درس اول
مفاهیم اولیه، مماس، قاطع و زاویه در دایره

تعریف دایره: دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه است که فاصلهٔ آن نقطه‌ها از نقطهٔ ثابتی واقع در همان صفحه، مقدار ثابتی باشد. آن نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره** و آن فاصلهٔ ثابت را **شعاع دایره** می‌نامند.

در شکل روبه‌رو، O مرکز و R شعاع دایره است. مجموعهٔ نقطه‌های روی دایره را با نماد $C(O,R)$[1] نمایش می‌دهیم و آن را به صورت روبه‌رو، می‌خوانیم: «دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R»

با توجه به تعریف دایره می‌توان گفت که اگر دو نقطهٔ M و N روی محیط دایرهٔ $C(O,R)$ باشند، آن‌گاه $OM = ON = R$.

وضعیت نسبی یک نقطه با یک دایره

هر دایره، صفحه را به سه بخش جدا از هم تقسیم می‌کند. یک بخش آن، نقطه‌هایی از صفحه هستند که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره می‌باشند، این نقطه‌ها را **نقطه‌های درونی دایره** می‌نامند. بخش دوم، نقطه‌هایی از صفحه هستند که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره‌اند، این نقطه‌ها را **محیط دایره** می‌نامند و سرانجام بخشی از صفحه شامل نقطه‌هایی است که فاصله‌شان از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره هستند، این بخش را **نقطه‌های بیرونی دایره** می‌نامند.

تعریف قطر دایره: هر پاره‌خطی را که از مرکز دایره بگذرد و دو سر آن به محیط دایره محدود باشد، قطر دایره می‌نامند.

نتیجه اندازهٔ قطر دایره، دو برابر شعاع آن است.

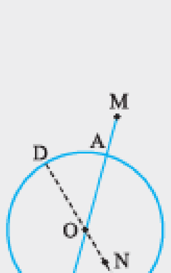
تعریف دایره‌های هم‌مرکز: در یک صفحه، دایره‌هایی با شعاع‌های نابرابر را که مرکز آن‌ها بر هم منطبق باشند، دایره‌های هم‌مرکز می‌نامند.

تعریف وتر در دایره: پاره‌خطی که دو نقطه از محیط دایره‌ای را به هم وصل می‌کند، **وتر** آن دایره می‌نامند.

تذکر به سادگی می‌توان دریافت که قطر یک دایره، بزرگ‌ترین وتر دایره است.

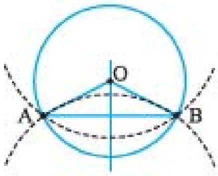
فاصلهٔ یک نقطه از دایره

تعریف فاصلهٔ یک نقطه از دایره: اگر نقطهٔ M در صفحهٔ دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، چنان‌چه از M به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، کم‌ترین فاصلهٔ M از دو نقطهٔ A و B را فاصلهٔ نقطهٔ M از مرکز دایره می‌نامند. در شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ M از دایره، برابر MA و فاصلهٔ نقطهٔ N از دایره، برابر NC است. هم‌چنین در این شکل MB و ND به ترتیب بیشترین فاصلهٔ دو نقطهٔ M و N از دایره هستند. توجه داشته باشیم که اگر بیشترین فاصلهٔ یک نقطه از دایره، بیشتر از قطر باشد، آن نقطه بیرون دایره و اگر بیشترین فاصلهٔ یک نقطه از دایره، کم‌تر از قطر باشد، آن نقطه درون دایره است.



۱- حرف C سر حرف کلمهٔ Circle به معنی دایره است.

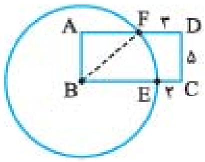
مسئلهٔ اساسی ۱ فرض کنیم دو نقطهٔ A و B در یک صفحه قرار دارند. در این صورت، مجموعهٔ مرکز دایره‌هایی واقع بر آن صفحه که از این دو نقطه می‌گذرند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



حل اگر دایره‌ای از دو نقطهٔ A و B بگذرد، آن‌گاه مرکز آن از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است و در نتیجه روی عمودمنصف آن قرار دارد.

برعکس، اگر نقطهٔ O روی عمودمنصف AB قرار داشته باشد، آن‌گاه دایرهٔ به مرکز O و شعاع OA یا OB از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد.

نتیجه بر دو نقطهٔ متمایز، بی‌شمار دایره می‌گذرد.



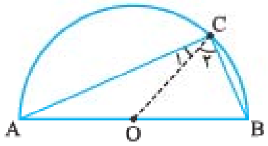
مثال در شکل مقابل، $ABCD$ یک مستطیل و مرکز دایره روی B قرار دارد. اگر $FD=۳$ ، $DC=۵$ و $EC=۲$ باشد، اندازهٔ شعاع دایره را پیدا کنید.

حل اگر شعاع دایره را R بگیریم، آن‌گاه $BF=BE=R$ و در نتیجه $BC=R+۲$. ضمناً داریم:

$$AD=BC \Rightarrow AF+۳=R+۲ \Rightarrow AF=R-۱$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF، داریم:

$$BF^۲=AF^۲+AB^۲ \Rightarrow R^۲=(R-۱)^۲+۵^۲ \Rightarrow R=۱۳$$



مثال در شکل مقابل، نقطهٔ C روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB قرار دارد. اگر C بر A یا B منطبق نباشد، اندازهٔ زاویهٔ ACB چند درجه است؟

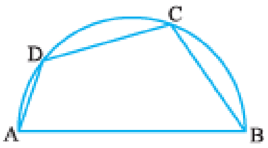
حل اگر O مرکز نیم‌دایره باشد و از O به C وصل کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA=OC \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{A} \\ OC=OB \Rightarrow \hat{C}_۲=\hat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را با هم}} \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=\hat{A}+\hat{B} \Rightarrow \hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$$

در مثلث ABC مجموع زوایا ۱۸۰ درجه است، پس داریم:

$$\hat{C}+\underbrace{\hat{A}+\hat{B}}_{\hat{C}}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۹۰^\circ$$

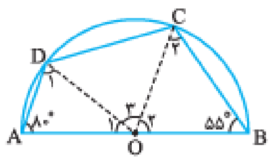
تذکر در بخش‌های بعدی، مثال فوق را به روشی ساده‌تر پاسخ خواهیم داد ولی در این‌جا فقط با به کار بردن مفاهیم اولیه، آن را حل کرده‌ایم.



مثال در شکل مقابل، نقطه‌های C و D روی نیم‌دایره‌ای به قطر $AB=۸$ قرار دارند. اگر $\hat{A}=۸۰^\circ$ و $\hat{B}=۵۵^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ طول وتر CD چه‌قدر است؟

حل چون $AB=۸$ و AB قطر است، پس شعاع دایره $R=۴$ می‌باشد. اگر O مرکز نیم‌دایره باشد و از O به C و D وصل کنیم، آن‌گاه داریم:

$$OA=OD \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{A}=۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱=۲۰^\circ \quad \text{و} \quad OC=OB \Rightarrow \hat{C}_۲=\hat{B}=۵۵^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲=۷۰^\circ$$

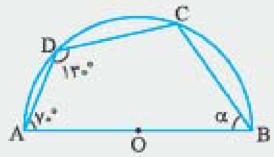


چون مجموع $\hat{O}_۱$ ، $\hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۳$ برابر ۱۸۰° است، پس $\hat{O}_۳=۹۰^\circ$.

مثلث COD در رأس O، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است و با توجه به رابطهٔ فیثاغورس، داریم:

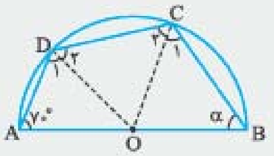
$$CD^۲=OC^۲+OD^۲=R^۲+R^۲=۲R^۲=۲\times۴^۲ \Rightarrow CD=۴\sqrt{۲}$$

تست **شکل مقابل، نیم‌دایره‌ای به مرکز O می‌باشد. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟**



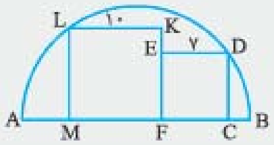
۱) ۵۰ ۲) ۵۵
۳) ۶۰ ۴) ۶۵

پاسخ **گزینهٔ ۱** از O به نقاط C و D وصل می‌کنیم. چون در مثلث OAD داریم $OA = OD$، پس $\hat{D}_1 = \hat{A} = 70^\circ$ و چون تمام زاویهٔ D برابر ۱۳۰ درجه است، پس $\hat{D}_2 = 60^\circ$. از طرفی $OC = OD$، در نتیجه $\hat{C}_2 = \hat{D}_2 = 60^\circ$ و از آن‌جا که $OC = OB$، پس $\hat{C}_1 = \hat{B} = \alpha$ و در نتیجه $\hat{C} = 60^\circ + \alpha$. می‌دانیم مجموع زاویه‌های درونی هر چهارضلعی، برابر ۳۶۰ درجه است، پس در چهارضلعی ABCD، داریم:



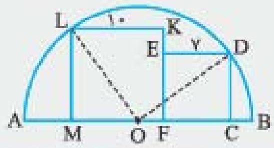
$$70^\circ + 130^\circ + (60^\circ + \alpha) + \alpha = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

تست **اگر در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره و دو چهارضلعی درون نیم‌دایره، مربع‌هایی به اضلاع ۷ و ۱۰ باشند که یک ضلع از هر کدام، روی قطر AB قرار دارد. توان دوم شعاع نیم‌دایره کدام است؟**



۱) ۱۲۵ ۲) ۱۳۶
۳) ۱۴۴ ۴) ۱۴۹

پاسخ **گزینهٔ ۴** اگر O مرکز نیم‌دایره، شعاع آن R و $OF = x$ باشد، آن‌گاه $OC = x + 7$ و $OM = 10 - x$ است. اکنون داریم:

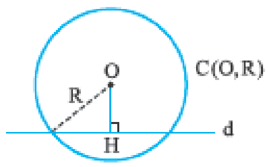


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ODC}: OD^2 = OC^2 + CD^2 \Rightarrow R^2 = (x+7)^2 + 7^2 \\ \overset{\Delta}{OLM}: OL^2 = OM^2 + LM^2 \Rightarrow R^2 = (10-x)^2 + 10^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 \text{ و } R^2 = 149$$

حالت‌های نسبی خط و دایرهٔ واقع بر یک صفحه

خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ که در یک صفحه قرار دارند نسبت به هم، یک و تنها یکی از سه وضعیت زیر را می‌توانند داشته باشند:

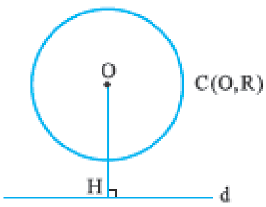
۱- خط و دایره در دو نقطه مشترک هستند:



OH<R
خط و دایره متقاطع‌اند.

در این صورت می‌گوییم، خط و دایره متقاطع هستند. با توجه به شکل روبه‌رو، مشاهده می‌شود اگر خط، دایره را قطع کند، فاصلهٔ مرکز دایره از خط موردنظر، کم‌تر از شعاع دایره است.

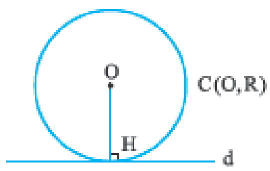
۲- خط و دایره، نقطهٔ مشترک ندارند:



OH>R
خط و دایره نقطهٔ مشترک ندارند.

در این صورت، با توجه به شکل روبه‌رو، فاصلهٔ مرکز دایره از خط، بیشتر از شعاع دایره است.

۳- خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک هستند:



OH=R
خط بر دایره مماس است.

در این صورت، می‌گوییم خط بر دایره مماس است. وقتی خط بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از خط، برابر شعاع دایره است. نقطهٔ مشترک خط و دایره را در این حالت، نقطهٔ تماس و شعاع گذرنده از این نقطه را **شعاع وارد بر نقطهٔ تماس** یا **شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس** می‌نامند.[1]

با توجه به شکل مقابل، نتیجه می‌شود که:

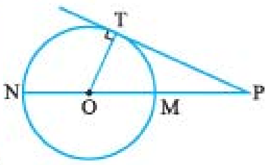
شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.

با توجه به مواردی که بیان شد، می‌توان نتیجهٔ زیر را بیان نمود:

نتیجهٔ مهم **شرط این‌که خطی بر دایره‌ای مماس باشد آن است که فاصلهٔ خط، از مرکز دایره، برابر شعاع دایره باشد و برعکس، اگر فاصلهٔ مرکز دایره‌ای از یک خط، برابر شعاع دایره باشد، آن خط بر دایره مماس خواهد بود.**

۱- در واقع، خط مماس بر دایره، حالت حدی خط و دایرهٔ متقاطع است به شرط آن‌که نقاط برخورد خط و دایره آن‌قدر به هم نزدیک شوند تا بر هم منطبق گردند.

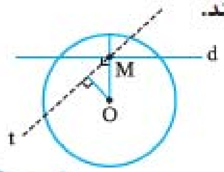
مثال **نقطهٔ P بیرون دایرهٔ $C(O,۵)$ و به فاصلهٔ ۸ از آن قرار دارد. اگر از P، مماس PT را بر دایره رسم کنیم، طول PT چه‌قدر است؟**



حل با توجه به تعریف فاصلهٔ یک نقطه از یک دایره، اگر OP دایره را در M و N قطع کند، با توجه به شکل روبه‌رو، فاصلهٔ P از دایره، برابر $PM = ۸$ است و در نتیجه $OP = ۱۳$ و چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس مثلث OPT در رأس T قائم‌الزاویه است و بنا بر قضیهٔ فیثاغورس، داریم:

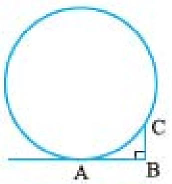
$$PT^۲ = OP^۲ - OT^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow PT = ۱۲$$

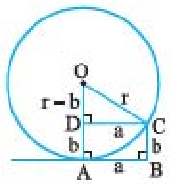
مثال **ثابت کنید اگر نقطهٔ M درون دایره باشد، هر خطی که از این نقطه بگذرد، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.**



حل اگر نقطهٔ O، مرکز دایره باشد و خط دلخواه t از M بگذرد، فاصلهٔ O از این خط، کم‌تر از OM است؛ زیرا در هر مثلث قائم‌الزاویه، اضلاع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر هستند. چون نقطهٔ M درون دایره است، پس $OM < R$، بنابراین فاصلهٔ O از خط t نیز کم‌تر از R است و در نتیجه خط t، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

مثال **در شکل مقابل، AB در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اگر $CB \perp AB$، $AB = a$، $BC = b$ و شعاع دایره r باشد، آن‌گاه ثابت کنید $r = \frac{a^۲ + b^۲}{۲b}$**

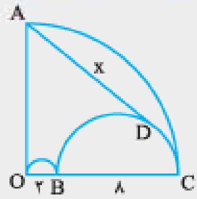




حل اگر نقطهٔ O مرکز دایره باشد، چنان‌چه از نقطهٔ O به A وصل و از C، عمودی بر OA رسم کنیم، چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است، در نتیجه $CD = a$، $AD = b$ و $OD = r - b$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD، داریم:

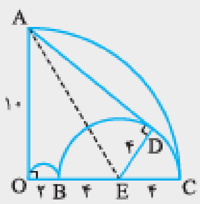
$$OC^۲ = OD^۲ + CD^۲ \Rightarrow r^۲ = (r-b)^۲ + a^۲ \Rightarrow ۲r.b = a^۲ + b^۲ \Rightarrow r = \frac{a^۲ + b^۲}{۲b}$$

تست **در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره و دو نیم‌دایره به قطرهای $OB = ۲$ و $BC = ۸$ درون آن قرار دارند. اگر AD در نقطهٔ D بر نیم‌دایرهٔ به قطر BC مماس باشد، طول AD کدام است؟**



۱) $\sqrt{۳۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$

۳) $۲\sqrt{۳۰}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

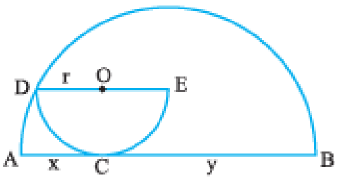


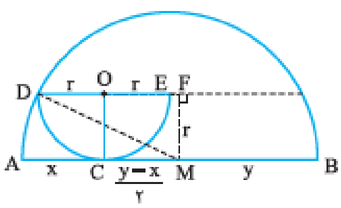
پاسخ **گزینهٔ ۳** اگر E وسط BC باشد، این نقطه، مرکز نیم‌دایرهٔ به قطر BC است و چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس $ED \perp AD$. اکنون در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAE و ADE، داریم:

$$\overset{\Delta}{OAE} : AE^۲ = ۱۰^۲ + ۶^۲ = ۱۳۶ \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{AED} : AE^۲ = AD^۲ + ۴^۲ \xrightarrow{(۱)} AD^۲ = ۱۳۶ - ۱۶ = ۱۲۰ \Rightarrow AD = ۲\sqrt{۳۰}$$

مثال **در شکل مقابل، DE قطر نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر و این نیم‌دایره در نقطهٔ C بر قطر نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر مماس است. اگر $OC \perp DE$، شعاع نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر r، $x = ۲$ و $y = ۴$ باشد، مقدار r را پیدا کنید.**



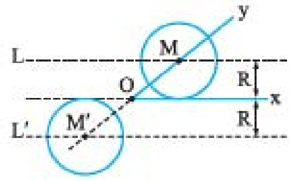


حل اگر از O به C وصل کنیم، $OC \perp AB$ (چرا؟)، پس $DE \parallel AB$. چنان‌چه M مرکز نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر باشد و از M عمود MF را بر DE رسم کنیم، آن‌گاه $MF = r$ و شعاع نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر $DM = AM = \frac{AB}{۲} = \frac{۲+۴}{۲} = ۳$. بنابراین $OF = MC = AM - x = ۳ - ۲ = ۱$ و در نتیجه $DF = DO + OF = r + ۱$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFM، داریم:

$$DM^۲ = DF^۲ + FM^۲ \Rightarrow ۳^۲ = (r+۱)^۲ + r^۲ \Rightarrow ۲r^۲ + ۲r - ۸ = ۰$$

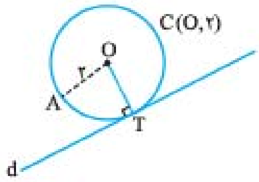
$$\Rightarrow r^۲ + r - ۴ = ۰ \Rightarrow r = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۷}}{۲} \xrightarrow{r>۰} r = \frac{\sqrt{۱۷} - ۱}{۲}$$

مثال **زاویهٔ xOy داده شده است. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که مرکز آن روی ضلع Oy و بر ضلع Ox مماس باشد.**

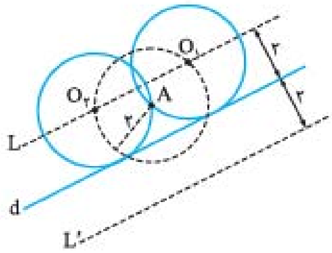


حل چون می‌خواهیم دایره بر Ox مماس باشد، پس باید فاصلهٔ مرکز دایره از Ox برابر R باشد و می‌دانیم مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از Ox به فاصلهٔ R باشند روی دو خط موازی به فاصلهٔ R از Ox قرار دارند. نقاط برخورد این دو خط با Oy یا امتداد آن، مرکز دایرهٔ موردنظر می‌باشد. دایره‌ای به مرکز این نقطه‌ها (M یا M') و شعاع R، دایرهٔ موردنظر است. با توجه به شکل مقابل، مسئله دو جواب دارد.

مثال **خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده است. دایره‌ای با شعاع ۲ چنان رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و بر خط d مماس باشد.**



حل اگر مسئله حل شده باشد و دایرهٔ $C(O,۲)$ بر خط d مماس باشد و از نقطهٔ A بگذرد. چنان‌چه T نقطهٔ تماس خط d با دایره باشد، آن‌گاه $OA = OT$؛ یعنی فاصلهٔ O از خط d و نقطهٔ A برابر ۲ است.



می‌دانیم مجموعهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط به موازات d مانند L و L' می‌باشند و مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ است. نقطهٔ برخورد این دایره با دو خط L و L'، همان نقطهٔ O؛ یعنی مرکز دایره است، اما نقاط برخوردی قابل‌قبول هستند که با نقطهٔ A در یک طرف خط d باشند، زیرا دایرهٔ موردنظر باید بر خط d مماس باشد. پس از مشخص‌شدن نقطهٔ O، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ رسم می‌کنیم؛ این دایره، همان دایرهٔ مطلوب است.

اگر دایرهٔ به مرکز A، خط L را در دو، یک یا هیچ نقطه قطع کند، مسئله دو، یک یا هیچ جواب دارد.

مسئلهٔ اساسی ۲ **بر سه نقطه که بر یک خط راست واقع نیستند، یک و تنها یک دایره می‌گذرد.**

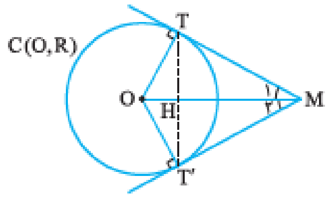
حل فرض کنیم سه نقطهٔ A، B و C بر یک راستا نباشند، در این صورت، این سه نقطه، سه رأس یک مثلث هستند. نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف این مثلث را O می‌نامیم. روشن است که $OA = OB = OC$، پس دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA یا OB و یا OC، از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد، پس دست‌کم یک دایره وجود دارد که از این سه نقطه می‌گذرد. اکنون ثابت می‌کنیم این دایره، یکتا است. اگر دایرهٔ دیگری از این سه نقطه بگذرد، مرکز آن از این سه نقطه به یک فاصله است؛ و این نقطه باید نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف باشد؛ یعنی این دایره با دایرهٔ اولی هم‌مرکز است و شعاعش نیز با شعاع دایرهٔ اولی برابر است؛ به بیان دیگر، این دو دایره، بر هم منطبق هستند و در نتیجه، تنها یک دایره از این سه نقطه می‌گذرد.

