی
سلام! سلام به روی ماه تک‌تک شما مهر و ماهیای عزیز
می‌خوام به جمله بهتون بگم از

زان ژاک روسو؛

یاد فامیل دور افتادین؟؟؟

می‌گه که: ایمان داشتن به توانایی خویش نیمی از کامیابی است.

وقتی به زندگی خودم نگاه می‌کنم تأثیر این جمله رو در زندگیم می‌بینم.

روزگاری ریاضی من اصلاً خوب نبود اما بعد از خوندن کتاب‌های مختلف و دیدن موفقیت افرادی شبیه خودم که تونستن وضعیت ریاضی‌شون رو بهتر کنن، من هم تصمیمم رو گرفتم و با تلاش زیاد، به اندازه‌ای تغییر کردم که تو یکی از بهترین دانشگاه‌های کشور قبول شدم و تونستم وارد دنیای جدیدی بشم. اما دیگه قانع نبودم. من که خودم از ریاضی می‌ترسیدم، ۸۰ درصد از واحدهای دانشگاهیم که ریاضی تخصصی بود رو با موفقیت گذروندم. عشق من به ریاضی به حدی رسید که تدریس این درس رو به عنوان شغل حرفه‌ایم انتخاب کردم.

حالا با تک‌تک سلول‌های بدنم مصمم هستم حرف‌های جدیدی بزnm و دنیای ریاضی شماها رو تغییر بدم.

بعد از کلی تلاش و تکاپو دست روزگار من رو با انتشارات مهر و ماه آشنا کرد. جایی که می‌تونم بگم برام فوق‌العادس و تنها جاییه که به من اجازه می‌ده خلاق باشم و آزادانه بنویسم. خلاصه با همراهی تیم ریاضی مهروماه، بالاخره موفق شدیم کتاب‌هامون رو از «ب» بسم‌الله بنویسیم و همه‌چیز رو به شما بگیم.

این کتاب نتیجه شیوه‌نگرش نوین من به درس ریاضیه. البته انتشارات مهروماه هم به فکر شما بوده و از من خواسته کتابی رو برای ریاضی انسانی طراحی کنم که مخصوص رشته شماست نه تیکه‌پاره‌های کتاب ریاضی رشته‌های دیگه!!! پس نگران هیچی نباشین. فقط به بسم‌الله بگین و دستتون رو از دستای ما جدا نکنین.

ویژگی‌های کتاب:

بذارید به کم درباره کتاب براتون بگم.

درسنامه‌ها کاملاً کاربردی. مطالب رو از ابتدایی‌ترین مفاهیم تدریس کردیم و هر مطلبی رو با تمام پیش‌نیازهای ممکن ارائه دادیم. به جورایی این کتاب حکایت اون جمله معروفه که "دستم بگرفت و پا به پا برد..."

مثال‌ها و تمرینات کتاب درسی رو تحلیل کردیم و چند مثال مشابه هم براتون آوردیم.

در تمام تمرینات و مثال‌ها استراتژی حل مسأله رو از صفر تا صد براتون گفتیم.

در نهایت، آخر هر فصل براتون سؤالات تشریحی کافی برای امتحانات گذاشتیم.

تست‌های شاخص رو براتون آوردیم که با علامت  مشخص شدن. این تست‌ها سطحی متوسط دارن و برای این طرح شدن که مطلب تو ذهن شما تثبیت بشه.

برای این‌که از منابع تستی بی‌نیاز باشین کلی تست کنکوری و تألیفی تو کتاب گذاشتیم.

تمرینات و تست‌های کتاب هم از آسون به سخت نوشته شده. شمایی که کمی از ریاضی می‌ترسیدی، حالا با خیال راحت می‌تونن ببینن که نه تنها ریاضی برات سخت نیست، بلکه همین درس برای شما هم تبدیل شده به یک نقطه قوت.

نحوه مطالعه صحیح این کتاب:

- ۱ اول باید درسنامه‌ها رو کامل مطالعه کنین. بعد از مطالعه در حد یک خط مفهوم درسنامه رو خلاصه کنین.
 - ۲ به مثال‌های درسنامه خیلی دقت کنین. همه این مثال‌ها و نکات جنبه آموزشی دارن. حتماً مثال‌ها رو دوباره و دوباره برای خودتون حل کنین.
 - ۳ بعد از تموم کردن هر بخش خلاصه‌هاتونو مرور کنین و به نگاه به سؤالاتون بکنین.
 - ۴ مرحله بعدی اینه که سؤالاتونو مجدد حل کنین. (سعی کنین خودتون بدون نگاه کردن به حل این کار رو انجام بدین، اگر موفق نشدین ابتدای پاسخ رو ببینین و دوباره سعی کنین. اینقدر این کار رو انجام بدین تا سؤال حل بشه.)
 - ۵ حالا وقت حل کردن سؤالات تشریحیه. برای حل سؤال تشریحی درسنامه‌های خلاصه شده کنار هم باشه و اصلاً هم اشکالی نداره که اونها رو نگاه کنین. از درسنامه‌ها و مثال‌هاش کمک بگیرین. باید خیالتون راحت بشه که تمام سؤالات تشریحی اون درس حل شده. اگه بین این سؤالا، سؤالی براتون سخت‌تره یا جالب‌تره حتماً وارد جزوه‌تون کنین. بعداً به دردتون می‌خوره.
 - ۶ آخرین مرحله، حل تست‌هاست. به ترتیب تست‌های شاخص هر بخش رو حل کنید. وقتی مطلب تو ذهن شما تثبیت شد، بعد برین سراغ بقیه تست‌ها. اما با روشی که گفتم. وقتی تستی حل نشد، فوراً سراغ پاسخنامه نرین، فکر کنین و برای حل، تلاش کنین. اگه براتون خیلی سخت بود اول جواب رو نگاه کنین و دوباره برگردین و خودتون ادامه بدین.
- بچه‌ها با این ۶ مرحله و اجرای مو به موی راهکارها شک نکنین که اوضاع ریاضیتون کاملاً فرق می‌کنه و تبدیل به دانش‌آموزی متفاوت در این درس می‌شین.

و اما قدردانی...

- لازمه از همه کسانی که به طور مستقیم و غیرمستقیم در تهیه این کتاب به ما کمک کردن تشکر کنیم.
- اول از همه سپاس ویژه رو تقدیم کنیم به مدیریت محترم انتشارات مهروماه جناب آقای احمد اختیاری، که در تمام مراحل همواره از ما حمایت کردن.
 - بعد هم لازمه از جناب آقای مهندس عباس اشرفی مدیر دپارتمان ریاضی و سرکار خانم الهه اسماعیلی مسئول ویراستاری دپارتمان علوم انسانی تشکر کنم که برای این کتاب خیلی زحمت کشیدن.
 - البته نمی‌شه از زحمات ویراستار محترم سرکار خانم پرنیان علیجانی هم غافل شد.
 - یه تشکر ویژه هم دارم از گروه تولید با مدیریت مثال‌زدنی سرکار خانم سمیه جباری، همچنین صفحه‌آرای محترم سرکار خانم رویا طبسی و حروف‌چین‌های عزیز آقای محسن کامران‌پور و سرکار خانم الناز رضوانی، رسام‌های محترم آقای ساسان اسدی و خانم غزاله فروزان گهر که همگی با جدیت و کار حرفه‌ای، تمام تلاش خود را در جهت تولید کتاب به‌کار بستند.

امیرحسین نصیری - روزبه سیگارودی
زمستان ۹۶

فهرست

فصل اول عبارتهای جبری

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها

درس دوم: عبارتهای گویا

فصل دوم معادله درجه دوم

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس سوم: معادله‌های شامل عبارتهای گویا

فصل سوم تابع

درس اول: مفهوم تابع

درس دوم: ضابطه جبری تابع

درس سوم: نمودار تابع خطی

درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

فصل چهارم کار با داده‌های آماری

درس اول: گردآوری داده‌ها

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

درس سوم: معیارهای پراکنندگی

فصل پنجم نمایش داده‌ها

درس اول: نمودارهای یک متغیره

درس دوم: نمودارهای چند متغیره

۹

۱۰

۱۹

۶۳

۶۴

۶۸

۷۹

۱۱۱

۱۱۲

۱۲۰

۱۲۴

۱۲۹

۱۷۵

۱۷۶

۱۷۹

۱۸۶

۲۱۷

۲۱۸

۲۲۲

فصل اوّل

عبارت‌های جبری

تو درس اول این فصل یاد می‌گیری که چطور جمع و تفریق دو تا عبارت رو به توان ۲ یا ۳ برسونی یا این‌که چطوری یه عبارتی رو که ضرب شده‌اش رو داری به حالت قبل از ضرب (تجزیه شده‌اش) برگردونی.

