فصل ۴

مثلثات

درس اول : رادیان

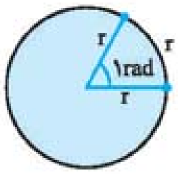
تاکنون زوایا را برحسب درجه اندازه‌گیری می‌کردیم، استفاده از واحد درجه برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی از محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود یکی از این واحدها که در این درس مورد بررسی قرار می‌گیرد «رادیان» است.

تعریف رادیان

یک رادیان اندازهٔ زاویه مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با طول شعاع در هر دایره دلخواه است.

مثال **یک رادیان را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید.**

پاسخ: کافی است که کمانی با طول شعاع روی دایره در نظر بگیریم:



رابطهٔ بین درجه و رادیان

اگر یک زاویه بر حسب درجه با D و بر حسب رادیان با R نمایش داده شود، آنگاه رابطهٔ زیر بین آن‌ها برقرار است.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

($D \leftarrow$ زاویه بر حسب درجه، $R \rightarrow$ زاویه برحسب رادیان)

مثال **۲۷۰° چند رادیان است؟**

پاسخ: در این مثال $D = ۲۷۰^\circ$ طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ داریم:

$$\frac{۲۷۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳\pi}{۲}$$

مثال **زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ چند درجه است؟**

پاسخ: در این مثال $R = \frac{۵\pi}{۶}$ طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{۵\cancel{\pi}}{۶}}{\cancel{\pi}} \Rightarrow D = ۱۸۰ \times \frac{۵}{۶} = ۱۵۰^\circ$$

مثال **مجموع دو زاویه بر حسب درجه برابر ۷۰° و تفاضل آن برابر $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است زاویهٔ کوچک‌تر را بر حسب درجه بیابید:**

پاسخ: ابتدا $\frac{\pi}{۶}$ را بر حسب درجه می نویسیم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{\pi}{۶}}{\pi} \Rightarrow D = ۳۰^\circ$$

حال طبق صورت مسأله داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۷۰^\circ \\ x - y = ۳۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۰^\circ \\ y = ۲۰^\circ \end{cases}$$

پس زاویهٔ کوچک‌تر ۲۰° است.

دو زاویهٔ مکمل و متمم

زوایای α و β را مکمل گویند هرگاه:

$$\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ \text{ یا } \pi \text{ rad}$$

زوایای α و β را متمم گویند هرگاه:

$$\alpha + \beta = ۹۰^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{۲} \text{ rad}$$

مثال

یک زاویه برحسب درجه با $\frac{4}{5}$ برابر مکمل خود مساوی است زاویه را بیابید.

پاسخ: اویه را θ درنظر می‌گیریم طبق صورت مثال نتیجه می‌شود:

$$\theta = \frac{4}{5}(180^\circ - \theta)$$

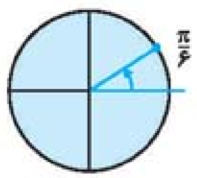
طرفین تساوی را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$5\theta = 4(180^\circ - \theta) \Rightarrow 5\theta = 720^\circ - 4\theta \Rightarrow 9\theta = 720^\circ \Rightarrow \theta = 80^\circ$$

نمایش زاویای مختلف

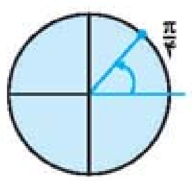
۱- نمایش زاویهٔ $\frac{\pi}{6}$:

چون $\frac{\pi}{6}$ برابر 30° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن عبارتست از:



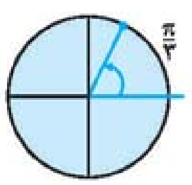
۲- نمایش زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$:

چون $\frac{\pi}{4}$ برابر 45° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن به صورت زیراست:



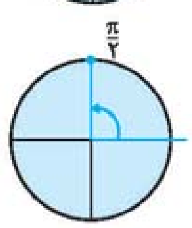
۳- نمایش زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$:

چون $\frac{\pi}{3}$ برابر 60° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن به صورت زیر است:



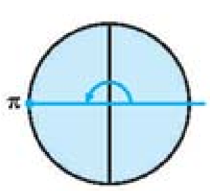
۴- نمایش زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$:

چون $\frac{\pi}{2}$ برابر 90° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن به صورت زیراست:



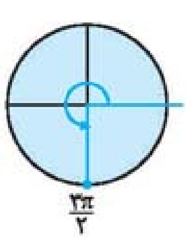
۵- نمایش زاویهٔ π :

چون π برابر 180° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن به صورت زیراست:



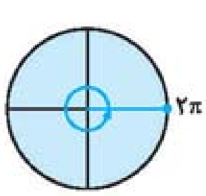
۶- نمایش زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}$:

چون $\frac{3\pi}{2}$ برابر 270° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن به صورت زیراست:



۷- نمایش زاویهٔ 2π :

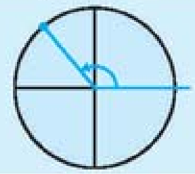
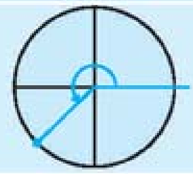
چون 2π برابر 360° است پس در دایرهٔ مثلثاتی موقعیت آن به صورت زیراست:



مثال

زوایای $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ را روی دایره نشان دهید.

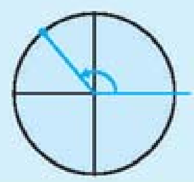
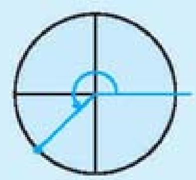
پاسخ:

زاویه	مساوی است با	نمایش روی دایره
$\frac{5\pi}{6}$	$\pi - \frac{\pi}{6}$	
$\frac{7\pi}{6}$	$\pi + \frac{\pi}{6}$	

مثال

زوایای $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ را روی دایره مشخص کنید.

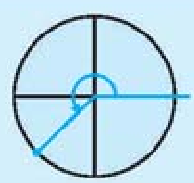
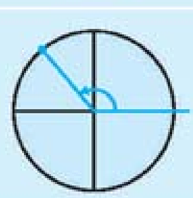
پاسخ:

زاویه	مساوی است با	نمایش روی دایره
$\frac{3\pi}{4}$	$\pi - \frac{\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	

مثال

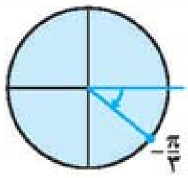
زوایای $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ را روی دایره نمایش دهید.

پاسخ:

زاویه	مساوی است با	نمایش روی دایره
$\frac{2\pi}{3}$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	
$\frac{4\pi}{3}$	$\pi + \frac{\pi}{3}$	

مثال **زوایای منفی را چگونه روی دایره می‌توان نشان داد؟**

پاسخ: زوایای مثبت را از مبدأ با جهت پادساعتگرد (ضدگردش عقربه‌های ساعت) و زوایای منفی را از مبدأ با جهت ساعتگرد (موافق گردش عقربه‌های ساعت) نمایش می‌دهیم. به طور مثال زاویهٔ $-\frac{\pi}{3}$ به صورت روبه‌رو نمایش داده می‌شود.



محاسبهٔ اندازهٔ طول کمان

می‌دانیم طول کمان یک رادیان برابر r (شعاع دایره) است اگر طول کمان زاویه θ (برحسب رادیان) برابر S باشد تناسب زیر حاصل می‌شود:

رادیان	طول کمان
۱	r
θ	s

$\Rightarrow \theta = \frac{s}{r}$ (s: طول کمان، r: شعاع دایره، θ: زاویه بر حسب رادیان)

مثال **در یک دایره طول کمان دو برابر شعاع است زاویه را بر حسب رادیان و درجه بیابید.**

پاسخ: در این مثال $s = ۲r$ طبق رابطهٔ $\theta = \frac{s}{r}$ داریم:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{۲r}{r} = ۲$$

پس زاویه ۲ رادیان است حال طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ زاویه را برحسب درجه محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{۲}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۳۶۰}{\pi}$$

با فرض $\pi \sim ۳/۱۴$ داریم:

$$D \sim ۱۱۴/۶^\circ$$

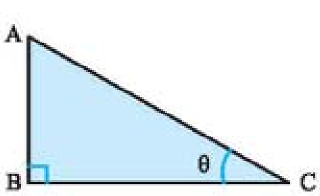
مثال **در یک دایره با شعاع ۲ طول کمان برابر ۳ می‌باشد زاویهٔ ایجاد شده برحسب رادیان را محاسبه کنید.**

پاسخ: چون $\theta = \frac{s}{r}$ پس:

$$\theta = \frac{۳}{۲} = ۱/۵\text{Rad}$$

یادآوری (نسبت‌های مثلثاتی در مثلث):

در مثلث ABC نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شود:



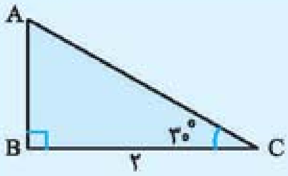
$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$tg\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{BC}$$

$$cotg\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{BC}{AB}$$

مثال در شکل زیر اندازهٔ ضلع AB را بیابید.



پاسخ: طبق رابطهٔ $tg30^{\circ}$ داریم:

$$tg30^{\circ} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مختصات نقطهٔ دوران یافته

در یک دایره به مرکز (a,b) و شعاع R نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم اگر نقطهٔ A به اندازهٔ α روی دایره در جهت پادساعتگرد حرکت کند مختصات نقطهٔ جدید (x,y) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = a + R\cos\alpha \\ y = b + R\sin\alpha \end{cases}$$

مثال نقطهٔ $A(2,1)$ روی دایره‌ای به مرکز $O(0,1)$ واقع است. اگر نقطهٔ A در جهت عکس چرخش عقربه‌های ساعت به اندازهٔ 90° روی دایره حرکت کند مختصات جدید نقطهٔ A را بیابید.

پاسخ: چون $a = 0$ و $b = 1$ و $\alpha = 90^{\circ}$ در نتیجه:

$$x = a + R\cos90^{\circ} = 0$$
$$y = b + R\sin90^{\circ} = 1 + R$$

حال باید شعاع دایره را بیابیم چون اندازهٔ OA برابر R است پس:

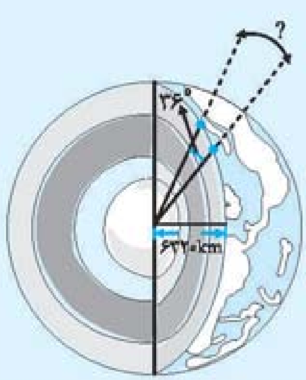
$$R = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2} = 2$$

درنتیجه مختصات جدید $(0,3)$ است.

فاصله ژئودزیک

فاصله دو نقطه از کرهٔ زمین که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل زیر طول کمانی از دایرهٔ گذرنده از آن دو نقطه است. که در اصطلاح فنی فاصلهٔ ژئودزیک دو نقطه گفته می‌شود.

مثال با توجه به شکل زیر فاصلهٔ ژئودزیک بین دو نقطهٔ داده شده را محاسبه کنید.



پاسخ: ابتدا زاویه را برحسب رادیان می‌یابیم:

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{5}$$

چون $s = r\theta$ پس:

$$S = \frac{\pi}{5} \times 6320 = 1264\pi$$

با فرض $\pi \sim 3/14$ نتیجه می‌شود:

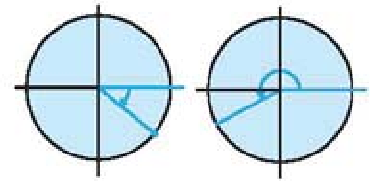
$$S \sim 3968Km$$

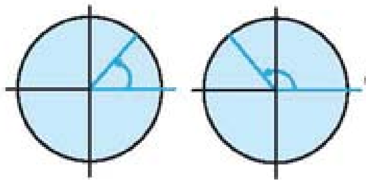
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

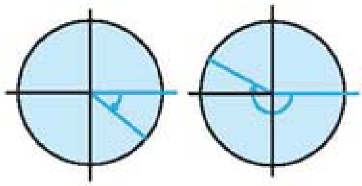
۱ اندازهٔ زاویهٔ نیم صفحهٔ (۱۸۰°) برحسب رادیان کدام است؟ (کتاب درسی)

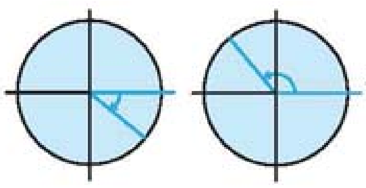
۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

۲ در کدام گزینه زاویه‌های $\frac{۵\pi}{۶}$ و $-\frac{\pi}{۶}$ به درستی نمایش داده شده است؟ (کتاب درسی)

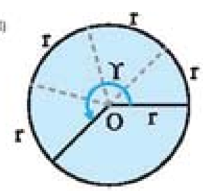
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳ با توجه به شکل زیر اندازهٔ زاویهٔ γ چقدر است؟ (کتاب درسی)



۱) ۳rad ۲) ۴rad ۳) ۵rad ۴) ۶rad

۴ مجموع دو زاویه برابر با ۹۰° است. اگر یکی از زاویه‌ها $\frac{\pi}{۳}$ rad باشد، آنگاه اندازه زاویهٔ دیگر برحسب رادیان چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

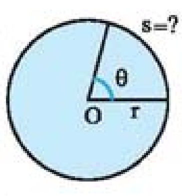
۵ مجموع دو زاویه ۲ رادیان و تفاضل آن‌ها ۱ رادیان است، زاویه کوچک‌تر چند درجه است؟

۱) $\frac{۹۰}{\pi}$ ۲) $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ۳) $\frac{۲۷۰}{\pi}$ ۴) $\frac{۳۶۰}{\pi}$

۶ دو زاویه A و B متمم یکدیگرند و اندازه زاویه A برابر $\frac{۲}{۵}$ اندازه مکمل زاویه B است. زاویه B چند درجه است؟

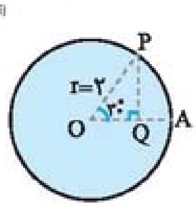
۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

۷ در دایرهٔ زیر اندازهٔ کمان (S) با طول شعاع (r) برابر است. θ تقریباً چند درجه است؟ (کتاب درسی)



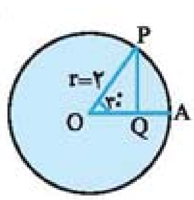
۱) ۶۱° ۲) ۵۹° ۳) ۵۷° ۴) ۵۵°

۸ در مثلث OPQ ، اندازهٔ ضلع PQ کدام است؟ (کتاب درسی)



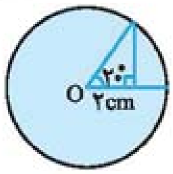
۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۹ در مثلث OPQ ، طول کمان $\widehat{PA}$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $\frac{\pi}{۳}$cm ۲) $\frac{\pi}{۶}$cm ۳) $\frac{\pi}{۴}$cm ۴) $\frac{\pi}{۸}$cm

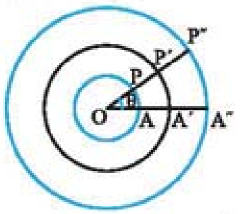
۱۰ در شکل زیر، زاویه α برحسب رادیان و طول کمان $\widehat{AB}$ به ترتیب کدام‌اند؟ (کتاب درسی)



۱) $\frac{۳\pi}{۹},\frac{\pi}{۹}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۹},\frac{\pi}{۷}$

۳) $\frac{۲\pi}{۹},\frac{\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۹},\frac{\pi}{۷}$

۱۱ در شکل زیر شعاع سه دایره به ترتیب r و ۲r و ۳r می‌باشند. کدام گزینه صحیح است؟ (کتاب درسی)



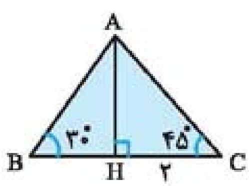
۱) $\frac{\widehat{P''A''}}{۳}=\frac{\widehat{P'A'}}{۲}=\widehat{PA}$ ۲) $\widehat{P''A''}=\frac{\widehat{P'A'}}{۲}=\frac{\widehat{PA}}{۳}$

۳) $\widehat{P''A''}=\widehat{P'A'}=\widehat{PA}$ ۴) بستگی به زاویهٔ θ دارد.

۱۲ در دایره‌ای به شعاع r سانتی‌متر، توسط زاویه θ، کمانی به طول $\frac{۳}{۲}$ برابر شعاع دایره بریده می‌شود. مقدار θ چند درجه است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹۰}{\pi}$ ۴) $\frac{۲۷۰}{\pi}$

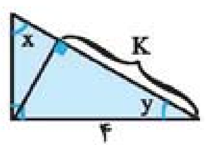
۱۳ در شکل مقابل، مقدار BH کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۴ در شکل زیر، مقدار K کدام است؟



۱) $۴\sin x$ ۲) $۲\sin y$

۳) $\frac{۱}{۴}\sin y$ ۴) $\frac{۱}{۴}\sin x$

۱۵ نقطه $A(۲,-۱)$ بر روی دایره‌ای به مرکز $(۰,-۱)$ قرار دارد. اگر نقطه A در جهت چرخش عقربه ساعت به اندازهٔ ۳۰° روی دایره حرکت کند. مختصات جدید آن کدام است؟

۱) $(-۲,\sqrt{۳})$ ۲) $(-\sqrt{۳},-۲)$ ۳) $(-\sqrt{۳},-۱)$ ۴) $(\sqrt{۳},-۲)$

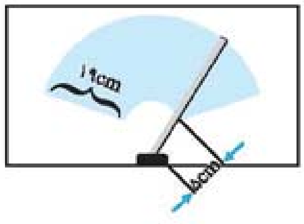
۱۶ حلقه فلزی به شعاع ۱۸ سانتی‌متر را از دو نقطه برش داده‌ایم، به طوری که زاویه مرکزی روبه‌روی کمان جدا شده ۵۰ درجه است. با فرض $\pi = ۳/۱۴$ طول کمان جدا شده چند سانتی‌متر است؟

۱) ۳۱۴ ۲) ۱۵/۷ ۳) ۷/۸۵ ۴) ۲۱/۹۸

۱۷ متحرکی روی دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر در جهت مثلثاتی حرکت می‌کند، اگر مسافت طی شده روی محیط دایره توسط این متحرک برابر ۶ سانتی‌متر باشد، آنگاه مقدار زاویه‌ای که این متحرک چرخیده، چند درجه است؟

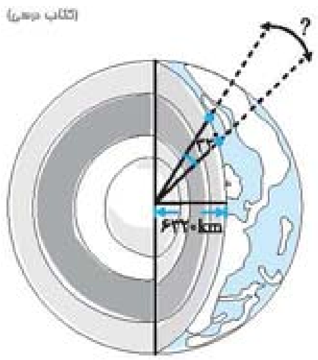
۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) $\frac{۵۴۰}{\pi}$ ۴) $\frac{۲۷۰}{\pi}$

۱۸ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه ۱۲۰° طی می‌کند، اندازه کمان برحسب رادیان کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۱۶π
۲) ۸π
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۱۹ در شکل زیر فاصله ژئودزیک بین دو نقطه داده شده از کره زمین چقدر است؟ (کتاب درسی)



۱) ۱۱۲۳ / ۵π
۲) ۱۱۲۴π
۳) ۱۱۲۴ / ۵π
۴) ۱۱۲۵π

۲۰ پاندول ساعتی به طول ۱۲ سانتی‌متر، در هر ثانیه ۲۰ درجه نوسان می‌کند، با فرض (۳ / ۱۴ = π) طول کمانی که این پاندول در مدت ۱ ثانیه طی می‌کند، تقریباً چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴ / ۱۸   ۲) ۳ / ۲۸   ۳) ۵ / ۱۸   ۴) ۲ / ۲۷

۲۱ طول عقربه دقیقه شمار ۱۵cm و طول عقربه ساعت شمار ۱۰cm است. اگر ساعت ′۲۰ : ۲ باشد، ارتفاع نوک عقربه ساعت شمار از محور افقی گذرا از مرکز ساعت چقدر است؟

۱) ۵   ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۱۰\sin ۲۰^\circ$ ۴) $۱۰\cos ۲۰^\circ$

۲۲ اگر عقربه دقیقه شمار به اندازه زاویه ۶ / ۵π رادیان بچرخد، عقربه ساعت شمار چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۱) °۷۸ / ۵   ۲) °۹۷ / ۵   ۳) °۱۰۷ / ۵   ۴) °۱۱۷ / ۵

۲۳ در چرخ و فلکی به شعاع ۲۰ متر، که پایین‌ترین کابین آن در ارتفاع ۱ متری سطح زمین قرار دارد، پس از طی زاویه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان، ارتفاع کابین ذکر شده از سطح زمین چقدر است؟

۱) ۹   ۲) ۱۰   ۳) ۱۱   ۴) ۱۲

۲۴ در شکل زیر، یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های ۱۰cm و ۲ / ۵cm را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان می‌چرخد، قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟ (کتاب درسی)

۱) π   ۲) ۲π   ۳) ۳π   ۴) $\frac{\pi}{۲}$

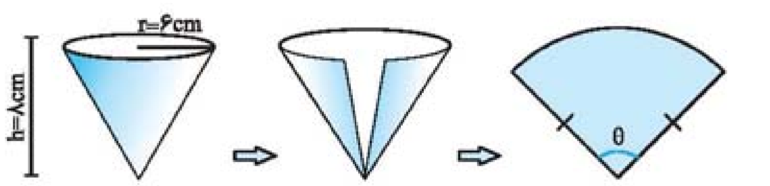
۲۵ در مثلث ABC ، $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$ و $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{C}}$ ، کوچک‌ترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

۱) ۳۰   ۲) ۳۵   ۳) ۴۰   ۴) ۴۵

۲۶ یک چرخ و فلک ۴۰ کابین دارد که از ۱ تا ۴۰ شماره‌گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در کابین شماره ۳ نشسته باشید، پس از دورانی برابر $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ رادیان در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیرد؟ (فاصله کابین‌ها از هم یکسان است.)

۱) ۱۵   ۲) ۱۶   ۳) ۱۷   ۴) ۱۸

۲۷ شکل فضایی و گسترده یک مخروط در شکل زیر داده شده است. شعاع قاعده r = ۶cm می‌باشد. زاویهٔ روبه‌روی قطاع در شکل سوم کدام است؟ (کتاب درسی)



شکل اول   شکل دوم   شکل سوم

۱) π   ۲) ۱ / ۱π   ۳) ۱ / ۲π   ۴) ۱ / ۳π

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

درسال گذشته مقدار نسبت های مثلثاتی را برای برخی زوایای تند (مانند ۳۰° و ۴۵° و ۶۰°) و نیز زوایای مرزی (۰° و ۹۰° و ۱۸۰° و ۲۷۰° و ۳۶۰°) آموختیم. به عنوان یادآوری در جدول زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

زاویه θ / نسبت	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

همچنین علامت نسبت های مثلثاتی در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی را یاد گرفتیم که به شرح نشان داده شده در جدول زیر هستند.