مسئلهٔ اساسی ۳ **اگر از نقطهٔ M، بیرون دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم کنیم، ثابت کنید:**

الف $MT = MT'$.

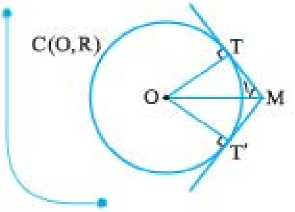
ب **OM نیمساز زاویهٔ TMT' است.**

پ **OM عمودمنصف TT' است.**



حل از O به نقطه‌های تماس؛ یعنی T و T' وصل می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM و $OT'M$ به حالت برابری وتر و یک ضلع، همنهشت‌اند، در نتیجه $MT = MT'$ و همچنین $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$، بنابراین اثبات قسمت‌های (الف) و (ب) کامل شده است. از طرفی چون $OT = OT'$ و $TM = T'M$، پس نقطه‌های O و M از دو سر پاره‌خط TT' به یک فاصله‌اند و در نتیجه OM عمودمنصف TT' است و این، اثبات قسمت (پ) می‌باشد.

مثال **از نقطهٔ M، بیرون دایرهٔ $C(O,R)$، دو مماس MT و MT' را بر آن رسم کرده‌ایم. اگر $MT=\frac{\sqrt{۳}}{۳}R$ باشد، زاویهٔ بین دو مماس را پیدا کنید.**

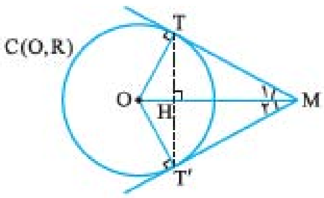


حل با توجه به شکل روبه‌رو و مسئلهٔ اساسی (۳)، OM نیمساز زاویهٔ $T\hat{M}T'$ است، پس $T\hat{M}T'=۲\hat{M}_۱$.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT، داریم:

$$\tan\hat{M}_۱=\frac{OT}{MT}=\frac{R}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}R}=\sqrt{۳}\Rightarrow \hat{M}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow T\hat{M}T'=۲\hat{M}_۱=۱۲۰^\circ$$

مثال **دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس هستند و H نقطهٔ برخورد TT' با خط OM است. ثابت کنید:**



الف $OH.OM=R^۲$

ب $TT'^۲=۴OH.HM$

پ $TT'.OM=۲R.MT$

حل **الف** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OTH و OTM به حالت برابری دو زاویه، متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{OH}{OT}=\frac{OT}{OM}\xrightarrow{OT=R} R^۲=OT^۲=OH.OM$$

ب **روش اول** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OTH و MTH به حالت برابری دو زاویه، متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{OH}{TH}=\frac{TH}{HM}\Rightarrow TH^۲=OH.HM\xrightarrow{TT'=۲TH}(\tfrac{۱}{۲}TT')^۲=OH.HM\Rightarrow TT'^۲=۴OH.HM$$

روش دوم در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع نظیر وتر، واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ وتر است، پس در مثلث OTM داریم:

$$TH^۲=OH\times MH\Rightarrow (\frac{TT'}{۲})^۲=OH\times MH\Rightarrow TT'^۲=۴OH\times MH$$

پ **روش اول** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MTH و OTM به حالت برابری سه زاویه، متشابه‌اند، پس داریم:

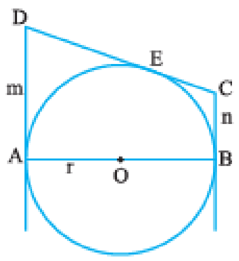
$$\frac{OT}{OM}=\frac{TH}{MT}\Rightarrow OT.MT=OM.TH\Rightarrow R.MT=OM\times\tfrac{۱}{۲}TT'\Rightarrow TT'.OM=۲R.MT$$

روش دوم

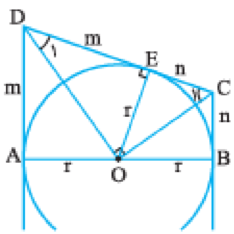
$$S_{\overset{\Delta}{OTM}}=\frac{TH\times OM}{۲}=\frac{OT\times MT}{۲}\Rightarrow TH\times OM=OT\times MT$$

$$\frac{TT'}{۲}\times OM=R\times MT\Rightarrow TT'\times OM=۲R\times MT$$

مثال **در شکل مقابل، AB قطر دایره‌ای به شعاع r و BC، CD و AD بر دایره مماس هستند. اگر $AD=m$ و $BC=n$ باشد. ثابت کنید رابطهٔ $r^۲=m.n$ برقرار است.**

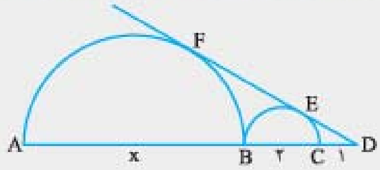


حل با توجه به قسمت (الف) از مسئلهٔ اساسی (۳)، واضح است که $EC=BC=n$ و $DE=AD=m$. نقطهٔ O، وسط قطر AB، مرکز دایره است. بنا بر مسئلهٔ اساسی (۳) قسمت (ب)، OD نیمساز زاویهٔ D و OC نیمساز زاویهٔ C است، پس $\hat{D}_۱=\frac{۱}{۲}\hat{D}$ و $\hat{C}_۱=\frac{۱}{۲}\hat{C}$.



از طرفی در چهارضلعی $ABCD$ مجموع زاویه‌ها ۳۶۰ درجه است و چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس $\hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ$؛ در نتیجه $\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ و در نتیجه، $\hat{C}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ$، پس مثلث OCD در رأس O قائمه است و چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، OE ارتفاع نظیر وتر این مثلث می‌باشد و در نتیجه OE واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ EC و DE است، پس داریم: $OE^۲=EC.DE\Rightarrow r^۲=n.m$

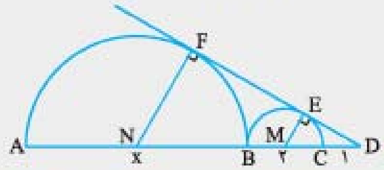
تست **در شکل مقابل، AB و BC قطرهای نیم‌دایره و خط FD بر دو نیم‌دایره در نقاط E و F مماس است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AB کدام است؟**



۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۵   ۴) ۶

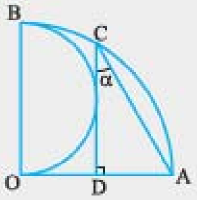
پاسخ **گزینهٔ ۴** شعاع نیم‌دایره‌ها ۱ و $\frac{x}{2}$ هستند. از مرکزهای دو نیم‌دایره، به نقاط تماس هر یک از آن‌ها وصل می‌کنیم؛ چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس دو مثلث MDE و NDF قائم‌الزاویه هستند و در زاویهٔ رأس نیز مشترک می‌باشند.



در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MD}{ND}=\frac{ME}{NF} \Rightarrow \frac{1+1}{\frac{x}{2}+3}=\frac{1}{\frac{x}{2}} \Rightarrow x=\frac{x}{2}+3 \Rightarrow x=6$$

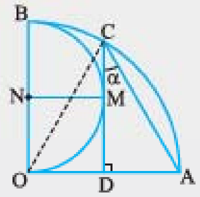
تست **اگر در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره، OB قطر نیم‌دایره، CD بر نیم‌دایره مماس و $CD \perp OA$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟**



۱) ۱۵   ۲) ۲۲/۵

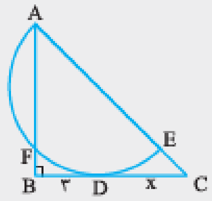
۳) ۳۰   ۴) ۳۶

پاسخ **گزینهٔ ۳** اگر شعاع ربع دایره را R بگیریم، آن‌گاه شعاع نیم‌دایره، برابر $\frac{R}{2}$ است و اگر N مرکز نیم‌دایره و M نقطهٔ تماس CD با نیم‌دایره باشد، چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس چهارضلعی ODMN مربعی به ضلع $\frac{R}{2}$ است، در نتیجه $OD=AD=\frac{R}{2}$.



در مثلث OAC، پاره‌خط CD هم ارتفاع و هم میانه است، پس این مثلث، در رأس C متساوی‌الساقین است و ضمناً $OC=OA=R$، بنابراین، مثلث OAC متساوی‌الاضلاع و هر زاویه‌اش ۶۰ درجه و در نتیجه $\alpha=30^\circ$.

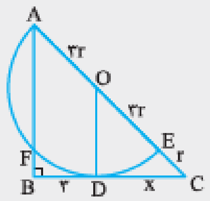
تست **در شکل مقابل، مثلث ABC در رأس B قائمه، AE قطر نیم‌دایره و BC در نقطهٔ D بر آن مماس است. اگر $AE=6EC$ و $BD=3$ باشد، طول CD کدام است؟**



۱) ۴   ۲) $3\sqrt{2}$

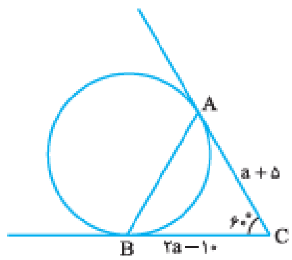
۳) $2\sqrt{5}$ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ ۱** اگر O وسط AE و $EC=r$ باشد، آن‌گاه $AO=OE=3r$. واضح است که OD بر BC عمود می‌باشد، پس $AB \parallel OD$ و بنا بر قضیهٔ تالس، داریم:



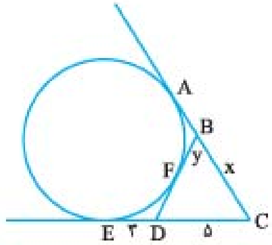
$$\frac{AO}{BD}=\frac{OC}{DC} \Rightarrow \frac{3r}{3}=\frac{4r}{x} \Rightarrow x=4$$

مثال **در شکل مقابل، AC و BC بر دایره مماس‌اند و زاویهٔ بین آن‌ها ۶۰ درجه است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AB چه‌قدر است؟**



حل چون $AC=BC$، پس $a+5=2a-10$ یا $a=15$. مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین و یک زاویهٔ آن ۶۰ درجه است، پس این مثلث، متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه داریم: $AB=AC=a+5=15+5=20$

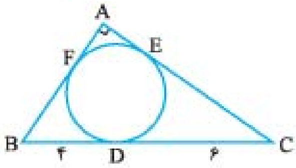
مثال **در شکل مقابل، نقاط A، E و F نقاط تماس خط‌های موجود در شکل، با دایره هستند. اگر $BC=x$ ، $BF=y$ ، $DC=5$ و $DE=3$ باشد، حاصل $x+y$ چه‌قدر است؟**



حل با توجه به شکل، نتیجه می‌شود $AB=BF=y$ و $AC=CE$. اکنون داریم:

$$AC=CE \Rightarrow AB+BC=CD+DE \Rightarrow y+x=5+3=8$$

مثال **در شکل مقابل، دایره‌ای در درون مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بر اضلاع آن مماس است. اگر $BD=4$ و $CD=6$ باشد، محیط مثلث ABC چه‌قدر است؟**

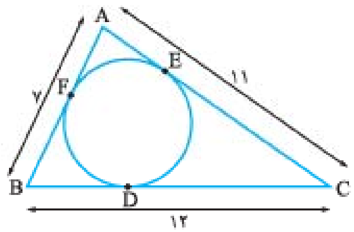


حل واضح است که $BF=BD=4$ ، $EC=CD=6$ و $AF=AE=x$، پس $AB=4+x$ و $AC=6+x$. اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، داریم:

$$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow (4+x)^2+(6+x)^2=10^2 \Rightarrow 2x^2+20x-48=0 \Rightarrow x^2+10x-24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-12 \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$\text{محیط مثلث}=AB+AC+BC=(4+2)+(6+2)+10=24$$

مثال **در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های روی آن، طول CD را پیدا کنید.**

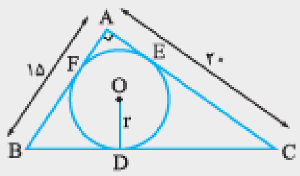


حل فرض می‌کنیم $AF=AE=x$ ، $CE=CD=y$ و $BF=BD=z$، پس داریم:

$$\text{محیط مثلث}=AB+AC+BC=(x+z)+(x+y)+(y+z)=2(x+y+z)=7+11+12$$

در نتیجه $x+y+z=15$؛ اما $AB=x+z=7$، بنابراین $y=CD=8$.

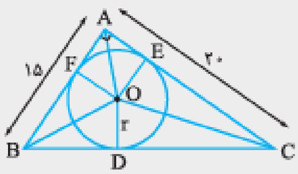
تست **در شکل مقابل، دایره بر تمام ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه مماس است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، شعاع دایره کدام است؟**



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ ۳** با توجه به رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC=25$. اگر از مرکز دایره به سه رأس مثلث و نیز به نقاط تماس وصل کنیم، آن‌گاه:

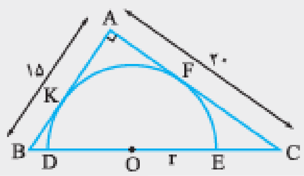


$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{OBC}}+S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{OAC}} \ , OD=OE=OF=r$$

پس: $\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}BC.r+\frac{1}{2}AB.r+\frac{1}{2}AC.r \Rightarrow AB\times AC=(BC+AB+AC)r$

$$\Rightarrow 15\times 20=(25+15+20).r \Rightarrow r=5$$

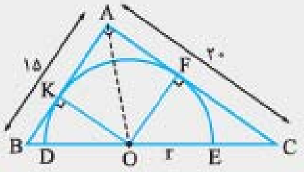
تست **در شکل زیر، نیم‌دایره‌ای که قطرش بر BC منطبق است بر دو ضلع زاویهٔ قائمه مماس می‌باشد. شعاع نیم‌دایره کدام است؟**



۱) $\frac{30}{7}$ ۲) $\frac{60}{7}$

۳) ۱۰ ۴) $\frac{90}{7}$

پاسخ گزینهٔ۲ با توجه به رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC=۲۵$. اگر از مرکز نیم‌دایره، به دو نقطهٔ تماس وصل کنیم، آن‌گاه $OK=OF=r$. اکنون داریم:

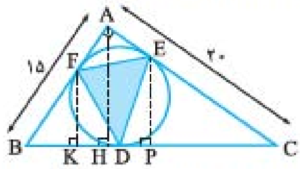


$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{AOB}}+S_{\overset{\Delta}{AOC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}AB\times \overbrace{OK}^{=r}+\frac{۱}{۲}AC\times \overbrace{OF}^{=r}$$

$$AB\times AC=(AB+AC).r \Rightarrow ۱۵\times ۲۰=(۱۵+۲۰).r$$

در نتیجه $r=\frac{۶۰}{۷}$.

مثال **در شکل زیر، دایره‌ای بر اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در نقاط E، F و D مماس است. مساحت مثلث EFD کدام است؟**



حل از A عمود AH را بر BC رسم می‌کنیم، از رابطهٔ فیثاغورس $BC=۲۵$، با توجه به مساحت مثلث ABC، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{AB\times AC}{۲}=۱۵۰$$

و در نتیجه $AH=۱۲$. با توجه به روشی که در سومین مثال صفحهٔ ۱۵ بیان شد، نتیجه می‌شود:

$$CD=CE=۱۵\ ,\ BF=BD=۱۰\ ,\ AF=AE=۵$$

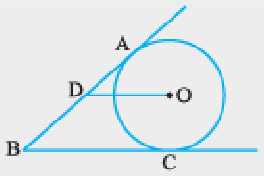
اگر FK و EP بر BC عمود باشند، آن‌گاه با توجه به رابطهٔ تالس، داریم:

$$\frac{EP}{AH}=\frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{EP}{۱۲}=\frac{۱۵}{۲۰} \Rightarrow EP=۹ \quad \text{و} \quad \frac{FK}{AH}=\frac{BF}{AB} \Rightarrow \frac{FK}{۱۲}=\frac{۱۰}{۱۵} \Rightarrow FK=۸$$

چون $S_{\overset{\Delta}{AFE}}=۱۲/۵$، $S_{\overset{\Delta}{BFD}}=۴۰$ و $S_{\overset{\Delta}{EDC}}=۶۷/۵$، پس داریم:

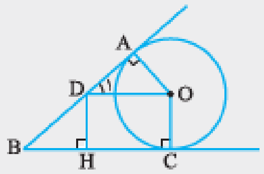
$$S_{\overset{\Delta}{EFD}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}-(S_{\overset{\Delta}{AEF}}+S_{\overset{\Delta}{BFD}}+S_{\overset{\Delta}{EDC}})=۱۵۰-(۱۲/۵+۴۰+۶۷/۵)=۳۰$$

تست **در شکل مقابل، از نقطهٔ B دو مماس با طول‌های ۱۰ بر دایره‌ای به مرکز O رسم شده‌اند و OD با BC موازی است. اگر $AD=۴$ باشد، طول OD کدام است؟**



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

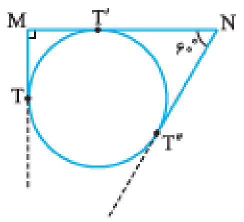
پاسخ گزینهٔ۳ اگر شعاع دایره، R باشد و از O به A و C وصل کنیم، واضح است که $OA\perp AB$، $OC\perp BC$ و $OC=OA=R$.
اگر از D عمود DH را بر BC رسم کنیم، چهارضلعی DOCH مستطیل است، پس $DH=OC=R$ و $OD=CH$ و ضمناً $BD=AB-AD=۶$ و $\hat{D}_۱=\hat{B}$.

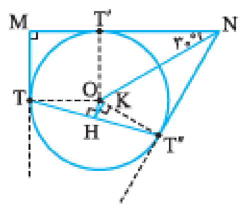


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ADO}:\tan\hat{D}_۱=\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{R}{۴}\\[2mm] \overset{\Delta}{DBH}:\tan\hat{B}=\dfrac{DH}{BH}=\dfrac{R}{BH}\end{array}\right\} \xrightarrow{\hat{D}_۱=\hat{B}} \frac{R}{۴}=\frac{R}{BH} \Rightarrow BH=۴$$

در نتیجه در مستطیل DOCH داریم $HC=OD=۶$.

مثال **در شکل روبه‌رو، با توجه به اندازه‌های روی شکل و با فرض این‌که پاره‌خط‌های MT در نقطهٔ T و NT'' در نقطهٔ T'' و نیز MN در نقطهٔ T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس و $T'\hat{N}T''=۶۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی $MTT''N$ را برحسب R به دست آورید.**



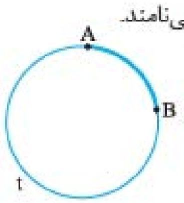


حل اگر از O، مرکز دایره، به نقطه‌های تماس T، T' و T'' وصل کنیم، چون $\hat{T}'=\hat{T}''=۹۰^\circ$ و $\hat{N}=۶۰^\circ$، در نتیجه $T'\hat{O}T''=۱۲۰^\circ$ و چون $T\hat{O}T'=۹۰^\circ$، پس $T\hat{O}T''=۱۵۰^\circ$ و در مثلث متساوی‌الساقین TOT'' به سادگی معلوم می‌شود $O\hat{T}T''=O\hat{T}''T=۱۵^\circ$.

اگر از نقطهٔ O، عمود OH را بر TT'' فرود آوریم و از H نیز عمود HK را بر OT'' رسم کنیم، در این صورت $HK=\frac{1}{4}OT''=\frac{1}{4}R$. از طرفی $S_{MTOT'}=R^2$ و چون $T'N=\sqrt{3}R$، پس $S_{T'OT''N}=2S_{\overset{\triangle}{T'ON}}=\sqrt{3}R^2$ و نیز $S_{\overset{\triangle}{OTT''}}=2S_{\overset{\triangle}{OHT'}}=2\times\frac{HK\times OT'}{2}=\frac{R^2}{4}$، در نتیجه داریم: $S_{MTT''N}=R^2+\sqrt{3}R^2+\frac{R^2}{4}=(\frac{5}{4}+\sqrt{3})R^2$

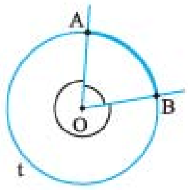
زاویه در دایره

تعریف کمان در دایره: مجموعهٔ نقاطی از محیط دایره را که بین دو نقطهٔ متمایز واقع بر محیط دایره قرار دارند، کمان دایره می‌نامند.



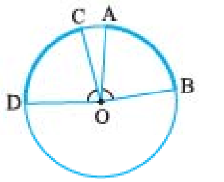
تذکر به سادگی می‌توان دریافت که هر دو نقطهٔ متمایز واقع بر محیط یک دایره، دو کمان بر دایره پدید می‌آورند. اغلب هنگامی که می‌گوییم «کمان AB» منظور، کمان کوچک‌تر است و آن را با نماد $\overset{\frown}{AB}$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که کمان بزرگ‌تر موردنظر باشد، با قراردادن یک حرف اضافه بر روی این کمان، مانند t، آن را با نماد $\overset{\frown}{AtB}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف زاویهٔ مرکزی در دایره: زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز یک دایره منطبق باشد، زاویهٔ مرکزی نظیر آن دایره است.