تو درس دوم هم یاد می‌گیری عبارت‌های کسری رو با هم جمع و تفریق کنی. بعد از خوندن این فصل دیگه تو عبارت‌های جبری همه‌چی تموم می‌شی و دیگه چیزی برای یادگرفتن باقی نمی‌مونه!

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردشون

۱ عبارت جبری اصن چی هست؟

۲ یک جمله‌ای و چند جمله‌ای

۳ مفهوم اتحاد و آشنایی با انواع اتحادها

۴ تجزیه عبارت‌های جبری

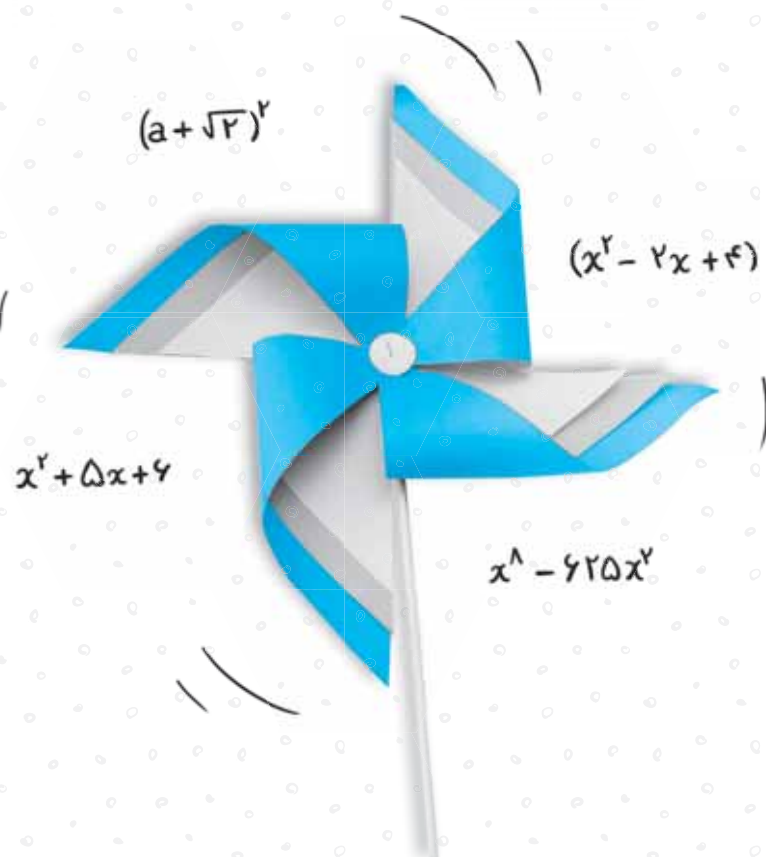
درس دوم: عبارت‌های گویا

۱ عبارت‌های گویا و شناسایشون

۲ ساده‌سازی عبارت‌های گویا

۳ ب.م.م و ک.م.م به دوروش سنتی و فانتوم

۴ جمع، تفریق و تقسیم عبارت‌های جبری



درس ۱: چند اتحاد جبری و کاربردها

عبارت‌های جبری

عبارت جبری ترکیبی از اعداد حقیقی است که به متغیرهای مختلف با توان‌های صحیح غیرمنفی وصل شده‌اند. این اتصال به وسیله ضرب انجام می‌شود. مثل $2 \times (y) \times (x^4)$ که به شکل $2yx^4$ نوشته می‌شود اما عبارتی مثل $4x^2$ یا $12x^{\frac{1}{2}}$ که توان منفی یا کسری دارند عبارت جبری نمی‌باشند. (رادیکال توان کسری است مثل $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$) عبارتهای جبری به دو دسته یک‌جمله‌ای و دو جمله‌ای تقسیم می‌شوند:

الف) یک‌جمله‌ای: هر عبارت ریاضی که از ضرب عدد در متغیرهایی با توان‌های حسابی ساخته شود یک‌جمله‌ای نام دارد. مثلاً $14, 2zx^4, 5xyz, 3x^2y^2z$ و عباراتی از این قبیل. بنابراین یک جمله‌ای توان منفی و کسری (رادیکال) ندارد.

انواع یک‌جمله‌ای:

- متشابه:** متغیرهای آن‌ها کاملاً شبیه یکدیگر است. در اثر جمع و تفریق کردن یک جمله‌ای‌های متشابه فرآیندی مثل حل کردن شکر در چای رخ داده و یک جمله‌ای جدیدی ساخته می‌شود. مثلاً $2x^2y^2 + 8x^2y^2 = 10x^2y^2$
 - غیرمتشابه:** متغیرهای آن‌ها ظاهر متفاوتی دارند. در اثر جمع و تفریق کردن آن‌ها با هم فرآیندی مثل حل کردن شن در چای رخ داده و دو یا چندجمله‌ای درست می‌شود. مثلاً $4xy + 2x^2 + \sqrt{7}yz + 5x + 4$ که در اثر جمع کردن 5 یک‌جمله‌ای غیرمتشابه، یک 5 جمله‌ای (چندجمله‌ای) درست شده است.
- ب) چندجمله‌ای:** از جمع یا تفریق کردن چند یک‌جمله‌ای غیر متشابه ساخته می‌شود.

$$2x^2 + 4xy - 12y^2 + 17k - \sqrt{2}xy^2$$

دقت کن!

- اعداد حقیقی، یک‌جمله‌ای هستند. زیرا می‌توان مثلاً عدد 14 را به شکل $14x^0$ نوشت و این اشکالی ندارد.
- اگر متغیرها را داخل رادیکال، یا قدرمطلق و یا به شکل توان کسری و منفی دیدید، بدانید که عبارت، چندجمله‌ای نیست.

مثال: به عبارتهای زیر توجه کنید:

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow توان، عدد حسابی نیست. $\rightarrow x^2 - 4x^{\frac{2}{3}} + 7$

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow توان منفی دارد. $\rightarrow 2x^{-2} + 4x$

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow x داخل قدرمطلق است. $\rightarrow |x| + 4x$

چند جمله‌ای نیست \Rightarrow توان، عدد حسابی نیست. $\Rightarrow (\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}})$ زیر رادیکال است. $\rightarrow \sqrt{x} - 5$

اتحادها و کاربرد آن‌ها

اتحاد، تساوی دو عبارت جبری است که به ازای هر مقدار دلخواه برقرار و درست است.

این معادله اتحاد نیست. \Rightarrow این معادله تنها به ازای یک مقدار، درست و برقرار است. $\Rightarrow 2x - 1 = 7 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$

این رابطه، اتحاد است. \Rightarrow تساوی روبه‌رو به ازای هر مقدار دلخواه درست و برقرار است. $\Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$a = 1, b = 4 \Rightarrow \underbrace{(1+4)}_{(5)} \underbrace{(1-4)}_{(-3)} = 1^2 - 4^2 = 1 - 16 = -15$$

اتحادهای مهم و پرکاربرد

| | | |
|---|---|--------------------------|
| ۱ | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | اتحادهای مربع دو جمله‌ای |
| ۲ | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | |
| ۳ | $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ | اتحاد مزدوج |
| ۴ | $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$ | اتحاد جمله مشترک |
| ۵ | $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ | اتحاد مربع سه جمله‌ای |
| ۶ | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | اتحادهای مکعب دو جمله‌ای |
| ۷ | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ | |
| ۸ | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | اتحاد چاق و لاغر |
| ۹ | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | |

اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\Delta + \bigcirc)^2 = \Delta^2 + 2\Delta\bigcirc + \bigcirc^2$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال: حاصل هر کدام از اتحادهای زیر را به دست آورید.

الف) $(x + 1)^2$

ب) $(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

پ) $(x + 4)^2 - (x + 5)^2$

پاسخ:

الف)

$$x^2 + 2(x)(1) + (1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ب)

$$(\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{y})(\frac{1}{\sqrt{x}}) + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = y + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{x}$$

پ)

$$x^2 + 8x + 16 - (x^2 + 10x + 25) = x^2 + 8x + 16 - x^2 - 10x - 25 = -2x - 9$$

تست: اگر بدانیم که $a + b = 8$ و $ab = 2$ باشند، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

64 (4)

62 (3)

60 (2)

58 (1)

فب آقا همیشه $(a + b)^2$ یعنی 64، گزینه 4.

معلم: یه بی‌دقتی کردی! $(a + b)^2$ ، $a^2 + b^2$ ، داره اما چیزهای دیگه‌ای هم داره؛ یادت باشه اون‌ها رو حذف کنی.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 8^2 - 2(2) = 64 - 4 = 60$$

پاسخ:

پس گزینه 2 درست است.

اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(\Delta - \bigcirc)^2 = \Delta^2 - 2\Delta\bigcirc + \bigcirc^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: حاصل هر کدام از اتحادهای زیر را به دست آورید.