زاویه θ / علامت نسبت	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

مثال

اگر $\cos\alpha + \sqrt{\tan\alpha} = ۰$ آنگاه انتهای کمان α در کدام دایرهٔ مثلثاتی واقع است؟

پاسخ: چون $\cos\alpha = -\sqrt{\text{ta}\alpha}$ پس $\tan\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی است درنتیجه انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم واقع است.

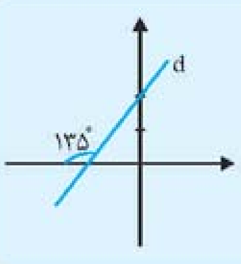
معادلهٔ خط

اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطهٔ دلخواه روی خط d باشد و خط d با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد، شیب خط برابر $m = \tan\alpha$ و معادلهٔ خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

مثال

معادلهٔ خط d را بنویسید.



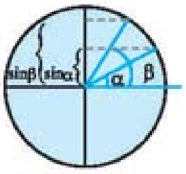
پاسخ: چون خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد $(۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ = ۴۵^\circ)$ پس:

$$m = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

حال نقطهٔ $(۰,۲)$ یک نقطهٔ دلخواه روی خط d است پس:

$$y - ۲ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y = x + ۲$$

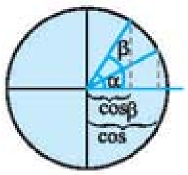
مقایسهٔ نسبت‌ها در ربع اول



در ربع اول با افزایش زاویه مقدار سینوس زاویه افزایش می‌یابد دقّت کنید:

یعنی اگر $\beta > \alpha$ آنگاه $\sin\alpha < \sin\beta$

مثال **کدام‌یک از مقادیر $\sin ۱۰^\circ$ و $\sin ۷۰^\circ$ بزرگ‌تر است؟ چرا؟**



چون $۷۰^\circ > ۱۰^\circ$ پس $\sin ۱۰^\circ < \sin ۷۰^\circ$.

حال در ربع اول با افزایش زاویه مقدار کسینوس زاویه کاهش می‌یابد دقّت کنید:

یعنی اگر $\beta > \alpha$ آنگاه $\cos\alpha > \cos\beta$.

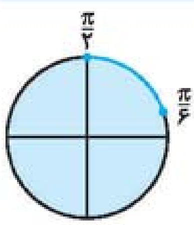
مثال **مقدار عددی عبارت را $|\cos ۳۰^\circ - \cos ۴۰^\circ| + |\cos ۶۰^\circ - \cos ۴۰^\circ|$ بیابید.**

پاسخ: چون $۶۰^\circ > ۴۰^\circ > ۳۰^\circ$ پس $\cos ۳۰ > \cos ۴۰ > \cos ۶۰$ درنتیجه:

$$\text{عبارت} = \cos ۳۰ - \cancel{\cos ۴۰} + \cancel{\cos ۴۰} - \cos ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲}$$

مثال **اگر $\sin x = ۲m - ۱$ و $\frac{\pi}{۶} \le x \le \frac{\pi}{۲}$ حدود m را بیابید.**

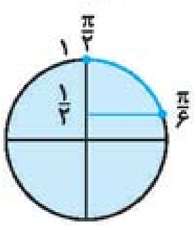
پاسخ: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی ابتدا $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۲}$ را روی دایره مشخص می‌کنیم:



تصویر محدودهٔ مشخص شده را روی محور سینوس‌ها نمایش می‌دهیم:

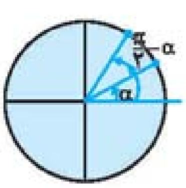
پس $\frac{۱}{۲} \le \sin x \le ۱$ چون $\sin x = ۲m - ۱$ درنتیجه:

$$\frac{۱}{۲} \le ۲m - ۱ \le ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۴} \le m \le ۱$$



نسبت‌های مثلثاتی متمم

زوایای α و $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ متمم یکدیگرند چون مجموع دو زاویه برابر $\frac{\pi}{۲}$ (یا ۹۰°) می‌باشد.



بین نسبت‌های مثلثاتی α و $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ رابطهٔ زیر برقرار است:

نسبت α	نسبت $(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$
$\cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$
$\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$
$\cot\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$
$\tan\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$

مثال

اگر $2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos\alpha=2$ مقدار عددی $\cos\alpha$ را بیابید.

پاسخ: چون $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ پس:

$$4\cos\alpha=2\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

مثال

اگر $\sin(\frac{\pi}{8}-a)=\frac{1}{3}$ مقدار عددی $\sin(\frac{3\pi}{8}+a)$ را بیابید.

پاسخ: فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{8}-a=\alpha$ و $\frac{3\pi}{8}+a=\beta$. با جمع α و β داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{8}-a+\frac{3\pi}{8}+a=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

پس در این مثال $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ مقدار عددی $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ خواسته شده است:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

طبق رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مقدار $\cos\alpha$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی قرینه

نسبت‌های α	نسبت‌های $(-\alpha)$
$-\sin\alpha$	$\sin(-\alpha)$
$\cos\alpha$	$\cos(-\alpha)$
$-\tan\alpha$	$\tan(-\alpha)$
$-\cot\alpha$	$\cot(-\alpha)$

مثال

اگر $\sin(\alpha-\frac{\pi}{5})=\frac{1}{2}$ مقدار عددی $\sin(\frac{\pi}{5}-\alpha)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\sin(\frac{\pi}{5}-\alpha)=\sin(-\alpha-\frac{\pi}{5})=-\sin(\alpha-\frac{\pi}{5})=\frac{-1}{2}$$

مثال

اگر $\cos(\alpha+80^\circ)=\frac{1}{3}$ مقدار عددی $\sin(\alpha-10^\circ)$ را بیابید.

پاسخ: واضح است که $(\alpha+80^\circ)+(10^\circ-\alpha)=90^\circ$، بنابراین:

$$\cos(\alpha+80^\circ)=\sin(10^\circ-\alpha)$$

درنتیجه $\sin(10^\circ-\alpha)=\frac{1}{3}$، پس $\sin(\alpha-10^\circ)=\frac{-1}{3}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

نسبت های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2KT$ رادیان

نسبت‌های مثلثاتی $2k\pi \pm \alpha$	نسبت‌های مثلثاتی α
$\sin(2k\pi + \alpha)$	$\sin\alpha$
$\cos(2k\pi + \alpha)$	$\cos\alpha$
$\tan(2k\pi + \alpha)$	$\tan\alpha$
$\cot(2k\pi + \alpha)$	$\cot\alpha$
$\sin(2k\pi - \alpha)$	$-\sin\alpha$
$\cos(2k\pi - \alpha)$	$\cos\alpha$
$\tan(2k\pi - \alpha)$	$-\tan\alpha$
$\cot(2k\pi - \alpha)$	$-\cot\alpha$

مثال

اگر $\text{tag}\alpha = \frac{1}{2}$ مقدار عددی عبارت $\frac{\sin(2\pi - \alpha) + \cos(4\pi + \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 2\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا نسبت مثلثاتی را بر حسب نسبت مثلثاتی α می‌یابیم:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(4\pi + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

حال با جایگذاری در کسر عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{-\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha + 2\sin\alpha}$$

اگر صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم کنیم آنگاه:

$$\text{عبارت} = \frac{-\tan\alpha + 1}{1 + 2\tan\alpha}$$

با جایگذاری $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ مقدار عبارت به‌دست می‌آید:

$$\text{عبارت} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 + 1} = \frac{1}{4}$$

نسبت‌های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$

نسبت‌های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$	نسبت‌های مثلثاتی α
$\sin(\pi - \alpha)$	$\sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha)$	$-\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha)$	$-\tan\alpha$
$\cot(\pi - \alpha)$	$-\cot\alpha$
$\sin(\pi + \alpha)$	$-\sin\alpha$
$\cos(\pi + \alpha)$	$-\cos\alpha$
$\tan(\pi + \alpha)$	$\tan\alpha$
$\cot(\pi + \alpha)$	$\cot\alpha$

مثال اگر $\cos 20 = a$ آنگاه عبارت $\sin 70 - 2\sin 110 + 3\cos 200$ را بر حسب a بیابید.

پاسخ: چون: $70 = 90 - 20$ پس:

$$\sin 70 = \sin(\overset{\frac{\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{90}} - 20) = \cos 20$$

از طرفی $110 = 90 + 20$ پس:

$$\sin 110 = \sin(\overset{\frac{\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{90}} + 20) = \cos 20$$

همچنین $200 = 180 + 20$ درنتیجه:

$$\cos 200 = \cos(\overset{\pi}{\overset{\uparrow}{180}} + 20) = -\cos 20$$

نهایتاً عبارت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\text{عبارت} = \cos 20 - 2\cos 20 - 3\cos 20 = -4\cos 20 = -4a$$

نتیجه‌گیری کلی

الف به طور کلی برای $n\pi + \theta$ نسبت‌های مثلثاتی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} \sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta \\ \cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta \\ \tan(n\pi + \theta) = \tan\theta \\ \cot(n\pi + \theta) = \cot\theta \end{cases}$$

مثال ساده شده عبارت $\sin(5\pi + \theta)$ را بنویسید:

پاسخ: چون $(-1)^5 = -1$ درنتیجه:

$$\sin(5\pi + \theta) = (-1)^5 \sin\theta$$

$$\sin(5\pi + \theta) = -\sin\theta$$

ب به طور کلی برای $n\pi - \theta$ نسبت‌های مثلثاتی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} \sin(n\pi - \theta) = (-1)^{n+1} \sin\theta \\ \cos(n\pi - \theta) = (-1)^n \cos\theta \\ \tan(n\pi - \theta) = -\tan\theta \\ \cot(n\pi - \theta) = -\cot\theta \end{cases}$$

مثال ساده شدهٔ عبارت $\cos(11\pi - \theta)$ را بنویسید.

پاسخ: چون $\cos(11\pi - \theta) = (-1)^{11}\cos\theta$ درنتیجه:

$$\cos(11\pi - \theta) = -\cos\theta$$

مثال ساده شدهٔ عبارت $\tan(19\pi - \theta)$ برابر چیست؟

پاسخ: واضح است که برابر $-\tan\theta$ است.

ج به طور کلی نسبت‌های مثلثاتی $\frac{n\pi}{2} + \alpha$ که n یک عدد فرد است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \sin(\frac{n\pi}{2} + \alpha) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cos\alpha \\ \cos(\frac{n\pi}{2} + \alpha) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \sin\alpha \\ \tan(\frac{n\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha \\ \cot(\frac{n\pi}{2} + \theta) = -\tan\alpha \end{cases}$$

تذکر: $[\;]$ علامت جزء صحیح است.

مثال

ساده شدهٔ عبارت $\cos(\frac{11\pi}{2}+\alpha)$ را به‌دست آورید.

$$\cos(\frac{11\pi}{2}+\alpha)=(-1)^{\left[\frac{11}{2}\right]+1}\sin\alpha=(-1)^{6}\sin\alpha=\sin\alpha$$

د) به طور کلی نسبت‌های مثلثاتی $\frac{n\pi}{2}-\alpha$ که n یک عدد فرد است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}\sin(\frac{n\pi}{2}-\alpha)=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cos\alpha\\ \cos(\frac{n\pi}{2}-\alpha)=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sin\alpha\\ \tan(\frac{n\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\\ \cot(\frac{n\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha\end{cases}$$

مثال

اگر $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ مقدار عددی $\frac{\sin(5\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(5\pi+\alpha)}{\cos(\frac{11\pi}{2}+\alpha)+\cos(\alpha-5\pi)}$ را بیابید.

پاسخ: طبق رابطهٔ $\sin(\frac{n\pi}{2}-\alpha)=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cos\alpha$ داریم:

$$\sin(\frac{5\pi}{2}-\alpha)=(-1)^{\left[\frac{5}{2}\right]}\cos\alpha=\cos\alpha$$

همچنین طبق رابطهٔ $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^{n}\sin\alpha$ داریم:

$$\sin(5\pi+\alpha)=(-1)^{5}\sin\alpha=-\sin\alpha$$

چون $\cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\sin\alpha$ درنتیجه:

$$\cos(\frac{11\pi}{2}+\alpha)=(-1)^{\left[\frac{11}{2}\right]+1}\sin\alpha=\sin\alpha$$

حال می‌دانیم:

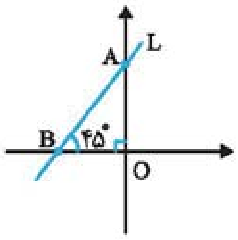
$$\cos(\alpha-5\pi)=\cos(5\pi-\alpha)=(-1)^{5}\cos\alpha=-\cos\alpha$$

با جایگذاری در کسر عبارت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=-1$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

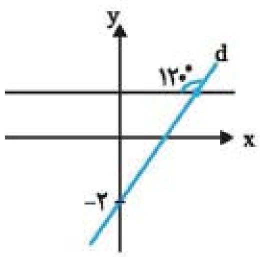
۲۸ در شکل زیر، معادله خط L به صورت $۲x + ay + ۳ = ۰$ است اندازهٔ مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۹ با توجه به شکل زیر، خط d از کدام نقطه عبور می‌کند؟



۱) $(\sqrt{۳}, -۱)$

۲) $(\sqrt{۳}, -۵)$

۳) $(۲\sqrt{۳}, ۴)$

۴) $(۲\sqrt{۳}, -۸)$

۳۰ کدام یک از خطوط زیر با جهت مثبت محور xها زاویه °۴۵ می‌سازد؟

۱) $۲x + ۲y - ۵ = ۰$ ۲) $۲x = ۲(۵ + \frac{y}{۲})$

۳) $y + x = ۳$ ۴) $\sqrt{۳}y = \sqrt{۳}x + ۳$

۳۱ مقدار عددی کدام گزینه از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $\cos ۲۰$ ۲) $\cos ۴۰$ ۳) $\cos ۵۰$ ۴) $\cos ۷۰$

۳۲ کدام رابطه درست است؟

۱) $\sin ۵۰ < \sin ۴۰$ ۲) $\cos ۵۰ < \cos ۴۰$

۳) $\tan ۵۰ < \tan ۴۰$ ۴) $\cot ۴۰ < \cot ۵۰$

۳۳ در صورتی که $\cos\alpha(۱ + \tan^۲\alpha) < ۰$ ، انتهای کمان α در کدام ناحیه (نواحی) مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) اول و سوم ۴) اول و چهارم

۳۴ با فرض $\frac{۵\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۳}$ و $\sin x = \frac{۳ - m^۲}{۳ + m^۲}$ مقادیر m در کدام فاصله هستند؟

۱) $|m| < \sqrt{۳}$ ۲) $|m| < \sqrt{۲}$ ۳) $|m| < ۱$ ۴) $|m| < \frac{۱}{۲}$

۳۵ حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{۲} + \frac{|\sin x - \cos x|}{۲}$ که در آن $x \in \left[۰, \frac{\pi}{۴}\right]$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x + \cos x$ ۴) $-\sin x + \cos x$

۳۶ کدام رابطهٔ زیر صحیح است؟

۱) $\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\cos\alpha$ ۲) $\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$

۳) $\cos(\pi + \alpha) = \cos\alpha$ ۴) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

۳۷ چه تعداد از تساوی‌های زیر صحیح است؟ (کتاب درسی)

الف) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = ۰$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos\theta = ۱$

ج) $\cos(۷) = \cos(۷)$

د) $\tan(\pi - \theta) + \tan\pi - \tan\theta$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸ خلاصه شده عبارت $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\pi+\alpha)+\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\sin 2\alpha$
۲) $\sin 2\alpha$
۳) $\cos 2\alpha$
۴) صفر

۳۹ حاصل $\tan\frac{10\pi}{3}+\cos(-\frac{23\pi}{4})$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$
۴) $\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

۴۰ کمان α در موقعیت استاندارد مثلثاتی و انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی است. اگر $\sin\alpha = 0/8$، مقدار $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-0/6$
۲) $1/2$
۳) $-1/2$
۴) صفر

۴۱ اگر $\cos 20^\circ = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\sin(-250^\circ)-\cos 290^\circ+\sin 880^\circ$ کدام است؟

۱) $0/24$
۲) $0/25$
۳) $0/32$
۴) $0/42$

۴۲ حاصل عبارت $2\cos(-\frac{125\pi}{4})+3\tan(\frac{125\pi}{4})+4\cot(-\frac{125\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}-1$
۲) $-\sqrt{2}+1$
۳) $\sqrt{2}-1$
۴) $\sqrt{2}+1$

۴۳ اگر $\tan\alpha = \frac{2}{3}$، مقدار عبارت $\dfrac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(3\pi+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\alpha-\pi)}$ کدام است؟

۱) 5
۲) 1
۳) -3
۴) -4

۴۴ از تساوی $\dfrac{2\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=2$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) -2
۲) $-1/5$
۳) 2
۴) $1/5$

۴۵ مقدار عددی عبارت $y=\dfrac{3\sin 7x+5\cos 3x}{3\sin 7x+\cos 3x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{20}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) 3
۳) 2
۴) $\frac{1}{2}$

۴۶ اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ باشد، حاصل $\dfrac{\sin 160^\circ-\cos 200^\circ}{\cos 110^\circ+\sin 70^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$
۲) $\frac{15}{8}$
۳) $\frac{17}{8}$
۴) $\frac{31}{16}$

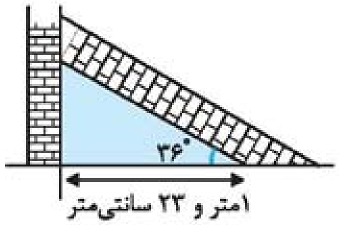
۴۷ حاصل عبارت $\dfrac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ کدام است؟ (هماهنگ)

۱) $-\frac{16}{9}$
۲) $-\frac{9}{16}$
۳) $\frac{9}{16}$
۴) $\frac{16}{9}$

۴۸ اگر $\sin x.\cos x > 0$ باشد، کدام گزینه زیر همواره صحیح است؟

۱) $\sin(x+\frac{\pi}{2})\cos(x+\frac{\pi}{2}) > 0$
۲) $\sin(x+\frac{\pi}{2})\cos(x-\frac{\pi}{2}) < 0$
۳) $\sin(x-\frac{\pi}{2})\cos(x-\frac{\pi}{2}) > 0$
۴) $\sin(x-\frac{\pi}{2})\cos(x+\frac{\pi}{2}) > 0$

۴۹ مطابق شکل روبه‌رو، نردبانی را به دیوار تکیه داده‌ایم. طول نردبان چند متر است؟ $(\sin 54^\circ = 0/82)$



۱) ۱/۲۵

۲) ۱/۳۰

۳) ۱/۴۵

۴) ۱/۵۰

۵۰ حاصل $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{8\pi}{9}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) صفر

۴) $-\frac{1}{2}$

۵۱ معادله خطی که با جهت مثبت محور xها زاویه 120° ساخته و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند، کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

۲) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳) $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

۴) $y = -\sqrt{3}x + 2$

۵۲ اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $(1,3]$

۲) $(0,2)$

۳) $(2,3]$

۴) $[3,4)$

۵۳ اگر $\tan(\frac{\pi}{12} - a) = 2$ باشد، مقدار عددی $\tan(\frac{5\pi}{12} + a)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۲-

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2}$

۵۴ در مثلث ABC رابطه $\tan(B+30)\tan(C+30) = 1$ برقرار است. آنگاه:

۱) $\hat{A} = 150^\circ$

۲) $\hat{A} = 120^\circ$

۳) $\hat{A} = 60^\circ$

۴) $\hat{A} = 30^\circ$

۵۵ حاصل عبارت $A = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \cdots + \log(\tan 89^\circ)$ چیست؟

۱) ۱

۲) صفر

۳) $\log \tan 1^\circ$

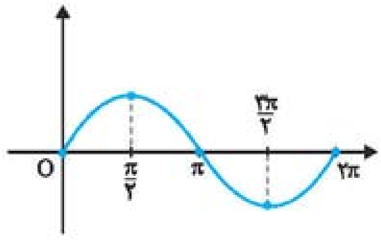
۴) تعریف نشده

درس سوم: توابع مثلثاتی

نمودار $y = \sin x$

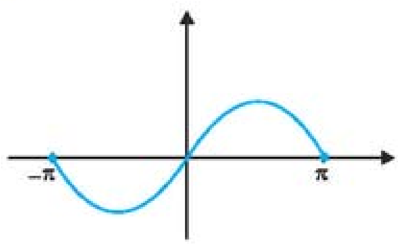
نمودار $y = \sin x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

و با همین نظم با فاصلهٔ ۲π شکل تکرار می‌شود.



مثال **نمودار $y = \sin x$ را در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.**

پاسخ:

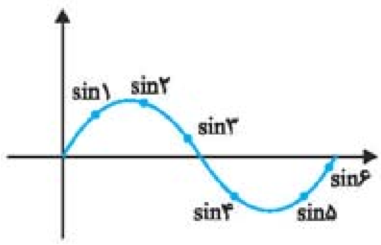


نمایش $\sin 1, \sin 2, \ldots$ روی منحنی $y = \sin x$

اگر ۱rad را برحسب درجه حساب کنیم طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود:

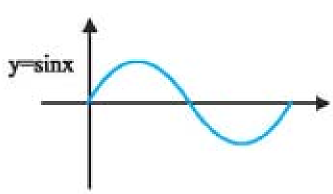
$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{۱}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰}{\pi}$$

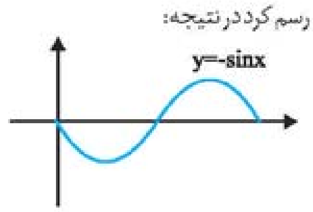
اگر $\pi \sim ۳/۱۴$ پس $D \sim ۵۷^\circ$ یعنی می‌توان $\sin ۱$ و $\sin ۲$ را روی منحنی $y = \sin x$ به صورت زیر نمایش داد:



نمودار $y = -\sin x$

برای رسم منحنی $-f$ براساس منحنی f کافی است که نمودار را نسبت به محور xها قرینه رسم کرد در نتیجه:





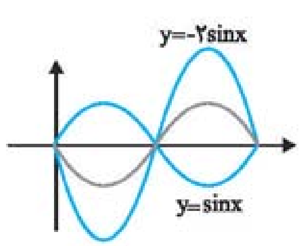
نمودار $y = K \sin x$

برای رسم منحنی Kf براساس منحنی کافی است که عرض منحنی را K برابر کرد. نقاط تلاقی و طول‌ها تغییری نمی‌کنند.