تذکر نظیر هر کمان در دایره، مانند کمان AB، دو زاویهٔ مرکزی پدید می‌آید، یکی زاویهٔ کوژ و دیگری زاویهٔ کاو[1]؛ زاویهٔ کوژ، متناظر با «کمان کوچک‌تر؛ یعنی $\overset{\frown}{AB}$» و زاویهٔ کاو، متناظر با «کمان بزرگ‌تر؛ یعنی $\overset{\frown}{AtB}$» است.

قضیه **در یک دایره، اگر دو زاویهٔ مرکزی، برابر باشند، کمان‌های نظیرشان برابرند و برعکس، اگر دو کمان برابر باشند، زاویه‌های مرکزی نظیر آن دو کمان نیز برابرند.**

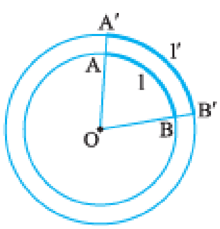


اثبات ابتدا فرض می‌کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$، دو زاویهٔ مرکزی AOB و COD برابرند، باید ثابت کنیم $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.
اگر زاویهٔ مرکزی AOB را حول نقطهٔ O دوران دهیم تا نقطهٔ A بر نقطهٔ C منطبق گردد، چون $A\hat{O}B=C\hat{O}D$، پس شعاع OB بر شعاع OD و بنابراین، نقطهٔ B نیز بر نقطهٔ D منطبق خواهد شد و در نتیجه دو کمان AB و CD یکدیگر را به گونه‌ای کامل پوشش می‌دهند و در نتیجه، برابرند.

برعکس، فرض می‌کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$، داشته باشیم $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$، باید ثابت کنیم $A\hat{O}B=C\hat{O}D$. این استدلال همانند قسمت اول قضیه، به سادگی انجام می‌پذیرد و به عنوان تمرین به عهدهٔ شما واگذار می‌گردد.

تذکر اگر در دایرهٔ $C(O,R)$، زاویهٔ مرکزی AOB را در نظر بگیریم و این زاویه را به m قسمت برابر تقسیم کنیم و ضلع‌های زاویه‌های کوچک‌تر را امتداد دهیم تا کمان نظیر این زاویهٔ مرکزی را قطع کنند، بنا بر قضیهٔ بالا، کمان نظیر نیز به m قسمت برابر تقسیم می‌شود. با این نگرش، می‌توان به هر کمان دایره، عدد نظیر زاویهٔ مرکزی آن را نسبت داد. در این صورت، اگر می‌گوییم «کمانی از دایره، برابر k درجه است» به این معنی است که زاویهٔ مرکزی نظیرش، برابر k درجه است، پس می‌توان نتیجه گرفت:

اندازهٔ هر کمان از دایره برحسب درجه، با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر آن کمان برحسب درجه، برابر است.



تذکر در دو دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع‌های نابرابر، یک زاویهٔ مرکزی را در نظر بگیرید. اگر اندازهٔ این زاویهٔ مرکزی، k درجه باشد، اندازهٔ هر یک از دو کمان نظیر این زاویهٔ مرکزی در این دو دایره نیز برابر k درجه است، اما طول این دو کمان برابر نیستند، پس وقتی می‌گوییم «دو کمان، برابرند» به این معنی است که اندازهٔ آن دو کمان، برحسب واحد اندازه‌گیری زاویه، برابرند؛ ولی دلیلی ندارد که طول‌های این دو کمان، برابر باشند. در ضمن ثابت می‌شود که اگر در شکل روبه‌رو، طول‌های دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{A'B'}$، که برحسب درجه برابرند، به ترتیب، برابر l و l' و شعاع دایره‌ها به ترتیب، R و R' باشند، آن‌گاه $\frac{l}{l'}=\frac{R}{R'}$.

نکتهٔ مهم کمانی از دایرهٔ به شعاع R را که زاویهٔ مرکزی نظیر آن برحسب درجه، θ و طول این کمان، l باشد در نظر بگیرید، طول این کمان از رابطهٔ $l=\pi R\times\frac{\theta}{180^\circ}$ به دست می‌آید و اگر زاویهٔ مرکزی نظیر آن برحسب رادیان[2]، θ باشد، آن‌گاه رابطهٔ $l=R\theta$ برقرار است.

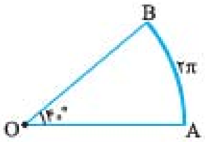
۱- کلمهٔ «کوژ» به معنی محدب و کلمهٔ «کاو» به معنی مقعر می‌باشد.

۲- یک رادیان، کمانی از دایره است که طول آن کمان، برابر شعاع دایره باشد. ثابت می‌شود کمان 180° (نیم‌دایره) برابر π رادیان (تقریباً ۳/۱۴ رادیان) است.

در واقع به بیان نادقیق می‌توان گفت که تناسبی بین کمان و محیط دایره وجود دارد؛ بدین معنی که یک دایره، معادل زاویهٔ 2π است ولی طول آن، که همان محیط دایره می‌باشد، برابر $2\pi R$ است، پس اگر زاویهٔ مرکزی یک کمان، برابر θ باشد، طول آن از تناسب‌های زیر به دست می‌آید:

طول کمان	زاویه برحسب درجه		طول کمان	زاویه برحسب رادیان	
$2\pi R$	360°	$\Rightarrow l=\dfrac{\theta\times 2\pi R}{360^\circ}=\pi R\times\dfrac{\theta}{180^\circ}$	$2\pi R$	2π	$\Rightarrow l=\dfrac{\theta\times 2\pi R}{2\pi}=R\theta$
l	θ		l	θ	

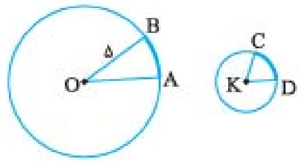
مثال **در شکل مقابل، اگر طول کمان AB، برابر 2π و زاویهٔ مرکزی نظیر آن 40° باشد، طول OA را به دست آورید.**



حل چون $l=2\pi$ و $\theta=40^\circ$، پس داریم:

$$l=\pi R\times\frac{\theta}{180^\circ}\Rightarrow 2\pi=\pi R\times\frac{40^\circ}{180^\circ}\Rightarrow 2\pi=\frac{2\pi R}{9}\Rightarrow R=OA=9$$

مثال **در دو دایرهٔ شکل مقابل، طول‌های دو کمان AB و CD برابرند. اگر شعاع دایره‌ها ۵ و ۲ و $B\hat{O}A=30^\circ$ باشد. اندازهٔ $D\hat{K}C$ چند درجه است؟**



حل

$$\text{طول کمان } AB=\pi R\times\frac{\theta}{180^\circ}=\pi\times 5\times\frac{30^\circ}{180^\circ}=\frac{5\pi}{6}$$

اگر زاویهٔ نظیر کمان CD را برحسب درجه، برابر α بگیریم، داریم:

$$\text{طول کمان } CD=\pi R\times\frac{\alpha}{180^\circ}=\pi\times 2\times\frac{\alpha}{180^\circ}=\frac{\alpha\pi}{90}$$

چون طول‌های این دو کمان، برابر هستند، پس $\frac{\alpha\pi}{90}=\frac{5\pi}{6}$ یا $\alpha=75^\circ$.

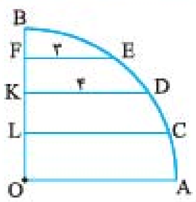
تست **در شکل مقابل، اگر O مرکز نظیر کمان باشد، طول کمان MN کدام است؟**

۱) 2π　　۲) 3π
۳) 4π　　۴) 6π

پاسخ **گزینه ۳**

$$l=\pi R\times\frac{\theta}{180^\circ}\Rightarrow l=\pi\times 6\times\frac{120^\circ}{180^\circ}\Rightarrow l=4\pi$$

مثال **در شکل مقابل، ربع دایره‌ای به مرکز O نمایش داده شده است. اگر $EF\parallel KD\parallel LC\parallel OA$، $BF=FK=KL$، $EF=3$ و $KD=4$ باشد. طول LC را پیدا کنید.**



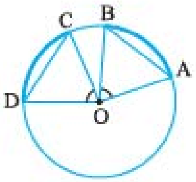
حل اگر فرض کنیم شعاع ربع دایره، R و $BF=FK=KL=m$، آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{OEF}: OE^2=EF^2+OF^2\Rightarrow R^2=3^2+(R-m)^2\Rightarrow 2Rm=9+m^2\\ \overset{\Delta}{OKD}: OD^2=KD^2+OK^2\Rightarrow R^2=4^2+(R-2m)^2\Rightarrow Rm=4+m^2\end{array}\right\}\Rightarrow m=1 , R=5$$

در نتیجه $LO=R-3m=2$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OLC، داریم: $OC^2=LC^2+OL^2\Rightarrow 5^2=LC^2+2^2\Rightarrow LC=\sqrt{21}$

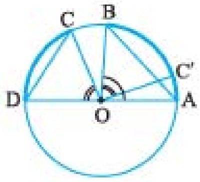
اکنون گزاره‌هایی دربارهٔ کمان و وترهای برابر و نیز گزاره‌هایی دربارهٔ کمان و وترهای نابرابر ارائه می‌دهیم. تلاش کنید این گزاره‌ها را که در قالب قضیه و مسئلهٔ مهم بیان شده‌اند به روشنی به یاد داشته باشید.

قضیه در یک دایره، اگر دو کمان، برابر باشند، وترهای نظیرشان برابرند و برعکس، اگر در دایره‌ای دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر این دو وتر نیز برابرند.



اثبات ابتدا فرض می‌کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$، دو کمان AB و CD برابر باشند، باید ثابت کنیم دو وتر AB و CD برابرند. چون دو کمان، برابرند، زاویه‌های مرکزی نظیرشان، برابر هستند و در نتیجه دو مثلث OAB و OCD، به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین این دو ضلع، همنهشت هستند و در نتیجه $AB = CD$. اثبات عکس قضیه ساده است و به عنوان تمرین به شما واگذار می‌گردد.

قضیه در یک دایره، اگر دو کمان نابرابر باشند، کمان بزرگ‌تر، زاویهٔ مرکزی نظیرش، بزرگ‌تر است و برعکس، اگر در دایره‌ای دو زاویهٔ مرکزی، نابرابر باشند، کمان نظیر زاویهٔ مرکزی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

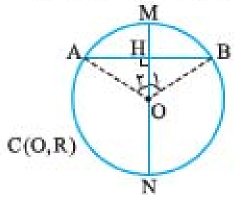


اثبات ابتدا فرض می‌کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$، داشته باشیم $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$، باید ثابت کنیم $A\hat{O}B > D\hat{O}C$. کمان CD را حول نقطهٔ O دوران می‌دهیم تا دوران‌یافتهٔ نقطهٔ D یعنی نقطهٔ D'، بر B منطبق گردد. در نتیجه C'، دوران‌یافتهٔ C، بین B و A قرار می‌گیرد. بنا بر قضیه‌های قبل، داریم $D'\hat{O}C' = D\hat{O}C$ و چون زاویهٔ $D'OC'$، جزئی از زاویهٔ AOB است، داریم $A\hat{O}B > D'\hat{O}C'$ و در نتیجه $A\hat{O}B > D\hat{O}C$.

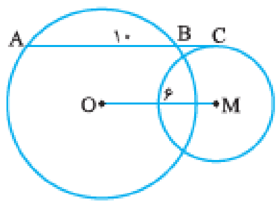
عکس این قضیه با برهان خلف، به سادگی ثابت می‌شود.

قضیه در یک دایره، قطری که بر یک وتر از دایره، عمود باشد، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند. برعکس، اگر قطری از وسط یک وتر، یا از وسط کمان نظیر آن وتر بگذرد، بر آن وتر عمود است.

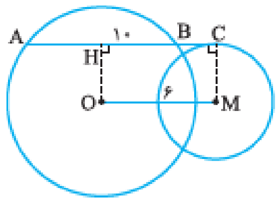
اثبات ابتدا فرض می‌کنیم قطر MN، بر وتر AB در نقطهٔ H عمود باشد، باید ثابت کنیم H وسط وتر AB و M وسط کمان نظیر AB است.



در مثلث متساوی‌الساقین OAB، پاره‌خط OH ارتفاع نظیر قاعده است، پس میانه و نیمساز نیز می‌باشد. چون میانه است، پس نقطهٔ H، وسط AB است و چون نیمساز است، دو زاویهٔ مرکزی $O_۱$ و $O_۲$ و در نتیجه دو کمان AM و MB برابرند و بنابراین، نقطهٔ M، وسط کمان AB است. اثبات عکس این قضیه، ساده است و به عنوان تمرین به شما واگذار می‌شود.



مثال در شکل مقابل، O و M مرکزهای دو دایره و AC در نقطهٔ C بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. اگر $AB = ۱۰$ ، $OM = ۶$ و $AC \parallel OM$ باشد، طول پاره‌خط BC چه‌قدر است؟

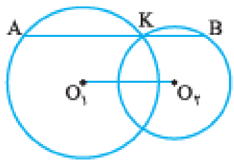


حل اگر از M به C وصل کنیم، چون شعاع گذرنده نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس CM بر AC عمود است و چون $AC \parallel OM$، در نتیجه CM بر OM نیز عمود می‌باشد.

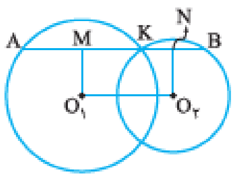
اگر از O عمود OH را بر AB رسم کنیم، چون قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $HB = \frac{AB}{۲} = ۵$.

چهارضلعی OMCH مستطیل است، در نتیجه $HC = OM = ۶$ و داریم:

$HB + BC = ۶ \Rightarrow ۵ + BC = ۶ \Rightarrow BC = ۱$



مثال در شکل مقابل، دو دایرهٔ $C_۱(O_۱,R_۱)$ و $C_۲(O_۲,R_۲)$ متقاطع‌اند. از یکی از نقاط تقاطع، خطی موازی $O_۱O_۲$ رسم می‌کنیم تا دو دایره را در دو نقطهٔ دیگر A و B قطع کند. ثابت کنید $AB = ۲O_۱O_۲$.

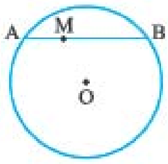


حل اگر از نقاط $O_۱$ و $O_۲$ عمودهایی بر AB رسم کنیم تا آن را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند، آن‌گاه چهارضلعی $O_۱O_۲NM$ یک مستطیل است، در نتیجه: $MN = O_۱O_۲ \quad (۱)$

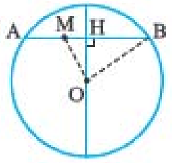
از طرفی چون قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند، پس $AK = ۲MK$ و $KB = ۲KN$. اگر این دو رابطه را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود $AK + KB = ۲MK + ۲KN$ یا: $AB = ۲MN \quad (۲)$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $AB = ۲O_۱O_۲$.

مثال در شکل مقابل، O مرکز دایره، AB وتری از آن و M نقطه‌ای از وتر AM است. اگر $OM = 4$ ، $AM = 6$ و $MB = 6$ ؛ شعاع دایره را پیدا کنید.

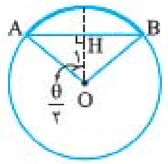


حل اگر شعاع دایره، R باشد و از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB عمود کنیم، چون قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند، پس $AH = BH = \frac{AB}{2} = 5$ و $MH = 1$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH بنا بر رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $OH = \sqrt{35}$. اکنون در مثلث OHB، داریم:



$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = 35 + 5^2 = 60 \Rightarrow R = 2\sqrt{15}$$

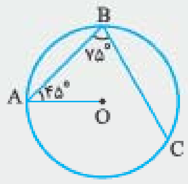
مسئلهٔ اساسی ۴ اگر در دایره‌ای به شعاع R، وتر $AB = a$ و $\widehat{AB} = \theta$ باشد، ثابت کنید $R = \frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.



حل از مرکز دایره عمود OH را بر AB رسم می‌کنیم، چون قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند، پس $\hat{O}_1 = \frac{\theta}{2}$ و $AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH، داریم:

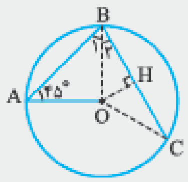
$$\sin\hat{O}_1 = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

تست در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{2}$ می‌باشد. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول وتر BC کدام است؟



۱) $3\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) $2\sqrt{6}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** اگر از O به نقاط B و C وصل کنیم، آن‌گاه داریم:



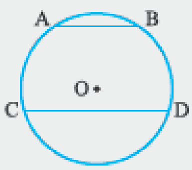
$$OA = OB \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A} = 45° \xrightarrow{\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 75°} \hat{B}_2 = 30°$$

اکنون از O عمود OH را بر وتر BC رسم می‌کنیم، چون قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، در نتیجه $BC = 2BH$.

چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، $\hat{B}_2 = 30°$ است، پس $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$؛

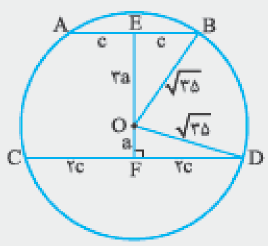
بنابراین $BC = 2\sqrt{6}$.

تست در شکل مقابل، $AB \parallel CD$ ، $CD = 2AB$ و فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، سه برابر فاصله‌اش از وتر CD است. اگر شعاع دایره $\sqrt{35}$ باشد، طول وتر AB چند برابر $\sqrt{2}$ است؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

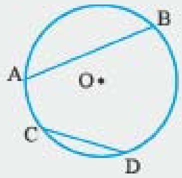
پاسخ **گزینهٔ ۳** اگر طول وتر AB را 2c بگیریم، طول وتر CD، برابر 4c است و اگر از مرکز دایره بر دو وتر AB و CD عمودهای OE و OF را رسم کنیم، چنان‌چه $OF = a$ باشد، آن‌گاه $OE = 3a$ و چون قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند، پس $EB = c$ و $FD = 2c$. اگر در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OEB و OFD رابطهٔ فیثاغورس را بنویسیم، خواهیم داشت:



$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{OEB} &: (3a)^2 + c^2 = 35 \\ \overset{\Delta}{OFD} &: a^2 + (2c)^2 = 35 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\times(-1) \\ &\times 9 \end{aligned} \Rightarrow 35c^2 = 8 \times 35 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

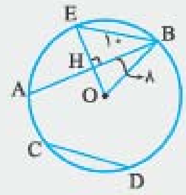
در نتیجه $AB = 2c = 4\sqrt{2}$.

تست **اگر در شکل مقابل، $AB=۱۶$ ، $CD=۱۰$ و $\overset{\frown}{AB}=۲\overset{\frown}{CD}$ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟**



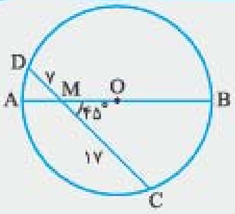
۱) ۹
۲) $\frac{۱۷}{۲}$
۳) ۸
۴) $\frac{۲۵}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** از O عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا وتر را در H و کمان آن را در E قطع کند، چون E وسط کمان AB است و این کمان، دو برابر کمان CD است، پس $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{CD}$ و در نتیجه $EB=CD=۱۰$. نقطهٔ H نیز وسط وتر AB است، پس $HB=۸$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ EHB نتیجه می‌شود $EH=۶$. اگر شعاع دایره R باشد، آن‌گاه $OH=R-۶$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB خواهیم داشت:



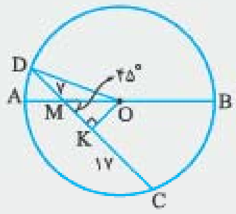
$$OB^۲=OH^۲+HB^۲ \Rightarrow R^۲=(R-۶)^۲+۸^۲ \Rightarrow R=\frac{۲۵}{۳}$$

تست **اگر در شکل مقابل، AB قطر دایره باشد، با توجه به اندازه‌های روی آن، شعاع دایره کدام است؟**



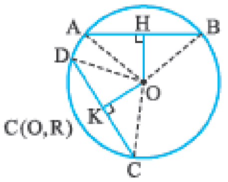
۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۰
۴) ۱۳

پاسخ **گزینهٔ ۴** از O عمودی بر CD رسم می‌کنیم و پای عمود را K می‌نامیم. چون قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند، پس $DK=۱۲$ و در نتیجه $MK=۵$. مثلث قائم‌الزاویهٔ OMK که یک زاویه‌اش ۴۵ درجه است، متساوی‌الساقین است و در نتیجه $OK=MK=۵$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OKD، داریم:



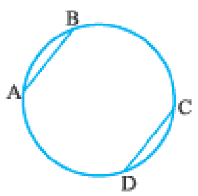
$$OD^۲=OK^۲+DK^۲ \Rightarrow R^۲=۵^۲+۱۲^۲ \Rightarrow R=۱۳$$

قضیه **اگر در دایره‌ای دو وتر، برابر باشند، فاصلهٔ مرکز دایره از این دو وتر، برابر است و برعکس، اگر مرکز دایره‌ای از دو وتر به یک فاصله باشد، آن دو وتر، برابرند.**

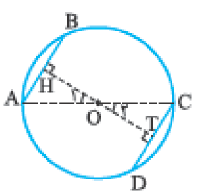


اثبات ابتدا فرض می‌کنیم $AB=CD$ ، باید ثابت کنیم طول عمودهایی که از مرکز، بر این دو وتر رسم می‌شوند، برابرند. دو مثلث متساوی‌الساقین OAB و OCD به حالت برابری سه ضلع، همنهشت‌اند، پس تمام اجزای نظیرشان، از جمله، ارتفاع‌های نظیر قاعده‌ها؛ یعنی OH و OK برابرند. اثبات عکس این قضیه، ساده است و به عنوان تمرین به شما واگذار می‌شود.