الف $(\sqrt{2} - x)^2$

ب $(18)^2$

پ $(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})^2$

پاسخ:

$$(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(x) + (x)^2 = 2 - 2\sqrt{2}x + x^2$$

$$(20-2)^2 = (20)^2 - 2(20)(2) + (2)^2 = 400 - 80 + 4 = 320 + 4 = 324$$

$$(\frac{1}{\sqrt{x}})^2 - 2(\frac{1}{\sqrt{x}})(\frac{1}{\sqrt{y}}) + (\frac{1}{\sqrt{y}})^2 = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{y}$$

الف

ب

پ

تست: اگر بدانیم که $a - b = 12$ و $ab = 28$ می‌باشند، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

240(4)

210(3)

200(2)

190(1)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 12^2 = a^2 + b^2 - 2(28) \Rightarrow 144 = a^2 + b^2 - 56 \Rightarrow a^2 + b^2 = 144 + 56 = 200$$

پاسخ:

پس گزینه «2» درست است.

دقت کن! $a^2 + b^2$ می‌تواند از حاصل هر دو اتحاد $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ به دست آید، پس می‌توان گفت:

$$a^2 + b^2 = \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab \\ (a-b)^2 + 2ab \end{cases}$$

تست: حاصل $(m+n)^2 - (m-n)^2$ چند برابر mn است؟

1(4)

2(3)

3(2)

4(1)

$$(m+n)^2 - (m-n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2) = m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = 4mn$$

پاسخ:

$$\frac{4mn}{mn} = 4 \Rightarrow \text{Swll mn ollM4}$$

پس گزینه «1» درست است.

تست: اگر $(a-b)^2 = 625$ و $a^2 + b^2 = 857$ باشند، حاصل ab کدام است؟

132(4)

120(3)

118(2)

116(1)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 625 \Rightarrow 857 - 2ab = 625 \Rightarrow 2ab = 857 - 625 \Rightarrow ab = \frac{857 - 625}{2} = \frac{232}{2} = 116$$

پاسخ:

پس گزینه «1» درست است.

تست: اگر $a - b = 4$ و $a^2 - b^2 = 18$ باشند، حاصل $(a+b)^2$ کدام است؟

81(4)

9(3)

$\frac{81}{4}$ (2)

$\frac{9}{2}$ (1)

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow 18 = 4(a+b) \Rightarrow a+b = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

پاسخ:

$$(a+b)^2 = (\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4}$$

پس گزینه «2» درست است.

تست: اگر $x + y = 12$ و $xy = 32$ ، $x^2 - y^2$ چند برابر $x^2 + y^2$ است؟ (x بزرگ‌تر از y است)

$\frac{4}{5}$ (4)

$\frac{3}{5}$ (3)

$\frac{2}{5}$ (2)

$\frac{2}{3}$ (1)

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (12)^2 - 2(32) = 144 - 64 = 80$$

پاسخ:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \begin{cases} (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow (x-y)^2 = 80 - 2(32) = 80 - 64 = 16 \\ x-y = \sqrt{16} = \pm 4 \end{cases}$$

چون جمع دو عدد 12 و ضرب آنها 32 شده، پس باید هر دو عدد منفی یا مثبت باشند. اما طبق صورت سوال $x + y = 12$ ، پس هر دو عدد مثبت‌اند. بنابراین: $x - y = 4$

$$xy = 32 \begin{cases} x = 8, y = 4 \\ \text{یا} \\ x = -8, y = -4 \end{cases} \xrightarrow{x+y=12} x = 8, y = 4$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 12(4) = 48 \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

پس گزینه «3» درست است.

تست: اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

- 30 (4) 27 (3) 25 (2) 23 (1)

آقا برای رسیدن از $x + \frac{1}{x}$ به $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کافیست $x + \frac{1}{x}$ رو به توان 2 برسونیم. پس جواب می‌شه 5^2 یعنی 25. معلم: راه درستی رو داری میری، ولی دقت کن.

پاسخ:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (5)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

پس گزینه «1» درست است.

تست: اگر $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$ باشد، حاصل $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کدام است؟

- 20 (4) 18 (3) 16 (2) 14 (1)

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

پاسخ:

پس گزینه «1» درست است.

اتحاد مزدوج

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(\Delta + \bigcirc)(\Delta - \bigcirc) = \Delta^2 - \bigcirc^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

مثال: عبارت $(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$ چقدر از $4x^2 + 10$ کم تر است؟

$$(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5}) = (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4x^2 - 5$$

$$(4x^2 + 10) - (4x^2 - 5) = 4x^2 + 10 - 4x^2 + 5 = 15$$

پاسخ:

مثال: حاصل $(3x - 2)(9x^2 + 4)(3x + 2)$ برابر است با $A - 16$ ، A را به دست آورید.

پاسخ:


$$(3x - 2)(9x^2 + 4)(3x + 2) = (3x - 2)(3x + 2)(9x^2 + 4) = (9x^2 - 4)(9x^2 + 4) = (9x^2)^2 - (4)^2 = 81x^4 - 16$$

$$81x^4 - 16 = A - 16 \Rightarrow A = 81x^4$$

اتحاد جمله مشترک

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$$

$$(a+b)(a+c) = \underbrace{a^2}_{\text{a} \times \text{a}} + \underbrace{ac}_{\text{a} \times \text{c}} + \underbrace{ab}_{\text{b} \times \text{a}} + bc = a^2 + (b+c)a + bc$$

آقا! اینا رو چه جوری مفظ کنیم؟ 

معلم: برای حفظ کردن این‌ها، اول قسمت مشترک را به توان 2 می‌رسونیم (x^2) و از نظر تاریخی جمع از ضرب قدیمی‌تر و مُسن‌تره. یعنی اول غیرمشترک‌ها رو جمع می‌کنیم. یادتون باشه چون قسمت دوم مربوط به جمع میشه و جمع مُسن‌تره، برای اون صندلی x رو قرار می‌دیم $((a+b)x)$ و در نهایت غیرمشترک‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل هر کدام از اتحادهای زیر را به دست آورید. 

الف $(x+4)(x-1)$

ب $(\sqrt{x}+7)(\sqrt{x}-2)$

پ $(2\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+1)$

ت $(-x+2)(x+3)$

پاسخ:

$$x^2 + (4-1)x + (4)(-1) = x^2 + 3x - 4$$

$$(\sqrt{x})^2 + (7-2)\sqrt{x} + (7)(-2) = x + 5\sqrt{x} - 14$$

$$2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) = 2[(\sqrt{x})^2 + (1+2)\sqrt{x} + (2)(1)] = 2x + 6\sqrt{x} + 4$$

$$[-(x-2)](x+3) = -1(x^2+x-6) = -x^2 - x + 6$$

تست: اگر $AB = x^2 + 4x + 3$ باشد، حاصل $(A-B)(A+B)$ کدام است؟ ($A < B$)

4x + 8 (4)

-4x - 8 (3)

-4 (2)

4 (1)

پاسخ:

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$$

$$A < B \Rightarrow \begin{cases} x+1 = A \\ x+3 = B \end{cases}$$

$$A - B = x+1 - x-3 = -2$$

$$A + B = x+1 + x+3 = 2x+4$$

$$(A - B)(A + B) = (-2)(2x+4) = -4x - 8$$

پس گزینه «3» درست است.

تست: عبارت $(x^2+8x+7)(x^4-64)$ فاقد کدام عامل است؟

$x^2 + 8(4)$

$x + 7(3)$

$x - 7(2)$

$x + 1(1)$

پاسخ:

$$(x^2+8x+7)(x^4-64) \Rightarrow (x+1)(x+7)(x^2-8)(x^2+8)$$

$$(x+1)(x+7)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2+8)$$

پس گزینه «2» درست است.

اتحاد مربع مجموع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

$$(\Delta + \bigcirc + \square)^2 = \Delta^2 + \bigcirc^2 + \square^2 + 2(\Delta\bigcirc + \Delta\square + \bigcirc\square)$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = \underbrace{a^2}_{\text{a} \times \text{a}} + \underbrace{ab}_{\text{a} \times \text{b}} + \underbrace{ac}_{\text{a} \times \text{c}} + \underbrace{ba}_{\text{b} \times \text{a}} + \underbrace{b^2}_{\text{b} \times \text{b}} + \underbrace{bc}_{\text{b} \times \text{c}} + \underbrace{ca}_{\text{c} \times \text{a}} + \underbrace{cb}_{\text{c} \times \text{b}} + \underbrace{c^2}_{\text{c} \times \text{c}} = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$



آقا می‌تونیم اون رو به شکل $(a+b)^2(a+b)$ هم بنویسیم.

معلم: آفرین به هر دوتون. هر دو درسته ولی دومی سریع‌تره. پس با اون کار می‌کنیم.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

کاملاً درسته، پس می‌تونیم نتیجه بگیریم که:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(\Delta + \circ)^3 = \Delta^3 + 3\Delta^2\circ + 3\Delta\circ^2 + \circ^3$$



مثال: اتحادهای زیر را ساده کنید.