مثال **نمودارهای $y = -۲\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را رسم کنید.**

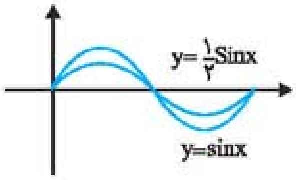
پاسخ: ابتدا رسم نمودار $y = -۲\sin x$:

منحنی $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم به دلیل علامت منفی شکل را نسبت به محور xها قرینه کرده و عرض آن را دو برابر می‌کنیم:



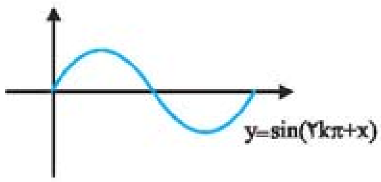
حال رسم منحنی $y = \frac{۱}{۲}\sin x$:

ابتدا منحنی $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم و عرض آن‌ها را نصف می‌کنیم:

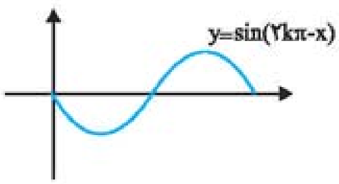


نمودارهای $y = \sin(۲k\pi \pm x)$

می‌دانیم نمودارهای $\sin(۲K\pi + x) = \sin x$ پس نمودار $y = \sin(۲K\pi + x)$ همان نمودار $y = \sin x$ است.

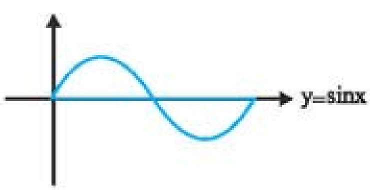


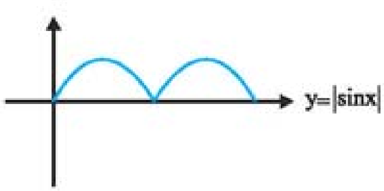
همچنین $\sin(۲K\pi - x) = -\sin x$ پس نمودار $y = \sin(۲K\pi - x)$ همان نمودار $y = -\sin x$ است.



نمودار $y = |\sin x|$

برای رسم نمودار $|f|$ براساس منحنی f ابتدا قسمت‌های بالای محور xها را نگه‌داشته سپس قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.





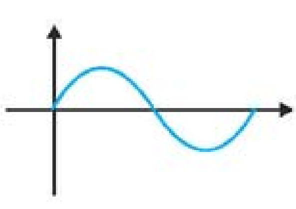
نمودار $y = \sin x + K$

برای رسم نمودار $f + K$ براساس منحنی f اگر $K > ۰$ باشد، به اندازهٔ K واحد شکل را به بالا منتقل می‌کنیم و اگر $K < ۰$ باشد آنگاه شکل را K واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

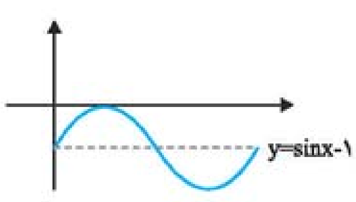
مثال **نمودار $y = \sin x - ۱$ را رسم کنید.**

پاسخ:

ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم:



حال با توجه به $y = \sin x - ۱$ شکل را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم:



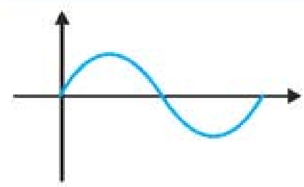
نمودار $y = \sin(x+K)$

برای رسم نمودار $f(x+K)$ براساس منحنی $f(x)$ اگر $K > ۰$ باشد به اندازهٔ K واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و $K < ۰$ به اندازهٔ K واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

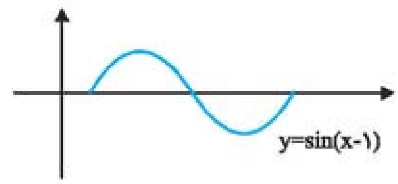
مثال **نمودار $y = \sin(x - ۱)$ را رسم کنید.**

پاسخ:

ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم:



حال شکل را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم (می‌دانیم ۱ رادیان تقریباً $۵۷°$ است).



نواحی یک به یکی نمودار $y = \sin x$

می‌دانیم یک منحنی یک به یک است وقتی هر خط موازی محور xها رسم شود منحنی را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

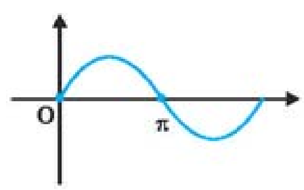
مثال **نمودار $y = \sin x$ در کدام بازه یک به یک است؟ چرا؟**

الف) $[۰, \pi]$

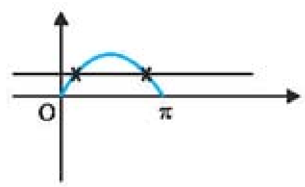
ب) $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$

پاسخ:

الف) ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم:

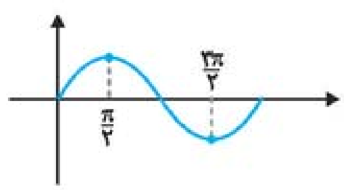


شکل در بازهٔ $[۰, \pi]$ به صورت زیر است:

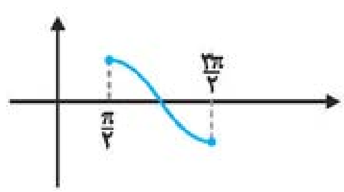


که یک به یک نیست چون خطی موازی محور xها رسم شده است که منحنی را در دو نقطه قطع کند.

ب)

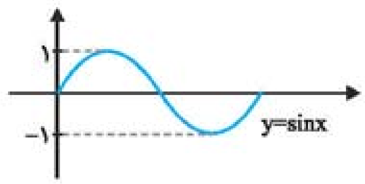


با رسم منحنی در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ مشخص می‌شود که تابع یک به یک است.

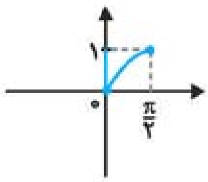


حدود تابع $y = \sin x$

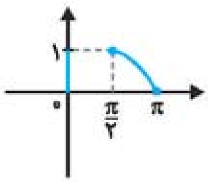
با توجه به نمودار $y = \sin x$ واضح است که $-1 \le \sin x \le 1$ حال در هر ربع می‌توان حدود sinx را محاسبه کرد:



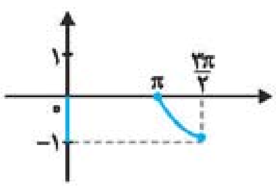
ربع اول ($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$): با توجه به شکل $y = \sin x$ در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ واضح است که $0 \le \sin x \le 1$.



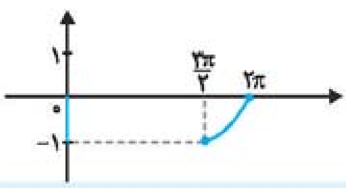
ربع دوم ($\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$): با توجه به شکل $y = \sin x$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ واضح است که $0 \le \sin x \le 1$.



ربع سوم ($\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$): واضح است که در این ربع $-1 \le \sin x \le 0$



ربع چهارم ($\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$): واضح است که در این ربع نیز $-1 \le \sin x \le 0$



مثال

اگر x در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد و $\sin x = \frac{2m+1}{3}$ حدود m را بیابید.

پاسخ: در ربع چهارم $-1 \le \sin x \le 0$ درنتیجه:

$$-1 \le \frac{2m+1}{3} \le 0 \Rightarrow -1 \le m \le \frac{-1}{2}$$

مثال

برد تابع $y = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}$ را تعیین کنید.

پاسخ:

فرض می‌کنیم $K = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}$ و حدود K را می‌یابیم:

$$2 - \sin x = 2K + K\sin x \Rightarrow (K+1)\sin x = 2 - 2K \Rightarrow \sin x = \frac{2 - 2K}{K+1}$$

چون $-1 \le \sin x \le 1$ یا $|\sin x| \le 1$ درنتیجه:

$$\left|\frac{2 - 2K}{K+1}\right| \le 1 \Rightarrow |2 - 2K| \le |K+1| \Rightarrow (3 - K)(1 - 3K) \le 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \le K \le 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \le kg \le 1$$

یادآوری:

$|a| \le |b| \Rightarrow (a+b)(a-b) \le ۰$

$(x-a)(x-b) \le ۰ \overset{a<b}{\Rightarrow} a \le x \le b$

تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin x = K$

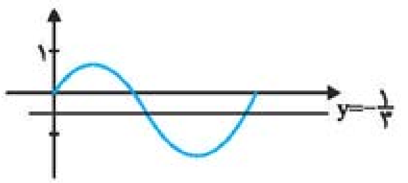
برای یافتن تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin x = K$ معادلهٔ $y = \sin x$ و خط $y = K$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تعداد نقاط تلاقی تعداد جواب‌های معادله را مشخص می‌کند.

مثال

معادلهٔ $\sin x = \frac{-۱}{۳}$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

پاسخ:

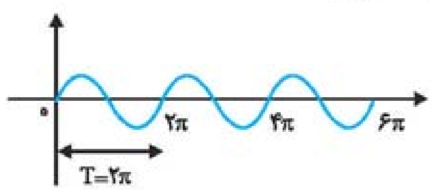
نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{-۱}{۳}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



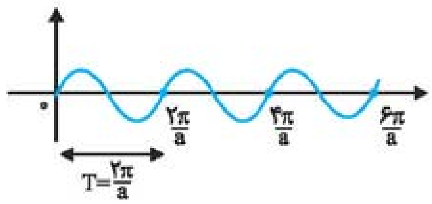
بین منحنی و خط دو تلاقی وجود دارد پس معادله دو جواب دارد.

دورهٔ تناوب $y = \sin x$:

با توجه به نمودار $y = \sin x$ واضح است که قسمت $[۰, ۲\pi]$ عیناً تکرار می‌شود طول این قسمت را دورهٔ تناوب منحنی گویند.



حال با رسم نمودار $y = \sin ax$ شکل به صورت زیر تغییر می‌کند:



پس در حالت $a > ۰$ دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{a}$ است.

مثال

دورهٔ تناوب $y = \sin ۳x$ را بیابید.

پاسخ: چون $a = ۳ > ۰$ پس دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{۳}$ است.

مثال

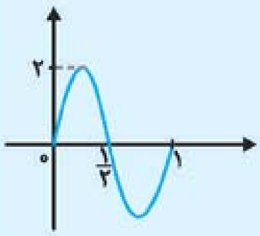
دورهٔ تناوب منحنی $y = \sin(-۲x)$ را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $\sin(-۲x) = -\sin ۲x$ چون $a = ۲ > ۰$ پس دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ است.

درس سوم

توابع مثلثاتی

مثال نمودار $y = a\sin(\pi bx)$ به صورت زیر داده شده است. مقادیر a و b را بیابید.



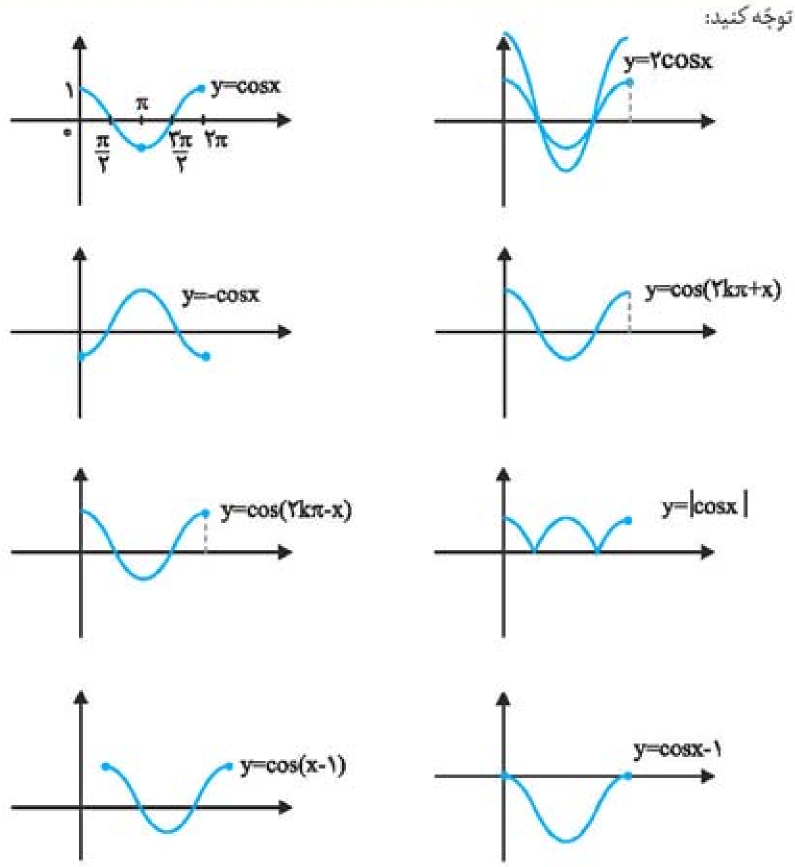
پاسخ: واضح است که $a = ۲$ چون بیشینهٔ تابع برابر ۲ است از طرفی دورهٔ تناوب تابع با توجه به شکل برابر ۱ است در نتیجه با فرض $b > ۰$ داریم:

$$\frac{۲\pi}{\pi b} = ۱ \Rightarrow b = ۲$$

همچنین $a = -۲$ و $b = -۲$ نیز جواب است.

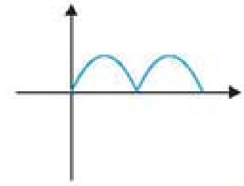
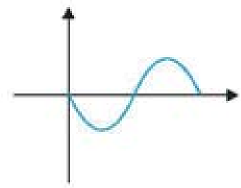
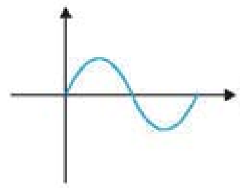
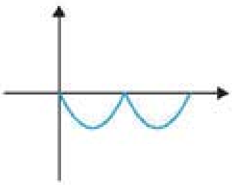
مثال برای نمودار $y = \cos x$ نیز می‌توان مشابه $y = \sin x$ بحث کرد؟

پاسخ: بلی، توجه کنید:

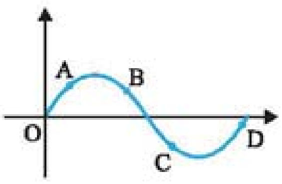


پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۶ نمودار $y = \sin x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (کتاب درسی)

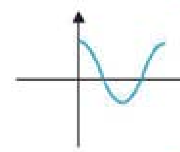
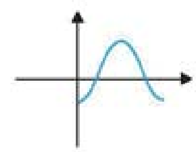
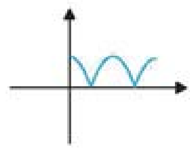
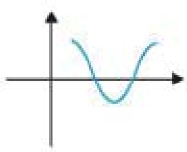
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵۷ کدام‌یک از نقاط زیر نمایش $\sin ۲$ در تابع $y = \sin x$ است؟ (کتاب درسی)



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۵۸ نمودار $y = \cos(x + ۲K\pi)$ که $K \in \mathbb{Z}$ و $۰ \le x \le ۲\pi$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

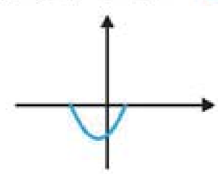
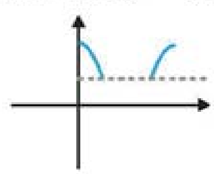
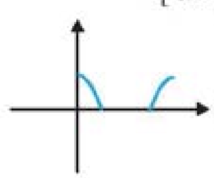
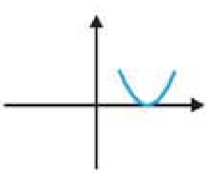
۵۹ نمودار $y = |\sin x|$ در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ از .... شکل یکسان تشکیل شده است؟ (کتاب درسی)

۱) دو
۲) سه
۳) چهار
۴) پنج

۶۰ نمودار $y = \cos x$ مفروض است، براساس این نمودار، نمودار $y = \cos(x - ۲) - ۱$ رسم می‌شود برای این منظور کافی است: (کتاب درسی)

۱) شکل را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا منتقل کنیم.
۲) شکل را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم.
۳) شکل را دو واحد به سمت راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم.
۴) شکل را دو واحد به سمت راست و یک واحد به پایین منتقل کنیم.

۶۱ کدام‌یک از نمودارهای زیر بخشی از تابع مثلثاتی $y = ۱ + |\cos x|$ دربازهٔ $[۰, ۲\pi]$ است؟ (کتاب درسی)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶۲ تابع $y = \cos x$ در کدام یک از بازه‌های زیر یک به یک است؟ (کتاب درسی)

۱) $[۰, \pi]$
۲) $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$
۳) $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$
۴) $\left[\frac{-۳\pi}{۲}, \frac{-\pi}{۲}\right]$

۶۳ معادلهٔ $\cos x = \frac{۱}{۳}$ در بازهٔ $[-۲\pi, ۴\pi]$ چند جواب دارد؟ (کتاب درسی)

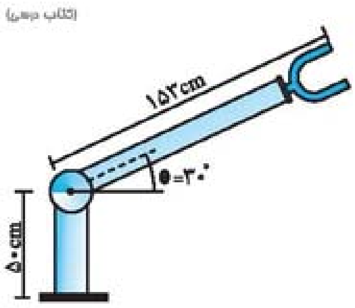
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۶۴ چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟ (کتاب درسی)

الف) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است.
ب) اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $-۱ < \cos x < ۰$ است.
پ) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر -۲ باشد.
ت) $x = \pi$ ریشه تابع $y = \cos x$ است.

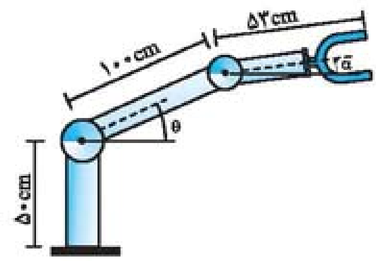
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۶۵ شکل زیر یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد، ارتفاع نوک گیره روبات از سطح زمین کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۱۲۶/۵
۲) ۷۶/۵
۳) ۱۸۰/۰۵
۴) ۲۰۳/۵

۶۶ اگر y ارتفاع نوک گیره از سطح زمین باشد کدام گزینه صحیح است؟



۱) $y = 50 + 100\cos\theta + 53\sin\alpha$

۲) $y = 50 + 100\sin\theta + 53\sin\alpha$

۳) $y = 100 + 50\sin\theta + 53\sin\alpha$

۴) $y = 100 + 53\sin\theta + 50\cos\alpha$

۶۷ بیشترین مقدار عبارت $\frac{14}{3+\sin x}$ برابر است با:

۱) ۱۴ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{14}{4}$

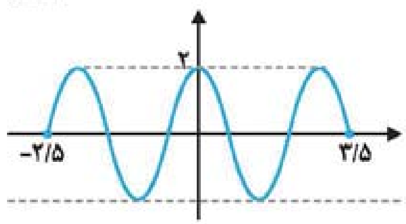
۶۸ برد تابع $f(x) = \frac{\cos x}{1+2\cos x}$ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{3}, 1)$ ۲) $\mathbb{R} - (\frac{1}{3}, 1)$ ۳) $[\frac{1}{3}, 1]$ ۴) $\mathbb{R} - [\frac{1}{3}, 1]$

۶۹ کمترین مقدار $y = 3 - 2\sin^2 x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{1}{2} + bx)$ است. a.b کدام است؟ (سراسری)



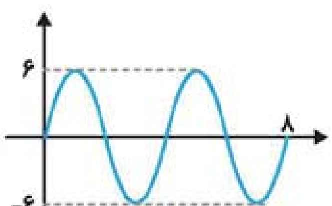
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

۷۱ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin bx$ است. ab کدام است؟



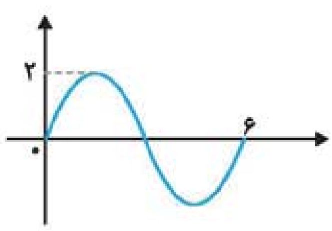
۱) π

۲) 2π

۳) 3π

۴) 4π

۷۲ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}$

۲) $\frac{5}{3}$

۳) $\frac{7}{3}$

۴) $\frac{8}{3}$

۷۳ ماکزیمم عبارت $y = 3\sin^2 x - 4\cos^2 x + 1$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۴ کمترین مقدار عبارت $\sin^4 x + \cos^2 x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۵ بیشترین مقدار تابع $y = (13 - \cos x)(1 + \cos x)$ برابر است با:

۱) ۲۴ ۲) ۱۳ ۳) ۴۹ ۴) ۲۸

۷۶ اگر $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

درسال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی آشنا شده‌اید که برای یادآوری در جدول زیر آمده است:

طرف دیگر تساوی	یک طرف تساوی
۱	$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$
$\dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$	$۱+\tan^۲\alpha$
$\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}$	$۱+\cot^۲\alpha$
$۱+۲\sin\alpha\cos\alpha$	$(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲$
$۱-۲\sin\alpha\cos\alpha$	$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲$
$۱-\cos^۲\alpha$	$\sin^۲\alpha$
$۱-\sin^۲\alpha$	$\cos^۲\alpha$
$\dfrac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$
$۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$	$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha$
$۱-۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$	$\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha$
$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲$	$(\tan\alpha+\cot\alpha)^۲$
$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha-۲$	$(\tan\alpha-\cot\alpha)^۲$

نسبت‌های $\alpha\pm\beta$:

حال با فرمول‌های نسبت‌های $\alpha+\beta$ آشنا شویم:

- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-۱}{\cot\beta+\cot\alpha}$

همچنین نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha-\beta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$
- $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+۱}{\cot\beta-\cot\alpha}$

مثال مقدار عددی $\sin 10 \cos 20 + \sin 20 \cos 10$ را بیابید.

پاسخ: طبق رابطهٔ $\sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a+b)$ داریم:

$$\sin 10 \cos 20 + \sin 20 \cos 10 = \sin(10+20) = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

مثال سادهٔ شدهٔ عبارت $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ را بیابید.

پاسخ: طبق اتحاد $\cos(a+b)$ و $\cos(a-b)$ داریم:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

از جمع دو رابطه مشخص می‌شود:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

مثال اگر $\tan a = \frac{1}{3}$ و $\tan b = \frac{1}{4}$ مقدار عددی $\tan(a+b)$ را بیابید.

پاسخ: طبق تساوی $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ نتیجه می‌شود:

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{7}{11}$$

مثال اگر α و β حاده باشند و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos\beta = \frac{12}{13}$ مقدار عددی $\sin(\alpha+\beta)$ را بیابید.