مثال **اگر در دایرهٔ $C(O,R)$ ، همانند شکل روبه‌رو، دو وتر AB و CD موازی و مساوی باشند. آن‌گاه ثابت کنید چهارضلعی ABCD مستطیل است.**

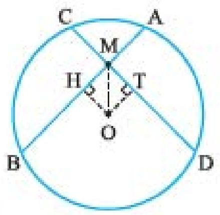


حل چون $AB\overset{\parallel}{=}CD$ [1]، پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. از طرفی اگر از نقطهٔ O، مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB فرود آوریم، امتداد آن نیز بر وتر CD در نقطهٔ T عمود است و بنا بر قضیهٔ قبل، $OH=OT$. اگر از O به A و C وصل کنیم، دو مثلث OAH و OCT به حالت برابری سه ضلع، همنهشت‌اند و در نتیجه دو زاویهٔ $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ برابرند و چون سه نقطهٔ H، O و T بر یک راستا هستند، این دو زاویه، متقابل به رأس می‌باشند، بنابراین سه نقطهٔ A، O و C نیز بر یک راستا قرار دارند؛ یعنی قطر AC از دایره، یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD است، به همین دلیل، BD نیز قطری از این چهارضلعی می‌باشد. چون دو قطر این متوازی‌الاضلاع، برابرند، این متوازی‌الاضلاع، مستطیل است.



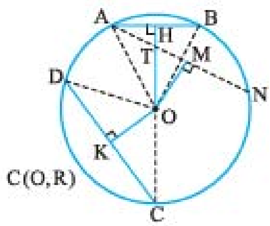
۱- علامت $\overset{\parallel}{=}$ به معنای «موازی و مساوی» می‌باشد.

مثال **اگر دو وتر در دایره‌ای برابر باشند و یکدیگر را قطع کنند، پاره‌خط‌هایی که توسط نقطهٔ برخورد روی دو وتر پدید می‌آیند، نظیربه‌نظیر برابرند.**



حل فرض کنیم دو وتر AB و CD با طول برابر، یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده باشند، باید ثابت کنیم $MB = MD$ و $MA = MC$. اگر از نقطهٔ O، مرکز دایره، عمودهای OH و OT را بر این دو وتر رسم کنیم، چون طول دو وتر برابرند، پس $OH = OT$ و در نتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و OMT به حالت وتر و یک ضلع، همنهشت‌اند و در نتیجه $MH = MT$. چون قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، نتیجه می‌شود $BH = DT$، پس $BH + MH = DT + MT$ یا $BM = DM$. تساوی دو قطعهٔ دیگر، به روشنی مشخص می‌شود.

مسئلهٔ اساسی ۵ **اگر در دایره‌ای دو وتر نابرابر باشند، وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس، از دو وتر یک دایره، آن‌که به مرکز نزدیک‌تر است، طول بزرگ‌تری دارد.**



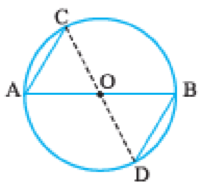
حل **روش اول** ابتدا فرض می‌کنیم $CD > AB$، باید ثابت کنیم $OK < OH$. برای این منظور، بر محیط دایره، کمان AN را برابر کمان CD چنان جدا می‌کنیم که نقطهٔ B بین A و N واقع باشد و عمود OM را بر آن رسم می‌کنیم. پاره‌خط OH، وتر AN را در نقطهٔ T قطع می‌کند. بنا بر قضیهٔ قبل، $OM = OK$. به سادگی معلوم می‌شود که $OT < OH$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم $OM < OT$ و در نتیجه $OM < OH$ و چون $OM = OK$، خواهیم داشت $OK < OH$.

روش دوم در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAH و ODK بنا بر رابطهٔ فیثاغورس، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA^2 = AH^2 + OH^2 = \dfrac{AB^2}{4} + OH^2 \\ OD^2 = DK^2 + OK^2 = \dfrac{CD^2}{4} + OK^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{OA=OD} \frac{AB^2}{4} + OH^2 = \frac{CD^2}{4} + OK^2 \xrightarrow{AB<CD} OH^2 > OK^2 \Rightarrow OH > OK$$

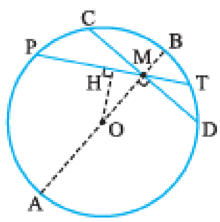
اثبات عکس این قضیه، با برهان خلف انجام می‌شود و به عنوان تمرین به شما واگذار می‌گردد.

مثال **ثابت کنید دو وتر با طول برابر که از دو انتهای یک قطر دایره می‌گذرند و در دو طرف آن قطر قرار دارند، با یکدیگر موازی هستند.**



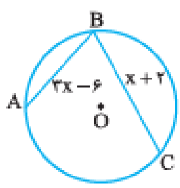
حل فرض کنیم AB قطری از دایره و $AC = BD$. از مرکز دایره به دو نقطهٔ C و D وصل می‌کنیم. دو مثلث OAC و OBD به حالت برابری سه ضلع، همنهشت‌اند، پس $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ و در نتیجه این دو زاویه متقابل به رأس هستند و بنابراین، OC و OD در امتداد یکدیگرند و در نتیجه قطرهای چهارضلعی $ACDB$ یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس $ACDB$ یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه $AC \parallel BD$.

مسئلهٔ اساسی ۶ **نقطهٔ M درون دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد. ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از M می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از M عمود است.**



حل روشن است، بزرگ‌ترین وتری که از M می‌گذرد، قطر گذرنده از این نقطه می‌باشد و آن را AB می‌نامیم. اگر از M، عمودی بر AB رسم کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ C و D قطع کند، ثابت می‌کنیم CD از هر وتر دیگری که از M می‌گذرد، کوتاه‌تر است. اگر وتر دلخواه PT را که از M می‌گذرد در نظر بگیریم، و از نقطهٔ O، مرکز دایره، عمود OH را بر آن فرود آوریم، با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM خواهیم داشت $OH < OM$ و بنا بر مسئلهٔ اساسی ۵، نتیجه می‌شود $PT > CD$.

مثال **در شکل مقابل، وتر BC به مرکز نزدیک‌تر است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حدود x را مشخص کنید.**



حل چون وتر BC به مرکز نزدیک‌تر است، پس طول آن بزرگ‌تر می‌باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$BC > AB \Rightarrow x + 2 > 3x - 6 \Rightarrow x < 4$$

از طرفی طول وتر باید عددی مثبت باشد، پس باید $3x - 6 > 0$ یا $x > 2$ باشد، در نتیجه داریم: $2 < x < 4$

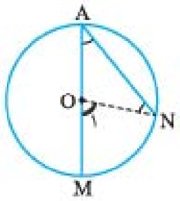
انواع زاویه در دایره

۱- زاویهٔ محاطی

تعریف زاویهٔ محاطی در دایره: زاویه‌ای را که رأس آن بر محیط دایره و دو ضلع آن، دو وتر از دایره باشد، زاویهٔ محاطی می‌نامند. کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویهٔ محاطی محدود است و درون زاویه قرار دارد کمان نظیر آن زاویهٔ محاطی گویند.

قضیه **اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف کمان نظیرش می‌باشد.**

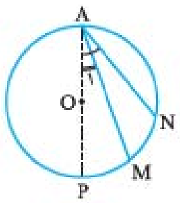
اثبات در دایرهٔ $C(O,R)$ زاویهٔ محاطی MAN را در نظر می‌گیریم. یکی از سه حالت زیر، ممکن است رخ دهد:



الف **یکی از ضلع‌های زاویهٔ محاطی، قطری از دایره است:**

اگر فرض کنیم AM قطری از دایره است، چنان‌چه از O به N وصل کنیم، چون $OA = ON$، پس $\hat{A} = \hat{N}$.

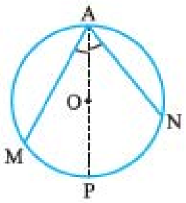
در مثلث AON زاویهٔ مرکزی $O_۱$ زاویه‌ای خارجی است؛ در نتیجه $\hat{O}_۱ = \hat{A} + \hat{N}$، در نتیجه $\hat{A} = \frac{۱}{۲}\hat{O}_۱$ و چون $\hat{O}_۱ = \widehat{MN}$، پس $\hat{A} = \frac{۱}{۲}\widehat{MN}$.



ب **هر دو ضلع زاویهٔ محاطی، در یک طرف قطر گذرنده از A قرار دارند:**

اگر قطر گذرنده از نقطهٔ A را AP بنامیم، با توجه به شکل روبه‌رو و بنا بر قسمت (الف) داریم $P\hat{A}N = \frac{۱}{۲}\widehat{PN}$ و $P\hat{A}M = \frac{۱}{۲}\widehat{PM}$. بنابراین خواهیم داشت:

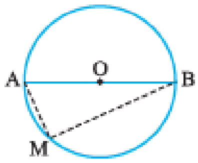
$$M\hat{A}N = P\hat{A}N - P\hat{A}M = \frac{۱}{۲}\widehat{PN} - \frac{۱}{۲}\widehat{PM} = \frac{۱}{۲}(\widehat{PN} - \widehat{PM}) = \frac{۱}{۲}\widehat{MN}$$



پ **دو ضلع زاویهٔ محاطی، در دو طرف قطر گذرنده از A قرار دارند:**

با توجه به شکل روبه‌رو، شبیه قسمت (ب) استدلال را ادامه دهید و نتیجه بگیرید که $M\hat{A}N = \frac{۱}{۲}\widehat{MN}$.

مثال **اگر AB قطری از دایره و M نقطهٔ دلخواهی از محیط دایره، به‌جز A و B باشد. ثابت کنید $AM \perp BM$.**



حل با توجه به شکل روبه‌رو، چون زاویهٔ AMB محاطی است، پس داریم $A\hat{M}B = \frac{۱}{۲}\widehat{AB}$ و چون AB قطر دایره است در نتیجه $\widehat{AB} = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $A\hat{M}B = \frac{۱}{۲} \times ۱۸۰^\circ = ۹۰^\circ$؛ یعنی $AM \perp BM$.

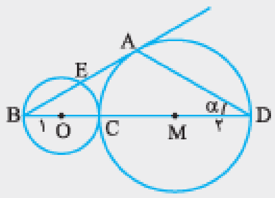
تذکر مثال دوم صفحهٔ ۹ این مسئله با روشی دیگر حل شده است.

نتیجه۱ با توجه به مثال فوق، می‌توان نتیجه گرفت:

مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه که از آن‌ها پاره‌خط ثابت AB به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود، تمام نقاط دایره‌ای به قطر AB به‌جز دو نقطهٔ A و B است.

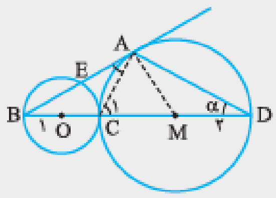
نتیجه۲ **زاویهٔ محاطی مقابل به دایره، قائمه است.**

تست **در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایره‌ای با شعاع ۱ و M مرکز دایره‌ای با شعاع ۲ و این دو دایره در نقطهٔ C مماس خارج هستند. اگر BA بر دایرهٔ بزرگ‌تر مماس باشد، اندازهٔ α چند درجه است؟**

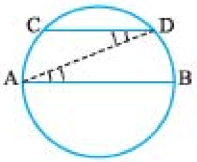


۱) ۲۰
۲) ۲۲/۵
۳) ۳۰
۴) ۴۵

پاسخ **گزینهٔ۳** از A به M و C وصل می‌کنیم. واضح است که $AC \perp AD$، زیرا زاویهٔ $C\hat{A}D$ محاطی و مقابل به قطر است. در ضمن چون شعاع وارد بر نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس $AM \perp AB$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ CAD، پاره‌خط AM میانهٔ وارد بر وتر است، پس $AM = \frac{۱}{۲}CD = ۲$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM، پاره‌خط AC میانهٔ وارد بر وتر است و در نتیجه $AC = \frac{۱}{۲}BM = ۲$ و چون $CM = AC = ۲$، پس مثلث AMC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین $\hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$ و در نتیجه $\alpha = ۳۰^\circ$.



مثال **ثابت کنید در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند.**



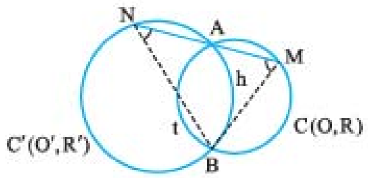
حل از نقطهٔ A به نقطهٔ D وصل می‌کنیم. چون $AB \parallel CD$ و AD مورب است، پس:

$$\hat{A}_1 = \hat{D}_1 \quad (۱)$$

از طرفی چون $\hat{A}_1$ و $\hat{D}_1$ زاویه‌های محاطی هستند، داریم: $\hat{D}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (۳) $\qquad \hat{A}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ (۲)

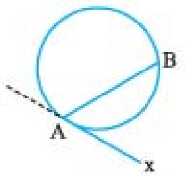
از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

مثال **اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در نقطه‌های A و B متقاطع باشند و از نقطهٔ A خطی دلخواه چنان رسم کنیم تا هر دو دایره را در دو نقطهٔ دیگر مانند M و N قطع کند، ثابت کنید زاویهٔ MBN اندازه‌اش ثابت است و با تغییر وضعیت خط MN تغییر نمی‌کند.**



حل با توجه به شکل، داریم $\hat{M} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AtB}$ و $\hat{N} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AhB}$ و چون هر دو کمان $\overset{\frown}{AtB}$ و $\overset{\frown}{AhB}$ ثابت هستند، پس مجموع $\hat{M}+\hat{N}$ نیز مقدار ثابتی دارد و از آن‌جا که $M\hat{B}N = 180^\circ - (\hat{M}+\hat{N})$، در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ $M\hat{B}N$ مقداری ثابت است و به وضعیت خط MN بستگی ندارد.

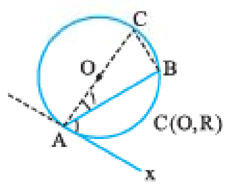
۲- زاویهٔ ظلی



تعریف زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای را که رأس آن بر محیط دایره و یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش، وتری از آن دایره باشد، زاویهٔ ظلی می‌نامند. کمانی از دایره را که محدود به دو ضلع زاویهٔ ظلی باشد کمان نظیر زاویهٔ ظلی می‌نامند.

در شکل روبه‌رو، که Ax بر دایره مماس است، زاویهٔ $x\hat{A}B$ زاویه‌ای ظلی است و کمان نظیر آن $\overset{\frown}{AB}$ می‌باشد.

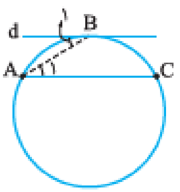
قضیه **اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، نصف کمان نظیرش می‌باشد.**



اثبات از A به O وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند و از C به B وصل می‌کنیم. زاویهٔ ABC محاطی و روبه‌رو به قطر AC است، پس زاویه‌ای قائمه است و در نتیجه $\hat{C}+\hat{A}_1 = 90^\circ$. چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس $\hat{A}+\hat{A}_1 = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{A}=\hat{C}$. بنا بر زاویهٔ محاطی نتیجه می‌شود $\hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ و بنابراین خواهیم داشت: $x\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

مسئلهٔ اساسی ۷ **اگر نقطهٔ B وسط کمان AC از دایرهٔ $C(O,R)$ باشد و خط d در این نقطه بر دایره مماس باشد، ثابت کنید $d \parallel AC$.**

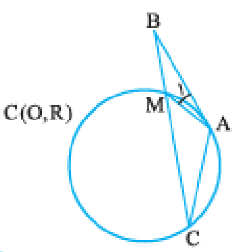
حل وتر AB را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{ظلی } \hat{B}_1 : \hat{B}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} \\ \text{محاطی } \hat{A}_1 : \hat{A}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}} \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow d \parallel AB$$

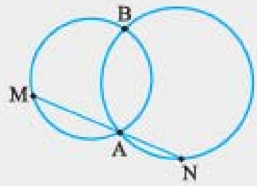
تذکر عکس مسئلهٔ اساسی (۷) نیز درست است؛ یعنی اگر B روی کمان AC باشد و از این نقطه خطی مماس بر دایره رسم شود و این خط موازی با وتر AC باشد، آن‌گاه B وسط کمان AC است.

مثال **اگر A نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ $C(O,R)$ و مماس AB با وتر AC برابر باشد و از C به B وصل کنیم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند، ثابت کنید $AM = MB$.**



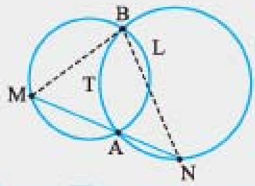
حل چون $AB = AC$، پس $\hat{B} = \hat{C}$. از طرفی $\hat{A}_1$ ظلی است، در نتیجه $\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$ و چون $\hat{C}$ محاطی است، $\hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$ و در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{C}$، بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{B}$، پس $AM = MB$.

تست دو دایرهٔ نامساوی در نقطه‌های A و B متقاطع‌اند. MN پاره‌خطی است که از A می‌گذرد و دو سر آن بر این دو دایره قرار دارد. مثلث‌های نظیر MBN برای وضعیت‌های قابل‌قبول، کدام ویژگی زیر را دارا هستند؟



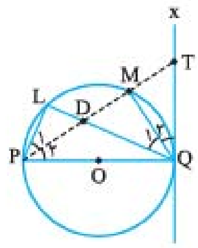
۱) همگی همنهشت‌اند. ۲) همگی مساحت برابر دارند.

۳) همگی محیط برابر دارند. ۴) همگی متشابه‌اند.



پاسخ **گزینهٔ ۴** در مثلث BMN داریم $\hat{AMB}=\frac{\overset{\frown}{ALB}}{2}$ و $\hat{ANB}=\frac{\overset{\frown}{ATB}}{2}$ و چون کمان‌های $\overset{\frown}{ALB}$ و $\overset{\frown}{ATB}$ ثابت هستند، پس زاویه‌های $\hat{AMB}$ و $\hat{ANB}$ همواره مقداری ثابت دارند؛ به عبارتی دیگر، هر سه زاویهٔ مثلث AMN همواره ثابت‌اند و در نتیجه تمامی این مثلث‌ها متشابه‌اند. توجه داریم که محیط و مساحت این مثلث‌ها در حالت کلی متفاوت می‌باشند.

مثال در شکل روبه‌رو، PQ قطری از دایرهٔ $C(O,R)$، L نقطه‌ای دلخواه روی محیط دایره و Qx مماس بر آن است. اگر نیمساز زاویهٔ LPQ وتر LQ را در نقطهٔ D، کمان LQ را در نقطهٔ M و مماس Qx را در نقطهٔ T قطع کند، ثابت کنید $DM=MT$.



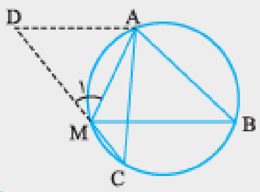
حل بنا به فرض، زاویه‌های $\hat{P}_1$ و $\hat{P}_2$ محاطی و برابرند، پس $\overset{\frown}{LM}=\overset{\frown}{MQ}$. از طرفی $\hat{Q}_1$ زاویه‌ای محاطی است و داریم $\hat{Q}_1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{LM}$ و نیز $\hat{Q}_2$ ظلی است، پس $\hat{Q}_2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MQ}$ و در نتیجه $\hat{Q}_1=\hat{Q}_2$؛ یعنی QM نیمساز $T\hat{Q}D$ است. از طرفی دیگر چون $P\hat{M}Q$ محاطی و روبه‌رو به قطر است، پس $MQ\perp DT$. در مثلث QDT، پاره‌خط QM هم نیمساز و هم ارتفاع است، در نتیجه این مثلث در رأس Q متساوی‌الساقین است و بنابراین، پاره‌خط QM میانه نیز می‌باشد و در نتیجه $DM=MT$.

تست سه نقطهٔ A، B و C دایره‌ای را به سه کمان برابر تقسیم کرده‌اند و M نقطه‌ای دلخواه از کمان AC است. کدام رابطه درست است؟

۱) $MB-AB=|MA-MC|$ ۲) $MB-AB=MC$

۳) $AB-MA=MC$ ۴) $MA+MC=MB$

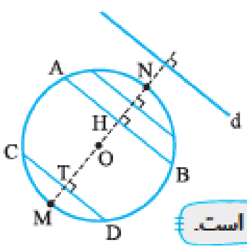
پاسخ **گزینهٔ ۴** وتر MC را به اندازهٔ وتر MA تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. چون هر یک از کمان‌های AB، BC و CA برابر ۱۲۰ درجه هستند، پس $A\hat{M}C=120^\circ$ و در نتیجه $\hat{M}_1=60^\circ$. چون AMD متساوی‌الساقین و یک زاویهٔ آن 60° است، پس متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $AM=AD$. از طرفی $\hat{C}=\hat{B}$، زیرا هر دو محاطی و مقابل به یک کمان هستند و $AB=AC$، زیرا کمان‌های نظیر این دو وتر برابرند، پس دو مثلث ACD و ABM به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشت‌اند و بنابراین $MB=DC=CM+MD$، پس:



$$CM+AM=MB$$

مثال اگر خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ داده شده باشند، قطری از این دایره که بر d عمود باشد چه ویژگی‌ای دارد؟

حل اگر وتر دلخواهی از این دایره را درنظر بگیریم که موازی d باشد (به عنوان مثال، وتر AB)، چون قطر MN بر وتر AB عمود است و قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، نقطهٔ H، وسط وتر AB است. برعکس، اگر T، نقطهٔ دلخواهی از قطر MN باشد و از این نقطه، وتر CD را عمود بر قطر MN رسم کنیم، آن‌گاه به سادگی معلوم می‌شود که نقطهٔ T، وسط وتر CD است، پس می‌توان گفت:

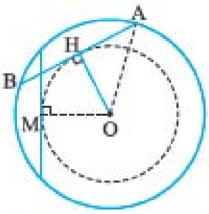


مجموعهٔ وسط وترهای موازی در یک دایره، قطری از آن دایره است که بر راستای مشترک این وترها عمود است.