الف $(x+1)^3$

ب $(101)^3$

پ $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$

پاسخ:

الف $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

ب $(100+1)^3 = (100)^3 + 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 + (1)^3 = 1000000 + 30000 + 301 = 1030301$

الف

ب

راهنمایی:

۱ $(\sqrt[3]{x})^4$ را به صورت $\sqrt[3]{x^4}$ می‌توان نوشت.

۲ در ضرب و تقسیم وقتی رادیکال‌ها فرجه برابر داشتند، عبارت داخل رادیکال‌ها را در هم ضرب و تقسیم کنید. مثلاً:

$$(\sqrt[3]{x}) \times (\sqrt[3]{y})^2 = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{xy^2}$$

$$(\sqrt[3]{x})^3 + 3(\sqrt[3]{x})^2(\sqrt[3]{y}) + 3(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y})^3$$

$$= (\sqrt[3]{x})^3 + 3(\sqrt[3]{x^2y}) + 3(\sqrt[3]{xy^2}) + (\sqrt[3]{y})^3 = x + 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) + y$$

ب

تست: اگر $a+b=4$ و $ab=2$ ، حاصل a^3+b^3 کدام است؟

68 (4)

64 (3)

48 (2)

40 (1)

پاسخ: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (4)^3 - 3(2)(4) = 64 - 24 = 40$

پس گزینه «1» درست است.



آقا اینا خیلی سفته!!

$$\frac{a^3 + b^3}{+} = \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{+}$$

معلم: عجله نکن بهت می‌گم. فعلاً فقط رابطه رو نگاه کن.

دقت کن: روش حفظ کردنشون به این صورته که برای $a^3 + b^3$ علامت سومیه، ساز مخالف می‌زنه و چون ساز مخالف

داره به جای جمع بین a و b از ضرب استفاده می‌کنیم.

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای

$$(a-b)^3 = +a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



مثال: حاصل $(a-b)^3$ را به دست آورید.



برای حل این باید حاصل $(a-b)(a-b)^2$ رو به دست بیاریم.

معلم: آفرین، ولی راه ساده‌تری هم هست. $(a-b)$ یعنی $(a+(-b))$ پس برای $(a-b)^3$ کافیه از $(a+(-b))^3$ استفاده کنیم.

$$(a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

دقت کن: علامت‌ها یکی در میان تغییر می‌کنن.

تست: اگر $a-b=4$ و $ab=3$ باشند، مقدار a^3-b^3 کدام است؟

128 (4)

100 (3)

20 (2)

1 (1)

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \Rightarrow a^3 - b^3 = 4^3 + 3(3)(4) = 64 + 36 = 100$$

پاسخ:

پس گزینه «3» درست است.

$$\frac{a^3 - b^3}{-} = \frac{(a-b)^3 + 3ab(a-b)}{- \quad + \quad -}$$

دقت کن!

مثل قبلی در $a^3 - b^3$ ، تموم علامتها «-» هستند، به جز $3ab$ که ساز مخالف داره.

جمع بندی این دو رابطه مهم

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \end{cases}$$

اتحاد چاق و لاغر

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(\Delta^3 \pm \circ^3) = (\Delta \pm \circ)(\Delta^2 \mp \Delta \circ + \circ^2)$$

مثال: عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

ب) $(x + y)$

پاسخ:

الف) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3 = 8x^3 + 27y^3$

الف

ب) $(x + y) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$

ب

جمع بندی اتحادها

$$1) (a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab \\ (a-b)^2 + 2ab \end{cases}$$

$$2) (a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab \pm ac \pm bc)$$

$$3) (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

این اتحاد یک روش برای تجزیه کردن است.

۳) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

۴) $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$

۵) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

۶) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow (a^3 + b^3) = (a+b)^3 + 3ab(a+b)$

۷) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Rightarrow (a^3 - b^3) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

تجزیه یک عبارت جبری

تبدیل عبارت جبری به حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری با ضرایب صحیح را تجزیه می‌گوییم.

انواع روش‌ها

- ۱ فاکتورگیری ۲ اتحاد اول و دوم ۳ اتحاد مزدوج
۴ اتحاد جمله مشترک ۵ اتحاد تفاضل یا مجموع مکعبات دوجمله‌ای

مثال: عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف $4a^2 + 8a^2b - 16a^2c$

ب $5x^2y^3 + 10x^3y^2$

پ $4x^2 + 12xy + 9y^2$

ت $20x^2 - 100x + 125$

ث $16x^4 - 625$

ج $3x^2 - 27y^2$

چ $x^2 - 7x - 60$

ح $x^2 - 19x + 48$

خ $(x^2 + 22x + 40)$

د $(x^3 + 1)$

ز $(x^3 - 1)$

ر $(x^3 + 8)$

ز $(x^3 - 27)$

پاسخ:

الف عبارت a^2 در هر سه جمله مشترک است و هر سه اعداد 4، 8 و 16 مضربی از 4 هستند، بنابراین از $4a^2$ فاکتور می‌گیریم. دقت کنید که علامت عدد 16 منفی است.

ب عبارتهای x^2 و y^2 در هر دو جمله، مشترک است و اعداد 5 و 10 مضربی از عدد 5 هستند، بنابراین از $5x^2y^2$ فاکتور می‌گیریم.

$5x^2y^2(y + 2x)$

پ این عبارت، حاصل اتحاد مربع دوجمله‌ای را نشان می‌دهد.

ت هر سه اعداد 20، 100 و 125 مضربی از عدد 5 هستند. پس از عدد 5 فاکتور می‌گیریم. عبارتی که از آن فاکتور گرفته شده، حاصل اتحاد مربع دوجمله‌ای را نشان می‌دهد.

$5(4x^2 - 20x + 25) = 5(2x - 5)^2$

ث هر دو عبارت با جذر گرفتن از رادیکال خارج می‌شوند و به $4x^2$ و 25 تبدیل می‌شوند، اما باید دقت کرد که 25 و $4x^2$ هر دو از زیر رادیکال خارج شده و به $2x^2$ و 5 تبدیل می‌شوند. پس می‌توان آن‌ها را به این شکل تجزیه کرد.

$(4x^2 - 25)(4x^2 + 25) = (2x - 5)(2x + 5)(4x^2 + 25)$

ج اعداد 3 و 27 مضربی از عدد 3 هستند، پس می‌توان از عدد 3 در آن‌ها فاکتورگیری کرد. پس از فاکتورگیری، عبارت حاصل شده، اتحاد مزدوج را نشان می‌دهد و می‌توان آن را ساده کرد.

$3(x^2 - 9y^2) = 3(x - 3y)(x + 3y)$

چ این عبارت، اتحاد جمله مشترک را نشان می‌دهد. دو عدد را باید پیدا کرد که حاصل ضرب آن‌ها -60 و جمع آن‌ها -7 شده باشد. اعداد -12 و 5 + جواب‌های این معادله هستند.

$(x - 12)(x + 5)$

ح از روش اتحاد جمله مشترک می‌توان آن را حل کرد. باید دو عدد را پیدا کرد که حاصل ضرب آن‌ها 48 و جمع آن‌ها -19 شود. اعداد -3 و -16 - جواب‌های این معادله هستند.

$(x - 3)(x - 16)$

خ می‌توان حدس زد که از اتحاد جمله مشترک می‌توان آن را حل کرد. ضرب دو عدد 40 و جمع آن‌ها 22 شده است. پس دو عدد مورد نظر ما، 2 و 20 می‌باشند.

$(x + 20)(x + 2)$

د عبارت مقابل، اتحاد مکعب دو جمله‌ای را نشان می‌دهد.

$(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ز عبارت مقابل، اتحاد مکعب دوجمله‌ای را نشان می‌دهد.

$(x - 1)(x^2 + x + 1)$

ر جمله x^3 ، x ای را نشان می‌دهد که به توان سه رسیده است و عدد 8، 2^3 را نشان می‌دهد. علامت عبارت اصلی، مثبت است، پس علامت عبارت باز شدهٔ اول نیز مثبت ولی علامت عبارت دومی منفی است.

ز عبارت بالا، اتحاد چاق و لاغر را نشان می‌دهد و مانند پاسخ مثال قبل، آن را حل می‌کنیم. اما حواستان باشد که علامت‌های آن متفاوت است. علامت عبارت اصلی منفی است، پس علامت عبارت باز شدهٔ اول منفی و علامت عبارت دوم همیشه مثبت است.

$$(x-3)(x^2+3x+9)$$

درس ۲: عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا، کسرهایی هستند که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است. توجه کنید که متغیرها داخل قدرمطلق و رادیکال نباشند، چون در آن صورت عبارت گویا نداریم. عبارات گویا حتماً حاوی چندجمله‌ای هستند.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مثال: گویا بودن یا نبودن عبارت‌های زیر را معین کنید. (با علامت * یا ✓)

الف $\frac{1}{x^4 + \sqrt{2}}$

ب $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$

پ $\frac{x+y}{3\sqrt{z}}$

ت $x^2 + 4x + 1$

ث $\frac{x-3}{2x^2 - 4x + 5}$

ج $\frac{|x|}{x^2 + 2}$

چ $\sqrt{x^2} + 1$

پاسخ:

الف گویاست. عدد 1 در صورت، یک جمله‌ای و $\sqrt{2}$ در مخرج عدد حقیقی است.