پاسخ: چون $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ پس با قرار دادن مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ داریم:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \sin\beta\cos\alpha$$

از روی $\sin\alpha$ عبارت $\cos\alpha$ را می‌یابیم:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xRightarrow{\sin\alpha = \frac{3}{5}} \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$
$$\xRightarrow{\alpha\ \text{حاده}} \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

از روی $\cos\beta$ مقدار $\sin\beta$ را می‌یابیم:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \xRightarrow{\cos\beta = \frac{12}{13}} \sin^2\beta + \frac{144}{169} = 1 \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{25}{169} \xRightarrow{\beta\ \text{حاده}} \sin\beta = \frac{5}{13}$$

حال به راحتی $\sin(\alpha+\beta)$ محاسبه می‌گردد:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$$

مثال

اگر $\tan(a+b)=\frac{۲}{۵}$ و $\tan(c-a)=\frac{۳}{۵}$ مقدار عددی $\tan(b+c)$ را بیابید.

پاسخ: فرض می‌کنیم $a+b=x$ و $c-a=y$ ابتدا $x+y$ را می‌یابیم:

$$x+y=a+b+c-a=b+c$$

پس صورت مسئله به صورت زیر تغییر می‌کند:

«اگر $\tan x=\frac{۲}{۵}$ و $\tan y=\frac{۳}{۵}$ آنگاه $\tan(x+y)$ را بیابید.»

به راحتی با استفاده از فرمول $\tan(x+y)$ مقدار نسبت را می‌یابیم:

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}=\frac{\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۶}{۲۵}}=\frac{۲۵}{۱۹}$$

مثال

عبارت $۱+\tan\frac{۳\pi}{۱۶}\cot\frac{\pi}{۸}$ را ساده کنید.

پاسخ: می‌دانیم $\tan\frac{۳\pi}{۱۶}=\frac{\sin\frac{۳\pi}{۱۶}}{\cos\frac{۳\pi}{۱۶}}$ همچنین $\cot g\frac{\pi}{۸}=\frac{\cos\frac{\pi}{۸}}{\sin\frac{\pi}{۸}}$ درنتیجه:

$$\text{عبارت}=۱+\frac{\cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{۳\pi}{۱۶}}{\sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{۳\pi}{۱۶}}$$

با مخرج مشترک‌گیری عبارت به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{۳\pi}{۱۶}+\cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{۳\pi}{۱۶}}{\sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{۳\pi}{۱۶}}$$

صورت برابر $\sin(\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۱۶})$ یا $\sin\frac{۵\pi}{۱۶}$ می‌گردد پس:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin\frac{۵\pi}{۱۶}}{\sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{۳\pi}{۱۶}}$$

چون $\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۱۶}+\frac{۵\pi}{۱۶}$ درنتیجه $\sin\frac{۵\pi}{۱۶}=\cos\frac{۳\pi}{۱۶}$ و درنهایت:

$$\text{عبارت}=\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۸}}$$

محاسبهٔ نسبت‌های ۱۵°:

چون $۱۵^\circ=۴۵^\circ-۳۰^\circ$ پس:

$$\sin ۱۵^\circ=\sin(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ-\sin ۳۰^\circ\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

همچنین طبق رابطهٔ $\cos(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\cos ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ+\sin ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ$ نتیجه می‌شود:

$$\cos ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

طبق رابطهٔ $\tan(۴۵-۳۰)=\dfrac{\tan ۴۵-\tan ۳۰}{۱+\tan ۴۵\tan ۳۰}$ داریم:

$$\tan ۱۵^\circ=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\tan ۱۵^\circ=\frac{(۳-\sqrt{۳})^۲}{۹-۳}=\frac{۱۲-۶\sqrt{۳}}{۶}=\frac{\cancel{۶}(۲-\sqrt{۳})}{\cancel{۶}}=۲-\sqrt{۳}$$

حال از عکس عبارت فوق $\cot ۱۵$ به‌دست می‌آید $۲+\sqrt{۳}$

محاسبهٔ نسبت‌های ۷۵°

چون $۴۵^\circ+۳۰^\circ=۷۵^\circ$ پس می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی ۷۵° را بیابیم:

$$\sin ۷۵^\circ=\sin(۳۰^\circ+۴۵^\circ)=\sin ۳۰^\circ\cos ۴۵^\circ+\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

کمی صبر کنید! اگر دقّت کنید متوجه می‌شوید که ۷۵° و ۱۵° متمم‌اند پس از روی نسبت‌های ۱۵° می‌توانیم نسبت‌های ۷۵° را بیابیم:

$$\begin{cases}\sin ۷۵^\circ=\cos ۱۵^\circ=\dfrac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}\\ \cos ۷۵^\circ=\sin ۱۵^\circ=\dfrac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}\\ \tan ۷۵^\circ=\cot ۱۵^\circ=۲+\sqrt{۳}\\ \cot ۷۵^\circ=\mathrm{tg}۱۵^\circ=۲-\sqrt{۳}\end{cases}$$

کاربردهای بسط $\tan(a+b)$:

۱) $\dfrac{۱+\tan a}{۱-\tan a}=\tan(\dfrac{\pi}{۴}+a)$ ۲) $\dfrac{۱-\tan a}{۱+\tan a}=\tan(\dfrac{\pi}{۴}-a)$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۳}+\tan a}{۱-\sqrt{۳}\tan a}=\tan(\dfrac{\pi}{۳}+a)$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۳}-\tan a}{۱+\sqrt{۳}\tan a}=\tan(\dfrac{\pi}{۳}-a)$

در مورد استدلال (۱): دقّت کنید چون $\tan\dfrac{\pi}{۴}=۱$ پس:

$$\frac{۱+\tan a}{۱-\tan a}=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan a}{۱-\tan a\tan\frac{\pi}{۴}}=\tan(\frac{\pi}{۴}+a)$$

مثال

مقدار عددی $\dfrac{۱-\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan ۱۵^\circ}$ را بیابید.

پاسخ: طبق رابطهٔ $\dfrac{۱-\tan a}{۱+\tan a}=\tan(\dfrac{\pi}{۴}-a)$ داریم:

$$\frac{۱-\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan ۱۵^\circ}=\tan(۴۵-۱۵)=\tan ۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

جالب‌ترین کاربرد $\tan(a+b)$:

اگر $\tan(a+b)=K$ فرض کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan a+\tan b}{۱-\tan a\tan b}=K\Rightarrow \tan a+\tan b=K-K\tan a\tan b$$

$$\Rightarrow \tan a+\tan b+K\tan a\tan b=K$$

مثال مقدار عددی $\tan ۲۰ + \tan ۴۰ + \sqrt{۳}\tan ۲۰ \tan ۴۰$ را بیابید.

پاسخ: چون $\tan(۲۰+۴۰) = \sqrt{۳}$ پس مقدار عبارت برابر $K = \sqrt{۳}$ می‌باشد.

کاربردهای $\sin(a \pm b)$ و $\cos(a \pm b)$

به عبارت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x$ دقت کنید می‌نویسیم:

$$\cos\frac{\pi}{۴}\sin x + \sin\frac{\pi}{۴}\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

پس $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{۴})$ با ضرب طرفین تساوی در $\sqrt{۲}$ خواهیم داشت:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

فرمول‌های دیگر:

- $\sin x + \cos x = \begin{cases} \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}) \\ \sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴}) \end{cases}$
- $\sin x - \cos x = \begin{cases} \sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴}) \\ -\sqrt{۲}\cos(x+\frac{\pi}{۴}) \end{cases}$
- $\sin x + \sqrt{۳}\cos x = \begin{cases} ۲\sin(x+\frac{\pi}{۳}) \\ ۲\cos(x-\frac{\pi}{۶}) \end{cases}$
- $\sin x - \sqrt{۳}\cos x = \begin{cases} ۲\sin(x-\frac{\pi}{۳}) \\ -۲\cos(x+\frac{\pi}{۶}) \end{cases}$

نسبت‌های مثلثاتی ۲a

می‌دانیم $۲a = a + a$ پس:

$$\sin ۲a = \sin(a+a) = \sin a\cos a + \sin a\cos a = ۲\sin a\cos a$$

حال همهٔ نسبت‌های مثلثاتی ۲a:

- $\sin ۲a = ۲\sin a\cos a$
- $\cos ۲a = \begin{cases} \cos^۲ a - \sin^۲ a \\ ۲\cos^۲ a - ۱ \\ ۱ - ۲\sin^۲ a \end{cases}$
- $\tan ۲a = \frac{۲\tan a}{۱-\tan^۲ a}$
- $\cot ۲a = \frac{\cot^۲ a - ۱}{۲\cot a}$

مثال

اگر $\sin a = \frac{۳}{۵}$ و a حاده باشد $\sin ۲a$ را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $\sin ۲a = ۲\sin a \cos a$ چون $\sin a = \frac{۳}{۵}$ پس $\cos a$ را می‌یابیم:

$$\sin^۲ a + \cos^۲ a = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{۲۵} + \cos^۲ a = ۱ \Rightarrow \cos^۲ a = \frac{۱۶}{۲۵} \overset{\text{حاده } a}{\Rightarrow} \cos a = \frac{۴}{۵}$$

درنتیجه:

$$\sin ۲a = ۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵}) = \frac{۲۴}{۲۵}$$

مثال

مقدار عددی $\dfrac{۲\tan\frac{\pi}{۸}}{۱-\tan^۲\frac{\pi}{۸}}$ را بیابید.

پاسخ: طبق رابطهٔ $\tan ۲a = \dfrac{۲\tan a}{۱-\tan^۲ a}$ داریم:

$$\frac{۲\tan\frac{\pi}{۸}}{۱-\tan^۲\frac{\pi}{۸}} = \tan(۲\times\frac{\pi}{۸}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

مثال

اگر $\cos x = \frac{۴}{۵}$ و x حاده باشد، مقدار عددی $\sin\frac{x}{۲}$ را بیابید.

پاسخ: طبق رابطهٔ $\cos ۲a = ۱ - ۲\sin^۲ a$ با جایگذاری $\frac{x}{۲}$ به جای a داریم:

$$\cos x = ۱ - ۲\sin^۲\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = ۱ - ۲\sin^۲\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^۲\frac{x}{۲} = \frac{۱}{۱۰} \overset{\text{حاده } x}{\Rightarrow} \sin\frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

کاربردهای $\sin ۲a$

- $\cos a \cos ۲a \cos ۴a = \dfrac{\sin ۸a}{۸\sin a}$
- $(\sin a \pm \cos a)^۲ = ۱ \pm \sin ۲a$
- $\sin^۴ a + \cos^۴ a = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲a$
- $\sin^۶ a + \cos^۶ a = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲a$

مثال

اگر $\sin ۲a = \frac{۱}{۳}$ مقدار عددی $\sin^۶ a + \cos^۶ a$ را بیابید.

پاسخ: چون $\sin^۶ a + \cos^۶ a = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲a$ پس:

$$\sin^۶ a + \cos^۶ a = ۱ - \frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۹}) = ۱ - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

مثال ساده شدهٔ $\cos 10\cos 20\cos 40$ را بیابید.

پاسخ: طبق رابطهٔ $\cos a\cos 2a\cos 4a=\dfrac{\sin 8a}{8\sin a}$ داریم:

$$\cos 10\cos 20\cos 40=\frac{\sin 80}{8\sin 10}$$

چون ۱۰ و ۸۰ متمم‌اند پس $\sin 80=\cos 10$ در نتیجه:

$$\text{عبارت}=\frac{\cos 10}{8\sin 10}=\frac{1}{8}\cot 10$$

کاربردهای $\cos 2a$

می‌دانیم $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ پس $1+\cos 2a=2\cos^2 a$ با تبدیل a به $\dfrac{a}{2}$ به تساوی زیر می‌رسیم:

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}$$

که به آن فرمول نصف قوس می‌گویند به طور کلی فرمول‌های کاربردی $\cos 2a$ عبارتند از:

- $1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$
- $1-\cos a=2\sin^2\dfrac{a}{2}$
- $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

مثال ساده شدهٔ $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}$ را بنویسید.

پاسخ: چون $1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$ و $1-\cos a=2\sin^2\dfrac{a}{2}$ پس:

$$\text{عبارت}=\frac{\cancel{2}\cos^2\frac{a}{2}}{\cancel{2}\sin^2\frac{a}{2}}=\cot^2\frac{a}{2}$$

مثال مقدار عددی $\sin^2 15$ را بیابید.

پاسخ: (روشی دیگر برای محاسبهٔ $\sin 15$) چون $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ پس:

$$\sin^2 15=\frac{1-\cos 30}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

کاربرد توأم $\sin 2a$ و $\cos 2a$

می‌دانیم $\sin 2a=2\sin a\cos a$ و $1+\cos 2a=2\cos^2 a$ در نتیجه:

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a}=\frac{2\sin a\cos a}{2\cos^2 a}=\tan a$$

با تبدیل a به $\dfrac{a}{2}$ تساوی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\sin a}{1+\cos a}=\tan\frac{a}{2}$$

به طور کلی فرمول‌های کاربردی $\sin 2a$ و $\cos 2a$ به صورت زیر هستند:

- $\tan\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sin a}{1+\cos a}$
- $\tan a+\cot a=\dfrac{2}{\sin 2a}$
- $\cot\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sin a}{1-\cos a}$
- $\tan a-\cot a=-2\cot 2a$

مثال

مقدار عددی $\tan 15^\circ$ را بیابید.

پاسخ: طبق تساوی $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ داریم:

$$\tan 15=\frac{\sin 30}{1+\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

محاسبهٔ $\sin 2a$ و $\cos 2a$ برحسب $\tan a$

می‌دانیم $\sin 2a=2\sin a\cos a$ اگر تساوی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\sin 2a=\left(\frac{2\sin a}{\cos a}\right)(\cos^2 a)$$

چون $1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$ درنتیجه:

$$\sin 2a=(2\tan a)\left(\frac{1}{1+\tan^2 a}\right)=\left(\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\right)$$

به طور کلی دو فرمول $\sin 2a$ و $\cos 2a$ برحسب $\tan a$ عبارتند از:

- $\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$
- $\cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

مثال

مقدار عددی $\frac{1-\tan^2 15}{1+\tan^2 15}$ را بیابید.

پاسخ: طبق تساوی $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{1-\tan^2 15}{1+\tan^2 15}=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی $3a$

- $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$
- $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

مثال

مقدار عددی $\cos\frac{\pi}{9}(4\cos^2\frac{\pi}{9}-3)$ را بیابید.

پاسخ: با ضرب $\cos\frac{\pi}{9}$ در پرانتز نتیجه می‌شود:

$$4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}$$

که همان فرمول $\cos 3a$ است یعنی:

$$\text{عبارت}=\cos(3\times\frac{\pi}{9})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۷ حاصل $A=\cos(۴۵^\circ)\cos(۱۰۵^\circ)+\sin(۴۵^\circ)\sin(۱۰۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۷۸ مقدار عددی $\sin ۷۵^\circ$ چند برابر $۱+\sqrt{۳}$ است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۷۹ حاصل کسر $\frac{\tan a+\tan b}{\cot a+\cot b}$ برابر است با:

۱) $\tan a+\tan b$ ۲) $\tan a.\tan b$ ۳) $\cot a+\tan b$ ۴) $\tan a.\cot b$

۸۰ دو عبارت $A=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$ و $B=۲\cos\alpha\cos\beta$ عکس هم‌اند مقدار عددی $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۸۱ اگر $\sin\alpha,\sin\beta\neq ۰$ آنگاه ساده شدهٔ $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ کدام است؟

۱) $\cot\alpha$ ۲) $\cot\beta$ ۳) $۲\cot\alpha$ ۴) $۲\cot\beta$

۸۲ حاصل عبارت $\sin(x+y)+\sin(x-y)-۲\sin x\cos y$ کدام است؟

۱) $-۲\sin y\cos x$ ۲) صفر ۳) $-۲\sin x\cos y$ ۴) $-۴\sin x\cos y$

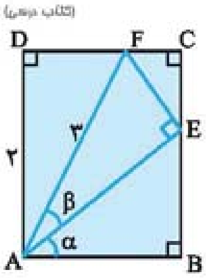
۸۳ اگر $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta=\frac{-۱۲}{۱۳}$ و انتهای α در ربع اول و β در ربع دوم قرار دارند. مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{-۱۶}{۶۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۶۵}$ ۳) $\frac{۶۳}{۶۵}$ ۴) $\frac{-۶۳}{۶۵}$

۸۴ مقدار عددی عبارت $\frac{\cos ۷۰\cos ۱۰+\cos ۸۰\cos ۲۰}{\cos ۶۸\cos ۸+\cos ۸۲\cos ۲۲}$ کدام است؟

۱) $\sin ۱۰$ ۲) $\cos ۱۰$ ۳) $\tan ۱۰$ ۴) ۱

۸۵ با توجه به شکل زیر $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸۶ مقدار عددی $\cos\alpha\cos\beta$ به اندازه $\frac{۱}{۳}$ واحد از $\sin\alpha\sin\beta$ بزرگ‌تر است کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۳}$ ۲) $\sin(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۳}$ ۳) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۳}$ ۴) $\cos(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۳}$

۸۷ حاصل $۱+\tan ۱۰.\tan ۲۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos ۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{\cos ۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{\sin ۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{\sin ۱۰}$

۸۸ مقدار عبارت $\tan ۳۳^\circ\tan ۱۲^\circ+\tan ۳۳^\circ+\tan ۱۲^\circ$ برابر است با:

۱) $\cot ۳۳$ ۲) ۱ ۳) $\cot ۱۲$ ۴) -۱

۸۹ اگر $\tan(a-b)=\frac{۳}{۷}$ و $\tan(a+b)=\frac{۲}{۵}$، مقدار $\tan ۲a$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

درس چهارم

روابط مثلثاتی ...

۹۰ اگر $\tan\alpha \tan\beta = -۱$ آن گاه کدام گزینه نتیجه می شود؟ $(K \in \mathbb{Z})$

۱) $\alpha + \beta = K\pi + \frac{\pi}{۲}$
۲) $\alpha + \beta = K\pi - \frac{\pi}{۲}$
۳) $\alpha - \beta = K\pi + \frac{\pi}{۲}$
۴) $\alpha - \beta = K\pi - \frac{\pi}{۲}$

۹۱ حاصل کسر $\frac{۱ - \tan ۲۰}{۱ + \tan ۲۰}$ کدام است؟

۱) $۱ - \tan ۲۰$
۲) $\tan ۲۵$
۳) $۱ + \tan ۲۰$
۴) $\tan ۱۵$

۹۲ مقدار عددی $\frac{\sqrt{۳} - \tan ۱۵}{۱ + \sqrt{۳}\tan ۱۵}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۹۳ اگر $\alpha + \beta = \frac{۵\pi}{۴}$ آن گاه حاصل عبارت $(۱ + \tan\alpha)(۱ + \tan\beta)$ برابر کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۹۴ اگر $\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\sin x + \cos x$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$

۹۵ حاصل کسر $\frac{\sin ۵۳ + \cos ۵۳}{\sin ۵۳ - \cos ۵۳}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}\sin ۸$
۲) $۲\cos ۸$
۳) $\tan ۸$
۴) $\cot ۸$

۹۶ حاصل $\sin ۵۰^\circ + \sqrt{۳}\cos ۵۰^\circ$ برابر است با:

۱) $۲\cos ۱۱۰^\circ$
۲) $۲\cos ۱۰^\circ$
۳) $۲\cos ۲۰^\circ$
۴) $\sqrt{۳}\cos ۲۰^\circ$

۹۷ مقدار عبارت $\frac{\cos ۲۰ + \sqrt{۳}\sin ۲۰}{\cos ۴۰}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

۹۸ مقدار عددی $\sin ۱۵ \cos ۱۵$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۹۹ حاصل $\cos ۱۶۵^\circ \cos ۱۰۵^\circ$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۰ ساده شدهٔ عبارت $۴\sin ۸^\circ \cos ۸^\circ \cos ۱۶^\circ$ کدام است؟

۱) $۴\sin ۳۲^\circ$
۲) $۴\cos ۳۲^\circ$
۳) $\cos ۳۲^\circ$
۴) $\sin ۳۲^\circ$

۱۰۱ حاصل $\cos ۱۰ \cos ۲۰ \cos ۴۰$ چند برابر $\cot ۱۰$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۱۰۲ حاصل $\cos ۳a - \frac{\sin ۳a \cos a}{\sin a}$ برابر کدام است؟

۱) $-\cos a$
۲) $\cot a$
۳) $۲\sin a$
۴) $۲\cos a$

۱۰۳ اگر $a + b = \frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $۸\cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{۲} - a)\cos(\frac{\pi}{۲} - b)$ کدام است؟

۱) $\sin ۴a$
۲) $\cos ۴a$
۳) $\sin^۲ ۲a$
۴) $\cos^۲ ۲a$

۱۰۴ حاصل عبارت $\frac{۴\cos ۲x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

۱) $\cos ۴x$
۲) $\sin ۲x$
۳) $\sin ۴x$
۴) $\cos ۲x$

۱۰۵ اگر $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

۱۰۶ مقدار $\sin^6 \frac{\pi}{8} + \cos^6 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۷ مقدار عددی $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰۸ مقدار عددی $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰۹ هرگاه $\sin 7^\circ = n$ آن گاه $\sin 76^\circ$ کدام است؟

۱) $2n^2 - 1$ ۲) $1 - 2n^2$ ۳) $2n$ ۴) $1 - n^2$

۱۱۰ حاصل $\dfrac{1 - \tan^2(\frac{\pi}{4} - a)}{1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} - a)}$ کدام است؟

۱) $\sin a$ ۲) $\cos a$ ۳) $\sin 2a$ ۴) $\cos 2a$

۱۱۱ حاصل عبارت $\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۱۱۲ اگر $\alpha = 22/5^\circ$ باشد، مقدار $\sin^3 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos^3 \alpha$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۱۳ حاصل $4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

۱) $3 - \sqrt{3}$ ۲) $3 + \sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3} + 1$ ۴) $\sqrt{3} - 1$

۱۱۴ اگر $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{-1}{8}$

۱۱۵ اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، $\tan 2x$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $8\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

(سراسری)

۱۱۶ اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چقدر است؟

۱) $1/5$ ۲) $1/8$ ۳) $2/4$ ۴) $2/5$

۱۱۷ اگر $\dfrac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} = 2$ باشد، $\cot 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۱۸ اگر $\sin x = \frac{۳}{۵}$ و $\frac{\pi}{۲} < x < ۰$ باشد، آن‌گاه $\tan(\frac{\pi}{۲} + ۲x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۴}{۷}$ ۳) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $-\frac{۲۴}{۷}$

۱۱۹ اگر $\tan\alpha = ۲$ و $\tan\beta = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan(۲\alpha - \beta)$ کدام است؟ (سراسری)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