مثال اگر در دایرهٔ $C(O,R)$ تمام وترهای به طول l را در نظر بگیریم ($0 < l < 2R$)، مجموعهٔ نقطه‌های وسط این وترها چه شکلی تشکیل می‌دهند؟

حل اگر AB یکی از این وترها باشد و نقطهٔ H وسط آن فرض شود، آن‌گاه OH بر AB عمود است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO بنا بر رابطهٔ فیثاغورس، داریم $HO^2 = AO^2 - AH^2$ یا $HO^2 = R^2 - (\frac{l}{2})^2$ و در نتیجه داریم: $HO = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2} =$ مقداری ثابت

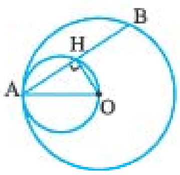
یعنی فاصلهٔ نقطهٔ H از نقطهٔ ثابت O، مقداری ثابت است. در نتیجه بنا بر تعریف، نقطهٔ H روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$ واقع است.



برعکس، به سادگی ثابت می‌شود که اگر نقطه‌ای دلخواه مانند M روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$ واقع باشد و از آن نقطه، عمودی بر OM رسم کنیم، این عمود، بر دایرهٔ $C(O,R)$ وتری به طول l ایجاد می‌کند، پس می‌توان گفت:

مجموعهٔ نقاط وسط وترهای با طول ثابت l در دایره‌ای به شعاع R، دایره‌ای هم‌مرکز با آن دایره و به شعاع $\sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$ است.

مثال اگر A نقطه‌ای ثابت از دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، مجموعهٔ نقطه‌های وسط تمام وترهایی از این دایره که یک انتهای آن‌ها نقطهٔ A باشد، چه شکلی تشکیل می‌دهند؟

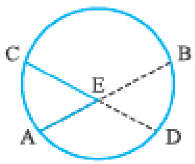


$C(O,R)$

حل اگر AB یکی از آن وترها و H وسط آن باشد، چون OH بر AB عمود است، پس می‌توان گفت نقطهٔ H روی دایره‌ای به قطر OA واقع است. برعکس، اگر H نقطه‌ای دلخواه از دایره‌ای به قطر OA باشد، به سادگی معلوم می‌شود که امتداد AH دایرهٔ $C(O,R)$ را در B قطع می‌کند و H وسط AB است، پس می‌توان گفت:

مجموعهٔ نقاط وسط وترهایی از دایرهٔ $C(O,R)$ که یک سر آن‌ها نقطه‌ای ثابت مانند A از این دایره باشند، دایره‌ای به قطر OA است.

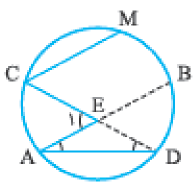
۳- زاویهٔ درونی در دایره



تعریف زاویهٔ درونی در دایره: زاویه‌ای را که رأس آن درون دایره و دو ضلع آن قسمتی از دو وتر آن دایره باشد زاویهٔ درونی دایره می‌نامند. دو کمانی را که بین امتداد دو ضلع زاویهٔ درونی دایره محدود است، کمان‌های نظیر زاویهٔ درونی می‌نامند.

در شکل روبه‌رو، زاویهٔ AEC، زاویه‌ای درونی است و کمان‌های نظیر آن $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BD}$ هستند.

قضیه **اندازهٔ هر زاویهٔ درونی، نصف مجموع دو کمان نظیرش می‌باشد.**



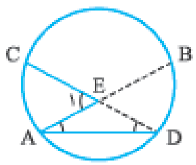
اثبات **روش اول** از نقطهٔ C خطی موازی با AE رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند.

بنا بر ویژگی خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود: $\hat{E}_1 = \hat{C}$ (۱)

از طرفی $\hat{C}$ زاویه‌ای محاطی است، پس: $\hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BD})$ (۲)

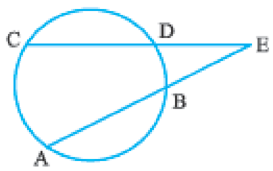
بنا بر مثال اول صفحهٔ ۲۴ از همین فصل، می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی، برابرند؛ یعنی: $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AC}$ (۳)

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $\hat{E}_1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.



روش دوم از A به D وصل می‌کنیم. زاویهٔ E_1 زاویهٔ بیرونی مثلث ADE است، پس $\hat{E}_1 = \hat{A} + \hat{D}$. چون دو زاویهٔ D و A محاطی هستند، پس $\hat{D} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ و $\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ و در نتیجه $\hat{E}_1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

زاویهٔ بیرونی در دایره

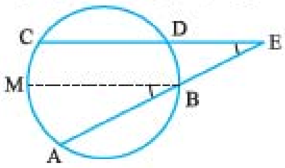


تعریف زاویهٔ بیرونی در دایره: زاویه‌ای را که رأس آن بیرون دایره و دو ضلع آن، امتداد دو وتر آن دایره باشد زاویهٔ بیرونی دایره می‌نامند. دو کمانی را که بین دو ضلع زاویهٔ بیرونی دایره محدود است، کمان‌های نظیر زاویهٔ بیرونی نامند.

در شکل روبه‌رو، زاویهٔ AEC، زاویه‌ای بیرونی است و کمان‌های نظیر آن $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BD}$ هستند.

قضیه **اندازهٔ هر زاویهٔ بیرونی، نصف قدرمطلق دو کمان نظیرش می‌باشد.**

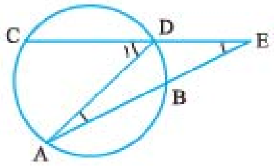
اثبات **روش اول** از نقطهٔ B خطی موازی با CD رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. بنا بر ویژگی خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود: $\hat{E}=\hat{B}\quad(1)$



از طرفی $\hat{B}$ زاویه‌ای محاطی است، پس: $\hat{C}=\frac{1}{2}\widehat{AM}=\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{MC})\quad(2)$

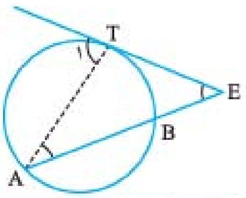
بنا بر مثال اول صفحهٔ ۲۴ از همین فصل، می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی، برابرند؛ یعنی: $\widehat{MC}=\widehat{BD}\quad(3)$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $\hat{E}=\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BD})$.



روش دوم از A به D وصل می‌کنیم. زاویهٔ D_1 زاویهٔ بیرونی مثلث ADE است، پس $\hat{E}=\hat{D}_1-\hat{A}$. چون دو زاویهٔ D_1 و A محاطی هستند، پس $\hat{D}_1=\frac{1}{2}\widehat{AC}$ و $\hat{A}=\frac{1}{2}\widehat{BD}$ و در نتیجه داریم: $\hat{E}=\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BD})$

مسئلهٔ اساسی ۸ **در شکل مقابل، ET در نقطهٔ T بر دایره مماس است. ثابت کنید:** $\hat{E}=\frac{1}{2}(\widehat{AT}-\widehat{BT})$

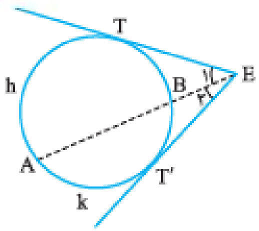


حل از A به T وصل می‌کنیم، در مثلث ATE زاویهٔ T_1 زاویه‌ای خارجی است و در نتیجه داریم $\hat{T}_1=\hat{A}+\hat{E}$ یا $\hat{E}=\hat{T}_1-\hat{A}$.

$\hat{A}$ زاویه‌ای محاطی و $\hat{T}_1$ زاویه‌ای ظلی است، پس $\hat{A}=\frac{1}{2}\widehat{BT}$ و $\hat{T}_1=\frac{1}{2}\widehat{AT}$، در نتیجه: $\hat{E}=\frac{1}{2}\widehat{AT}-\frac{1}{2}\widehat{BT}=\frac{1}{2}(\widehat{AT}-\widehat{BT})$

مسئلهٔ اساسی ۹ **در شکل مقابل، از نقطهٔ E دو مماس ET و ET′ بر دایره رسم شده‌اند. ثابت کنید:** $\hat{E}=\frac{1}{2}(\widehat{ThT'}-\widehat{TT'})$

(این زاویه را اصطلاحاً زاویهٔ بین دو مماس می‌نامند.)

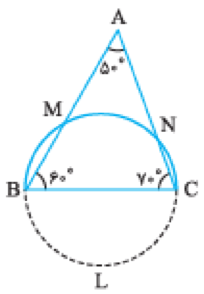


حل از نقطهٔ E خطی دلخواه رسم می‌کنیم تا دایره را در A و B قطع کند، با توجه به شکل، داریم $\hat{E}=\hat{E}_1+\hat{E}_2$.

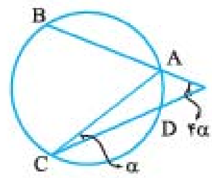
بنا بر مسئلهٔ اساسی (۸) داریم $\hat{E}_1=\frac{1}{2}(\widehat{AhT}-\widehat{BT})$ و $\hat{E}_2=\frac{1}{2}(\widehat{AkT'}-\widehat{BT'})$، بنابراین:

$$\hat{E}=\hat{E}_1+\hat{E}_2=\frac{1}{2}(\widehat{AhT}-\widehat{BT})+\frac{1}{2}(\widehat{AkT'}-\widehat{BT'})=\frac{1}{2}[\widehat{AhT}+\widehat{AkT'}-(\widehat{BT}+\widehat{BT'})]=\frac{1}{2}(\widehat{ThT'}-\widehat{TT'})$$

مثال **دو زاویهٔ مثلثی ۵۰ و ۶۰ درجه هستند. نیم‌دایره‌ای به قطر ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۵۰ درجه رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر مثلث را قطع کند. نسبت دو کمانی که بیرون مثلث قرار دارند، چه‌قدر است؟**

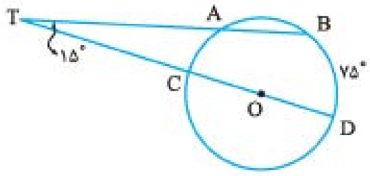


حل چون $\hat{A}=50^\circ$ و $B\hat{L}C=180^\circ$، در نتیجه، با توجه به اندازهٔ زاویهٔ بیرونی A در دایره، اندازهٔ کمان MN برابر 80° است. از این‌که اندازهٔ زاویهٔ B برابر 60° است، نتیجه می‌شود اندازهٔ کمان NC برابر 40° است. در نتیجه، اندازهٔ کمان BM برابر 60° است و در نتیجه: $\frac{\widehat{NC}}{\widehat{BM}}=\frac{40^\circ}{60^\circ}=\frac{2}{3}$



مثال **در شکل روبه‌رو، اگر $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}$ باشد، با توجه به اندازه‌های روی شکل، زاویهٔ α چند درجه است؟**

حل چون $\hat{C}$ زاویه‌ای محاطی است، پس $\widehat{AD}=۲\alpha$ و نیز با توجه به زاویهٔ بیرونی در دایره، داریم $۴\alpha=\frac{۱}{۲}(\widehat{BC}-\widehat{AD})$، پس $\widehat{BC}=۸\alpha+\widehat{AD}=۱۰\alpha$ و در نتیجه $\widehat{BC}=\widehat{AB}=\widehat{CD}=۱۰\alpha$. مجموع چهار کمان واقع بر دایره، برابر ۳۲α است که مساوی ۳۶۰° است، در نتیجه $\alpha=\frac{۳۶۰^\circ}{۳۲}=۱۱/۲۵^\circ$.



مثال **در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره‌ای به شعاع R است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول وتر AB کدام است؟**

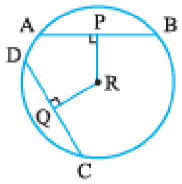
حل می‌دانیم $\hat{T}=\frac{۱}{۲}(\widehat{BD}-\widehat{CA})$، پس $۱۵=\frac{۱}{۲}(۷۵-\widehat{CA})$ و در نتیجه $\widehat{CA}=۴۵^\circ$ و چون $\widehat{CA}+\widehat{AB}+\widehat{BD}=۱۸۰^\circ$، پس $\widehat{AB}=۶۰^\circ$. اکنون بنا بر مسئلهٔ اساسی (۴) در صفحهٔ ۲۰، داریم:

$$R=\frac{AB}{۲\sin\frac{\theta}{۲}}=\frac{AB}{۲\sin ۳۰^\circ}=\frac{AB}{۲\times\frac{۱}{۲}}\Rightarrow AB=R$$

مسائل تشریحی درس ۱

۱- ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

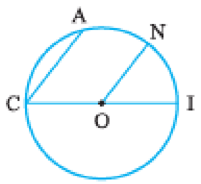
۲- ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



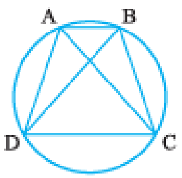
۳- با توجه به شکل روبه‌رو که در آن R مرکز دایره است:

الف) اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=۶$، آن‌گاه طول‌های AP و AB را به دست آورید.

ب) اگر $RC=\sqrt{۲}$ و $CQ=RQ$، آن‌گاه طول‌های CQ، DQ و CD را به دست آورید.



۴- در دایره‌ای به مرکز O و به قطر CI داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید $\widehat{AN}=\widehat{NI}$.



۵- با توجه به شکل مقابل نشان دهید:

الف) اگر $AD=BC$، آن‌گاه $AC=BD$.

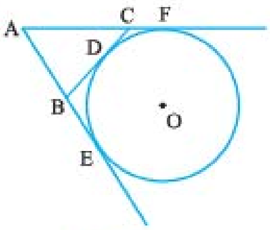
ب) اگر $AC=BD$، آن‌گاه $AD=BC$.

۶- اندازهٔ شعاع دایره‌ای را به دست آورید که طول وتر کمان نظیر ۱۲۰° در آن، برابر $۵\sqrt{۳}$ باشد.

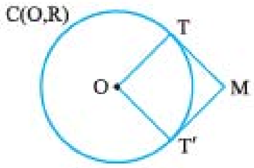
۷- وتر AB به طول ۸ در دایرهٔ $C(O,۵)$، در چه فاصله‌ای از مرکز این دایره قرار دارد؟

۸- ثابت کنید اگر خطی دو دایرهٔ هم‌مرکز را قطع کند، دو قطعه‌ای از این خط که بین دو دایره محصورند، برابرند.

۹- خط‌های AF، AE و BC به ترتیب در نقطه‌های F، E و D بر دایره به مرکز O مماس هستند. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره، بین دو نقطهٔ ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



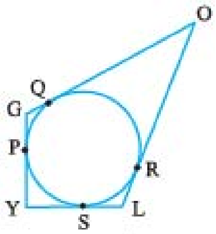
۱۰- از نقطهٔ M خارج دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس عمود بر هم بر آن رسم کرده‌ایم. (مطابق شکل) اگر T و T' نقاط تماس باشند، اندازهٔ MT را بیابید.



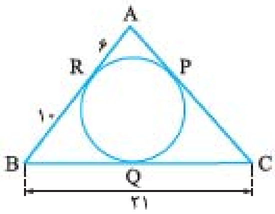
۱۱- شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر است. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر را که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید.

۱۲- دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. مجموعهٔ نقاطی را تعیین کنید که مماس‌های رسم‌شده از آن‌ها بر دایره، بر هم عمود باشند.

۱۳- در شکل مقابل، ضلع‌های چهارضلعی $GOLY$ بر دایره مماس‌اند. ثابت کنید $GO+LY=OL+GY$.

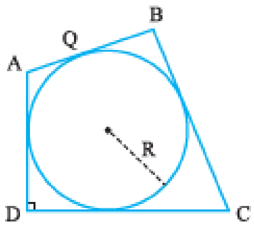


۱۴- در شکل مقابل، ضلع‌های مثلث ABC در نقطه‌های P، Q و R بر دایره مماس هستند. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول ضلع AC را تعیین کنید.

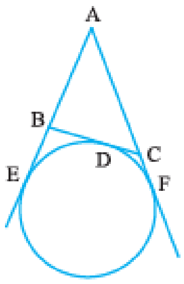


۱۵- از نقطهٔ M بیرون دایرهٔ $C(O,۶)$ دو مماس MT و MT' را بر آن رسم کرده‌ایم. اگر $OM=۱۲$ باشد، طول وتر TT' را به دست آورید.

۱۶- در شکل مقابل، $\hat{D}=۹۰^\circ$ و R شعاع دایره، برابر ۱۰ می‌باشد. اگر $BC=۳۸$ و $QB=۲۷$ باشد، طول CD را پیدا کنید.



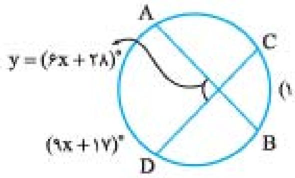
۱۷- در شکل مقابل، اگر $BC=۳/۵$، $AC=۵$ و $AB=۴$ باشد، اندازهٔ BE چه‌قدر است؟

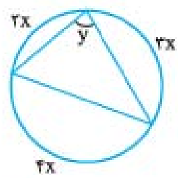


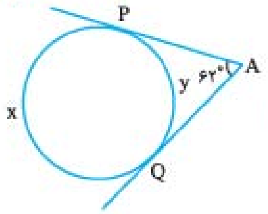
۱۸- ثابت کنید اگر دو دایرهٔ متقاطع $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع کنند، خط‌المرکزین دو دایره، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها می‌باشد.

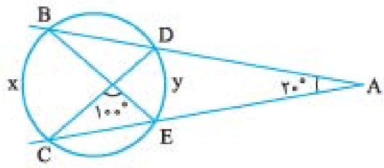
۱۹- دو دایرهٔ $C(O,۶)$ و $C'(O',۳)$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. اگر $OO'=۴$ باشد، طول وتر مشترک دو دایره را به دست آورید.

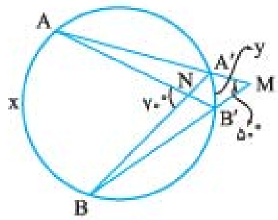
۲۰- در شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید: (امتحانات نهایی سال‌های قبل)

الف)


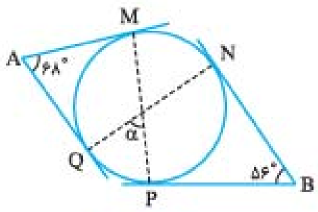
ب)


پ)


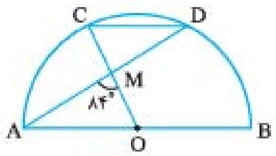
ت)


ث)


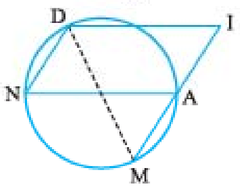
۲۱- در شکل روبه‌رو، اضلاع دو زاویهٔ A و B بر دایره مماس هستند. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟



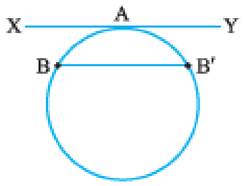
۲۲- در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره، O مرکز نیم‌دایره و وتر CD با AB موازی است. اگر $A\hat{M}O=84^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان‌های CD و BD چند درجه هستند؟



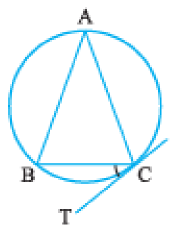
۲۳- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های A، I و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM=DI$.



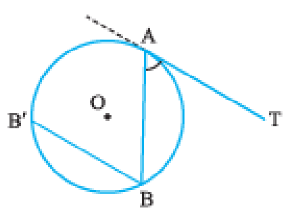
۲۴- خط XY در نقطهٔ A بر دایره مماس و وتر BB′ موازی XY است. ثابت کنید $\overset{\frown}{AB}$ برابر با $\overset{\frown}{AB'}$ است.



۲۵- در شکل روبه‌رو، $AB=AC$، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\overset{\frown}{AC}=140^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCT را پیدا کنید.

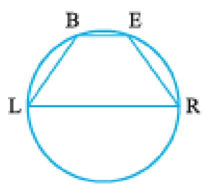


۲۶- زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB′ که موازی خط مماس AT رسم شده است، ثابت کنید $T\hat{A}B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

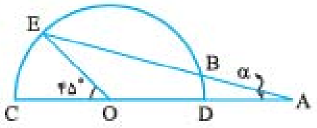


۲۷- هر چهار رأس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند. اگر $\hat{A}=55^\circ$ و $\hat{B}=85^\circ$، مقدار $\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}$ را به دست آورید.

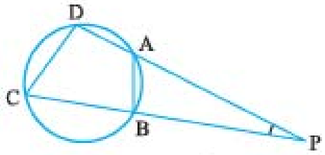
۲۸- در دایرهٔ شکل مقابل داریم $BL=ER$، نشان دهید $BE \parallel LR$.



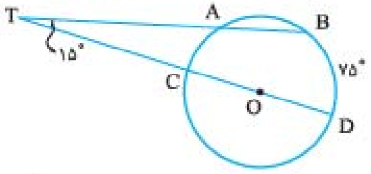
۲۹- در شکل مقابل، CD قطر نیم‌دایره، O مرکز آن و $OC = AB$ است. اندازهٔ α را به دست آورید.