ب در صورت مشکل ساز است. این عبارت گویا نیست.

پ در مخرج مشکل ساز است. این عبارت گویا نیست.

ت $x^2 + 4x + 1$ را می‌توان به شکل $\frac{x^2 + 4x + 1}{1}$ نوشت که صورت و مخرج عبارات جبری هستند. پس گویاست.

ث مشکلی ندارد. این عبارت هم گویا است.

ج به دلیل وجود قدرمطلق این عبارت گویا نیست.

چ این عبارت هم گویا نیست.

نکته: عبارات گویا زمانی معنی‌دار یا تعریف شده هستند که مخرج آن‌ها مخالف صفر باشد.

بیشترید، من همه رو فهمیدم. ولی مگه $\sqrt{x^2} + 1$ نمی‌شه $x + 1$ ؟ این‌که مشکلی نداره!!!

معلم: دقت کن. عبارت $\sqrt{x^2} + 1$ ، تبدیل به $|x| + 1$ می‌شه که اصلاً چندجمله‌ای نیست.

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{+|x|}} = \circ \rightarrow \sqrt[3]{(+x)^3} = x$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{-|x|}} = -\circ \rightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} = -x$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[p]{|x|}} = |x| \rightarrow \sqrt[18]{x^{18}} = |x|$$

نکته:

مثال: گویا بودن یا نبودن هر کدام را معین کنید و بگویید به ازای چه مقادیری تعریف شده هستند؟

الف $\frac{x\sqrt{x+1}}{3-x}$

ب $\frac{x^2+3}{x^2-4}$

پ $\frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{7}}$

ت $\frac{x+9}{\sqrt{x}-2}$

پاسخ:

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{الف}$$

گویا نیست.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{ب}$$

گویاست.

$$j \{ \dots \} \Rightarrow \dots \quad \text{پ}$$

گویاست.

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ت}$$

گویا نیست.

ساده‌سازی عبارات گویا

مثال: کسرهای زیر را ساده کنید.

الف $\frac{x^2-9}{x-3}$

ب $\frac{x^2-25}{4x+20}$

پ $\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$

پاسخ:

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$$

الف

آقا یعنی $\frac{x^2-9}{x-3}$ همون $x+3$ هست؟

معلم: نه اشتباه نکن. درسته که ساده شده $\frac{x^2-9}{x-3}$ برابر $x+3$ شده، اما این $x+3$ نیست. بلکه $(x+3)$ ای که فقط $x+3$ رو نمی‌تونه قبول کنه چون عبارت اصلی به ازای $x=3$ تعریف نمی‌شه.

ب عبارت (x^2-25) را می‌توان به صورت اتحاد مزدوج نوشت و از 4 در عبارت مخرج فاکتور گرفته و حاصل را می‌نویسیم:

$$\frac{(x+5)(x-5)}{4(x+5)} = \frac{x-5}{4}$$

ب عبارت x^3-8 در صورت را با اتحاد چاق و لاغر و مخرج را با اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم یعنی:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x-2}$$

ب.م.م و ک.م.م به روش فانتوم (روش مهروماهی)

ب.م.م: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

ک.م.م: کوچک‌ترین مضرب مشترک

برای محاسبه ب.م.م و ک.م.م از روش سنتی استفاده می‌شود، ولی ما به شما روش فانتوم رو یاد می‌دهیم.

روش سنتی

یادآوری: در روش سنتی، باید هر عدد را به شمارنده‌های اول آن تجزیه کنیم.

بنا به تعریف داریم:

ب.م.م ← حاصل ضرب عوامل مشترک با کوچکترین توان

ک.م.م ← عوامل مشترک با بزرگترین توان ضرب در عوامل غیرمشترک

مثال: ب.م.م و ک.م.م دو عدد 126 و 150 را به دست آورید.

پاسخ:

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$\text{ب.م.م} = 3$$

$$105 = 5 \times 3 \times 7$$

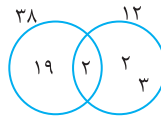
$$\text{ک.م.م} = 3^2 \times 2^3 \times 7 \times 5$$

الف) ب.م.م.و ک.م.م دو عدد 12 و 38 را به دست آورید.

پاسخ:

۱) برای هر عدد یک دایره رسم کنید.

۲) حتماً برای دو دایره، ناحیه مشترک در نظر بگیرید.



$$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$$

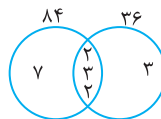
$$38 = 19 \times 2$$

$$\text{ب.م.م.و ک.م.م} = 2 = 2^1$$

$$\text{ب.م.م.و ک.م.م} = 19 \times 2 \times 2 \times 3 = 702$$

ب) ب.م.م.و ک.م.م دو عدد 84 و 36 را به دست آورید.

پاسخ:



$$84 = 21 \times 4 = 3 \times 7 \times 2 \times 2$$

$$36 = 9 \times 4 = 3 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$\text{ب.م.م.و ک.م.م} = 3 \times 2 \times 2 \times 7 = 84$$

$$3 \times 3 \times 2 = 12$$

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 252$$

پ) ب.م.م.و ک.م.م سه عدد 12، 26 و 48 را به دست آورید.

نکته: وقتی سه عدد یا عبارت داشتن از مثلث استفاده کنید.

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

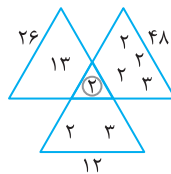
$$48 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$26 = 13 \times 2$$

$$3 \times 3 \times 2 = 12$$

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= 2^5 \times 3^2 \times 13$$



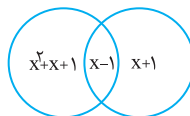
ت) ب.م.م.و ک.م.م دو عبارت $x^3 - 1$ و $x^2 - 1$ را به دست آورید.

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$3 \times 3 \times 2 = (x-1)$$

$$3 \times 3 \times 2 = (x^2 + x + 1)(x-1)(x+1)$$



تست: عبارت گویای $\frac{x^2 + 4x - 4}{x^8 - 16x^4}$ به ازای مقادیری از x تعریف نمی‌شود. مجموع این مقادیر کدام است؟

8 (4

-4 (3

4 (2

0 (1

پاسخ: مخرج را نوشته و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم. این عبارت به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده است.

$$x^8 - 16x^4 = x^4(x^2 - 16) = x^4(x-4)(x+4) = x^4(x-2)(x+2)(x^2+4) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

مخرج به ازای $x=0$ ، $x=2$ و $x=-2$ تعریف نمی‌شود. جمع این مقادیر برابر صفر است.

پس گزینه «1» درست است.



تست: کسر $\frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x^2-4)}$ به ازای مقادیری از x تعریف نشده است. اختلاف بیشترین و کمترین این مقادیر کدام است؟

- 0 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

$$x(x+1)(x^2-4)=0 \Rightarrow x(x+1)(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=2, x=-2$$

پاسخ:

$$|0 - 2| = 2$$

$$|0 - (-2)| = 4$$

پس گزینه «4» درست است.



آقا، چرا $(x+1)$ صورت را با $(x+1)$ مخرج ساده نکردین؟

معلم: بچه‌ها! برای پیدا کردن ریشه‌های مخرج، دقت کنین یه وقت عبارتهای صورت و مخرج رو با هم ساده نکنین، چون این‌جوری بعضی از ریشه‌ها رو از بین می‌برین.

جمع و تفریق عبارتهای گویا

1 مخرج‌ها یکسان هستند.

در این حالت یک مخرج برای تمام عبارتهای نوشته و سپس عبارتهای صورت را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف $\frac{x-8}{x^2-4} - \frac{x-2}{x^2-4}$

ب $\frac{x^2+8x+1}{x+4} + \frac{x^2-1}{x+4}$

پاسخ:

$$\frac{x-8-(x-2)}{x^2-4} = \frac{x-8-x+2}{x^2-4} = \frac{-6}{x^2-4}$$

الف

$$\frac{x^2+8x+1+x^2-1}{x+4} = \frac{2x^2+8x}{x+4} = \frac{2x(x+4)}{x+4} = 2x$$

ب

دقت کن: قسمت ب مثال به ازای $x = -4$ تعریف نمی‌شه و خدای نکرده گول ساده شده اون رو نخورین.