۱۲۰ اگر $\tan\frac{x}{۲} = \sqrt{۲}$ باشد، حاصل $\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۲۱ اگر $\pi < x < ۲\pi$، آنگاه عبارت $\sqrt{\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}}$ برابر است با:

۱) $-\cot\frac{x}{۲}$ ۲) $-\tan\frac{x}{۲}$ ۳) $\tan\frac{x}{۲}$ ۴) $\cot\frac{x}{۲}$

۱۲۲ ساده شدهٔ عبارت $\frac{\cos a}{۱ + \cos a} \times \frac{\sin ۲a}{۱ + \cos ۲a}$ کدام می‌باشد؟

۱) $\tan\frac{a}{۲}$ ۲) $\tan a$ ۳) $\cot a$ ۴) $\cot\frac{a}{۲}$

۱۲۳ اگر $\cos ۴x = a$ حاصل $\sin x \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x)\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$ چقدر است؟

۱) $\frac{a - ۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱ - a}{۶}$ ۳) $\frac{۱ - a}{۸}$ ۴) $\frac{a - ۱}{۴}$

۱۲۴ عبارت $\frac{۱ + \sin ۲a - \cos ۲a}{۱ + \sin ۲a + \cos ۲a}$ برابر است با:

۱) $\tan a$ ۲) $\cot a$ ۳) $-\tan a$ ۴) $-\cot a$

۱۲۵ حاصل $(\frac{۱}{\tan ۲x} - \frac{۱}{\sin ۲x})۲\cot x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\tan ۲x$ ۴) $۲\cot ۲x$

۱۲۶ اگر $\tan x + \cot x = ۶$، آن‌گاه $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۲۷ حاصل $\cot ۷۵ - \tan ۷۵$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $-۲\sqrt{۳}$

۱۲۸ مقدار عددی $\cot\frac{\pi}{۱۶} - \tan\frac{\pi}{۱۶} - ۲\tan\frac{\pi}{۸}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۹ اگر $\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۶۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

۱۳۰ مقدار عددی $\sin a(۳ - ۴\sin^۲ a)$ به ازای $a = \frac{\pi}{۱۸}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

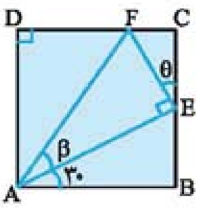
۱۳۱ مقدار عددی $\sin x \cos x(3-4\sin^2 x)(3-4\cos^2 x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{36}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $-\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{8}$　　۴) $-\frac{1}{8}$

۱۳۲ حاصل عبارت $8\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$ کدام است؟

۱) -1　　۲) $\cos 20^\circ$　　۳) $\sin 20^\circ$　　۴) 1

۱۳۳ در شکل زیر مقدار $\cos\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۴) $\frac{1}{3}$

۱۳۴ اگر $\frac{\tan a(1-\tan^2 a)}{(1+\tan^2 a)^2}=\frac{1}{8}$ باشد، حاصل $\sin 4a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　۴) $\frac{3}{4}$

۱۳۵ اگر $\alpha+\beta=135^\circ$ و $\tan(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$، مقدار کسر $\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$　　۲) $-\frac{3}{4}$　　۳) $\frac{4}{3}$　　۴) $-\frac{4}{3}$

۱۳۶ اگر به ازای همه مقادیر x داشته باشیم $3\sin x+4\cos x=K\sin(x+\phi)$، مقدار K کدام است؟

۱) ± 7　　۲) ± 5　　۳) ± 4　　۴) ± 3

۱۳۷ اگر $x=\frac{\pi}{36}$ ریشه معادله $3\sin x-4\sin^3 x+\cos 3x=K\sqrt{6}$ باشد آنگاه K برابر است با:

۱) $-\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　۳) 1　　۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۸ اگر $3\cos\alpha+4\sin\alpha=5$ و $\tan\beta=\frac{3}{4}$، آنگاه $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$　　۲) $\frac{4}{5}$　　۳) 1　　۴) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

۱۳۹ مقدار عددی عبارت $9\sin^2 x-24\sin^4 x+16\sin^6 x$ به ازای $x=\frac{\pi}{18}$ کدام است؟

۱) 1　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $\frac{1}{4}$　　۴) $\frac{3}{4}$

۱۴۰ اگر $\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{\frac{50}{7}}$　　۲) $\sqrt{\frac{18}{7}}$　　۳) $\sqrt{\frac{32}{7}}$　　۴) $\frac{18}{7}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱- گزینهٔ

یادآوری: اگر D اندازهٔ زاویه‌ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان باشد، آنگاه: $\frac{D}{R}=\frac{۱۸۰}{\pi}$

در این تست $D=۱۸۰^\circ$ داده شده است طبق رابطهٔ $\frac{D}{R}=\frac{۱۸۰}{\pi}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\cancel{۱۸۰}}{R}=\frac{\cancel{۱۸۰}}{\pi}\Rightarrow R=\pi$$

۲-گزینهٔ

یادآوری: در دایره مثلثاتی، زاویه‌ای که دارای علامت مثبت باشد، در جهت پادساعتگرد (خلاف گردش عقربه‌های ساعت) رسم می‌شود و زاویه‌ای که دارای علامت منفی باشد؛ در جهت ساعتگرد (جهت گردش عقربه های ساعت) رسم می‌گردد.

π رادیان معادل ۱۸۰° است.

$$\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۵\times ۱۸۰}{۶}=۱۵۰^\circ \rightarrow \text{در ربع دوم و پادساعتگرد}$$

$$\frac{-\pi}{۶}=-\frac{۱۸۰}{۶}=-۳۰^\circ \rightarrow \text{در ربع چهارم و ساعتگرد}$$

۳-گزینهٔ

یادآوری: یک رادیان اندازهٔ زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با طول شعاع در هر دایره دلخواه است.

با توجه به شکل واضح است که چهار کمان به اندازهٔ r (شعاع دایره) زاویهٔ γ را مشخص می‌کند پس:

$$\gamma=۴\text{rad}$$

۴-گزینهٔ

۹۰° معادل $\frac{\pi}{۲}$ است فرض می‌کنیم $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ چون مجموع دو زاویه $\frac{\pi}{۲}$ است پس:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$$

از طرفی $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ در نتیجه:

$$\frac{\pi}{۳}+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}$$

۵-گزینهٔ

مجموع دو زاویهٔ α و β برابر ۲ رادیان است پس:

$$\alpha+\beta=۲$$

همچنین تفاضل آن‌ها برابر ۱ رادیان است در نتیجه:

$$\alpha-\beta=۱$$

از روابط به دست آمده دستگاه تشکیل داده تا α و β به دست آید:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۲\\ \alpha-\beta=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{۳}{۲}\text{rad}\\ \beta=\frac{۱}{۲}\text{rad}\end{cases}$$

زاویه کوچک‌تر $\beta=\frac{۱}{۲}\text{rad}$ است که در صورت تست تبدیل این زاویه به درجه خواسته شده است. طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۹۰^\circ}{\pi}$$

۶-گزینهٔ

یادآوری: دو زاویه α و β را متمم گویند، هرگاه مجموعشان ۹۰° (یا $\frac{\pi}{۲}\text{rad}$) باشد.

دو زاویه α و β را مکمل گویند، هرگاه مجموعشان ۱۸۰° (یا $\pi\,\text{rad}$) باشد.

چون A و B متمم‌اند پس:

$$\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ$$

می‌دانیم مکمل زاویه B یعنی $۱۸۰-B$ پس:

$$\hat{A}=\frac{۲}{۵}(۱۸۰-\hat{B})$$

با استفاده از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\hat{A}=۶۰^\circ\\ \hat{B}=۳۰^\circ\end{cases}$$

۷-گزینهٔ

یادآوری: همواره بین اندازهٔ زاویه (θ) برحسب رادیان و طول کمان (S) در یک دایره به شعاع r رابطهٔ $\theta=\frac{S}{r}$ برقرار است.

در این تست $S=r$ است. رابطهٔ $\theta=\frac{S}{r}$ را داریم، پس $\theta=۱\text{rad}$. حال طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ زاویه را برحسب درجه می‌یابیم:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰}{\pi}$$

با فرض $\pi\simeq ۳/۱۴$ نتیجه می‌شود $D\simeq ۵۷^\circ$.

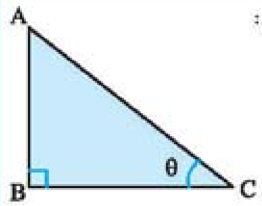
۸-گزینهٔ

ضلع روبه رو به زاویه ۳۰° را می‌خواهیم محاسبه کنیم، پس طبق رابطهٔ $\sin ۳۰^\circ$ می‌نویسیم:

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{PQ}{r}$$

$$\frac{۱}{۲}=\frac{PQ}{۲}\Rightarrow PQ=۱$$

یادآوری: در هر مثلث قائم‌الزاویه دلخواه داریم:



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{ضلع مجاور به زاویه}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{ضلع مقابل به زاویه}} = \frac{BC}{AB}$$

۹-گزینهٔ

طول کمان $\overset{\frown}{PA}$ مورد سؤال است، با توجه به $S = r\theta$ و $\theta = ۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}$ نتیجه می‌شود:

$$\overset{\frown}{PA} = ۲\times\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \overset{\frown}{PA} = \frac{\pi}{۳}$$

۱۰-گزینهٔ

یادآوری: تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

درجه $= D$

رادیان $= R$

با توجه به رابطه فوق:

$$\frac{۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۹}\,\text{rad}$$

محاسبه طول کمان $\overset{\frown}{AB}\,(L)$:

$$L = r\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۲\times\frac{\pi}{۹} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi}{۹}$$

۱۱-گزینهٔ

طبق رابطهٔ $\theta = \frac{S}{r}$ برای هرسه کمان $\overset{\frown}{PA}$ و $\overset{\frown}{P'A'}$ و $\overset{\frown}{P''A''}$ داریم:

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{PA}}{r} \Rightarrow \overset{\frown}{PA} = r\theta$$

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{P'A'}}{۲r} \Rightarrow \overset{\frown}{P'A'} = ۲r\theta$$

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{P''A''}}{۳r} \Rightarrow \overset{\frown}{P''A''} = ۳r\theta$$

از سه رابطهٔ فوق $r\theta$ را به‌دست می‌آوریم نتیجه می‌شود:

$$r\theta = \overset{\frown}{PA}$$

$$r\theta = \frac{\overset{\frown}{P'A'}}{۲}$$

$$r\theta = \frac{\overset{\frown}{P''A''}}{۳}$$

در نتیجه $\overset{\frown}{PA} = \frac{\overset{\frown}{P'A'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{P''A''}}{۳}$.

۱۲-گزینهٔ

کمان به طول $\frac{۳}{۲}$ برابر شعاع است پس $S = \frac{۳}{۲}r$ خواهد بود. چون $\theta = \frac{S}{r}$

در نتیجه $\theta = \frac{۳}{۲}\text{rad}$ و طبق رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۲۷۰}{\pi}$$

۱۳-گزینهٔ

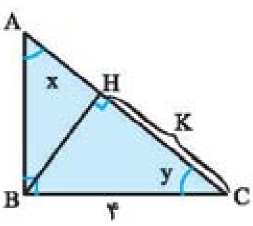
در مرحلهٔ اول با به کار بردن نسبت مثلثاتی تانژانت در مثلث AHC ، ضلع AH را به دست آورده و در مرحله بعد با استفاده از نسبت مثلثاتی تانژانت در مثلث AHC ، ضلع BH را می‌یابیم:

$$\overset{\Delta}{AHC}: \tan ۴۵ = \frac{AH}{HC} \Rightarrow ۱ = \frac{AH}{۲} \Rightarrow AH = ۲$$

$$\overset{\Delta}{AHB}: \tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲}{BH} \Rightarrow BH = \frac{۶}{\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

۱۴- گزینهٔ

ابتدا مثلث را نام‌گذاری می‌کنیم:



در مثلث AHC :

$$\cos y = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \cos y = \frac{K}{۴} \Rightarrow K = ۴\cos y$$

با دقت کردن در گزینه‌ها، متوجه می‌شویم که این گزینه در بین جواب‌ها موجود نیست.

یادآوری: اگر α و β متمم یکدیگر باشند، $\begin{cases}\sin\alpha = \cos\beta\\ \cos\alpha = \sin\beta\end{cases}$ و $\begin{cases}\tan\alpha = \cot\beta\\ \cot\alpha = \tan\beta\end{cases}$ خواهد بود.

با توجه به نکته فوق، در مثلث ABC ، زاویه x و زاویه y متمم یکدیگرند، پس:

$$\cos y = \sin x$$

حال:

$$K = ۴\cos y \Rightarrow K = ۴\sin x$$

۱۵-گزینهٔ

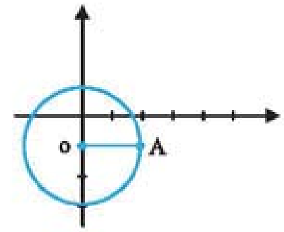
یادآوری: برای یافتن مختصات نقطه دوران یافته در دایره‌ای به مرکز $O(a, b)$ و به شعاع R از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = a + R\cos\alpha$$

$$y = b + R\sin\alpha$$

که در آن α زاویه دوران و x و y طول و عرض نقطه پس از دوران می‌باشد.

ابتدا شکلی از مسئله را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که شعاع دایره همان طول OA یعنی ۲ می‌باشد پس:

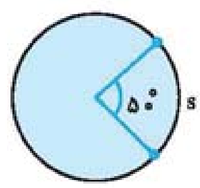
$$x = a + R\cos\alpha \rightarrow x = ۰ + ۲\cos(-۳۰) = \sqrt{۳}$$
$$y = b + R\sin\alpha \rightarrow y = -۱ + ۲\sin(-۳۰) = -۲$$

۱۶- گزینهٔ ۲

ابتدا باید θ را که برحسب درجه است به رادیان تبدیل کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۵۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۵\pi}{۱۸}\,\text{rad}$$

$$S = R\theta \rightarrow S = ۱۸ \times \frac{۵\pi}{۱۸} = ۵\pi$$



حال با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$:

$$S = ۵ \times ۳/۱۴ = ۱۵/۷$$

۱۷- گزینهٔ ۳

مسافت طی شده روی محیط دایره، همان طول کمان است پس $L = ۶$

$$L = r\theta \Rightarrow ۶ = ۲\theta \Rightarrow \theta = ۳\,\text{rad}$$

حال باید این زاویه را به درجه تبدیل کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{۳}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۵۴۰}{\pi}$$

۱۸- گزینهٔ ۱

ابتدا θ را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳}$$

طول برف پاک‌کن در حقیقت همان شعاع دایره است پس $r = ۲۴$ در نتیجه:

$$L = r\theta \Rightarrow L = ۲۴ \times \frac{۲\pi}{۳} = ۱۶\pi$$

۱۹- گزینهٔ ۱

در این سؤال فاصلهٔ ژئودزیک، در حقیقت طول کمانی است که زاویه ۳۲° جدا می‌کند، برای یافتن طول کمان ابتدا زاویه را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۳۲}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۸\pi}{۴۵}$$

حال با فرمول $L = r\theta$ مقدار طول کمان را می‌یابیم:

$$L = r\theta \Rightarrow L = ۶۳۲۰ \times \frac{۸\pi}{۴۵} = ۱۱۲۳/۵\pi$$

۲۰- گزینهٔ ۱

طول پاندول ساعت، در حقیقت شعاع دایره است پس: $r = ۱۲$

با تبدیل زاویه داده شده به رادیان، طول کمان را می‌یابیم:

$$\frac{۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۹}$$

حال با فرمول $L = r\theta$ داریم:

$$L = ۱۲ \times \frac{\pi}{۹} = \frac{۱۲\pi}{۹}$$

چون $\pi \sim ۳/۱۴$ در نتیجه:

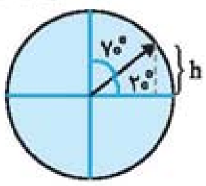
$$L \sim \frac{۱۲ \times ۳/۱۴}{۹} = ۴/۱۸$$

۲۱- گزینهٔ ۳

> **نکته:** زاویه‌ای که عقربه ساعت شمار بین دو ساعت متوالی طی می‌کند برابر ۳۰° است.

وقتی عقربه ساعت شمار روی عدد ۲ باشد پس از محور قائم به اندازه $۶۰^\circ = ۲ \times ۳۰^\circ$ چرخیده است. حال چون عقربه دقیقه شمار $۲۰'$ حرکت کرده است. پس عقربه ساعت شمار $\frac{۱}{۳}$ یک ساعت یعنی $۱۰^\circ = ۳۰^\circ \times \frac{۱}{۳}$ دیگر نیز می‌چرخد. پس وقتی ساعت $۲:۲۰'$ می‌باشد عقربه ساعت شمار از محور قائم ۷۰° چرخیده است.

حال با توجه به شکل، ارتفاع نوک عقربه ساعت شماره (h) از محور افقی برابر است با:



$$\sin ۲۰^\circ = \frac{h}{۱۰} \Rightarrow h = ۱۰\sin ۲۰^\circ$$

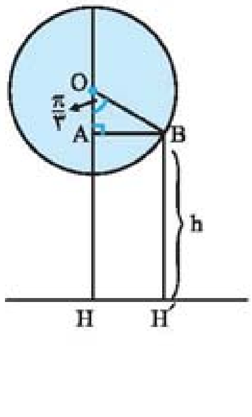
۲۲- گزینهٔ ۲

زاویه طی شده توسط عقربه دقیقه شمار $۶/۵\pi\,\text{rad}$ است که معادل ۳ دور کامل و $\frac{۱}{۴}$ دور است. $(۶/۵\pi = ۶\pi + \frac{\pi}{۲})$ پس زمان نشان داده شده توسط ساعت $۳:۱۵'$ می‌باشد.

$$۹۷/۵^\circ = ۳۰^\circ \times \frac{۱۳}{۴} = ۳۰^\circ \times ۳\frac{۱}{۴} = \text{زاویه طی شده توسط عقربه ساعت شمار}$$

۲۳- گزینهٔ ۳

مطابق شکل زیر وقتی کابین به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان می‌چرخد، ارتفاع کابین یعنی BH' برابر $h = OH - OA$ است. می‌دانیم $OH = ۲۰ + ۱ = ۲۱$ و در مثلث ABO پس $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{OA}{OB}$ پس $OA = ۱۰$ و درنتیجه $h = ۲۱ - ۱۰ = ۱۱$ خواهد بود.



۲۴- گزینهٔ ۲

ابتدا مسافت طی شده توسط نقطه P را برروی محیط قرقره بزرگ‌تر به دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow L = r\theta \rightarrow L = ۵\pi cm$$

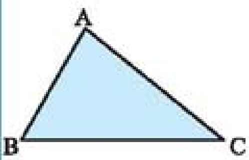
چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقره کوچک‌تر نیز $۵\pi cm$ حرکت می‌کند، برای این قرقره داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{۵\pi}{۲/۵} = ۲\pi \ rad$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ‌تر، ربع دور می‌چرخد، قرقرهٔ کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه Q به مکان خود باز می‌گردد.

۲۵- گزینهٔ ۲

نکته: قانون سینوس‌ها: در هر مثلث دلخواه ABC داریم:



$$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{BC}{\sin\hat{A}}$$

با توجه به نکته فوق:

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{Ac}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}} \quad (۱)$$

از طرفی طبق فرض سؤال:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{C}} \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{C}} \Rightarrow \sin\hat{C} = \cos\hat{C}$$

با تقسیم طرفین رابطه بر $\cos\hat{C}$ داریم:

$$\tan\hat{C} = ۱$$

زاویه $A = ۱۰۰^\circ$ پس زاویهٔ C باید بین صفر تا ۸۰° باشد (چرا؟)

$$\hat{C} = ۴۵^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰ - (۱۰۰ + ۴۵) = ۳۵^\circ$$

۲۶- گزینهٔ ۳

با توجه به این که چرخ و فلک ۴۰ کابین دارد پس فاصله بین هر دو کابین به اندازه $\frac{\pi}{۲۰} = \frac{۲\pi}{۴۰}$ رادیان است. وقتی در آغاز حرکت در کابین شماره ۳ نشسته‌ایم یعنی در موقعیت $\frac{\pi}{۱۰} = \frac{\pi}{۲۰} \times ۲$ رادیان قرار داریم (از لحاظ زاویه).

حال ببینیم بعد از طی $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ به چه نقطه‌ای می‌رسیم:

$$\frac{\pi}{۱۰} + \frac{۴۷\pi}{۱۰} = \frac{۴۸\pi}{۱۰} = ۴\pi + \frac{۸\pi}{۱۰}$$

۴π که دو دور دایره کامل است و با آن کاری نداریم و $\frac{۸\pi}{۱۰}$ همان $\frac{۱۶\pi}{۲۰}$ است.

بنابراین ما را در موقعیت کابین ۱۷ام قرار می‌دهد.

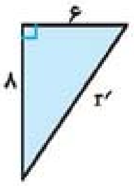
۲۷- گزینهٔ ۳

اندازهٔ قطاع (S) برابر محیط دایره در شکل اول است:

$$S = ۲\pi r = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi$$

حال طبق رابطه فیثاغورس شعاع شکل سوم را می‌یابیم:

$$r' = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$



در شکل سوم $S = ۱۲\pi$ و $r' = ۱۰$، طبق رابطهٔ $\theta = \frac{S}{r'}$ نتیجه می‌شود:

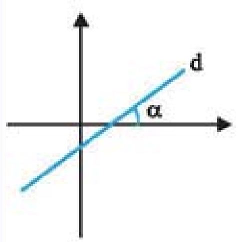
$$\theta = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = ۱/۲\pi$$

۲۸- گزینهٔ ۳

ابتدا معادله خط را استاندارد می‌کنیم (یعنی y در یک طرف تساوی و بدون ضریب باشد.)

$$۲x + ay + ۳ = ۰ \Rightarrow ay = -۲x - ۳, y = -\frac{۲}{a}x - \frac{۳}{a}$$

یادآوری: تانژانت زاویه‌ای که یک خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، همان شیب خط است.



$$m_d = \tan\alpha$$

با توجه به یادآوری فوق:

$$-\frac{۲}{a} = \tan ۴۵^\circ \overset{\tan ۴۵^\circ = ۱}{\Longrightarrow} -\frac{۲}{a} = ۱ \rightarrow a = -۲$$

حال معادله خط را با $a = -۲$ بازنویسی می‌کنیم:

$$y = x + \frac{۳}{۲}$$

طول قاعده مثلث (OB) محل برخورد خط با محور xهاست و ارتفاع مثلث (OA) محل برخورد خط با محور yهاست.