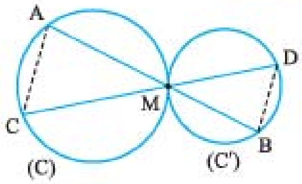
۳۰- در شکل مقابل، اگر R شعاع دایره، $AB = R$ و $CD = \sqrt{۲}R$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ P چه‌قدر است؟



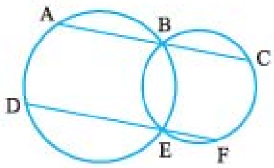
۳۱- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره‌ای به شعاع R است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول وتر AB برحسب R چه‌قدر است؟



۳۲- دو دایرهٔ C و C' در نقطهٔ M بر یکدیگر مماس بیرونی هستند. از نقاط دلخواه A و C واقع بر دایرهٔ C به نقطهٔ M وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ C' را به ترتیب در B و D قطع کنند؛ ثابت کنید $AC \parallel BD$.

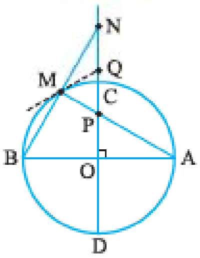


۳۳- در شکل مقابل، دو دایره در نقاط B و E متقاطع‌اند. از این دو نقطه، دو خط به موازات یکدیگر رسم می‌کنیم تا دو دایره را در A، C، D و F قطع کنند. ثابت کنید $AC = DF$.



۳۴- اگر خط و دایره‌ای بر یک صفحه واقع باشند، آن‌گاه آن خط و دایره، حداکثر دو نقطهٔ مشترک دارند.

۳۵- اگر در دایرهٔ $C(O,R)$ دو قطر AB و CD بر هم عمود باشند و از نقطهٔ دلخواه M روی این دایره، مماسی بر آن رسم کنیم تا امتداد قطر CD را در نقطهٔ Q و دو وتر AM و BM قطر CD یا امتداد آن را به ترتیب در نقطه‌های P و N قطع کنند. ثابت کنید نقطهٔ Q وسط پاره‌خط NP است.



۳۶- از نقطهٔ M بیرون دایرهٔ $C(O,R)$ مماس‌های MA و MB و همچنین از این نقطه، قاطع MCD را بر دایره رسم می‌کنیم؛ ثابت کنید $AC \times BD = AD \times BC$.

پرسش‌های چندگزینه‌ای درس ۱

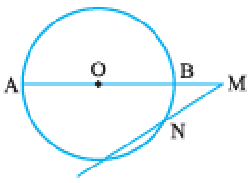
۱- شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر است. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۲- از نقطهٔ M، بیرون دایرهٔ $C(O,R)$، دو مماس MT و MT' را بر آن رسم کرده‌ایم. اگر $MT = \sqrt{۳}R$ باشد، زاویهٔ بین دو مماس چند درجه است؟

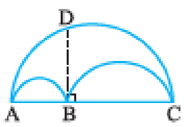
۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۳- در شکل مقابل، M بیرون دایرهٔ $C(O,۶)$، $MN = ۶$ و $\widehat{BN} = ۳۰^\circ$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از راستای MN چه‌قدر است؟

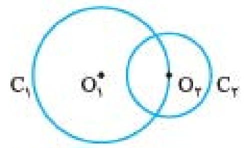


۱) ۳ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۴- در شکل مقابل، سه نیم‌دایره به قطرهای AB، BC و AC رسم شده‌اند و از نقطهٔ B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر را در نقطهٔ D قطع کند. اگر $AB = ۳$ و $BC = ۱۲$ باشد، طول BD کدام است؟

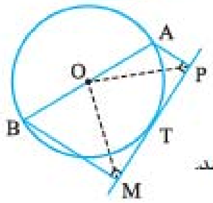


۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۷/۵



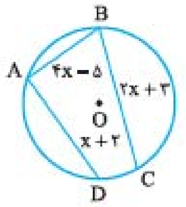
۵- دایره‌های $C_1(O_1, 26)$ و $C_2(O_2, R_2)$ به گونه‌ای هستند که O_2 روی محیط دایرهٔ C_1 قرار دارد. اگر طول مماسی که از O_1 بر C_2 رسم می‌شود برابر ۲۴ باشد. آن‌گاه R_2 کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶



۶- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و T نقطه‌ای دلخواه از محیط دایره است. اگر از A و B عمودهای AP و BM بر خط مماس بر دایره در نقطهٔ T رسم شده باشند، کدام گزینه دربارهٔ مثلث OMP درست است؟

۱) قائم‌الزاویه است.
۲) متساوی‌الساقین است.
۳) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.
۴) بسته به وضعیت نقطهٔ T، هر مثلثی ممکن است باشد.



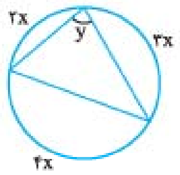
۷- در شکل مقابل، وتر BC نسبت به دو وتر دیگر، به مرکز نزدیک‌تر است و وتر AB نسبت به دو وتر دیگر، از مرکز دورتر است. حدود x کدام است؟

۱) $-1 < x < \frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{4} < x < \frac{7}{3}$

۳) $1 < x < \frac{5}{4}$ ۴) $-1 < x < \frac{5}{4}$

۸- در دایره‌ای از دو انتهای یک قطر، دو وتر موازی رسم شده‌اند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) دو وتر، برابرند و دو انتهای دیگر این دو وتر، یک قطر دایره است.
۲) این دو وتر از مرکز به یک فاصله هستند.
۳) این دو وتر، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند.
۴) دو وتر، برابرند ولی امکان دارد دو انتهای دیگر این دو وتر، یک قطر دایره نباشند.



۹- در شکل مقابل، x و y برحسب درجه هستند. مقدار $x+y$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۸۰ ۲) ۴۰

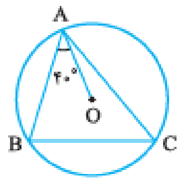
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۰

۱۰- وتر AB به طول ۸ در دایرهٔ $C(O, 5)$، در چه فاصله‌ای از مرکز این دایره قرار دارد؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۶ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

۱۱- فاصلهٔ نقطه‌ای از مرکز دایرهٔ $C(O, 13)$ برابر ۱۲ است. طول کوتاه‌ترین وتری از دایره که از این نقطه می‌گذرد، کدام است؟

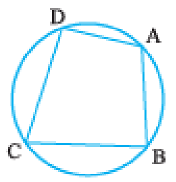
۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۵ ۴) ۱۰



۱۲- در شکل روبه‌رو، اگر O، مرکز دایره‌ای باشد که از سه رأس مثلث ABC می‌گذرد و $O\hat{A}B = 40°$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۵

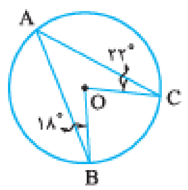
۳) ۶۰ ۴) ۴۰



۱۳- در شکل مقابل، R شعاع دایره، $AD = R$ و $AB = \sqrt{2}R$ می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰

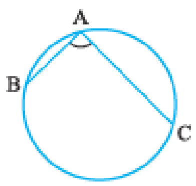
۳) ۷۵ ۴) ۶۰



۱۴- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، زاویهٔ BOC چند درجه است؟

۱) ۸۸ ۲) ۸۰

۳) ۹۰ ۴) ۷۲



۱۵- اگر در شکل روبه‌رو، $AB = R$ و $AC = R\sqrt{3}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟

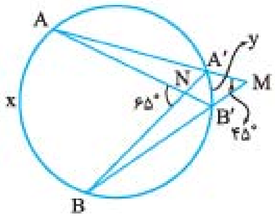
۱) ۹۰
۲) ۱۰۰
۳) ۸۰
۴) ۱۱۰

۱۶- دایره‌ای از سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گذرد. اگر M، نقطه‌ای دلخواه از کمان BC باشد، حاصل $MB+MC$ کدام است؟

۱) AM
۲) ۲AM
۳) ۱/۵AM
۴) $\frac{۴}{۳}$AM

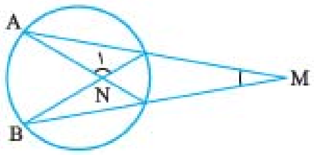
۱۷- PQ قطری از دایرهٔ $C(O,R)$، L نقطه‌ای دلخواه روی محیط دایره و Qx مماس بر دایره است. اگر نیمساز زاویهٔ $L\hat{P}Q$ وتر LQ را در نقطهٔ D، کمان LQ را در نقطهٔ M و مماس Qx را در نقطهٔ T قطع کند، کدام درست است؟

۱) D وسط PM است.
۲) D وسط LQ است.
۳) M وسط DT است.
۴) $LD=PL$



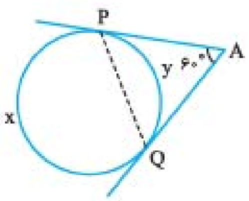
۱۸- در شکل روبه‌رو، با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل $\frac{x}{y}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴/۵
۲) ۵
۳) ۵/۵
۴) ۶



۱۹- در شکل روبه‌رو، اگر $\hat{M}=۲۰^\circ$ و $\widehat{AB}=۸۰^\circ$ باشد، اندازهٔ $\hat{N}_۱$ چند درجه است؟

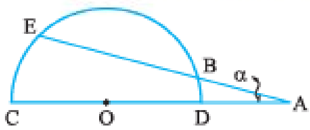
۱) ۱۱۰
۲) ۱۱۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۲۵



۲۰- در شکل روبه‌رو، AP و AQ بر دایره مماس‌اند. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل $\frac{x+y}{x-y}$ برابر کدام گزینه است؟

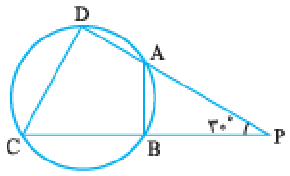
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۱- در شکل مقابل، CD قطر نیم‌دایره، O مرکز آن و طول AB برابر شعاع نیم‌دایره و $\widehat{EB}=۱۲۰^\circ$ است. اندازهٔ α چند درجه است؟

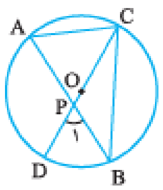


۱) ۵
۲) ۷/۵
۳) ۱۰
۴) ۱۵

۲۲- در شکل مقابل، اگر R شعاع دایره، $AB=R$ و $\hat{P}=۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ CD کدام است؟

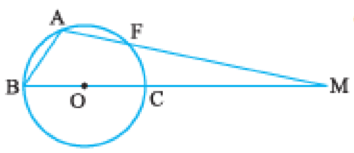


۱) $R\sqrt{۲}$
۲) $R\sqrt{۳}$
۳) ۲R
۴) $۲R\sqrt{۲}$



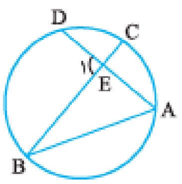
۲۳- اگر در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{A}=۴۴^\circ$ و $\hat{B}=۳۶^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $P_۱$ چند درجه است؟

۱) ۸۲°
۲) ۸۵°
۳) ۸۶°
۴) ۸۸°



۲۴- در شکل روبه‌رو، اگر O، مرکز دایره، $AB=AF$ و $\hat{A}=۱۱۲^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۵۲
۲) ۵۴
۳) ۵۶
۴) ۵۸

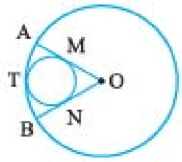


۲۵- در شکل مقابل اگر $\hat{A}=۲\hat{B}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $E_۱$ چند برابر کمان BD است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) ۲

۲۶- اگر $AB=AC$ باشد و دایره‌ای به قطر AB رسم کنیم، کدام گزینه درست است؟

۱) دایره از وسط AC می‌گذرد.
۲) دایره از وسط BC می‌گذرد.
۳) دایره بر AC مماس است.
۴) دایره BC را قطع می‌کند ولی آن را نصف نمی‌کند.



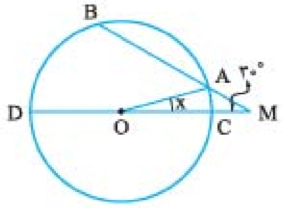
۲۷- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و شعاع‌های OA و OB بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس هستند. اگر $\widehat{AT} = ۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان کوچک‌تر MN از دایرهٔ کوچک‌تر، چند درجه است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

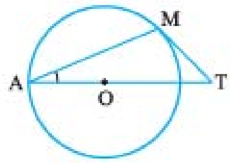
۲۸- دو دایره در نقطهٔ A مماس درونی هستند به گونه‌ای که دایرهٔ کوچک‌تر از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر می‌گذرد. اگر B نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ کوچک‌تر باشد و امتداد آن، دایرهٔ بزرگ‌تر را در C قطع کند، کدام نادرست است؟

۱) OB نیمساز $A\hat{O}C$ است. ۲) $OB \perp AC$ ۳) $AB = BC$ ۴) $۲AB < AC$

۲۹- در شکل زیر، $\hat{M} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{AB} = ۹۰^\circ$ است. اگر نقطهٔ O، مرکز دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ x چند درجه است؟



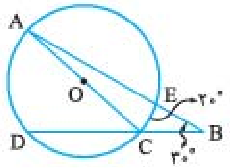
۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۳۰



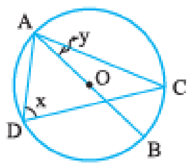
۳۰- در شکل مقابل، اندازهٔ مماس MT، برابر شعاع دایره و O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ MAT چند درجه است؟

۱) ۲۲/۵ ۲) ۴۰
۳) ۳۰ ۴) ۱۵

۳۱- در شکل مقابل، O مرکز دایره است با توجه به اندازه‌های روی آن، اندازهٔ کمان DC کدام است؟



۱) ۸۰°
۲) ۹۰°
۳) ۱۰۰°
۴) ۱۱۰°



۳۲- در دایرهٔ شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $y = ۲۱^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ x چند درجه است؟

۱) ۷۱ ۲) ۶۹
۳) ۷۲ ۴) ۶۸

۳۳- در دایرهٔ $C(O,۵)$ وترهای $AB = ۸$ و $CD = ۶$ هستند. نسبت فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB به فاصلهٔ مرکز دایره از وتر CD کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۴- اگر نقطهٔ M درون دایرهٔ $C(O,R)$ باشد و طول کوچک‌ترین وتر گذرنده از این نقطه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول بزرگ‌ترین قطر گذرنده از همین نقطه باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ M کدام است؟

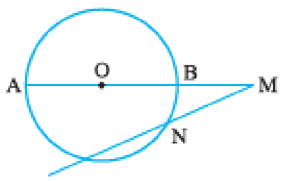
۱) $\frac{R}{۴}$ ۲) $\frac{R}{۲}$ ۳) $\frac{R}{۶}$ ۴) $\frac{R}{۳}$

۳۵- شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۵ و r هستند. اگر اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است برابر ۸ باشد، با فرض $r < ۵$ مقدار r کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۶- از نقطهٔ M، بیرون دایرهٔ $C(O,R)$، دو مماس MT و MT′ را بر آن رسم کرده‌ایم. اگر $MT = \sqrt{۳}R$ باشد، زاویهٔ بین دو مماس چند درجه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۹۰

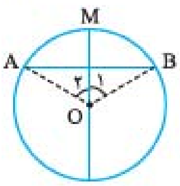


۳۷- در شکل مقابل، M بیرون دایرهٔ $C(O,R)$، $MN = R$، $\widehat{BN} = ۳۰^\circ$ و فاصلهٔ O از راستای MN برابر $۳\sqrt{۳}$ است. شعاع دایره کدام است؟

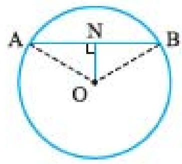
۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) ۴ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

پاسخ مسائل تشریحی فصل اول

۱- چون M وسط کمان AB است، پس $\widehat{AM}=\widehat{BM}$ و در نتیجه $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$، یعنی OM نیمساز زاویهٔ O از مثلث متساوی‌الساقین OAB است. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین نیمساز وارد بر قاعده، ارتفاع نیز می‌باشد، پس نیمساز OM در مثلث متساوی‌الساقین OAB ارتفاع نیز می‌باشد، و در نتیجه خواهیم داشت $OM \perp AB$.



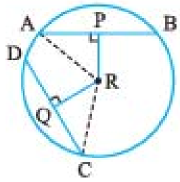
۲- اگر N وسط وتر AB باشد، آن‌گاه پاره‌خط ON میانهٔ نظیر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین OAB است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین میانهٔ وارد بر قاعده، ارتفاع نیز می‌باشد، بنابراین $ON \perp AB$.



۳- الف) نقطهٔ A را به R وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ APR داریم:

$$AP^۲=AR^۲-RP^۲=۱۰^۲-۶^۲=۶۴$$
$$\Rightarrow AP=۸$$

و چون $RP \perp AB$، پس $AB=۲AP=۱۶$.

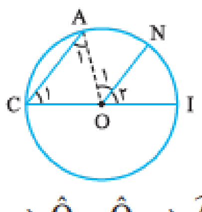


ب) در مثلث قائم‌الزاویهٔ QRC داریم: $CR^۲=QC^۲+RQ^۲$

$$\xrightarrow[RC=\sqrt{۲}]{CQ=RQ} (\sqrt{۲})^۲=۲QC^۲ \Rightarrow QC=۱$$

چون $QR \perp CD$، پس $DQ=QC=۱$ و در نتیجه $CD=۲$.

-۴



$$\left.\begin{array}{l} CA \parallel ON, \text{مورب } CI \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{O}_۲ \\ CA \parallel ON, \text{مورب } AO \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{O}_۱ \\ CO=AO \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \Rightarrow \widehat{AN}=\widehat{NI}$$

۵- الف) $AD=BC \Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD}+\widehat{DC}=\widehat{BC}+\widehat{CD}$

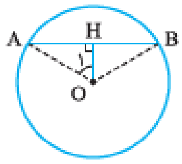
$$\Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{BCD} \Rightarrow AC=BD$$

ب) $AC=BD \Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{AD}+\widehat{DC}$

$$=\widehat{BC}+\widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC} \Rightarrow AD=BC$$

۶- **روش اول** اگر در شکل زیر، کمان کوچک‌تر $\widehat{AB}$ برابر ۱۲۰° و $AB=۵\sqrt{۳}$ باشد، داریم $AH=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ و $\hat{O}_۱=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰^\circ$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

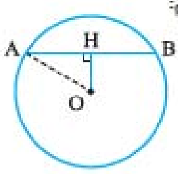


$$\sin\hat{O}_۱=\frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}}{R} \Rightarrow R=۵$$

روش دوم

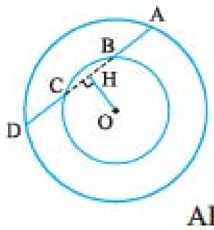
$$R=\frac{a}{۲\sin\frac{\theta}{۲}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲\sin۶۰^\circ}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۵$$

۷- از مرکز دایره بر وتر AB عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:



$$AO^۲=AH^۲+OH^۲$$
$$\Rightarrow ۵^۲=۴^۲+OH^۲ \Rightarrow OH=۳$$

۸- با توجه به شکل، اگر از مرکز مشترک این دو دایره بر خط موردنظر عمود کنیم، هم BC و هم AD را نصف می‌کند، پس خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{l} AH=HD \\ BH=HC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}$$

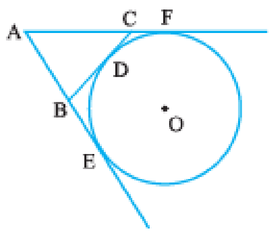
$$AH-BH=HD-HC \Rightarrow AB=CD$$

۹- می‌دانیم اگر از نقطه‌ای بیرون دایره، دو مماس بر آن رسم کنیم، طول دو مماس، برابرند. اگر D نقطه‌ای دلخواه روی کمان کوچک‌تر $\widehat{EF}$ باشد، آن‌گاه با توجه به شکل، داریم:

$$\begin{cases} BD=BE & (۱) \\ CD=CF & (۲) \\ AE=AF & (۳) \end{cases}$$

از طرفی داریم: $\text{محیط مثلث } ABC = AB+BC+AC$

$$=AB+(BD+DC)+AC=(AB+BD)+(DC+AC)$$



بنا بر رابطه‌های (۱) و (۲):

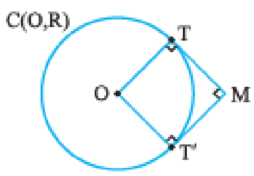
$$=(AB+BE)+(CF+AC)$$

بنا بر (۳):

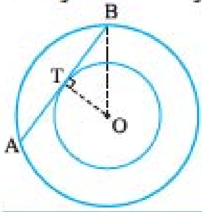
$$=AE+AF$$
$$=۲AE=\text{مقدار ثابت}$$

۱۰- چون دو مماس بر هم عمودند، $T\hat{M}T'=۹۰^\circ$ و چون شعاع وارد بر نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، در نتیجه $O\hat{T}M=O\hat{T'}M=۹۰^\circ$، پس چهارضلعی $OTMT'$ مستطیل است.

و چون $OT=OT'=R$، بنابراین، چهارضلعی مذکور یک مربع است و در نتیجه $MT=R$.



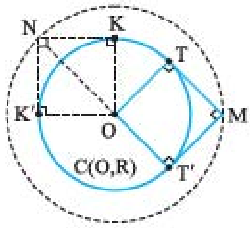
۱۱- اگر وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر، در نقطهٔ T بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، آن‌گاه شعاع OT عمودمنصف وتر AB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTB داریم:



$$TB^۲ = OB^۲ - OT^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \Rightarrow TB = ۴$$

و چون $AB = ۲BT$، پس $AB = ۸$.