2 مخرج‌ها متفاوت‌اند: در این حالت دو وضعیت داریم که با مثال آن‌ها را مطرح خواهیم کرد:

الف کسرها هیچ عامل مشترکی ندارند:

1 مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، این مخرج مشترک است.

2 به مخرج هر کسر نگاه کنید. مخرج مشترک را بر آن تقسیم کنید، و هر آنچه را که ماند در صورت ضرب کنید.

3 حال صورتهای جدید را با هم جمع و تفریق کنید.

مثال:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1 \times (x-1) - 1 \times (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

پاسخ:

ب کسرها عامل مشترکی دارند:

در این حالت برای پیدا کردن مخرج مشترک، عوامل مشترک با بیشترین توان را در سایر عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم یعنی ک.م.م مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم و آن را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم. بقیه مراحل مانند قبل است.

$$\frac{2x}{(x-1)^2} + \frac{4xy}{(x^2-1)}$$

مثال:

$$\frac{2x}{(x-1)(x-1)} + \frac{4xy}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x+1) + 4xy(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2 + 2x + 4x^2y - 4xy}{(x-1)^2(x+1)}$$

پاسخ:

مثال: عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1}$

ب) $\frac{7}{x^2} + \frac{3x}{2y^2} - 1$

پ) $\frac{a-3}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$

ت) $\frac{x+1}{x-1} - 1$

ث) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1$

ج) $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

چ) $\frac{\frac{1}{m}+1}{m+1}$

پاسخ:

الف) $\frac{\frac{1+a}{a}}{\frac{1-a}{a}} = \frac{a(1+a)}{a(1-a)} = \frac{1+a}{1-a}$

الف

ب) $\frac{2y^2(7) + (3x)x^2 - 2x^2y^2(1)}{2x^2y^2} = \frac{14y^2 + 3x^3 - 2x^2y^2}{2x^2y^2}$

ب

پ) $\frac{a-3-2(a+2)}{a^2-4} = \frac{a-3-2a-4}{a^2-4} = \frac{-a-7}{a^2-4}$

پ

ت) $\frac{x+1-1(x-1)}{x-1} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$

ت

ث) $\frac{\frac{\times 6y^2}{4} - \frac{\times 9x}{5x} + \frac{9x \times 6y^2}{1}}{9x} = \frac{24y^2 - 45x^2 + 54xy^2}{9x}$

ث

ج) $\frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x+1(x-y)-1(x+y)}{(x-y)(x+y)}$

ج

چ) $\frac{2x+x-y-x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$

چ

د) $\frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m+1}{1}} = \frac{(1+m)(1)}{(m)(m+1)} = \frac{1}{m}$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

در ضرب و تقسیم نیازی به مخرج مشترک گرفتن نیست.

ضرب: فرم کلی آن به صورت مقابل است:

$\frac{\square}{\triangle} \times \frac{\bigcirc}{\ominus} = \frac{\square \times \bigcirc}{\triangle \times \ominus}$

مثال:

الف) $\frac{4}{x} \times \frac{x^2-1}{x^2}$

ب) $\frac{4x-2}{x-1} \times \frac{2x+1}{x+1}$

پاسخ:

الف) $\frac{4(x^2-1)}{x(x^2)} = \frac{4x^2-4}{x^3}$

الف

ب) $\frac{(4x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{8x^2+4x-4x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(4x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2(2x-1)(2x+1)}{x^2-1}$

ب



پرسش‌های تشریحی



مهروماه

| ردیف | سوالات |
|------|--|
| 1 | حاصل عبارت $(x+y)^2 - (x-y)^2 + xy$ را به دست آورید. |
| 2 | اگر بدانیم که $2x+2y=16$ و $4x^2-4y^2=64$ ، مقدار عبارت $x-y$ چند برابر $x+y$ خواهد بود؟ |
| 3 | اتحادهای زیر را کامل کنید. الف) $(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y})^2$ ب) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^3$ پ) $a^2 + b^2 - (a-b)^2 + ab$ |
| 4 | اگر بدانیم که $x + \frac{1}{x} = 4$ ، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را به دست آورید. |
| 5 | حاصل عبارت $(a+b+c)^2 - (a+b)^2 - (a+c)^2$ را به دست آورید. |
| 6 | عبارات زیر را تجزیه کنید. الف) $ab^2 - a^2b + ab$ ب) $(x^2 - 5x + 4)^7$ پ) $(x+y)^3 - (x-y)^3$ ت) $(a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2$ ث) $x^3 - 1$ ج) $x^3 + 8$ |
| 7 | اگر تساوی روبه‌رو یک اتحاد باشد، حاصل $a-b-c$ را به دست آورید. $(3x+7)(3x-2) = ax^2 + bx + c$ |
| 8 | عبارات گویای زیر را ساده کنید. الف) $\frac{1}{ab^2} + \frac{2}{a^2b} - \frac{4}{a^2b^2} + \frac{1}{ab}$ ب) $\frac{x^2-16}{x-4} + \frac{x^2+5x+4}{x+4}$ پ) $\frac{4x+1}{\frac{1}{x}+4}$ ت) $(1 + \frac{x}{x+2}) + (\frac{x-1}{x^2+2x})$ ث) $(\frac{2}{x-2} + 1) \times \frac{x-2}{2x+4}$ |
| 9 | ب.م.م. و ک.م.م. دو عدد 36 و 48 را به دست آورید. |
| 10 | ب.م.م. سه عبارت x^2-9 ، x^3-27 و x^2-4x+3 را به ازای $x=2$ به دست آورید. |
| 11 | اگر عبارت روبه‌رو مربع کامل باشد، جای خالی را پر کنید. $64x^4y^6 + 16 + \dots$ |
| 12 | عبارت $x^4 - 81$ را تجزیه کنید. |
| 13 | اگر $5x - \frac{3}{2x} = 4$ باشد، حاصل $25x^2 + \frac{9}{4x^2}$ را به دست آورید. |
| 14 | با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟ |
| 15 | حاصل $\frac{2x^2 - 8x + 8}{4 - 2x}$ کدام است؟ |

پرسش‌های چهار گزینه‌ای



اتحاد مربع دوجمله‌ای

(مشابه تمرین کتاب درسی)

1. حاصل اتحاد $(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2$ کدام است؟

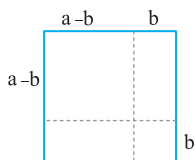
2 + b² + b (4)

2 + b² - b (3)

2 + $\frac{1}{2}b^2 - 2b$ (2)

2 + $\frac{1}{2}b^2 + 2b$ (1)

(مشابه تمرین کتاب درسی)



2. باتوجه به شکل زیر چه اتحادی نتیجه می‌شود؟

(1) اتحاد مربع دوجمله‌ای

(2) اتحاد مزدوج

(3) اتحاد مکعب دوجمله‌ای

(4) اتحاد جمله مشترک

3. عبارت $(a+b)^2$ و $a+b^2$ در چه صورت با هم برابرند؟ (a و b صفر نیستند).

(1) اگر a و b مساوی باشند. (2) اگر $a = 2b + 1$ باشد. (3) اگر $a + 2b = 1$ باشد. (4) اگر a و b قرینه باشد.

4. عبارت $4x^2 + Ax + \frac{9}{4}$ مربع کامل است. A کدام است؟

6 (4)

3 (3)

12 (2)

8 (1)

5. اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ حاصل $x^2 - 4x$ کدام است؟

2 (4)

1 (3)

-1 (2)

-2 (1)

6. به عبارت $4x^2 - 10x + 9$ کدام جمله افزوده شود تا حاصل به صورت مربع کامل دوجمله‌ای باشد؟

-2x (4)

-4x (3)

4x (2)

2x (1)

(انسانی 89)

7. با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

12 (4)

6 (3)

$\frac{15}{4}$ (2)

2 (1)

8. با افزودن کدام عدد بر سه جمله‌ای $4x^2 + 6x + 2$ حاصل به صورت مجذور دوجمله‌ای نوشته می‌شود؟

7 (4)

2 (3)

$\frac{3}{4}$ (2)

$\frac{1}{4}$ (1)

9. با افزودن کدام مقادیر زیر به حاصل ضرب دو عدد a و a-1 یک مربع کامل دوجمله‌ای ایجاد می‌شود؟

a + 2 (4)

a - 1 (3)

1 + a (2)

1 - a (1)

10. اگر $a^2 + 4b^2 = 4ab$ باشد، حاصل $a^2 - 4b^2$ کدام است؟

1 (4)

صفر (3)

4 (2)

3 (1)

11. اگر $x + \frac{1}{x} = 7$ باشد، حاصل $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

3 (4)

2 (3)

4 (2)

-2 (1)

12. اگر $(x + \frac{1}{x})^2 = 5$ باشد، حاصل $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کدام است؟

23 (4)

25 (3)