یافتن طول قاعده (OB):

مختصات نقطه B، در حقیقت ناشی از قرار دادن $y = ۰$ در معادله خط است:

$$۰ = x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow |OB| = \frac{۳}{۲}$$

یافتن اندازه ارتفاع (OA):

مختصات نقطه A، در حقیقت ناشی از قرار دادن $x = ۰$ در معادله خط است.

$$y = ۰ + \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |OA| = \frac{۳}{۲}$$

حال مساحت مثلث:

$$S = \frac{\frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲}}{۲} = \frac{۹}{۸}$$

۲۹- گزینهٔ ۳

شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. در این مسئله، زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، 60° است.

$m=\tan 60^\circ \Rightarrow m=\sqrt{3}$

خط از نقطه $(0,-2)$ می‌گذرد، حال معادله خط d را می‌نویسیم:

$y-(-2)=\sqrt{3}(x-0) \Rightarrow y=\sqrt{3}x-2$

با صدق دادن گزینه‌ها در معادلهٔ به‌دست آمده، مشاهده می‌شود که تنها گزینهٔ ۳ تساوی را برقرار می‌سازد.

۳۰- گزینهٔ ۴

ابتدا باید معادله خط تمام گزینه‌ها را استاندارد کنیم و سپس به دنبال گزینه‌ای باشیم که شیب آن برابر $\tan 45^\circ = 1$ باشد:

گزینهٔ (۱):

$2x+2y-5=0 \Rightarrow y=-x+5 \Rightarrow$ شیب $=-1$

گزینهٔ (۲):

$2x=2(5+\frac{y}{2}) \Rightarrow 2x=10+y \Rightarrow y=2x-10 \Rightarrow$ شیب $=-2$

گزینهٔ (۳):

$y+x=3 \Rightarrow y=-x+3 \Rightarrow$ شیب $=-1$

گزینهٔ (۴):

$\sqrt{3}y=\sqrt{3}x+3 \Rightarrow y=x+\frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ شیب $=1$

۳۱- گزینهٔ ۱

نکته: زمانی‌که زوایا در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ یعنی در ربع اول تعیین می‌کنند، نکته زیر همواره برقرار است:

با افزایش مقدار زاویه، مقدار سینوس و تانژانت افزایش می‌یابد و مقدار کتانژانت و کسینوس کاهش می‌یابد.

با توجه به گزینه‌ها مقدار $\cos 20$ از همهٔ گزینه‌ها بیشتر است.

۳۲- گزینهٔ ۲

واضح است که با افزایش زاویه در ربع اول مقدار کسینوس زاویه کاهش می‌یابد پس:

$\cos 50 < \cos 40$

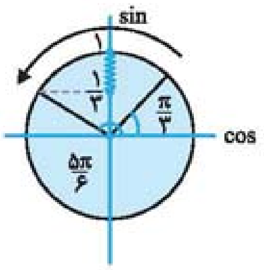
۳۳- گزینهٔ ۴

با توجه به رابطه داده شده و ذکر این نکته که $1+\tan^2\alpha$ یک عبارت همواره مثبت است، پس $\cos\alpha$ باید بزرگ‌تر از صفر باشد، تا رابطه داده شده برقرار گردد، یعنی α باید در ربع اول و چهارم باشد.

۳۴- گزینهٔ ۳

از روی دایره مثلثاتی محدوده تغییرات سینوس را می‌یابیم، با این کار در حقیقت محدوده تغییرات $\frac{3-m^2}{3+m^2}$ را یافته‌ایم، که بازه مورد قبول m، با حل نامعادله به دست می‌آید.

با توجه به تغییرات کمان در شکل روبه‌رو، مشاهده می‌شود که سینوس در بازه $\left(\frac{1}{2},1\right]$ تغییر می‌کند. حال داریم:



$\frac{1}{2} < \frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1$

نامعادله فوق را حل می‌کنیم:

$\frac{3-m^2}{3+m^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3-3m^2}{2(3+m^2)} > 0$

پس از تعیین علامت صورت و در نظر گرفتن اینکه مخرج، عبارتی همواره مثبت است، محدودهٔ m به دست می‌آید:

$-1 < m < 1$

$\frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1 \Rightarrow \frac{-2m^2}{3+m^2} \le 0$

که این عبارت همواره کوچک‌تر، مساوی صفر می‌باشد. (چرا؟)

یادآوری:

$-a < m < a \xRightarrow{a>0} |m| < a$

با توجه به یادآوری فوق و $-1 < m < 1$ ملاحظه می‌شود که $|m| < 1$ می‌باشد.

۳۵- گزینهٔ ۲

برای اینکه ببینیم داخل قدرمطلق در بازه $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ مثبت است یا منفی، به دایره مثلثاتی روبه‌رو دقت کنید:

ملاحظه می‌شود که در بازه $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ مقدار cos از مقدار sin بیشتر است پس داخل قدر مطلق منفی می‌شود و داریم:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}=\frac{-(\sin x-\cos x)}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$$

$$=\frac{-\sin x+\cos x+\sin x+\cos x}{2}=\cos x$$

۳۶-گزینهٔ ۴

یادآوری:

زاویه / نسبت	$\frac{\pi}{۲}+\alpha$	$\frac{\pi}{۲}-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$
سینوس	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
کسینوس	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$

با توجه به جدول فوق تنها گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳۷-گزینهٔ ۳

در این تست به بررسی تک‌تک تساوی‌ها می‌پردازیم:

الف) $\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=۰$

$\cos\theta+(-\cos\theta)=۰$ ✓

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)+\cos\theta=۱$

$\cos\theta+\cos\theta=۲\cos\theta\neq۱$ ✗

ج) $\cos ۷=\cos(-۷)$ ✓

د) $\tan(\pi-\theta)=\tan\pi-\tan\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

چون $\tan\pi=۰$ پس قسمت (د) صحیح می‌باشد، امّا قسمت (د) در حالت کلی صحیح نیست، یعنی $\tan(a-b)$ در حالت کلی با $\tan a-\tan b$ برابر نیست.

۳۸-گزینهٔ ۴

ابتدا هر یک از عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

حال با جایگذاری معادل آن‌ها عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=-\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=۰$$

۳۹-گزینهٔ ۱

می‌دانیم $\frac{۱۰\pi}{۳}=۳\pi+\frac{\pi}{۳}$ در نتیجه:

$$\tan\frac{۱۰\pi}{۳}=\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۳})$$

طبق رابطهٔ $\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta$ عبارت برابر $\tan\frac{\pi}{۳}$ یعنی $\sqrt{۳}$ می‌گردد.

همچنین $\cos(\frac{-۲۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})$ چون $\frac{۲۳\pi}{۴}=۶\pi-\frac{\pi}{۴}$. در نتیجه:

$$\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})=\cos(۶\pi-\frac{\pi}{۴})$$

طبق رابطهٔ $\cos(n\pi-\alpha)=(-۱)^n\cos\alpha$ داریم:

$$\cos(۶\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در نتیجه مجموع دو عبارت برابر است با:

$$\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۰-گزینهٔ ۳

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\cos(-\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha=۲\cos\alpha$$

با توجه به حاصل به دست آمده نیاز است که $\cos\alpha$ را به‌دست آوریم، که این امر با داشتن $\sin\alpha$ و رابطه مهم $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ به راحتی امکان‌پذیر است پس:

$$(۰/۸)^۲+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=۰/۶\\ \cos\alpha=-۰/۶\end{cases}$$

چون در صورت تست، قید شده α در ربع دوم دایره مثلثاتی است، پس مقدار منفی برای $\cos\alpha$ قابل قبول است. حال پاسخ نهایی:

$$۲\cos\alpha=۲(-۰/۶)=-۱/۲$$

۴۱-گزینهٔ ۲

چون $\cos ۲۰^\circ$ را داریم، پس زاویه‌های داده شده را باید به صورت ترکیبی از ضرایب ۹۰° (یا ضرایب ۱۸۰°) و زاویه ۲۰° بنویسیم:

$$\sin(-۲۵۰^\circ)-\cos ۲۹۰^\circ+\sin ۸۸۰^\circ=$$

$$\sin(\underbrace{-۲۷۰^\circ}_{\frac{-۳\pi}{۲}}+۲۰^\circ)-\cos(\underbrace{-۲۷۰^\circ}_{\frac{۳\pi}{۲}}-۲۰)+\sin(\underbrace{۹۰۰^\circ}_{۵\pi}-۲۰)$$

$$=-\cos ۲۰-\sin ۲۰+\sin ۲۰=-\cos ۲۰=-۰/۲۵$$

۴۲-گزینهٔ ۱

کمان‌های داده شده را باید به صورت ترکیبی از ضرایب $\frac{\pi}{۲}$ (یا ضرایبی از π) و یک زاویه که نسبت‌های مثلثاتی آن را می‌دانیم، بنویسیم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که حاصل عبارت به صورت زیر در می‌آید:

$$۲\cos(-۳۱\pi-\frac{\pi}{۴})+۳\tan(۳۱\pi+\frac{\pi}{۴})+۴\cot(-۳۱\pi-\frac{\pi}{۴})$$

طبق روابط:

$$\begin{cases}\cos(n\pi-\alpha)=(-۱)^n\cos\alpha\\ \tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(n\pi-\alpha)=-\cot\alpha\end{cases}$$

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=-۲\cos\frac{\pi}{۴}+۳\tan\frac{\pi}{۴}-۴\cot\frac{\pi}{۴}=-\sqrt{۲}-۱$$

۴۳-گزینهٔ ۱

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم و سعی می‌کنیم که آن را برحسب $\tan\alpha$ بنویسیم. با فرض اینکه α یک زاویه حاده است، داریم:

$$\frac{-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

با تقسیم تمام عبارات صورت و مخرج بر $\cos\alpha$ ، عبارت به شکل مقابل می‌شود:

$$\frac{-1-\tan\alpha}{\tan\alpha-1}$$

با قرار دادن $\tan\alpha=\frac{2}{3}$:

$$\frac{-1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1}=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}}=5$$

۴۴-گزینهٔ ۳

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم، داریم:

$$\frac{-2\sin\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha}=2\Rightarrow\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=2\Rightarrow\tan\alpha=2$$

۴۵-گزینهٔ ۳

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{20}$ در عبارت داده شده، داریم:

$$y=\frac{3\sin\frac{7\pi}{20}+5\cos\frac{3\pi}{20}}{3\sin\frac{7\pi}{20}+\cos\frac{3\pi}{20}}$$

با اندکی دقت متوجه می‌شویم که $\frac{7\pi}{20}$ را می‌توان به فرم $\frac{10\pi}{20}-\frac{3\pi}{20}$ یا به عبارت بهتر $\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{20}$ نوشت، حال عبارت y به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{3\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{20})+5\cos\frac{3\pi}{20}}{3\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{20})+\cos\frac{3\pi}{20}}=\frac{3\cos\frac{3\pi}{20}+5\cos\frac{3\pi}{20}}{3\cos\frac{3\pi}{20}+\cos\frac{3\pi}{20}}$$

حال داریم:

$$y=\frac{8\cancel{\cos\frac{3\pi}{20}}}{4\cancel{\cos\frac{3\pi}{20}}}=2$$

۴۶-گزینهٔ ۳

سعی بر آن است که کمان‌ها به صورت ضرایبی از 90° (یا 180°) و 20° بازنویسی شود و سپس عبارت را برحسب $\tan 20^\circ$ که توسط سؤال داده شده به دست آوریم؛ حال داریم:

$$\frac{\sin(\overset{\pi}{\overset{\uparrow}{180^\circ}}-20^\circ)-\cos(\overset{\pi}{\overset{\uparrow}{180^\circ}}+20^\circ)}{\cos(\underset{\frac{\pi}{2}}{\underset{\downarrow}{90^\circ}}+20^\circ)+\sin(\underset{\frac{\pi}{2}}{\underset{\downarrow}{90^\circ}}-20^\circ)}=\frac{\sin 20^\circ+\cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ+\cos 20^\circ}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos 20^\circ$:

$$\frac{\tan 20^\circ+1}{-\tan 20^\circ+1}=\frac{0/36+1}{-0/36+1}=\frac{1/36}{0/64}=\frac{17}{8}$$

۴۷-گزینهٔ ۱

ابتدا سعی می‌کنیم زوایای داده شده را به صورت ترکیبی از ضرایب 90° (یا 180°) و 15° بنویسیم و سپس در مرحله بعد، سعی بر آن است که در عبارت داده شده $\tan 15^\circ$ تولید کنیم:

$$\frac{\cos(\overset{\frac{3\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{270^\circ}}+15^\circ)-\sin(\overset{\frac{3\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{270^\circ}}-15^\circ)}{\sin(\underset{3\pi}{\underset{\downarrow}{540^\circ}}-15^\circ)-\sin(\underset{\frac{\pi}{2}}{\underset{\downarrow}{90^\circ}}+15^\circ)}$$

حال با توجه به قوانین گفته شده در مورد تغییر نسبت‌های مثلثاتی، تعیین علامت آن‌ها در ربع‌های مختلف و صرف‌نظر کردن از دورهای کامل، عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\sin 15^\circ-(-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}=\frac{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}$$

با تقسیم تمام عبارات موجود در صورت و مخرج بر $\cos 15^\circ$ داریم:

$$\frac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=\frac{0/28+1}{0/28-1}=\frac{1/28}{-0/72}=-\frac{16}{9}$$

۴۸-گزینهٔ ۴

ابتدا تمام عبارات را ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x,\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\cos x$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x,\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$$

از آن‌جایی که $\sin x.\cos x>0$. با توجه به روابط فوق و گزینه‌ها، تنها گزینه (۴) صحیح می‌باشد زیرا:

$$\sin(x-\frac{\pi}{2})\cos(x+\frac{\pi}{2})=(-\cos x)(-\sin x)=\cos x\sin x>0$$

۴۹- گزینهٔ ۳

با استفاده از تعریف نسبت کسینوس در مثلث قائم‌الزاویه، طول نردبان به راحتی قابل محاسبه است:

$$\cos 36^\circ=\frac{123}{\text{طول نردبان}}\Rightarrow \text{طول نردبان}=\frac{123}{\cos 36^\circ}$$

از آن‌جایی که 36° و 54° متمم یکدیگرند پس:

$$\cos 36^\circ=\sin 54^\circ$$

آنگاه:

$$\text{طول نردبان}=\frac{123}{\sin 54^\circ}=\frac{123}{0/82}=150\text{cm}=1/50$$

۵۰-گزینهٔ ۳

> **یادآوری:** اگر $\alpha+\beta=\pi$ باشد:
>
> $$\cos\alpha+\cos\beta=0$$

با توجه به نکته فوق و مجموع کمان اول و آخر، مجموع کمان دوم و هفتم و ... که برابر π می‌شود پس حاصل جمع این هشت عبارت صفر است.

۵۱-گزینهٔ ۴

شیب خط برابر $\tan ۱۲۰^\circ$ و مختصات نقطه‌ای که خط از آن عبور می‌کند $(۰,۲)$ است.

یافتن شیب:

$$m = \tan ۱۲۰^\circ = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

نوشتن معادله خط:

$$y - ۲ = -\sqrt{۳}(x - ۰) \rightarrow y = -\sqrt{۳}x + ۲$$

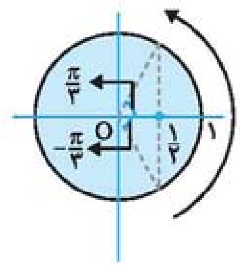
> **یادآوری:** برای نوشتن معادله خط گذرنده از دو نقطه $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$، ابتدا شیب را یافته و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:
>
> $$\text{شیب} = m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$
>
> $$y - (\text{عرض نقطه انتخابی}) = m(x - \text{طول نقطه انتخابی})$$

۵۲-گزینهٔ ۳

با توجه به محدوده تغییرات x، محدوده تغییرات $\cos ۳x$ را می‌یابیم، با این کار در حقیقت محدوده تغییرات $\frac{m-۱}{۲}$ را یافته‌ایم که از آن‌جا محدوده m به آسانی قابل محاسبه است:

$$-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹} \xRightarrow{\times ۳} -\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$$

کمان کسینوس از $-\frac{\pi}{۳}$ تا $+\frac{\pi}{۳}$ تغییر می‌کند، باید محدوده تغییرات کسینوس را در این بازه از روی دایره مثلثاتی به دست آوریم:



با دقت در دایره مثلثاتی، هنگامی‌که کمان از $-\frac{\pi}{۳}$ تا $\frac{\pi}{۳}$ تغییر می‌کند، کسینوس در بازه $\left(\frac{۱}{۲}, ۱\right]$ تغییر می‌کند، حال داریم:

$$\frac{۱}{۲} < \cos ۳x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \le ۱ \xRightarrow{\times ۲} ۱ < m - ۱ \le ۲$$

$$\xRightarrow{+۱} ۲ < m \le ۳$$

پس:

$$m \in (۲, ۳]$$

۵۳-گزینهٔ ۳

با اندکی دقت در کمان‌ها مشاهده می‌شود که جمع دو کمان برابر $\frac{\pi}{۲}$ (یا ۹۰°) است پس این دو زاویه متمم یکدیگرند یعنی $\tan(\frac{۵\pi}{۱۲} + a)$ همان $\cot(\frac{\pi}{۱۲} - a)$ می‌باشد و چون تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند پس:

$$\tan(\frac{۵\pi}{۱۲} + a) = \cot(\frac{\pi}{۱۲} - a) = \frac{۱}{۲}$$

۵۴-گزینهٔ ۱

از رابطه داده شده می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

$$\tan(B + ۳۰) = \frac{۱}{\tan(C + ۳۰)}$$

می‌دانیم $\frac{۱}{\tan\alpha} = \cot\alpha$ پس:

$$\tan(B + ۳۰) = \cot(C + ۳۰)$$

در یک مثلث تانژانت یک زاویه زمانی با کتانژانت زاویه دیگر برابر است که دو زاویه متمم یکدیگر باشند:

$$\hat{B} + ۳۰ + \hat{C} + ۳۰ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۳۰^\circ$$

می‌دانیم جمع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

که در آن $\hat{B} + \hat{C} = ۳۰^\circ$ در نتیجه: $\hat{A} = ۱۵۰^\circ$

۵۵-گزینهٔ ۲

> **یادآوری از فصل سوم:**
>
> ۱) $\log_c^a + \log_c^b + \log_c^d + \cdots + \log_c^z = \log_c^{(abd...Z)}$
>
> ۲) $\log_c^۱ = ۰$

با توجه به قسمت (۱) یادآوری فوق، A به صورت زیر در می‌آید:

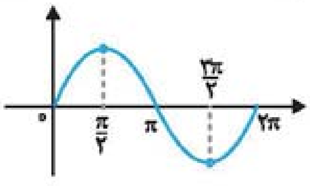
$$A = \log^{\tan ۱^\circ \tan ۲^\circ \tan ۳^\circ ... \tan ۸۹^\circ}$$

چون ۱° و ۸۹° متمم یکدیگرند پس $\tan ۸۹^\circ = \cot ۱^\circ$، چون ۲° و ۸۸° متمم یکدیگرند پس $\tan ۸۸^\circ = \cot ۲^\circ$ و ... و از آن‌جایی که $\tan\alpha \cot\alpha = ۱$ می‌باشد. پس حاصل ضرب تمام عبارات موجود در قسمت نمای لگاریتم، برابر یک می‌شود.

$$A = \log^{\tan ۱^\circ \tan ۲^\circ \tan ۳^\circ ... \cot ۳^\circ \cot ۲^\circ \cot ۱^\circ} = \log^۱ = ۰$$

۵۶-گزینهٔ ۳

با توجه به نمودار $y = \sin x$ در $[۰, ۲\pi]$ واضح است که گزینهٔ (۳) صحیح است.

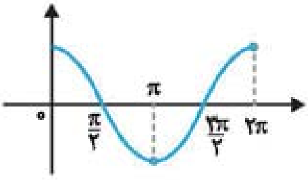


۵۷-گزینهٔ ۲

می‌دانیم ۱ رادیان تقریباً ۵۷° است پس ۲ رادیان تقریباً ۱۱۴° است که نقطهٔ B آن را نمایش می‌دهد.

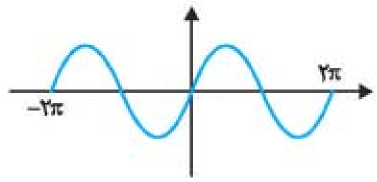
۵۸-گزینهٔ ۱

می‌دانیم $\cos(x + ۲K\pi) = \cos x$ پس کافی است نمودار $y = \cos x$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ رسم کنیم:

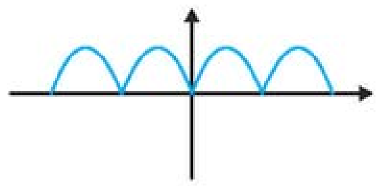


۵۹-گزینهٔ ۳

ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم:



حال قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور افقی قرینه می‌کنم تا شکل $y = |\sin x|$ به‌دست آید:



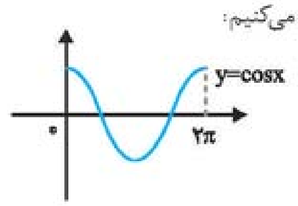
و این شکل از چهار شکل یکسان به دست آمده است.

۶۰-گزینهٔ ۴

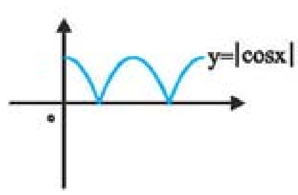
برای رسم $y = \cos(x - ۲)$ باید نمودار $y = \cos x$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم و در نهایت برای رسم $y = \cos(x - ۲) - ۱$ کافی است شکل را یک واحد به پایین منتقل نماییم.

۶۱-گزینهٔ ۲

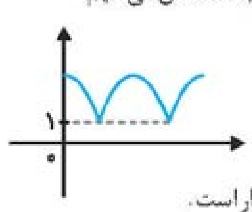
ابتدا نمودار $y = \cos x$ را در $[۰, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم:



حال قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور افقی قرینه می‌کنیم تا شکل $y = |\cos x|$ به دست آید:



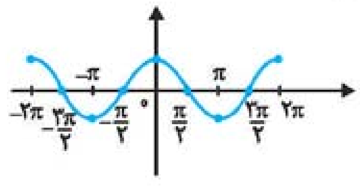
برای رسم $y = ۱ + |\cos x|$ شکل را یک واحد به بالا مستقل می‌کنیم:



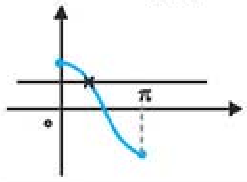
واضح است که شکل گزینه ۲ قسمتی از این نمودار است.