۱۲- اگر M نقطه‌ای باشد که از آن دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده باشد، بنا بر مسئلهٔ تشریحی ۱۰، چهارضلعی $OTMT'$ مربعی به ضلع R است و در نتیجه طول قطر آن $OM = R\sqrt{۲}$ و چون O نقطه‌ای ثابت است، پس مجموعهٔ نقاط M در صفحه، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ است. برعکس، اگر N، نقطه‌ای از دایرهٔ به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ باشد و از این نقطه، دو مماس NK و NK' را بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شوند، در مثلث قائم‌الزاویهٔ NKO داریم



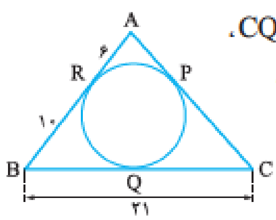
$ON = R\sqrt{۲}$ و $OK = R$، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم، $NK = R$ و در نتیجه، چهارضلعی $NKOK'$ مربع است و بنابراین، $NK \perp NK'$؛ یعنی دو مماس، بر هم عمودند.

۱۳- با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned} GQ &= GP \\ QO &= OR \\ YS &= YP \\ SL &= LR \end{aligned}\right\} \Rightarrow (GQ+QO)+(YS+SL)$$

$$=(GP+YP)+(OR+LR) \Rightarrow GO+LY = GY+OL$$

۱۴- واضح است که $AP = AR = ۶$ و $BQ = BR = ۱۰$.

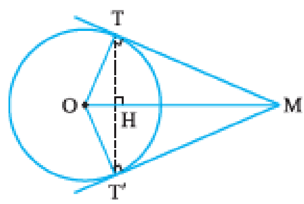


چون $CQ = BC - BQ = ۲۱ - ۱۰ = ۱۱$.
پس $CP = CQ = ۱۱$، در نتیجه $AC = AP + CP = ۶ + ۱۱ = ۱۷$.

۱۵- واضح است که اگر نقطهٔ برخورد OM و TT' را H بنامیم، آن‌گاه $TH = T'H$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM داریم:

$$TM^۲ = OM^۲ - OT^۲ = ۱۲^۲ - ۶^۲ = ۶^۲ \times ۳$$

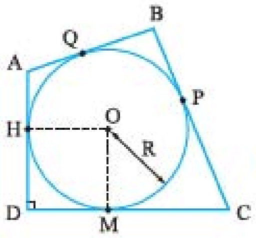
$$\Rightarrow TM = ۶\sqrt{۳}$$



$$S = \frac{۱}{۲}OT.TM = \frac{۱}{۲}TH.OM$$
$$\Rightarrow OT.TM = TH.OM$$
$$\Rightarrow ۶\times ۶\sqrt{۳} = TH \times ۱۲$$
$$\Rightarrow TH = ۳\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow TT' = ۲TH = ۶\sqrt{۳}$$

۱۶- اگر نقطه‌های تماس سه ضلع دیگر را با دایره، M، H و P بنامیم، آن‌گاه واضح است که $BP = BQ = ۲۷$ و در نتیجه داریم:

$$PC = BC - BP = ۳۸ - ۲۷ = ۱۱$$

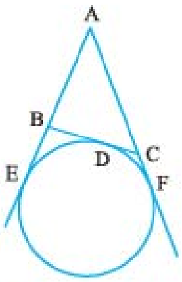


چون $MC = PC = ۱۱$ و چهارضلعی $OMDH$ مربع است، پس $DM = R = ۱۰$. بنابراین:

$$CD = MC + DM = ۱۱ + ۱۰ = ۲۱$$

۱۷- با توجه به شکل، واضح است که:

$$BD = BE \quad (۱) \;,\; CD = CF \quad (۲) \;,\; AE = AF \quad (۳)$$



از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} &AB+BC+AC \\ &=AB+(BD+DC)+AC \\ &=AB+(BE+FC)+AC \\ &=AE+AF=۲AE \end{aligned}$$

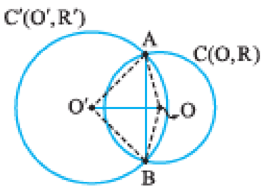
در نتیجه:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ۴+۳/۵+۵=۲AE \\ &\Rightarrow AE=۶/۲۵ \end{aligned}$$

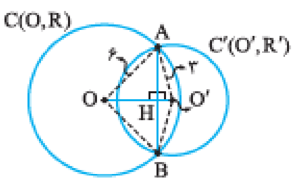
بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &BE=AE-AB \\ &=۶/۲۵-۴=۲/۲۵ \end{aligned}$$

۱۸- فرض کنیم دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع باشند چون $OA = OB = R$ و $O'A = O'B = R'$، پس O و O' از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند و در نتیجه بر روی عمودمنصف AB قرار دارند.



۱۹- اگر نقطهٔ برخورد AB با OO' را H بنامیم و فرض کنیم $OH = x$، $O'H = y$ و $AH = z$، آن‌گاه داریم:



$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{AHO} &: ۶^۲ = x^۲ + z^۲ \\ \overset{\Delta}{AHO'} &: ۳^۲ = y^۲ + z^۲ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-} ۳۶ - ۹ = x^۲ - y^۲$$

$$\Rightarrow ۲۷ = (x-y)\underbrace{(x+y)}_{OO'=۴} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y &= \frac{۲۷}{۴} \\ x+y &= ۴ \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{۴۳}{۸}$$

$$\Rightarrow z^۲ = ۳۶ - \left(\frac{۴۳}{۸}\right)^۲ = \frac{۴۵۵}{۶۴} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{۴۵۵}}{۸}$$

$$\Rightarrow AB = ۲z = \frac{\sqrt{۴۵۵}}{۴}$$

۲۰- الف) $6x+28=\frac{(9x+17)+(10x-10)}{2} \Rightarrow x=7$

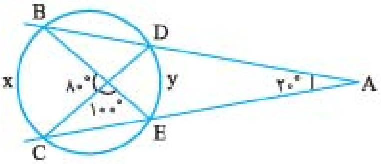
$y=6\times 7+28=70$

ب) باید داشته باشیم $2x+3x+4x=360^\circ$، پس $x=40^\circ$ و در نتیجه $y=\frac{4x}{2}=2x=80^\circ$.

پ) اولاً $x+y=360^\circ$ و ثانیاً $\frac{x-y}{2}=62^\circ$ یا $x-y=124^\circ$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $x=242^\circ$ و $y=118^\circ$.

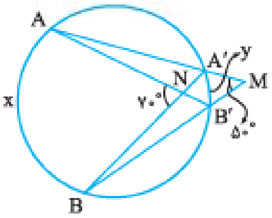
ت) با توجه به شکل، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{2}=80 \Rightarrow x+y=160\\ \frac{x-y}{2}=20 \Rightarrow x-y=40\end{array}\right\} \Rightarrow x=100^\circ \text{ و } y=60^\circ$$



ث) با توجه به شکل، داریم:

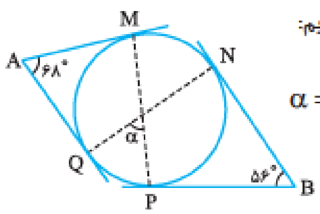
$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{2}=70 \Rightarrow x+y=140\\ \frac{x-y}{2}=50 \Rightarrow x-y=100\end{array}\right\} \Rightarrow x=120^\circ \text{ و } y=20^\circ$$



۲۱- با توجه به شکل مقابل، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{\widehat{MN}+\widehat{NP}+\widehat{PQ}-\widehat{MQ}}{2}=68^\circ\\ \hat{B}=\frac{\widehat{MN}+\widehat{MQ}+\widehat{PQ}-\widehat{NP}}{2}=56^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \widehat{MN}+\widehat{PQ}=124^\circ$$

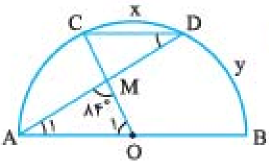
α زاویه‌ی درونی است، پس داریم:



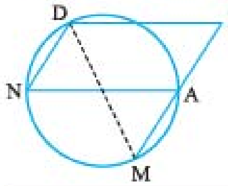
$$\alpha=\frac{\widehat{MN}+\widehat{PQ}}{2}=\frac{124}{2}=62^\circ$$

۲۲- اگر فرض کنیم $\widehat{CD}=x$ و $\widehat{BD}=y$، آن‌گاه چون $CD \parallel AB$ نتیجه می‌گیریم $\widehat{AC}=\widehat{BD}=y$. چون زاویهٔ $\hat{A}_1$ محاطی است، داریم $\hat{A}_1=\frac{\widehat{BD}}{2}=\frac{y}{2}$ و $\hat{O}_1$ زاویه‌ای مرکزی است، پس $\hat{O}_1=\widehat{AC}=y$. در مثلث OAM، مجموع زوایا ۱۸۰ درجه است،

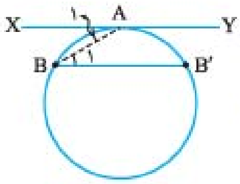
پس $84^\circ+\frac{y}{2}+y=180^\circ$ یا $x+2y=180^\circ$. از طرفی $y=64^\circ$، در نتیجه $x=52^\circ$.



۲۳- چون DIAN متوازی‌الاضلاع است، پس، $\hat{N}=\hat{I}$. از طرفی دو زاویهٔ محاطی $\hat{N}$ و $\hat{M}$ مقابل به یک کمان هستند، پس $\hat{M}=\hat{N}$ و در نتیجه $\hat{M}=\hat{I}$ و بنابراین مثلث DMI در رأس D متساوی‌الساقین است و $DM=DI$.

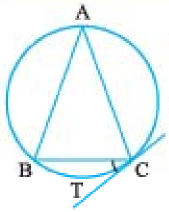


۲۴- از A به B وصل می‌کنیم: $XY \parallel BB'$, مورب $AB \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}_1$



$\hat{A}_1$ زاویه‌ای ظلی است، پس $\hat{A}_1=\frac{1}{2}\widehat{AB}$ و $\hat{B}_1$ زاویه‌ای محاطی است، پس $\hat{B}_1=\frac{1}{2}\widehat{AB'}$ و در نتیجه $\widehat{AB}=\widehat{AB'}$.

۲۵- $\hat{B}=\frac{1}{2}\widehat{AC}=70^\circ$، پس $\hat{C}=70^\circ$ و در نتیجه $\hat{A}=40^\circ$. از طرفی $\hat{A}=\frac{1}{2}\widehat{BC}$ و $B\hat{C}T=\frac{1}{2}\widehat{BC}$، بنابراین $B\hat{C}T=40^\circ$.

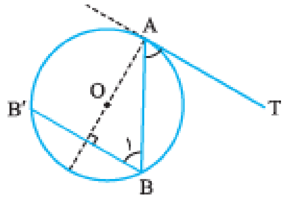


۲۶- اگر از A به مرکز دایره وصل کنیم، خواهیم داشت:

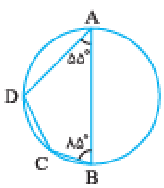
$$\left.\begin{array}{l}AO \perp AT\\ BB' \parallel AT\end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp BB'$$

پس قطر AO بر وتر BB' عمود می‌باشد، در نتیجه کمان نظیرش؛ یعنی $\widehat{B'AB}$ را نصف می‌کند، به بیان دیگر داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\widehat{B'A}=\widehat{AB}\\ \hat{B}_1=\frac{1}{2}\widehat{B'A}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1=\frac{1}{2}\widehat{AB}\\ AT \parallel BB' \text{ و } AB \text{ مورب} \Rightarrow T\hat{A}B=\hat{B}_1\end{array}\right\} \Rightarrow T\hat{A}B=\frac{1}{2}\widehat{AB}$$

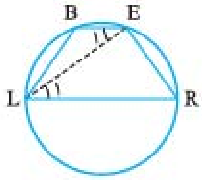


۲۷-



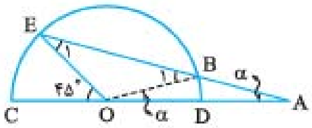
$$\widehat{AD}-\widehat{BC}=(\widehat{AD}+\widehat{DC})-(\widehat{DC}+\widehat{BC})=\widehat{ADC}-\widehat{DCB}=2\times 85^\circ-2\times 55^\circ=60^\circ$$

۲۸- کافی است از E به L وصل کنیم؛ داریم:



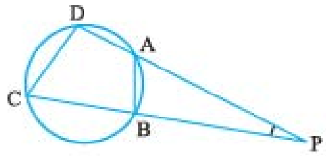
$$\left.\begin{array}{l} BL = ER \\ \Rightarrow \widehat{BL}=\widehat{ER} \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{L}_۱ \\ \text{مورب } LE \end{array}\right\} \Rightarrow BE \parallel LR$$

۲۹- از O به B وصل می‌کنیم. چون $OC = AB$ و $OC = OB$، پس $AB = OB$ و مثلث OBA در رأس B متساوی‌الساقین و $\hat{B}_۱$ زاویهٔ خارجی آن است، در نتیجه $\hat{B}_۱ = ۲\alpha$. مثلث OBE در رأس O متساوی‌الساقین است، پس $\hat{E}_۱ = ۲\alpha$. اکنون زاویهٔ ۴۵° زاویهٔ خارجی مثلث OAE است و داریم:



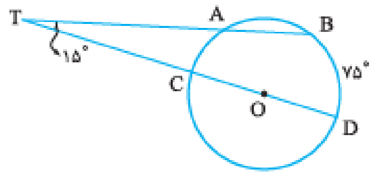
$$۴۵^\circ = \hat{A} + \hat{E}_۱ = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$

۳۰- می‌دانیم اگر AB یک وتر دایره و $\widehat{AB}=\theta$ باشد، آن‌گاه $AB = ۲R\sin\frac{\theta}{۲}$ و چون $AB = R$، پس $\widehat{AB}=۶۰^\circ$ و چون $CD = R\sqrt{۲}$، پس $\widehat{CD}=۹۰^\circ$. از طرفی بنا بر زاویهٔ بین امتداد دو وتر داریم:

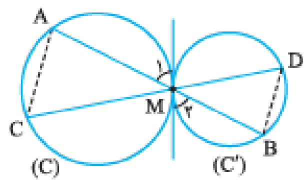


$$\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\widehat{CD}-\widehat{AB})=\frac{۱}{۲}(۹۰-۶۰)=۱۵^\circ$$

۳۱- می‌دانیم $\hat{T}=\frac{۱}{۲}(\widehat{BD}-\widehat{CA})$، پس $\frac{۷۵-\widehat{CA}}{۲}=۱۵$، بنابراین $\widehat{CA}=۴۵^\circ$ و چون $\widehat{CA}+\widehat{AB}+\widehat{BD}=۱۸۰^\circ$، پس $\widehat{AB}=۶۰^\circ$ و اندازهٔ وتر نظیر کمان ۶۰ درجه، برابر شعاع دایره است. (چرا؟)



۳۲- در نقطهٔ M مماس‌مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم، داریم $\hat{M}_۱=\frac{۱}{۲}\widehat{AM}$ ($\hat{M}_۱$ ظلی) و $\hat{C}=\frac{۱}{۲}\widehat{AM}$ ($\hat{C}$ محاطی) در نتیجه $\hat{M}_۱=\hat{C}$ و به دلیل مشابه $\hat{M}_۲=\hat{D}$ و چون $\hat{M}_۱$ و $\hat{M}_۲$ متقابل به رأس هستند، خواهیم داشت $\hat{C}=\hat{D}$. اگر CD را مورب بگیریم، آن‌گاه $AC \parallel BD$.



۳۳- اگر نقاط O و M مرکزهای دو دایره باشند و از این نقاط عمودهایی بر AC و DF رسم کنیم، با توجه به این‌که قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند، داریم:

$$HB=\frac{AB}{۲} \text{ و } PB=\frac{BC}{۲}$$

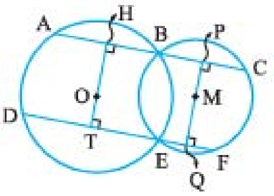
$$\Rightarrow HP = HB + BP = \frac{AB+BC}{۲}=\frac{AC}{۲}$$

و هم‌چنین:

$$TE=\frac{DE}{۲} \text{ و } EQ=\frac{EF}{۲}$$

$$\Rightarrow TQ = TE + EQ = \frac{DE+EF}{۲}=\frac{DF}{۲}$$

چهارضلعی HPQT مستطیل است، پس $HP = TQ$، در نتیجه $\frac{AC}{۲}=\frac{DF}{۲}$، پس $AC = DF$.



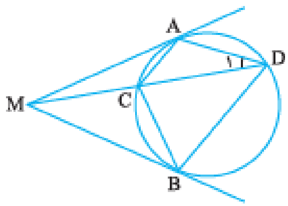
۳۴- فرض کنیم خط d با دایرهٔ $C(O,R)$ در سه نقطهٔ متمایز A، B و C مشترک باشد (فرض خلف). چون دایره از A و B می‌گذرد، مرکز آن؛ یعنی نقطهٔ O، روی عمودمنصف AB قرار دارد. به همین دلیل نقطهٔ O باید روی عمودمنصف AC نیز باشد، پس عمودمنصف‌های AB و AC در نقطهٔ O متقاطع‌اند و چون AB و AC بر یک راستا قرار دارند، عمودمنصف‌های این دو پاره‌خط نیز موازی و متمایزند و این تناقض می‌باشد (چرا؟)، پس فرض خلف باطل است و خط d با دایرهٔ $C(O,R)$ حداکثر در دو نقطه، مشترک است.

۳۵- با توجه به شکل مسئله، داریم:

$$Q\hat{M}A=\frac{\widehat{MA}}{۲}=\frac{\widehat{MC}+\widehat{CA}}{۲}=\frac{\widehat{MC}+\widehat{AD}}{۲}=Q\hat{P}M$$

پس $MQ = PQ$. به همین روش و با استفاده از زاویهٔ بیرونی در دایره ثابت کنید $B\hat{N}D = N\hat{M}Q$ و نتیجهٔ لازم را بگیرید.

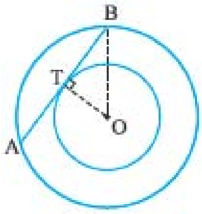
۳۶- با توجه به شکل زیر، زاویهٔ $\hat{D}_۱$ محاطی و زاویهٔ $M\hat{A}C$ ظلی و هر دو مقابل به یک کمان هستند، پس $\hat{D}_۱ = M\hat{A}C$ و بنابراین دو مثلث AMC و AMD متشابه‌اند و به همین دلیل نتیجه بگیرید دو مثلث BMC و BMD نیز متشابه‌اند و پس از به‌کاربردن نسبت تشابه، نتیجهٔ لازم را بگیرید.



پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل اول

۱- گزینهٔ ۲ اگر وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر، در نقطهٔ T بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، آن‌گاه شعاع OT عمودمنصف وتر AB است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTB داریم:



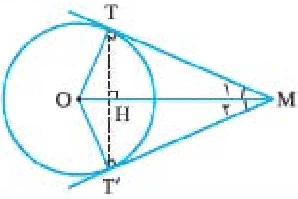
$$TB^۲ = OB^۲ - OT^۲ = ۵^۲ - ۳^۲$$
$$= ۱۶ \Rightarrow TB = ۴$$

و چون، $AB = ۲BT$، پس $AB = ۸$.

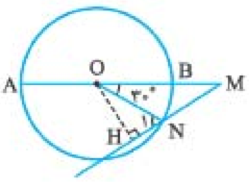
۲- گزینهٔ ۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:

$$\tan \hat{M}_۱ = \frac{OT}{MT} = \frac{R}{\sqrt{۳}R} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

در نتیجه $\hat{M}_۱ = ۳۰^\circ$ و بنابراین زاویهٔ بین دو مماس، برابر ۶۰ درجه است.



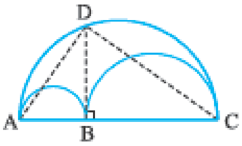
۳- گزینهٔ ۴ از O به N وصل می‌کنیم، چون $\widehat{BN} = ۳۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}N$ نیز برابر ۳۰° است. از طرفی $ON = MN = ۶$، پس مثلث OMN در رأس N متساوی‌الساقین است و چون $\hat{N}_۱$ زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس $\hat{N}_۱ = ۶۰^\circ$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHN داریم:

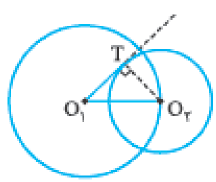
$$\sin \hat{N}_۱ = \frac{OH}{ON}$$
$$\Rightarrow \sin ۶۰^\circ = \frac{OH}{۶}$$
$$\Rightarrow OH = ۳\sqrt{۳}$$

۴- گزینهٔ ۱ اگر D را به نقاط A و C وصل کنیم، آن‌گاه در نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر، $A\hat{D}C$ محاطی و مقابل به قطر است، پس این زاویه قائمه است، در نتیجه مثلث ADC در رأس D قائم‌الزاویه و BD ارتفاع نظیر وتر است، پس BD واسطهٔ هندسی بین AB و BC می‌باشد و داریم:



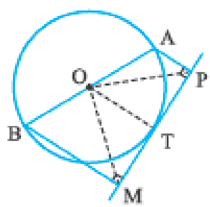
$$BD^۲ = AB \times BC$$
$$= ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow BD = ۶$$

۵- گزینهٔ ۳ اگر $O_۱T$ بر دایرهٔ $C_۲$ مماس باشد، آن‌گاه $O_۲T$ بر $O_۱T$ عمود است. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O_۱TO_۲$ داریم:



$$O_۱O_۲^۲ = O_۱T^۲ + O_۲T^۲$$
$$\Rightarrow ۲۶^۲ = ۲۴^۲ + R_۲^۲$$
$$\Rightarrow R_۲^۲ = ۲۶^۲ - ۲۴^۲ = (۲۶-۲۴)(۲۶+۲۴)$$
$$= ۱۰۰ \Rightarrow R_۲ = ۱۰$$

۶- گزینهٔ ۲ از O به T وصل می‌کنیم. چون شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس، عمود است، پس $OT \perp MP$ و در نتیجه، $OT \parallel BM \parallel AP$. با توجه به شکل، چهارضلعی ABMP ذوزنقه و O، وسط ساق AB و OT موازی قاعده‌های آن است، پس OT میان‌خط ذوزنقه است؛ یعنی T وسط MP است. اکنون در مثلث OMP، پاره‌خط OT هم ارتفاع و هم میانه است، بنابراین مثلث OMP در رأس O متساوی‌الساقین است. این مثلث، تنها درصورتی قائم‌الزاویه است که T وسط کمان AB باشد ولی در حالت کلی، قائم‌الزاویه نیست.