9 (2)

7 (1)

(انسانی 95)

13. اگر $(5x - \frac{3}{2x}) = 4$ باشد، حاصل $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$ کدام است؟

32 (4)

31 (3)

29 (2)

24 (1)

(انسانی فارع 95)

14. اگر $(3x + \frac{1}{2x}) = 5$ باشد، حاصل $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$ کدام است؟

22 (4)

21 (3)

20 (2)

18 (1)

15. اگر $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a + b + c)$ باشد، مقدار a کدام است؟

4 (4)

3 (3)

2 (2)

1 (1)

16. حاصل عبارت $-\sqrt{2}(\sqrt{3\frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{\frac{17}{4}} - 3\sqrt{2}$ کدام است؟

- (1) 3 (2) -2 (3) $\sqrt{3}$ (4) $-\sqrt{2}$

اتحاد مزدوج

17. برای محاسبه کدام یک از عبارتهای زیر از اتحاد مزدوج استفاده نمی‌شود؟

- (1) $(x+1)(x-1)$ (2) $(-t+2)(t+2)$
 (3) $(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (4) $(-a+1)(a-1)$

18. حاصل $101^2 - 99^2$ با استفاده از اتحادها کدام یک از گزینه‌های زیر محاسبه می‌شود؟

- (1) $4^2 \times 5^2$ (2) 8×500 (3) 4×100 (4) 2×200

19. حاصل $(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81}) + \frac{1}{81 \times 81}$ کدام است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{4}{3}$

20. حاصل عبارت $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$ برابر است با

- (1) $2^{256} + 1$ (2) $2^{128} + 1$ (3) $2^{128} - 1$ (4) $2^{256} - 1$

21. اگر $A = (1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})$ و $B = ((1-\frac{1}{81}) \div (1+\frac{1}{3}))$ باشد، حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 1 (4) $\frac{4}{3}$

22. اگر $A^2 - B^2 = 91$ و $A + B = 7$ باشد، حاصل عدد $A \times B$ کدام است؟

- (1) -30 (2) -18 (3) 12 (4) 20

23. اختلاف مربعات دو عدد مثبت برابر با 40 و مجموعشان 10 است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7

24. اگر $a + 2b = a^2 - 4b^2 = 9$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

25. حاصل عبارت $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20} (7 - 2\sqrt{10})^{10}$ کدام است؟

- (1) 3^{20} (2) 7^{20} (3) 3^{10} (4) 7^{10}

اتحاد جمله مشترک

26. حاصل عبارت $(1-x)(1+x)(x^2+2)$ کدام است؟

- (1) $-x^4 - 3x^2 + 2$ (2) $-x^4 - x^2 + 2$ (3) $x^4 + 3x^2 - 2$ (4) $x^4 + x^2 - 2$

27. در حاصل عبارت $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- (1) $x^2 + 14x + 61$ (2) $x^2 - 7x + 11$ (3) $-x^2 - 14x - 61$ (4) $x^2 + 7x + 11$

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

28. حاصل عبارت $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$ برابر است با:

- (1) $a^2 + b^2 + c^2$ (2) $ab + bc + ac$ (3) $(a+b+c)^2$ (4) $2(ab+bc+ac)$

29. شرط برقراری $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2$ چیست؟

- (1) $a^2 = 2bc$ (2) $b^2 = 2ac$ (3) $c^2 = 2ab$ (4) $a + b + c = abc$

30. مجموع سه عدد a ، b و c برابر 11 و مجموع حاصل ضرب دوه‌دوی آنها برابر 3 می‌باشد، مجموع مجذورات این سه عدد کدام است؟

(انسانی فارغ 91)

- (1) 90 (2) 105 (3) 110 (4) 115

اتحاد مکعب سه جمله‌ای

31. حاصل $(\sqrt{3} + x)^3$ کدام است؟

$3\sqrt{3} - 9x + 3x^2 - x^3$ (1)

$3\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3}x^2 + x^3$ (3)

32. حاصل 99^3 کدام است؟

972999 (1)

970299 (2)

972990 (3)

997029 (4)

33. اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟

216 (1)

238 (2)

244 (3)

264 (4)

34. اگر $x + \frac{1}{x} = 10$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

970 (1)

1030 (2)

997 (3)

1003 (4)

35. اگر $x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^3 - 2x$ کدام است؟

$6 - 7\sqrt{2}$ (1)

$2 + 3\sqrt{2}$ (2)

$6 + 7\sqrt{2}$ (3)

$5 - 3\sqrt{2}$ (4)

اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر)

36. حاصل عبارت $(3x+5)(9x^2-15x+25)$ کدام است؟

$27x^3 + 125$ (1)

$9x^3 - 25$ (2)

$27x^3 - 125$ (3)

$9x^3 + 25$ (4)

37. کدام یک از عبارتهای زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

$(7x-2)(49x^2+14x+4)$ (1)

$(4x+y)(16x^2+4xy+y^2)$ (3)

$(3x+5)(9x^2-20x+15)$ (2)

$(x-2)(x^2-2x+4)$ (4)

38. حاصل عبارت جبری $(2x+1)(4x^2-2x+1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

7 (1)

14 (2)

17 (3)

21 (4)

39. حاصل عبارت $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$ کدام است؟

$(x-1)^2$ (1)

$(x-1)^3(x^3+1)$ (2)

x^3-1 (3)

x^6-1 (4)

40. حاصل $(x+1)(-x+x^2+1)-(x-1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

1 صفر (1)

-2 (2)

$2x^3$ (3)

2 (4)

41. حاصل عبارت $(x^2-2x+4)(x^6+64)(x^3-8)(x+2)$ کدام است؟

$x^{12} - 2^{12}$ (1)

$-x^{12} + 2^{12}$ (2)

$x^{12} + 2^{12}$ (3)

$-(x^{12} + 2^{12})$ (4)

42. حاصل عبارت $(a^2-1)(a^{12}+1)(a^6+1)(a^4+a^2+1)$ برابر است با:

$a^4 - 1$ (1)

$a^8 - 1$ (2)

$a^{16} - 1$ (3)

$a^{24} - 1$ (4)

43. اگر داشته باشیم $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$ مقدار x^3+y^3 کدام است؟

370 (1)

360 (2)

385 (3)

358 (4)

نجزیه

44. اگر $x = \sqrt{2} + 1$ باشد، حاصل $A = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ کدام است؟

$A = 3 - 2\sqrt{2}$ (1)

$A = 6 + 2\sqrt{2}$ (2)

$A = 3 + 2\sqrt{2}$ (3)

$A = 6 - 2\sqrt{2}$ (4)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ نامه پرسش های تشریحی

۱

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 + xy = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) + xy = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 + xy = 5xy$$

۲

$$2x + 2y = 2(x+y) = 16 \Rightarrow x+y = \frac{16}{2} = 8$$

$$4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2) = 64 \Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{64}{4} = 16$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \Rightarrow (x-y)(x+y) = 16 \Rightarrow (x-y) = \frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۳

$$1 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{y}) + (\sqrt{y})^2 = \frac{1}{x} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + y$$

$$2 \quad (\sqrt{m} + \sqrt{n})^3 = (\sqrt{m})^3 + 3(\sqrt{m})^2(\sqrt{n}) + 3(\sqrt{m})(\sqrt{n})^2 + (\sqrt{n})^3 = \sqrt{m^3} + 3m\sqrt{n} + 3n\sqrt{m} + \sqrt{n^3}$$

$$3 \quad a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) + ab = a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 + ab = 3ab$$

۴

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4^3 - 3(4) = 64 - 12 = 52$$

۵

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow \text{آلة} = 2bc - a^2$$

۶

$$1 \quad ab(b-a+1)$$

$$2 \quad ((x-1)(x-4))^7 = (x-1)^7(x-4)^7$$

$$3 \quad \begin{cases} a = x+y \\ b = x-y \\ a-b = x+y-x+y = 2y \end{cases} \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$\begin{cases} ab = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{آلة} = (2y)^3 + 3(x^2 - y^2)(2y) = 8y^3 + 6x^2y - 6y^3 = 6x^2y + 2y^3$$

$$4 \quad \begin{cases} a^3 - b^3 = x \\ a^3 + b^3 = y \\ x - y = a^3 - b^3 - a^3 - b^3 = -2b^3 \end{cases} \Rightarrow (a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = (-2b^3)(2a^3) = -4a^3b^3$$

$$\begin{cases} x + y = a^3 - b^3 + a^3 + b^3 = 2a^3 \end{cases}$$

$$5 \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$6 \quad x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$$

ابتدا سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$(3x+7)(3x-2) = (3x)^2 + (7-2)(3x) + (7 \times (-2)) = 9x^2 + 5(3x) - 14 \Rightarrow 9x^2 + 5(3x) - 14 = ax^2 + bx + c$$