۶۲-گزینهٔ ۱

ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم:

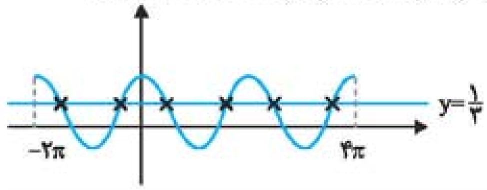


واضح است که این شکل در بازهٔ $[۰, \pi]$ یک به یک است چون هر خط موازی محور xها رسم شود، منحنی را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



۶۳-گزینهٔ ۳

ابتدا نمودار $y = \cos x$ را در $[-۲\pi, ۴\pi]$ رسم کرده سپس در همان دستگاه خط $y = \frac{۱}{۳}$ را رسم می‌کنیم تعداد تلاقی جواب‌های معادله هستند:



۶۴-گزینهٔ ۲

به بررسی تک‌تک جملات می‌پردازیم:

الف) $\sin\sqrt{۵}$ قطعاً یک عدد حقیقی است، تابع $y = \sin x$، هر مقداری را می‌تواند به عنوان ورودی بگیرد ($D = \mathbb{R}$)، امّا قطعاً مقدار خروجی‌اش عددی است بین ۱- و ۱، پس این جمله صحیح است.

ب) اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، تابع کسینوس مقدارش از ۱ شروع می‌شود و در نهایت به صفر می‌رسد. پس این جمله غلط است.

ب) طبق توضیح جمله قسمت (الف) این جمله صحیح نیست.

ت) $x = \pi$ را در تابع $\cos x$ قرار می‌دهیم، که نتیجه آن می‌شود:

$y = \cos\pi = -۱$

چون $x = \pi$ تابع $\cos x$ را صفر نکرد، پس ریشه آن نیست و این جمله نیز صحیح نیست.

۶۵-گزینهٔ ۱

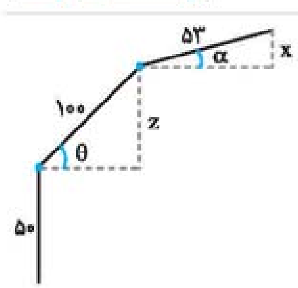
با به کار بردن نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه داریم، در نتیجه:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{x}{۱۵۳} \Rightarrow x = ۷۶/۵$$

پس ارتفاع نوک گیره از سطح زمین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$۵۰ + ۷۶/۵ = ۱۲۶/۵$$

۶۶-گزینهٔ ۲



شکل زیر را برای این مسئله در نظر می‌گیریم: y (ارتفاع نوک گیره از سطح زمین)، در حقیقت $x + z + ۵۰$ می‌باشد که برای یافتن x و z از تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم.

$$\sin\alpha = \frac{x}{۵۳} \Rightarrow x = ۵۳\sin\alpha$$

$$\sin\theta = \frac{z}{۱۰۰} \Rightarrow z = ۱۰۰\sin\theta$$

که نهایتاً y به فرم زیر می‌شود:

$$y = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۵۳\sin\alpha$$

۶۷- گزینهٔ ۳

تذکر:

۱- اگر صورت یک کسر مقدار ثابتی باشد، در صورتی این کسر بیشترین مقدار ممکن را داراست که مخرج آن حداقل باشد.

۲- حداکثر مقدار تابع $y = \sin x$ برابر ۱ و حداقل مقدار این تابع برابر ۱- است.

طبق توضیحات فوق، مخرج عبارت داده شده زمانی حداقل مقدارش را دارد که $\sin x = -1$ باشد، پس:

$$y = \frac{14}{3 + (-1)} = \frac{14}{2} = 7$$

۶۸- گزینهٔ ۲

فرض می‌کنیم $k = \frac{\cos x}{1 + 2\cos x}$ در نتیجه:

$$\cos = k + 2k\cos x \Rightarrow (1 - 2k)\cos x = k \Rightarrow \cos x = \frac{k}{1 - 2k}$$

چون $-1 \le \cos x \le 1$ (یا $|\cos x| \le 1$) پس:

$$\left|\frac{k}{1 - 2k}\right| \le 1 \Rightarrow |k| \le |1 - 2k| \Rightarrow (1 - k)(-1 + 3k) \le 0$$

$$\Rightarrow (k - 1)(3k - 1) \ge 0 \Rightarrow k \ge 1 \text{ یا } k \le \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k \in \mathbb{R} - (\frac{1}{3}, 1)$$

۶۹- گزینهٔ ۲

می‌دانیم $0 \le \sin^2 x \le 1$ می‌باشد، از روی این نامساوی، y را می‌سازیم:

$$0 \le \sin^2 x \le 1$$

طرفین را در (۲-) ضرب می‌کنیم: $0 \ge -2\sin^2 x \ge -2$

هر سه طرف را با ۳ جمع می‌کنیم: $3 \ge 3 - 2\sin^2 x \ge 1$

مشاهده می‌شود که کمترین مقدار این عبارت برابر ۱ است.

۷۰- گزینهٔ ۱

ابتدا صورت تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y = a\sin(\frac{\pi}{2} + b\pi x) = a\cos b\pi x$$

چون شکل داده شده، قرینه شکل اصلی $y = \cos x$ نیست پس a مقدار مثبت را می‌گیرد یعنی $a = 2$.

$x = 3/5$، چهارمین نقطه برخورد تابع با محور xهاست، از طرفی طبق دایره مثلثاتی می‌دانیم $x = \frac{7\pi}{2}$ چهارمین نقطه‌ای است که تابع $y = \cos x$ را صفر می‌کند.

یادآوری: برای رسم $y = f(Kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$، کافیست تمام xهای نمودار $f(x)$ را (بدون تغییر yآن‌ها) بر عدد K تقسیم کنیم.

طبق نکتهٔ فوق:

$$\frac{\frac{7\pi}{2}}{|b\pi|} = 3/5 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1 \text{ یا } b = -1$$

در نتیجه طبق گزینه‌های داده شده حاصل ab می‌تواند برابر با ۲ باشد.

۷۱- گزینهٔ ۳

چون شکل داده شده قرینه شکل اصلی $f(x) = \sin x$ نیست، پس a مقدار مثبت را می‌گیرد: $a = 6$

$x = 8$ از روی شکل پنجمین محل برخورد تابع با محور xهاست، از طرفی از روی دایره مثلثاتی، $x = 4\pi$ پنجمین ریشه $y = \sin x$ است، طبق قوانین انتقال و رسم $f(Kx)$ از روی $f(x)$ داریم:

$$\frac{4\pi}{|b|} = 8 \rightarrow |b| = \frac{\pi}{2} \rightarrow b = \frac{\pi}{2} \text{ یا } -\frac{\pi}{2}$$

در نتیجه طبق گزینه‌های داده شده ab می‌تواند 3π باشد.

۷۲- گزینهٔ ۳

نکته: تابع $y = f(x)$ را متناوب گوییم، هرگاه دامنه آن از هیچ طرف محدود نباشد و عدد $T > 0$ چنان یافت شود که اگر $x \in D_f$ آنگاه $(x + T) \in D_f$ و داشته باشیم $f(x + T) = f(x)$، در این صورت کوچک‌ترین مقدار مثبت T را دوره تناوب اصلی یا به اختصار دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌گوییم.

توابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$، توابعی متناوب هستند و دوره تناوب آن‌ها $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

چون شکل داده شده نسبت به شکل اصلی $y = \sin x$ قرینه نشده پس $a = 2$.

دوره تناوب از روی شکل برابر ۶ است، از طرفی طبق نکته فوق:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow b = 3 \text{ یا } b = -3$$

که $a + b$ با توجه به گزینه‌ها $\frac{7}{3}$ قابل قبول است.

۷۳- گزینهٔ ۴

ابتدا سعی می‌کنیم، تابع را فقط بر حسب یک نسبت مثلثاتی ($\sin x$ یا $\cos x$) بنویسیم:

می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس y به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$y = 3\sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) + 1 = 7\sin^2 x - 3$$

ماکزیمم عبارت $\sin^2 x$ برابر ۱ است پس ماکزیمم y برابر می‌شود با:

$$7(1) - 3 = 4$$

۷۴- گزینهٔ ۲

ابتدا عامل $\cos^2 x$ را طبق رابطه $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ برحسب $\sin x$ می‌نویسیم؛ آنگاه داریم:

با فرض $\sin^2 x = t$:

$$y = \sin^4 x - \sin^2 x + 1$$

$$y = t^2 - t + 1$$

پس یک عبارت درجه دوم داریم.

یادآوری: $f(x)=ax^۲+bx+c$ دارای یکی از دو شکل زیر است:

دارای Max

مقدار Max در $x_s=-\frac{b}{۲a}$ رخ می‌دهد که باید این مقدار در معادله منحنی قرار گیرد تا Max تابع به دست آید.

دارای Min

مقدار Min در $x_s=-\frac{b}{۲a}$ رخ می‌دهد که باید xs در معادله منحنی قرار گیرد تا Min تابع به دست آید.

چون ضریب $t^۲$ مثبت است پس عبارت دارای Min است، x_s را می‌یابیم:

$$x_s=\frac{۱}{۲}$$

این مقدار را در تابع قرار می‌دهیم:

$$y=t^۲-t+۱ \xRightarrow{t=\frac{۱}{۲}} y=\frac{۳}{۴}$$

۷۵-گزینهٔ ۱

اگر دو پرانتز را در هم ضرب کنیم، داریم:

$$(۱۳-\cos x)(۱+\cos x)=-\cos^۲ x+۱۲\cos x+۱۳$$

عبارت به‌دست آمده یک عبارت درجه دوم است که ضریب جمله دارای توان ۲، منفی است پس این عبارت دارای Max است که به ازای x_s رخ می‌دهد:

$$x_s=\frac{-۱۲}{-۲}=۶$$

امّا $\cos x$ نمی‌تواند برابر ۶ باشد (چون $-۱\le \cos x\le ۱$) پس Max به ازای $\cos x=۱$ رخ می‌دهد و داریم:

$$y=-(۱)^۲+۱۲(۱)+۱۳=۲۴$$

۷۶-گزینهٔ ۴

از رابطه $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\cos x>۰$ (چون $\cos x$، برابر حاصل یک رادیکال فرجه زوج شده است).

تذکر: a و b هر دو باید بزرگ‌تر، مساوی صفر باشند $\Leftarrow \sqrt{a}=b$.

پس x یا در ناحیه اول است یا در ناحیه چهارم.

اگر فرض کنیم $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد، پس $\cot x>۰$ و بنابراین $\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}>۱$ که برای cosx عددی بزرگ‌تر از ۱ قابل قبول نیست و x در ناحیه چهارم به عنوان ناحیه صحیح پذیرفته است.

۷۷-گزینهٔ ۱

با توجه به بسط $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\cos ۴۵\cos ۱۰۵+\sin ۴۵\sin ۱۰۵=\cos(۴۵-۱۰۵)$$

$$=\cos(-۶۰)=\cos ۶۰=\frac{۱}{۲}$$

۷۸-گزینهٔ ۴

می‌دانیم $۷۵=۳۰+۴۵$ پس:

$$\sin ۷۵=\sin(۳۰+۴۵)=\sin ۳۰\cos ۴۵+\sin ۴۵\cos ۳۰=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

با فاکتورگیری از عدد $\sqrt{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\sin ۷۵=\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\times(\sqrt{۳}+۱)$$

۷۹-گزینهٔ ۲

با استفاده از تعریف $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos b}{\sin b}}=\frac{\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\sin b+\cos b\sin a}{\sin a\sin b}}$$

آنگاه با استفاده از بسط $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ داریم:

$$\frac{\cancel{\sin(a+b)}\ \sin a\sin b}{\cancel{\sin(a+b)}\ \cos a\cos b}=\tan a.\tan b$$

۸۰-گزینهٔ ۳

چون A و B عکس هم‌اند پس $AB=۱$ در نتیجه:

$$۲\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)=۱$$

می‌دانیم $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ در نتیجه:

$$۲\cos\alpha\cos\beta(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta})=۱$$

عبارت را درون دو جمله‌ای ضرب می‌کنیم:

$$۲\sin\alpha\cos\beta+۲\sin\beta\cos\alpha=۱$$

با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۲ نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۲}$.

۸۱-گزینهٔ ۴

فرمول‌های $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ را می‌نویسیم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

با جمع دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=۲\sin\alpha\cos\beta$$

طرفین تساوی را بر $\sin\alpha\sin\beta$ تقسیم می‌کنیم تا عبارت به دست آید:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{۲\cancel{\sin\alpha}\cos\beta}{\cancel{\sin\alpha}\sin\beta}=۲\cot\beta$$

۸۲-گزینهٔ ۱

با استفاده از بسط

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ و $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos b\sin a$

داریم:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)-۲\sin x\cos y=$$
$$\sin x\cos y+\cancel{\cos x\sin y}+\sin x\cos y-\cancel{\cos x\sin y}-۲\sin x\cos y$$
$$=۲\sin x\cos y-۲\sin x\cos y=۰$$

۸۳-گزینهٔ ۱

با توجه به بسط $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ برای به دست آوردن جواب نیاز به $\sin\beta$ و $\sin\alpha$ که با داشتن $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ این امر بسیار ساده امکان‌پذیر است.

یافتن $\sin\alpha$: با توجه به رابطه $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ داریم:

$$\sin^۲\alpha=۱-(\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}\rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{۳}{۵}\\ \sin\alpha=-\frac{۳}{۵}\end{cases}$$

چون α در ربع اول است پس مقدار مثبت برای $\sin\alpha$ پذیرفته است.

یافتن $\sin\beta$: با توجه به رابطه $\sin^۲\beta=۱-\cos^۲\beta$ داریم:

$$\sin^۲\beta=۱-(-\frac{۱۲}{۱۳})^۲=\frac{۲۵}{۱۶۹}\rightarrow\begin{cases}\sin\beta=\frac{۵}{۱۳}\\ \sin\beta=-\frac{۵}{۱۳}\end{cases}$$

چون β در ربع دوم قرار دارد پس مقدار مثبت برای $\sin\beta$ پذیرفته است. حال برای محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ آماده‌ایم، پس:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=(\frac{۳}{۵})(-\frac{۱۲}{۱۳})+(\frac{۴}{۵})(\frac{۵}{۱۳})=-\frac{۱۶}{۶۵}$$

۸۴-گزینهٔ ۴

از متمم زوایا استفاده می‌کنیم تا بتوانیم از بسط‌های $\alpha\pm\beta$ استفاده کنیم:

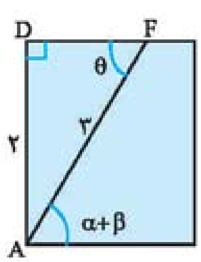
$$\frac{\cos۷۰\cos۱۰+\sin۱۰\sin۷۰}{\cos۶۸\cos۸+\sin۸\sin۶۸}$$

با توجه به بسط $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\frac{\cos(۷۰-۱۰)}{\cos(۶۸-۸)}=\frac{\cos۶۰}{\cos۶۰}=۱$$

۸۵-گزینهٔ ۴

واضح است که $\theta=\alpha+\beta$ دقت کنید:



در مثلث ADF، $\sin\theta$ را می‌یابیم:

$$\sin\theta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۲}{۳}$.

۸۶-گزینهٔ ۳

چون $\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۳}+\sin\alpha\sin\beta$ در نتیجه:

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۳}$$

۸۷-گزینهٔ ۱

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$۱+\tan۱۰\tan۲۰=۱+\frac{\sin۱۰}{\cos۱۰}\cdot\frac{\sin۲۰}{\cos۲۰}=\frac{\cos۱۰\cos۲۰+\sin۱۰\sin۲۰}{\cos۱۰\cos۲۰}$$

با استفاده از بسط $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\frac{\cos(۱۰-۲۰)}{\cos۱۰\cos۲۰}=\frac{\cos(-۱۰)}{\cos۱۰\cos۲۰}=\frac{\cancel{\cos۱۰}}{\cancel{\cos۱۰}\cos۲۰}=\frac{۱}{\cos۲۰}$$

۸۸-گزینهٔ ۲

> **نکته:**
>
> اگر $\tan(\alpha+\beta)=k$ آنگاه:
>
> $\tan\alpha+\tan\beta+k\tan\alpha\tan\beta=k$

طبق نکته فوق، چون $\tan(۳۳+۱۲)=\tan۴۵^\circ=۱$ پس:

$$\tan۳۳^\circ+\tan۱۲^\circ+\tan۳۳^\circ\tan۱۲^\circ=۱$$

۸۹-گزینهٔ ۲

$۲a$ را برحسب مجموع $a+b$ و $a-b$ می‌نویسیم، یعنی:

$$۲a=(a+b)+(a-b)$$

با فرض $a+b=A$ و $a-b=B$ و گرفتن تانژانت از طرفین تساوی فوق $\tan۲a$ به سادگی قابل محاسبه است:

$$\tan۲a=\tan(A+B)\Rightarrow\tan۲a=\frac{\tan A+\tan B}{۱-\tan A\tan B}$$

که $\tan A=\tan(a+b)=\frac{۲}{۵}$ و $\tan B=\tan(a-b)=\frac{۳}{۷}$ آنگاه:

$$\tan۲a=\frac{\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۷}}{۱-\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۷}}=۱$$

۹۰-گزینهٔ ۳

چون $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ در نتیجه:

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-۱$$

طرفین وسطین کرده و عبارت سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

$$\sin\alpha\sin\beta=-\cos\alpha\cos\beta\Rightarrow\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=۰$$
$$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=۰$$

از رابطه نتیجه می‌شود:

$$\alpha-\beta=K\pi+\frac{\pi}{۲}$$

۹۱- گزینهٔ ۲

با استفاده از فرمول $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ داریم:

$$\frac{1-\tan 20}{1+\tan 20}=\tan(\overset{\frac{\pi}{4}}{\overset{\uparrow}{45}}-20)=\tan 25^\circ$$

۹۲- گزینهٔ ۱

با فرض $\sqrt{3}=\tan 60^\circ$ و استفاده از تعریف نسبت $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ داریم:

$$\frac{\tan 60^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 15^\circ}$$

که با توجه به فرمول $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ داریم:

$$\frac{\tan 60^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 15}=\tan(60^\circ-15^\circ)=\tan 45^\circ=1$$

۹۳- گزینهٔ ۳

چون عبارت مطلوب برحسب تانژانت بیان شده است. از دو طرف عبارت $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}\to\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{5\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

آنگاه با توجه به فرمول $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ و $\tan\frac{5\pi}{4}=1$ داریم:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$$

$$\to\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1\quad *$$

حال حاصل پرانتز را می‌یابیم:

$$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\beta+\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta$$

که با توجه به * حاصل عبارت فوق برابر ۲ می‌شود.

۹۴- گزینهٔ ۲

$\sin x+\cos x$ از ما خواسته شده است، با توجه به رابطهٔ

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

به راحتی قابل محاسبه است:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\frac{1}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۹۵- گزینهٔ ۴

با توجه به اتحادهای زیر

$$\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(a-\frac{\pi}{4}) \text{ و } \sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin(a+\frac{\pi}{4})$$

داریم:

$$\frac{\sin 53^\circ+\cos 53^\circ}{\sin 53^\circ-\cos 53^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin(53^\circ+\overset{\frac{\pi}{4}}{\overset{\uparrow}{45^\circ}})}{\sqrt{2}\sin(53^\circ-\underset{\frac{\pi}{4}}{\underset{\downarrow}{45^\circ}})}=\frac{\sin 98^\circ}{\sin 8^\circ}=\frac{\sin(\overset{\frac{\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{90^\circ}}+8^\circ)}{\sin 8^\circ}$$

$$=\frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ}=\cot 8^\circ$$

۹۶- گزینهٔ ۳

نکته:

در عبارت $a\sin x+b\cos x$، اگر $\frac{b}{a}=\tan\alpha$، آنگاه حاصل عبارت $a\sin x+b\cos x$ برابر است با $\frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

چون $\sqrt{3}=\tan 60^\circ$، طبق نکته فوق:

$$\sin 50^\circ+\sqrt{3}\cos 50^\circ=\sqrt{1+3}\sin(50^\circ+60^\circ)=2\sin 110^\circ$$

$$=2\sin(\frac{\pi}{2}+20^\circ)=2\cos 20^\circ$$

راه دوم: چون $\sqrt{3}=\tan 60^\circ$ است پس:

$$\sin 50^\circ+\tan 60^\circ\cos 50^\circ=\sin 50^\circ+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cos 50^\circ=$$

$$\frac{\sin 50^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cos 50^\circ}{\cos 60^\circ}$$

با استفاده از بسط $\sin a\cos b+\cos a\sin b=\sin(a+b)$ و قرار دادن مقدار $\cos 60^\circ$ داریم:

$$\frac{\sin(60^\circ+50^\circ)}{\frac{1}{2}}=2\sin 110^\circ=2\sin(\frac{\pi}{2}+20^\circ)=2\cos 20^\circ$$

۹۷- گزینهٔ ۳

$\sqrt{3}$ همان $\tan 60^\circ$ است پس:

$$\frac{\cos 20^\circ+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{\frac{\cos 60^\circ\cos 20^\circ+\sin 60^\circ\sin 20^\circ}{\cos 60^\circ}}{\cos 40^\circ}$$

با استفاده از فرمول $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\frac{\cos(60-20)}{\cos 40\cos 60}=\frac{\cancel{\cos 40}}{\cancel{\cos 40}\cos 60}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

۹۸- گزینهٔ ۲

طبق رابطهٔ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ نتیجه می‌شود:

$$\sin 15\cos 15=\frac{1}{2}\sin 30=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

۹۹- گزینهٔ ۳

چون

$$\cos 165^\circ=\cos(\overset{\pi}{\overset{\uparrow}{180^\circ}}-15^\circ)=-\cos 15^\circ$$

$$\cos 105^\circ=\cos(\overset{\frac{\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{90^\circ}}+15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

آنگاه:

$$\cos 165^\circ\cos 105^\circ=\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$

و طبق رابطه $\sin a.\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$:

$$\cos 165^\circ\cos 105^\circ=\frac{1}{2}\sin 2(15^\circ)=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

۱۰۰- گزینهٔ ۴

با استفاده از اتحاد $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$:

$$4\sin 8^\circ\cos 8^\circ\cos 16^\circ = 4(\frac{1}{2}\sin 2(8^\circ))\cos 16^\circ = 2\sin 16^\circ\cos 16^\circ$$