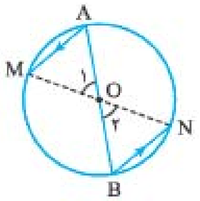


۷- گزینهٔ ۲ وتری که از مرکز دورتر است، کوچک‌تر می‌باشد، پس $AB < AD < BC$ و در نتیجه داریم:

$$۴x - ۵ < x + ۲ < ۲x + ۳$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x - ۵ < x + ۲ \Rightarrow x < \frac{۷}{۳} \\ x + ۲ < ۲x + ۳ \Rightarrow x > -۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۱ < x < \frac{۷}{۳} \quad (۱)$$

از طرفی باید اندازهٔ هر یک از وترها مثبت باشد، پس داریم $۴x - ۵ > ۰$ یا $x > \frac{۵}{۴}$ (۲). اشتراک روابط (۱) و (۲) برابر است با $\frac{۵}{۴} < x < \frac{۷}{۳}$.

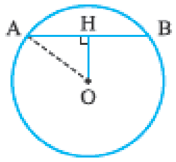
۸- گزینهٔ ۴ اگر AB قطر دایره و AM و BN دو وتر موازی از دایره باشند، آن‌گاه دو کمان $\overset{\frown}{AN}$ و $\overset{\frown}{BM}$ که بین دو وتر موازی قرار دارند، برابرند و در نتیجه دو زاویهٔ محاطی A و B مساوی یکدیگرند. اکنون دو مثلث متساوی‌الساقین AOM و BON همنهشت هستند، زیرا زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن‌ها و دو ساقشان، برابرند و در نتیجه، قاعدهٔ دو مثلث، برابرند؛ یعنی $AM = BN$. از همنهشتی این دو مثلث، نتیجه می‌شود $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ و چون AO و BO بر یک راستا هستند، پس MO و NO نیز بر یک راستا قرار دارند؛ یعنی دو انتهای دیگر این دو وتر، یک قطر دایره است. چون $AM \underset{=}{\parallel} BN$، پس چهارضلعی AMBN متوازی‌الاضلاع است. از آن‌جا که $AM = BN$، پس این دو وتر از مرکز به یک فاصله‌اند. در نتیجه گزینهٔ (۴) نادرست است و جواب مسئله می‌باشد.



۹- گزینهٔ ۳ باید داشته باشیم $۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰^\circ$، پس $x = ۴۰^\circ$. از طرفی زاویهٔ y زاویه‌ای محاطی و مقابل به کمان ۴x است و در نتیجه $y = \frac{۴x}{۲} = ۲x = ۸۰^\circ$ اکنون داریم:

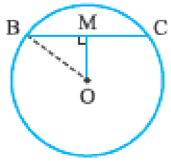
$$x + y = ۴۰ + ۸۰ = ۱۲۰$$

۱۰- گزینهٔ ۴ از مرکز دایره بر وتر AB عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. نقطهٔ H وسط AB است. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:



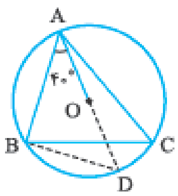
$$AO^۲ = AH^۲ + OH^۲$$
$$\Rightarrow ۵^۲ = ۴^۲ + OH^۲ \Rightarrow OH = ۳$$

۱۱- گزینهٔ ۴ کوچک‌ترین وتری که از نقطهٔ M واقع در درون دایره می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از این نقطه عمود باشد. اگر BC وتری باشد که بر قطر گذرنده از M عمود است، آن‌گاه $BC = ۲MB$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMB داریم:

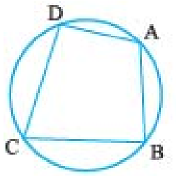


$$MB^۲ = OB^۲ - OM^۲$$
$$= ۱۳^۲ - ۱۲^۲ = ۲۵ \Rightarrow MB = ۵ \Rightarrow BC = ۱۰$$

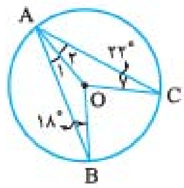
۱۲- گزینهٔ ۱ اگر امتداد OA محیط دایره را در D قطع کند و D را به B وصل کنیم، آن‌گاه هر دو زاویهٔ C و D محاطی و مقابل به کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند، پس $\hat{C} = \hat{D}$ و چون AD قطر دایره است، پس $A\hat{B}D = ۹۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{C} = \hat{D} = ۵۰^\circ$.



۱۳- گزینهٔ ۳ با توجه به رابطهٔ $l=2R\sin\frac{\alpha}{2}$، خواهیم داشت $AD=R=2R\sin\frac{\widehat{AD}}{2}$، بنابراین $\widehat{AD}=60^\circ$ و همچنین $AB=\sqrt{2}R=2R\sin\frac{\widehat{AB}}{2}$، پس $\widehat{AB}=90^\circ$ و در نتیجه $\widehat{BD}=150^\circ$. از طرفی C زاویهٔ محاطی و مقابل به کمان $\widehat{BD}=150^\circ$ است، بنابراین $\hat{C}=\frac{1}{2}\widehat{BD}=75^\circ$.



۱۴- گزینهٔ ۳ از O به A وصل می‌کنیم. در مثلث‌های متساوی‌الساقین AOB و AOC داریم: $\hat{A}_1=18^\circ$ و $\hat{A}_2=22^\circ$، پس $\hat{A}=40^\circ$ و چون زاویهٔ A محاطی است، داریم $\widehat{BC}=80^\circ$ و چون زاویهٔ BOC زاویه‌ای مرکزی است، پس $\hat{O}=80^\circ$.

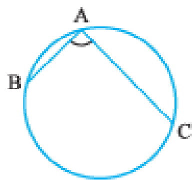


۱۵- گزینهٔ ۱ اگر در دایره‌ای به شعاع R، اندازهٔ کمان نظیر وتری به طول l برابر α باشد، آن‌گاه $l=2R\,\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}$، بنابراین داریم:

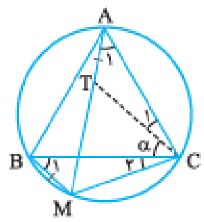
$$AB=2R\sin\frac{\widehat{AB}}{2}\Rightarrow R=2R\sin\frac{\widehat{AB}}{2}\Rightarrow\widehat{AB}=60^\circ$$

$$AC=2R\sin\frac{\widehat{AC}}{2}\Rightarrow R\sqrt{3}=2R\sin\frac{\widehat{AC}}{2}\Rightarrow\widehat{AC}=120^\circ$$

در نتیجه، $\widehat{BC}=180^\circ$ و چون زاویهٔ محاطی A روبه‌رو به کمان $\widehat{BC}$ است، پس داریم $\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{2}=90^\circ$.



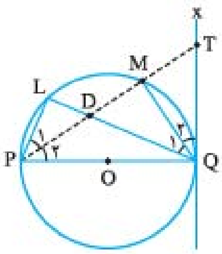
۱۶- گزینهٔ ۱ اگر روی AM، پاره‌خط AT را مساوی BM جدا کنیم و از T به C وصل کنیم، چون $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ محاطی و مقابل به یک کمان هستند، این دو زاویه، برابرند. داریم:



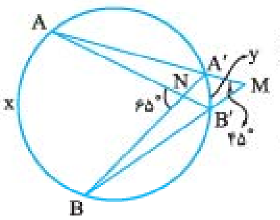
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1=\hat{B}_1\\ AC=BC\\ AT=BM\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ATC}\cong\overset{\Delta}{BMC}$$

اکنون نتیجه می‌شود $TC=MC$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$، پس $\hat{C}_1+\alpha=\hat{C}_2+\alpha=60^\circ$؛ یعنی در مثلث متساوی‌الساقین MTC یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه است، در نتیجه $TC=MT$. بنابراین $BM+MC=AT+TM=AM$.

۱۷- گزینهٔ ۳ بنا به فرض، زاویه‌های P_1 و P_2 محاطی و برابرند، پس $\widehat{LM}=\widehat{MQ}$. از طرفی $\hat{Q}_1$ زاویهٔ محاطی است و داریم $\hat{Q}_1=\frac{1}{2}\widehat{LM}$ و $\hat{Q}_2$ زاویه‌ای ظلی است، پس $\hat{Q}_2=\frac{1}{2}\widehat{MQ}$ و در نتیجه $\hat{Q}_1=\hat{Q}_2$؛ یعنی QM نیمساز $T\hat{Q}D$ است. از طرفی دیگر چون $P\hat{M}Q$ محاطی و روبه‌رو به قطر است، پس $MQ\perp DT$. در مثلث QDT، پاره‌خط QM هم نیمساز و هم ارتفاع است، در نتیجه این مثلث در رأس Q متساوی‌الساقین است و بنابراین، پاره‌خط QM میانه نیز می‌باشد و در نتیجه $DM=MT$.



۱۸- گزینهٔ ۳ زاویهٔ M، زاویه‌ای بیرونی و N زاویه‌ای درونی است. با توجه به شکل، داریم:



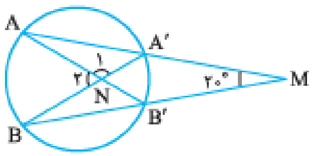
$$\left.\begin{matrix}\frac{x+y}{2}=65\Rightarrow x+y=130\\ \frac{x-y}{2}=45\Rightarrow x-y=90\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=110^\circ \text{ و } y=20^\circ$$

در نتیجه $\frac{x}{y}=5.5$.

۱۹- گزینهٔ ۳ زاویهٔ M، زاویهٔ بیرونی در دایره است، پس با توجه به شکل، داریم:

$$\hat{M}=\frac{\widehat{AB}-\widehat{A'B'}}{2}\Rightarrow 20^\circ=\frac{80^\circ-\widehat{A'B'}}{2}\Rightarrow\widehat{A'B'}=40^\circ$$

زاویهٔ $\hat{N}_2$، زاویه‌ای درونی در دایره است، پس با توجه به شکل، داریم:

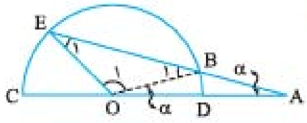


$$\hat{N}_2=\frac{\widehat{AB}+\widehat{A'B'}}{2}\Rightarrow\hat{N}_2=\frac{80^\circ+40^\circ}{2}=60^\circ$$

بنابراین $\hat{N}_1=120^\circ$.

۲۰- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، واضح است که $x+y=360^\circ$ و در ضمن $\frac{x-y}{2}=60^\circ$ یا $x-y=120^\circ$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $\frac{x+y}{x-y}=\frac{360}{120}=3$.

۲۱- گزینهٔ ۴ از O به B و E وصل می‌کنیم. چون $OC = AB$ و $OC = OB$، پس $AB = OB$ و مثلث OBA در رأس B متساوی‌الساقین و $\hat{B}_1$ زاویهٔ خارجی آن است، در نتیجه $\hat{B}_1 = ۲\alpha$. مثلث OBE در رأس O متساوی‌الساقین است، پس $\hat{E}_1 = ۲\alpha$. از طرفی $\hat{O}_1$ زاویه‌ای مرکزی است، پس $\hat{O}_1 = \widehat{EB} = ۱۲۰^\circ$. اکنون داریم:



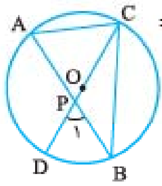
$$\hat{O}_1 + \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۴\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$

۲۲- گزینهٔ ۲ چون $AB = R$، پس $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$. از طرفی زاویهٔ P زاویهٔ بیرونی دایره است و داریم:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{\widehat{CD} - ۶۰^\circ}{۲} \Rightarrow \widehat{CD} = ۱۲۰^\circ$$

اکنون داریم: $\sin\frac{\widehat{CD}}{۲} = \frac{CD}{۲R} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow CD = R\sqrt{۳}$

۲۳- گزینهٔ ۱ چون B زاویهٔ محاطی است، پس $\widehat{AC} = ۷۲^\circ$ و به دلیل مشابه $\widehat{BC} = ۸۸^\circ$. چون CD قطر دایره است، پس داریم $\widehat{BD} = ۹۲^\circ$. چون $\hat{P}_1$ زاویهٔ درونی است، در نتیجه:



$$\hat{P}_1 = \frac{۱}{۲}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$$
$$= \frac{۱}{۲}(۷۲^\circ + ۹۲^\circ) = ۸۲^\circ$$

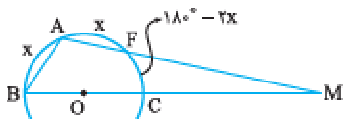
۲۴- گزینهٔ ۳ چون وترهای AB و AF برابرند، پس کمان‌های نظیرشان نیز برابرند. اگر فرض کنیم $\widehat{AB} = \widehat{AF} = x$، آن‌گاه چون BC قطری از دایره است، داریم $\widehat{FC} = ۱۸۰^\circ - ۲x$. اکنون داریم:

زاویهٔ محاطی B: $\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - x}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}x$

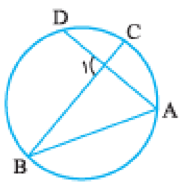
زاویهٔ بیرونی: $M = \frac{\widehat{AB} - \widehat{FC}}{۲} = \frac{x - (۱۸۰^\circ - ۲x)}{۲} = \frac{۳}{۲}x - ۹۰^\circ$

چون $\hat{B} + \hat{M} = ۶۸^\circ$، پس $(۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}x) + (\frac{۳}{۲}x - ۹۰^\circ) = ۶۸^\circ$

یا $x = ۶۸^\circ$ و در نتیجه $\hat{B} = ۹۰^\circ - \frac{۶۸}{۲} = ۵۶^\circ$.

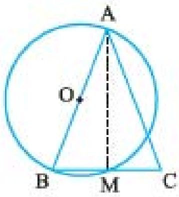


۲۵- گزینهٔ ۲ چون $\hat{A} = ۲\hat{B}$، پس $\widehat{BD} = ۲\widehat{AC}$. اگر فرض کنیم $\widehat{BD} = x$، آن‌گاه $\widehat{AC} = \frac{۱}{۲}x$. چون $\hat{E}_1$ زاویهٔ درونی دایره است، پس داریم:



$$\hat{E}_1 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲}x + x}{۲}$$
$$= \frac{۳}{۴}x = \frac{۳}{۴}\widehat{BD}$$

۲۶- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد BC با دایره را M می‌نامیم. زاویهٔ $A\hat{M}B$ محاطی و روبه‌رو به قطر AB است، پس این زاویه، قائمه می‌باشد؛ یعنی AM ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC است و چون در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس، برهم منطبق‌اند، پس $BM = MC$ و در نتیجه دایره از وسط ضلع BC می‌گذرد.



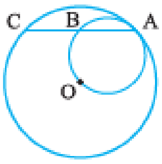
۲۷- گزینهٔ ۳ واضح است که T وسط کمان $\widehat{AB}$ است، پس زاویهٔ مرکزی $\hat{O}$ برابر ۶۰ درجه است و از طرفی زاویهٔ $\hat{O}$ برای دایرهٔ کوچک‌تر، زاویه‌ای بیرونی است، در نتیجه $\hat{O} = \frac{\widehat{MTN} - \widehat{MN}}{۲}$.

بنابراین: $\widehat{MTN} - \widehat{MN} = ۱۲۰^\circ$ (۱)

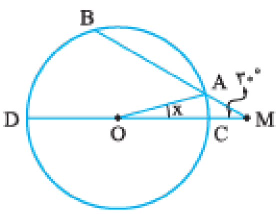
اما در دایرهٔ کوچک‌تر داریم: $\widehat{MTN} + \widehat{MN} = ۳۶۰^\circ$

از (۱) و (۲) خواهیم داشت $\widehat{MN} = ۱۲۰^\circ$.

۲۸- گزینهٔ ۴ واضح است که OA قطر دایرهٔ کوچک‌تر است. اگر از O به B وصل کنیم، در دایرهٔ کوچک‌تر، زاویهٔ محاطی OBA مقابل به قطر OA است، پس این زاویه، قائمه است؛ یعنی OB بر AC عمود است و می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $AB = BC$. اکنون معلوم است که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست است و جواب تست، گزینهٔ (۴) است.

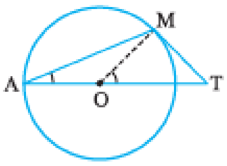


۲۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، واضح است که اندازهٔ کمان AC برابر x و چون CD قطر دایره و $\widehat{AB} = ۹۰^\circ$ است، در نتیجه، اندازهٔ کمان BD برابر $۹۰^\circ - x$ است. M زاویهٔ بیرونی در دایره است و داریم:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ$$
$$= \frac{۹۰^\circ - x - x}{۲} \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

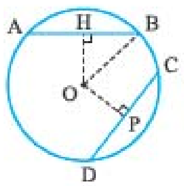
۳۰- گزینهٔ ۱ از O به M وصل می‌کنیم. چون $OM = MT$، مثلث OMT در رأس M متساوی‌الساقین است. بنا بر ویژگی مماس، OM بر MT عمود نیز می‌باشد، در نتیجه $M\hat{O}T = ۴۵^\circ$. از طرفی، مثلث AOM در رأس O متساوی‌الساقین و O زاویهٔ بیرونی است، پس $\hat{O} = ۲\hat{A}$ یا $\hat{A} = ۲۲/۵^\circ$.



۳۱- گزینهٔ ۳ زاویهٔ B، زاویهٔ بیرونی دایره است، پس $\widehat{AD}-\widehat{CE}=۲\hat{B}$، در نتیجه $AD=۸۰^\circ$ و چون AC قطر دایره است، پس اندازهٔ کمان CD برابر ۱۰۰ درجه خواهد بود.

۳۲- گزینهٔ ۲ چون $y=۲۱^\circ$ و زاویه‌ای محاطی است، پس کمان BC برابر ۴۲ درجه است و چون AB قطر دایره می‌باشد، در نتیجه اندازهٔ کمان AC برابر ۱۳۸ درجه است و بنابراین اندازهٔ زاویهٔ محاطی x برابر ۶۹ درجه خواهد بود.

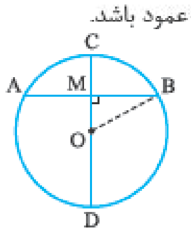
۳۳- گزینهٔ ۴ از O عمودهای OH و OP را بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم، پس $HB=\frac{AB}{۲}=۴$ و $PC=\frac{CD}{۲}=۳$.



$$\overset{\Delta}{OBH} \Rightarrow OH^۲=۵^۲-۴^۲=۹ \Rightarrow OH=۳$$

$$\overset{\Delta}{OPC} \Rightarrow OP^۲=۵^۲-۳^۲=۱۶ \Rightarrow OP=۴ \Rightarrow \frac{OH}{OP}=\frac{۳}{۴}$$

۳۴- گزینهٔ ۲ بزرگ‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه واقع در درون دایره همان قطر است و طول آن ۲R است و کوچک‌ترین وتر گذرنده از آن، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

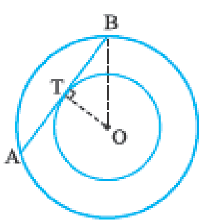


$$\frac{AB}{CD}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{AB}{۲R}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AB=R\sqrt{۳}$$

پس $MB=\frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ و در مثلث OMB داریم:

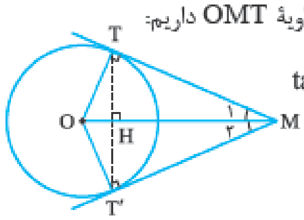
$$OM^۲=OB^۲-MB^۲=R^۲-(\frac{R\sqrt{۳}}{۲})^۲=\frac{R^۲}{۴} \Rightarrow OM=\frac{R}{۲}$$

۳۵- گزینهٔ ۲ اگر وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر، در نقطهٔ T بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، آن‌گاه شعاع OT عمودمنصف وتر AB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTB داریم:



$$OT^۲=OB^۲-TB^۲=۵^۲-۴^۲=۹ \Rightarrow OT=r=۳$$

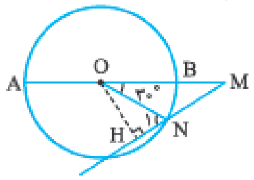
۳۶- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:



$$\tan\hat{M}_۱=\frac{OT}{MT}=\frac{R}{\sqrt{۳}R}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

در نتیجه $\hat{M}_۱=۳۰^\circ$ و بنابراین زاویهٔ بین دو مماس، برابر ۶۰ درجه است.

۳۷- گزینهٔ ۴ از O به N وصل می‌کنیم، چون $\widehat{BN}=۳۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BON نیز برابر ۳۰° است. از طرفی $ON=MN=R$، پس مثلث OMN در رأس N متساوی‌الساقین است و چون $\hat{N}_۱$ زاویهٔ خارجی این مثلث است، در نتیجه $\hat{N}_۱=۶۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHN داریم:



$$\sin\hat{N}_۱=\frac{OH}{ON} \Rightarrow \sin۶۰^\circ=\frac{۳\sqrt{۳}}{R} \Rightarrow R=۶$$