برای آن که یک تساوی جبری، اتحاد باشد، باید ضرایب عبارتهای هم‌درجه در دو طرف تساوی با هم برابر باشد.

$$9x^2 + 15x - 14 = ax^2 + bx + c$$

یعنی:

پس $a=9$ و $b=15$ و $c=-14$ است.

$$a - b - c = 9 - 15 - (-14) \Rightarrow 9 - 15 + 14 = 8$$

در نتیجه:

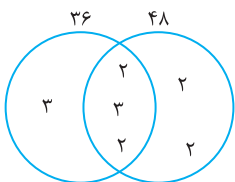
الف) $\frac{a(1) + 2(b) - 4 + 1(ab)}{a^2b^2} = \frac{a + 2b - 4 + ab}{a^2b^2}$

ب) $\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} + \frac{(x+1)(x+4)}{(x+4)} = x + 4 + x + 1 = 2x + 5$

پ) $\frac{4x+1}{1+4x} = \frac{4x+1}{1+4x} = \frac{x(4x+1)}{(1+4x)} = x$

ت) $\left(\frac{(x+2)(1)+x}{x+2}\right) \div \left(\frac{x-1}{x(x+2)}\right) = \frac{2x+2}{x+2} = \frac{x(x+2)(2x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x(2x+2)}{x-1}$

ث) $\frac{2+(1)(x-2)}{x-2} \times \frac{x-2}{2(x+2)} = \frac{(x)(x-2)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{x}{2(x+2)}$

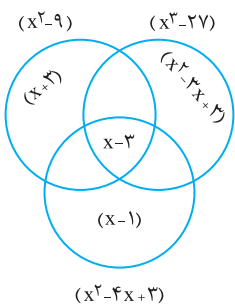


$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\text{م.م.ب} = 2^2 \times 3$$

$$\text{م.م.ک} = 2^4 \times 3^2$$



$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\text{م.م.ب} = (x-3)$$

$$x = 2 \Rightarrow \text{م.م.ب} = 2 - 3 = -1$$

صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای باید به شکل $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ باشد. بنابراین a و b را در عبارت زیر مشخص کرده و $2ab$ را از روی آن به دست می‌آوریم.

$$\sqrt{64x^4y^6} = 8x^2y^3 = a$$

$$\sqrt{16} = 4 = b \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \end{cases} \Rightarrow \dots = \pm 64x^2y^3$$

$$2ab = 2(8x^2y^3)(4) = 64x^2y^3$$

۱۲

$$x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

۱۳

$$25x^2 + \frac{9}{4x^2} = (5x - \frac{3}{2x})^2 + 2(5x)(\frac{3}{2x}) = 4^2 + 5(3) = 16 + 15 = 31$$

۱۴

صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای باید به شکل $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$ باشد. بنابراین می‌توان حدس زد:

$$\begin{cases} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ 2ab = 6x \end{cases}$$

$$(2x)^2 - 2(2x)(y) + \underbrace{\frac{1}{4} + \dots}_{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

عبارت مقابل باید شبیه به مربع کامل شود:

$$\Rightarrow \dots = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

در نتیجه باید دو واحد به عبارت بالا افزود تا مربع کامل شود.

۱۵

$$\frac{2(x^2 - 4x + 4)}{2(2-x)} = \frac{-2(x-2)^2}{-2(2-x)} = \frac{(x-2)(x-2)}{-(x-2)} = -(x-2) = -x + 2$$



پاسخ نامه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

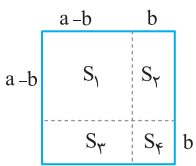
1. 1 2 3 4

با توجه به اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ حاصل اتحاد را به دست می‌آوریم:

$$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}b\right)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}b\right)^2 = 2 - 2b + \frac{1}{2}b^2$$

2. 2 3 4

با توجه به شکل زیر می‌توان فهمید که مساحت شکل اصلی برابر با مجموع مساحت 4 قسمت جدا شده بر روی آن است.



$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

حال مساحت هر یک از شکل‌ها را می‌یابیم.

$$S_1 = (a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$$

$$S_2 = (a - b) \times b = ab - b^2$$

$$S_3 = (a - b) \times b = ab - b^2$$

$$S_4 = b \times b = b^2$$

$$S_{\text{کل}} = a \times a = a^2$$

$$a - b + b = a$$

اضلاع این مربع برابرست با:

زیرا مجموع b و $a - b$ همان a است.

با جای‌گذاری در رابطه مساحت‌ها به اتحاد مورد نظر می‌رسیم.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow a^2 = (a - b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2$$

$(a - b)^2$ را در طرف راست تساوی قرار می‌دهیم بقیه را به طرف دیگر می‌بریم عبارت به دست آمده اتحاد مربع دو جمله‌ای است.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

3. 1 2 3 4

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

1 دو عبارت را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

2 عبارت سمت چپ اتحاد مربع می‌باشد:

$$a^2 + 2ab = a^2$$

3 b^2 ها را از طرفین ساده می‌کنیم:

4. 1 2 3 4

وقتی عبارت $4x^2 + Ax + \frac{9}{4}$ مربع کامل باشد، یعنی به صورت $a^2 \pm 2ab + b^2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 + Ax + \frac{9}{4} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ 2ab = Ax \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2ab = Ax \xrightarrow{a=2x, b=\frac{3}{2}} 2(2x)\left(\frac{3}{2}\right) = Ax \Rightarrow 6x = Ax \Rightarrow A = 6$$

با جای‌گذاری a و b مقدار A به دست می‌آید.

5. 1 2 3 4

به جای x در عبارت $x^2 - 4x$ مقدار آن را جای گذاری می‌کنیم.

$$x^2 - 4x = (2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3}) = 2^2 + 2(2)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 - 8 - 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} = -1$$

6. 1 2 3 4

عبارت $4x^2 - 10x + 9$ شبیه به اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای است (چیزی را کم دارد که بعداً به آن اضافه می‌کنیم).

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 - 10x + 9 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{مربع اول} : a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ \text{مربع ز} : b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \\ \text{مربع ز} : -2ab = -2(2x)3 = -12x \end{cases}$$

در عبارت $-10x$ داریم که با اضافه کردن $-2x$ دیگر، تبدیل به مربع کامل می‌شود.

7. 1 2 3 4

در واقع عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ باید شبیه به $a^2 - 2ab + b^2$ باشد (البته چیزی کم دارد که باید به آن اضافه کنیم).

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + \circ \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ 2ab = 6x \xrightarrow{a=2x} 2(2x)b = 6x \Rightarrow 4b = 6 \Rightarrow b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \circ \Rightarrow \circ = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

8. 1 2 3 4

برای این که عبارت $4x^2 + 6x + 2$ به صورت مجذور دوجمله‌ای باشد، باید مشابه اتحاد مربع شود:

$$4x^2 + 6x + 2 + \circ \xrightarrow{\text{مربع اول}} a^2 + 2ab + b^2$$

a^2 و $2ab$ را داریم اما طبق متن سؤال b^2 هنوز تشکیل نشده و باید با اضافه کردن عددی به 2 ساخته شود. حال از طریق a^2 و $2ab$ مقادیر a و b را می‌یابیم و b^2 را به دست می‌آوریم.

$$a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x$$

$$2ab = 6x \xrightarrow{a=2x} 2(2x)b = 6x \Rightarrow 4xb = 6x \Rightarrow b = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$$

$$b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = 2 + \circ = \frac{9}{4}$$

$$\circ = \frac{9}{4} - \frac{2 \times 4}{1 \times 4} = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4}$$

9. 1 2 3 4

$$a \times (a-1) = a^2 - a$$

ابتدا حاصل ضرب a در $a-1$ را به دست می‌آوریم،

$a^2 - a$ را به گزینه‌ها اضافه می‌کنیم هر کدام تبدیل به اتحاد مربع شد، مربع کامل است.

بررسی گزینه‌ها:

$$a^2 - a + 1 - a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

گزینه ۱: مربع کامل است.

$$a^2 - a + 1 + a = a^2 + 1$$

گزینه ۲: مربع کامل نیست.

$$a^2 - a + a - 1 = a^2 - 1$$

گزینه ۳: مربع کامل نیست.

$$a^2 - a + a + 2 = a^2 + 2$$

گزینه ۴: مربع کامل نیست.

10. 1 2 3 4

اگر در تساوی $a^2 + 4b^2 = 4ab$ ، عبارت $4ab$ را به طرف چپ تساوی ببریم، طرف چپ تبدیل به اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌شود.

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)^2 = 0$$

$$a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$$

اگر مجذور عبارتی برابر صفر باشد، آن عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم. بنابراین:

حال با جای گذاری $a = 2b$ در $a^2 - 4b^2$ حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$a^2 - 4b^2 \xrightarrow{a=2b} (2b)^2 - 4b^2 = 4b^2 - 4b^2 = 0$$