که با توجه به $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ حاصل عبارت فوق می‌شود:

$$2\sin 16^\circ\cos 16^\circ = \sin 2(16^\circ) = \sin 32^\circ$$

۱۰۱- گزینهٔ ۳

طبق رابطهٔ $\cos a\cos 2a\cos 4a = \frac{\sin 8a}{8\sin a}$ نتیجه می‌شود:

$$\cos 10\cos 20\cos 40 = \frac{\sin 80}{8\sin 10}$$

چون $90 = 10 + 80$ پس $\sin 80 = \cos 10$ درنتیجه:

$$\text{عبارت} = \frac{\cos 10}{8\sin 10} = \frac{1}{8}\cot 10$$

۱۰۲- گزینهٔ ۴

با مخرج مشترک گیری عبارت:

$$\frac{\sin 3a\cos a}{\sin a} - \cos 3a = \frac{\sin 3a\cos a - \cos 3a\sin a}{\sin a}$$

آنگاه با استفاده از بسط $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\frac{\sin(3a - a)}{\sin a} = \frac{\sin 2a}{\sin a}$$

با استفاده از اتحاد $\sin 2a = 2\sin a\cos a$:

$$\frac{\sin 2a}{\sin a} = \frac{2\cancel{\sin a}\cos a}{\cancel{\sin a}} = 2\cos a$$

۱۰۳- گزینهٔ ۱

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$8\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(\frac{\pi}{2} - b) = 8\cos a\cos b\sin a\sin b$$

با توجه به $\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$:

$$8(\frac{1}{2}\sin 2a)(\frac{1}{2}\sin 2b) = 2\sin 2a\sin 2b$$

چون گزینه‌ها بر حسب زاویه a داده شده‌اند پس باید 2b را از بین ببریم:

$$a + b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{\pi}{4} - a \Rightarrow 2b = \frac{\pi}{2} - 2a$$

حال حاصل عبارت برابر می‌شود با:

$$2\sin 2a\sin 2b = 2\sin 2a\sin(\frac{\pi}{2} - 2a) = 2\sin 2a\cos 2a = \sin 4a$$

۱۰۴- گزینهٔ ۳

در تمارینی که $\sin\alpha$ (یا $\cos\alpha$) یا هر دو حضور دارند و $\tan\alpha$ (یا $\cot\alpha$) یا هر دو نیز حضور دارند معمولاً بهتر است که از تعریف $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ یعنی $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ استفاده شود:

$$\frac{4\cos 2x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{4\cos 2x}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}}$$

با ساده‌سازی عبارت و دانستن این نکته که $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ حاصل عبارت تبدیل به عبارت زیر می‌شود:

$$4\cos 2x\sin x\cos x$$

با استفاده از اتحاد زیر و نتیجه‌اش که در زیر می‌آید، عبارت ساده‌تر می‌شود:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

آنگاه حاصل عبارت اصلی را می‌یابیم:

$$4\cos 2x(\frac{1}{2}\sin 2x) = 2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x$$

۱۰۵- گزینهٔ ۴

با داشتن $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$ و به توان ۲ رساندن طرفین $\sin 2x$ را می‌یابیم:

$$(\sin x - \cos x)^2 = (-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4}$$

حال با استفاده از فرمول $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ داریم:

$$\cos 4x = 1 - 2(\frac{3}{4})^2 = -\frac{1}{8}$$

۱۰۶- گزینهٔ ۱

نکته:

دو اتحاد مهم:

$$1)\ \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$2)\ \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

با استفاده از اتحاد شماره ۱ و دانستن این نکته که دو برابر $\frac{\pi}{8}$ زاویه آشنایی به نام $\frac{\pi}{4}$ است که نسبت‌های آن را می‌دانیم پس:

$$\sin^6\frac{\pi}{8} + \cos^6\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2 \times \frac{\pi}{8}) = \frac{5}{8}$$

۱۰۷- گزینهٔ ۳

می‌دانیم $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ درنتیجه:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۸- گزینهٔ ۲

با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\cos^4\frac{\pi}{12} - \sin^4\frac{\pi}{12} = (\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12})(\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12})$$

با توجه به روابط $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ و $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ داریم:

$$(\cos 2(\frac{\pi}{12}))(1) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲

چون گزینه‌ها بر حسب n می‌باشد پس باید رابطه‌ای بین 76° و 7° (اعم از 2α، 3α و ...) باشد امّا ظاهراً هیچ رابطه‌ای نیست، با اندکی دقت متوجه می‌شویم که متمم 76° (یعنی 14°) دو برابر 7° است پس:

$$\sin 76^\circ = \cos 14^\circ$$

طبق رابطهٔ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ داریم:

$$\cos 14^\circ = 1 - 2\sin^2 7^\circ = 1 - 2n^2$$

۱۱۰-گزینهٔ ۳

با توجه به یادآوری زیر سؤال را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱-\tan^۲ a}{۱+\tan^۲ a}=\cos ۲a$$

حال داریم:

$$\frac{۱-\tan^۲(\frac{\pi}{۴}-a)}{۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۴}-a)}=\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-a)=\cos(\frac{\pi}{۲}-۲a)=\sin ۲a$$

۱۱۱-گزینهٔ ۲

با استفاده از اتحادهای زیر می‌توانیم به پاسخ مطلوب برسیم:

$$۱)\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$۲)\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$$

حال داریم:

$$\sin x\cos x(۱-۲\sin^۲ x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴x)=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

حال به ازای $x=۷/۵^\circ$:

$$\frac{۱}{۴}\sin ۴(۷/۵^\circ)=\frac{۱}{۴}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۸}$$

۱۱۲-گزینهٔ ۱

با فاکتورگیری از عبارت $\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\sin\alpha\cos\alpha(\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha)$$

و استفاده از اتحادهای $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ داریم:

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha(-\cos ۲\alpha)=-\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha=-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha)$$

با قرار دادن $\alpha=۲۲/۵^\circ$ داریم:

$$-\frac{۱}{۴}\sin(۴\times ۲۲/۵^\circ)=-\frac{۱}{۴}\sin ۹۰^\circ=-\frac{۱}{۴}$$

۱۱۳- گزینهٔ ۳

ابتدا عبارت پشت پرانتز را در پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$۴\cos\frac{\pi}{۱۲}(\cos\frac{\pi}{۱۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})=۴\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-۴\cos\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{\pi}{۱۲}$$

با اندکی دقت متوجه می‌شویم که دو برابر زاویه $\frac{\pi}{۱۲}$ (یعنی $\frac{\pi}{۶}$) زاویه‌ای آشنا است که ما تمام نسبت‌های مثلثاتی آن را می‌دانیم و حاصل قابل محاسبه است. با استفاده از اتحادهای زیر عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha+۱}{۲}$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$$

حال عبارت سؤال به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

$$۴(\frac{\cos ۲(\frac{\pi}{۱۲})+۱}{۲})-۴(\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{\pi}{۱۲}))$$

که با ساده‌سازی و جاگذاری $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ حاصل عبارت به $۱+\sqrt{۳}$ تبدیل می‌شود.

۱۱۴-گزینهٔ ۴

نکته: هرگاه $\sin x+\cos x$ یا $\sin x-\cos x$ را به ما بدهند، با توان ۲ رسانی طرفین می‌توان مقدار $\sin ۲x$ را محاسبه کنیم.

حال چون مقدار $\sin x-\cos x$ را داریم، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x-\cos x)^۲=(-\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow\underbrace{\cancel{\sin^۲ x+\cos^۲ x}}_{۱}-۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۳}{۴}$$

حال با توجه به داشتن مقدار $\sin ۲x$ و اتحاد $\cos ۴x=۱-۲\sin^۲ ۲x$، $\cos ۴x$ را می‌یابیم:

$$\cos ۴x=۱-۲(\frac{۳}{۴})^۲=-\frac{۱}{۸}$$

۱۱۵-گزینهٔ ۴

چون $\cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و انتهای کمان x در ربع اول واقع است پس:

$$\sin x=\sqrt{۱-\cos^۲ x}=\sqrt{۱-\frac{۵}{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

حال با استفاده از فرمول $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$ داریم:

$$\tan ۲x=\frac{۲(\frac{۲}{\sqrt{۵}})}{۱-(\frac{۲}{\sqrt{۵}})^۲}=۴\sqrt{۵}$$

۱۱۶-گزینهٔ ۳

روش اول: با استفاده از $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$ داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}.\tan\alpha}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵}\rightarrow\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$$

حال با داشتن $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ به راحتی $\tan ۲\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۲}{۳})}{۱-(\frac{۲}{۳})^۲}=۲/۴$$

روش دوم:

یادآوری:

یک اتحاد کاربردی:

$$\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha) \quad \text{یا} \quad \frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

با استفاده از این اتحاد:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$$

که $\tan ۲\alpha$ به راحتی قابل محاسبه است.

۱۱۷- گزینهٔ

با توجه به تساوی $۲=\frac{۲\cos x}{\sin x+۳\cos x}$ داریم:

$$۲\sin x+۶\cos x=۲\cos x\Rightarrow ۲\sin x=-۴\cos x\Rightarrow \tan x=-۲$$

بنابراین $\tan ۲x$ به راحتی قابل محاسبه است:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲} x}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^{۲}}=\frac{۴}{۳}$$

حال چون $\tan ۲x$ و $\cot ۲x$ معکوس یکدیگرند، در نتیجه:

$$\cot ۲x=\frac{۳}{۴}$$

۱۱۸- گزینهٔ

ابتدا ببینیم سؤال از ما چه نسبتی را می‌خواهد:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\cot ۲x$$

حال با داشتن $\sin x=\frac{۳}{۵}$ و رابطه $\sin^{۲} x+\cos^{۲} x=۱$ و در نظر گرفتن محدوده x داده شده ($۰<x<\frac{\pi}{۲}$، یعنی x در ربع اول)، $\cos x$ قابل محاسبه است:

$$(\frac{۳}{۵})^{۲}+\cos^{۲}x=۱\Rightarrow\begin{cases}\cos x=+\frac{۴}{۵}\\ \cos x=-\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

چون کمان داده شده در ربع اول است پس $\cos x=\frac{۴}{۵}$ قابل قبول است حال با داشتن $\cos x$ و $\sin x$، $\sin ۲x$، $\cos ۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin ۲x=۲\sin x\cos x=۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱=۲(\frac{۴}{۵})^{۲}-۱=\frac{۷}{۲۵}$$

حال با توجه به تعریف $\cot ۲x=\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}$، $\cot ۲x$ قابل محاسبه است:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\cot ۲x=-\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}=\frac{-\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=-\frac{۷}{۲۴}$$

۱۱۹-گزینهٔ

ابتدا $\tan ۲\alpha$ را از روی $\tan\alpha$ و فرمول $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۲(۲)}{۱-(۲)^{۲}}=-\frac{۴}{۳}$$

حال مقدار $\tan(۲\alpha-\beta)$ را با توجه به بسط $\tan(\alpha+\beta)$ می‌یابیم:

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan ۲\alpha-\tan\beta}{۱+\tan ۲\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱+(-\frac{۴}{۳})(-\frac{۱}{۳})}=-۳$$

۱۲۰-گزینهٔ

با استفاده از اتحاد $۱-\cos ۲x=۲\sin^{۲}x$ و $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲}x$ داریم:

$$\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}=\frac{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}=\tan^{۲}\frac{x}{۲}=(\sqrt{۲})^{۲}=۲$$

۱۲۱-گزینهٔ

روش اول: با توجه به اینکه $\pi<x<۲\pi$ در نتیجه $\sin x<۰$ و نیز می‌دانیم همواره $۱+\cos x>۰$ است، داریم:

$$\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}=\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}}=\sqrt{\frac{۱-\cos^{۲}x}{(۱+\cos x)^{۲}}}$$

آنگاه طبق رابطه $۱-\cos^{۲}x=\sin^{۲}x$ داریم:

$$\sqrt{\frac{\sin^{۲}x}{(۱+\cos x)^{۲}}}=\frac{|\sin x|}{|۱+\cos x|}=\frac{-\sin x}{۱+\cos x}$$

آنگاه از رابطه‌های $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $۱+\cos x=۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}$ داریم:

$$\frac{-\cancel{۲}\sin\frac{x}{۲}\cancel{\cos\frac{x}{۲}}}{\cancel{۲}\cancel{\cos^{۲}\frac{x}{۲}}_{\cos\frac{x}{۲}}}=-\tan\frac{x}{۲}$$

روش دوم:

یادآوری:

(نصف قوس):

$$۱-\cos x=۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

$$۱+\cos x=۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}$$

با توجه به دو رابطه فوق داریم:

$$\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}=\sqrt{\frac{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}}=\left|\tan\frac{x}{۲}\right|$$

چون $\pi<x<۲\pi$ یعنی $\frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۲}<\pi$:

$$\left|\tan\frac{x}{۲}\right|=-\tan\frac{x}{۲}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۱

با توجه به روابط $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ و $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ داریم:

$$\frac{2\sin a\cos a}{2\cos^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}$$
$$=\tan\frac{a}{2}$$

۱۲۳- گزینهٔ ۳

ابتدا حاصل عبارت را می‌یابیم:

$$\sin x\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x(\cos x)(-\sin x)(-\cos x)$$

با توجه به $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ داریم:

$$(\frac{1}{2}\sin 2x)(\frac{1}{2}\sin 2x)=\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

یادآوری:

فرمول‌های توان شکن: $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

با استفاده از فرمول توان شکن و داشتن $\cos 4x$ داریم:

$$\frac{1}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2})=\frac{1}{4}(\frac{1-a}{2})=\frac{1-a}{8}$$

۱۲۴- گزینهٔ ۱

با استفاده از فرمول‌های زیر عبارت را بازنویسی می‌کنیم:

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$
$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$\frac{1+\sin 2a-\cos 2a}{1+\sin 2a+\cos 2a}=\frac{2\sin^2 a+\sin 2a}{2\cos^2 a+\sin 2a}$$

با استفاده از $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{2\sin^2 a+2\sin a\cos a}{2\cos^2 a+2\sin a\cos a}$$

با فاکتورگیری از $2\sin a$ در صورت عبارت و $2\cos a$ در مخرج عبارت:

$$\frac{2\sin a\,\cancel{(\sin a+\cos a)}}{2\cos a\,\cancel{(\cos a+\sin a)}}=\tan a$$

۱۲۵- گزینهٔ ۲

با نوشتن $\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ حل مسئله را آغاز می‌کنیم:

$$2\frac{\cos x}{\sin x}(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x})=2\frac{\cos x}{\sin x}(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x})$$

با استفاده از فرمول‌های $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ داریم:

$$\frac{2\cos x}{\sin x}(\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x})=2$$

۱۲۶- گزینهٔ ۲

با داشتن $\tan x+\cot x=6$، $\sin 2x$ به راحتی با توجه به فرمول $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ قابل محاسبه است پس:

$$\frac{2}{\sin 2x}=6\rightarrow \sin 2x=\frac{1}{3}$$

۱۲۷- گزینهٔ ۴

با توجه به اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ داریم:

$$\cot 75-\tan 75=2\cot 150^\circ$$

محاسبه $\cot 150^\circ$:

$$\cot 150^\circ=\cot(\underset{\pi}{\underbrace{180^\circ}}-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

در نتیجه:

$$\cot 75^\circ-\tan 75^\circ=2\cot 150^\circ=2(-\sqrt{3})$$

۱۲۸- گزینهٔ ۴

چون $\cot a-\tan a=2\cot 2a$ پس در نتیجه:

$$\cot\frac{\pi}{16}-\tan\frac{\pi}{16}=2\cot\frac{\pi}{8}$$

حال باید عبارت $2\cot\frac{\pi}{8}-2\tan\frac{\pi}{8}$ را حساب کنیم. ابتدا از ۲ فاکتور می‌گیریم:

$$2(\cot\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8})$$

طبق تساوی بیان شده در ابتدا باز هم نتیجه می‌شود:

$$\text{عبارت}=2(2\cot\frac{\pi}{4})=4$$

۱۲۹- گزینهٔ ۱

ابتدا عبارت داده شده را طرفین - وسطین می‌کنیم، پس:

$$2\sin x-6\cos x=\sin x+2\cos x\Rightarrow \tan x=8$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}$$

که با توجه به اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ داریم:

$$\frac{2}{\sin 2x}=\tan x+\cot x$$

که $\tan x=8$ و $\cot x=\frac{1}{8}$ خواهد بود پس:

$$\frac{2}{\sin 2x}=\tan x+\cot x=8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۲

با ضرب دو عبارت نتیجه می‌شود:

$$3\sin a-4\sin^3 a$$

که همان فرمول $\sin 3a$ است با فرض $a=\frac{\pi}{18}$ داریم:

$$\sin 3a=\sin(3\times\frac{\pi}{18})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

۱۳۱- گزینهٔ

عبارت را به صورت زیر ضرب می‌کنیم:

$$\sin x\cos x(3-4\sin^2 x)(3-4\cos^2 x)=$$

$$(3\sin x-4\sin^3 x)(3\cos x-4\cos^3 x)$$

$$=(\sin 3x)(-\cos 3x)=-\sin 3x\cos 3x$$

طبق رابطهٔ $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$ داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{-1}{2}\sin 6x$$

به ازای $x=\frac{\pi}{36}$ عبارت برابر $-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}$ یعنی $\frac{-1}{4}$ می‌گردد.

۱۳۲-گزینهٔ

نکته:

یک رابطه کاربردی:

$$\cos a\cos(60-a)\cos(60+a)=\frac{1}{4}\cos 3a$$

با استفاده از رابطه فوق و فرض $a=20^\circ$، چون $60^\circ-20^\circ=40^\circ$ و $60^\circ+20^\circ=80^\circ$ پس می‌توان از رابطه فوق استفاده کرد:

$$8\cos 80^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ=8\left(\frac{1}{4}\cos 3(20^\circ)\right)=1$$

۱۳۳-گزینهٔ

با توجه به شکل نتیجه می‌شود $\theta=30^\circ$ پس:

$$\cos\theta=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۴-گزینهٔ

تساوی داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\tan a}{1+\tan^2 a}\times\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{2}\sin 2a\cos 2a=\frac{1}{8}$$

با توجه به فرمول $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$ داریم:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 4a\right)=\frac{1}{8}\Rightarrow\sin 4a=\frac{1}{2}$$

یادآوری:

$$\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

$$\cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

۱۳۵-گزینهٔ

با استفاده از اتحاد مزدوج صورت و مخرج عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}$$

با استفاده از بسط های

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

و

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

داریم:

$$\frac{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta).\sin(\alpha+\beta)}=\cot(\alpha+\beta).\cot(\alpha-\beta)\qquad(1)$$

با داشتن $\tan(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$، $\cot(\alpha-\beta)=\frac{4}{3}$ خواهد بود و با داشتن $\alpha+\beta=135^\circ$ داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan 135^\circ=\tan(\underset{\pi}{\underset{\downarrow}{180^\circ}}-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$$

در نتیجه $\cot(\alpha+\beta)=-1$ پس حاصل (۱) می‌شود:

$$\left(\frac{4}{3}\right)(-1)=-\frac{4}{3}$$

۱۳۶-گزینهٔ

ابتدا از بسط $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ استفاده می‌کنیم و عبارت سمت راست را بسط می‌دهیم:

$$3\sin x+4\cos x=k\sin x\cos\phi+k\sin\phi\cos x$$

با برابر قرار دادن ضرایب $\sin x$ و $\cos x$ در سمت راست و چپ تساوی داریم:

$$3=k\cos\phi$$

$$4=k\sin\phi$$

عبارات سمت چپ و راست تساوی‌های فوق را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم، با فاکتورگیری از k^2:

$$9+16=k^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)$$

می‌دانیم: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ پس:

$$k^2=25\Rightarrow k=\pm 5$$

۱۳۷-گزینهٔ

یادآوری:

چند اتحاد مهم:

1) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

2) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

3) $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin(a+\frac{\pi}{4})$

4) $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(a-\frac{\pi}{4})$

با استفاده از اتحادهای فوق عبارت داده شده برابر است با:

$$\sin 3x+\cos 3x=K\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2}\sin(3x+\frac{\pi}{4})=K\sqrt{6}$$

$x=\frac{\pi}{36}$ ریشه معادله فوق است یعنی در معادله فوق صدق می‌کند:

$$\sqrt{2}\sin(3\times\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{4})=K\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=K\sqrt{6}\Rightarrow K=\frac{1}{2}$$

۱۳۸-گزینهٔ

طرفین رابطه $۳\cos\alpha + ۴\sin\alpha = ۵$ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۴}\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{۵}{۴}$$

حال به جای $\frac{۳}{۴}$، $\tan\beta$ را جاگذاری می‌کنیم:

$$\tan\beta\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{۵}{۴}$$

طرفین رابطه فوق را در $\cos\beta$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta = \frac{۵}{۴}\cos\beta$$

سمت چپ عبارت فوق با توجه به بسط

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

برابر است با:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{۵}{۴}\cos\beta \qquad (۱)$$

حال چون $\tan\beta$ را داریم، با توجه به آن می‌توانیم $\cos\beta$ را محاسبه کنیم (با یادآوری رابطه $۱+\tan^۲\beta = \frac{۱}{\cos^۲\beta}$).

$$۱ + (\frac{۳}{۴})^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\beta} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{۴}{۵} \qquad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲):

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{۵}{۴}(\pm\frac{۴}{۵}) = \pm۱$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ جواب قابل قبول است.

۱۳۹-گزینهٔ

عبارت داده شده را با کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه می‌کنیم:

$$۹\sin^۲ x - ۲۴\sin^۴ x + ۱۶\sin^۶ x = (۳\sin x - ۴\sin^۳ x)^۲$$

که با استفاده از اتحاد $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x$ داریم:

$$(۳\sin x - ۴\sin^۳ x)^۲ = (\sin ۳x)^۲$$

که به ازای $x = \frac{\pi}{۱۸}$ می‌شود:

$$(\sin\frac{۳\pi}{۱۸})^۲ = (\sin\frac{\pi}{۶})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

۱۴۰-گزینهٔ

$\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$ را A فرض می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$$

حال طرفین عبارت را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^۲ = \tan x + \cot x + ۲\sqrt{\tan x . \cot x}$$

با یادآوری اینکه $\tan x . \cot x = ۱$ و استفاده از اتحاد $\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x}$، عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$A^۲ = \frac{۲}{\sin ۲x} + ۲ \qquad (۱)$$

حال با داشتن $\sin x + \cos x = \frac{۴}{۳}$ و به توان ۲ رساندن طرفین $\sin ۲x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\sin x + \cos x)^۲ = \frac{۱۶}{۹} \longrightarrow ۱ + \sin ۲x = \frac{۱۶}{۹} \longrightarrow \sin ۲x = \frac{۷}{۹}$$

حال $A^۲$ می‌شود:

$$A^۲ = \frac{۲}{\frac{۷}{۹}} + ۲ = \frac{۳۲}{۷}$$

امّا به دنبال A بودیم در نتیجه:

$$A = \sqrt{\frac{۳۲}{۷}}$$

فصل چهارم

مثلثات

۱۳۸