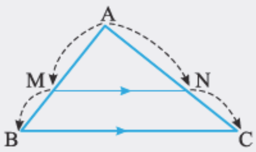
درس دوم
قضیه‌ی تالس

درس دوم این فصل درباره‌ی قضیه‌ی تالس و کاربرد آن در حل مسائل است. این قضیه را تالس در ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح برای اندازه‌گیری ارتفاع اهرام مصر به کار می‌برد که امروزه یکی از مشهورترین قضایای هندسه است:

قضیه‌ی تالس

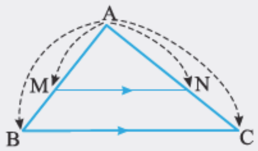


هرگاه در یک مثلث، خط راستی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع ۴ پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌ی آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهد:

$$\boxed{\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}}$$

این قضیه‌ی تالس به تالس جزءبه‌جزء مشهور است. قضیه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد که آن را تالس جزءبه‌کل می‌نامند.

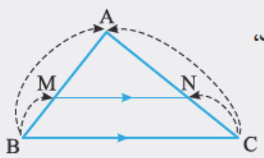
تعمیم قضیه‌ی تالس



اگر خطی دو ضلع از اضلاع مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می‌کند که اندازه‌ی ضلع‌های آن با اندازه‌ی ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است:

$$\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}}$$

جزءبه‌کل وارونه



تالس جزءبه‌کل را از سمت قاعده به رأس هم می‌توان نوشت، اما در این حالت نسبت $\frac{MN}{BC}$ برابر با آن‌ها نیست، یعنی فقط زمانی می‌توانیم تناسب را به صورت سه‌جزئی بنویسیم که جزءبه‌کل از سمت رأس به قاعده باشد:

$$\boxed{\frac{BM}{BA}=\frac{CN}{CA}}$$

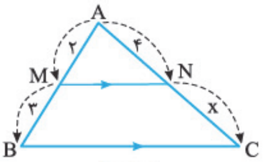
دوکلام حرف حساب

حرف اول در مسائلی که پاره‌خط MN داده یا خواسته نشده است، سه جور می‌توان از تالس استفاده کرد:

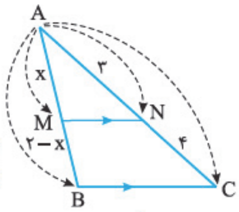
(I) جزءبه‌جزء (II) جزءبه‌کل از رأس به سمت قاعده (III) جزءبه‌کل از قاعده به سمت رأس

استفاده از هر کدام از این سه حالت به یک جواب می‌رسد، فقط بستگی به شرایط و تشخیص ما دارد که در مسئله‌ی داده‌شده کدام‌یک سریع‌تر به جواب می‌رسد. حالا برای درک بهتر به نمونه‌های زیر دقت کنید:

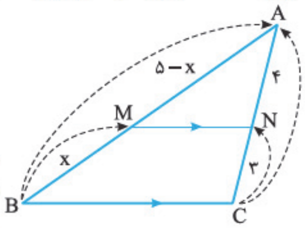
(I) $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{x}$



(II) $\frac{x}{۲}=\frac{۳}{۷}$



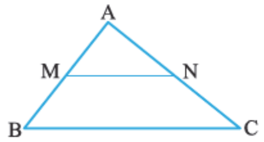
(III) $\frac{x}{۵}=\frac{۳}{۷}$



اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که هر کدام از تالس‌ها به چه دلیل به آن شکل نوشته شده‌اند. مثلاً اگر شماره‌ی (I) را به صورت جزءبه‌کل می‌نوشتم، هیچ ایرادی نداشت، مثلاً به شکل $\frac{۴}{۴+x}=\frac{۲}{۲+۳}$ درمی‌آمد. حالا باید با طرفین وسطین کردن و حل معادله، x را پیدا می‌کردیم ولی به آن صورتی که نوشته شده، با نگاه $x=۶$ معلوم است و همین‌طور در سایر موارد ... .

حرف دوم در مسائلی که MN داده یا خواسته شده باشد، باید حتماً از تالس جزءبه‌کل آن هم از رأس به سمت قاعده استفاده کرد.

عکس قضیه‌ی تالس



اگر خطی روی دو ضلع مثلثی، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

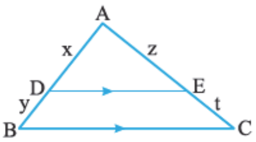
$$\boxed{\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow MN\parallel BC}$$

از عکس قضیه‌ی تالس خیلی به ندرت در تست‌ها استفاده می‌شود و مسائل بسیار محدودی هستند که با عکس قضیه‌ی تالس حل می‌شوند که بعداً به آن می‌پردازیم.

تبارشناسی مسائل مربوط به تالس

از آن‌جایی که مسائل مربوط به تالس از تنوع بسیار بالایی برخوردار است و طیف گسترده‌ای از مسائل را در بر می‌گیرد، بنابراین تسلط بر آن نیاز به یک دسته‌بندی مناسب و منطقی داشت. از این رو در این کتاب برای اولین بار در ایران مسائل مربوط به تالس را مورد تبارشناسی قرار دادم و آن‌ها را در چیزی حدود ۲۰ تیپ دسته‌بندی کردم تا استراتژی حل مسائل تالس در هر تیپ مشخص شود و آموزش آن برای معلمین و فراگیری آن برای دانش‌آموزان آسان‌تر شود و در ضمن اثر شگفت‌انگیز آن در یادگیری، بیش از پیش مشخص شود. البته این تیپ‌بندی، تبارشناسی و دسته‌بندی در مورد مسائل تشابه نیز که از گستردگی خاصی برخوردار هستند هم انجام شده است که در ادامه‌ی فصل به آن می‌پردازیم:

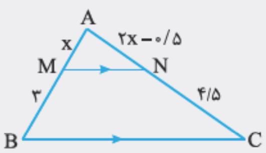
تیپ اول: تالس جزءبه‌جزء



این تیپ جزء ساده‌ترین انواع مسائل تالس است. در این تیپ یک پاره‌خط موازی قاعده‌ی مثلثی رسم شده و طول ۴ قطعه روی دو ساق مثلث نوشته شده است که ممکن است بعضی از آن‌ها مجهول باشند. در این حالت کافی است یک تالس جزءبه‌جزء بنویسید و مجهول را پیدا کنید. البته همان‌طور که دیدید در این موارد حتی ممکن است از تالس جزءبه‌کل هم استفاده کنیم.

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{z}{t}}$$

مثال ۲۰ در شکل مقابل MN و BC موازی‌اند. مقدار x کدام است؟



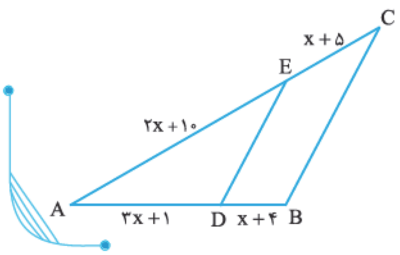
۱) ۰/۵　　۲) ۱

۳) ۰/۷۵　　۴) ۱/۵

گزینه‌ی ۲ همان‌طور که می‌بینید، یک مسئله‌ی بسیار ساده است که کافی است نسبت‌ها را بنویسیم و با طرفین وسطین کردن تناسب، مقدار x را پیدا کنیم.

$$\frac{x}{۳}=\frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}\Rightarrow ۴/۵x=۶x-۱/۵\Rightarrow ۶x=۶\Rightarrow x=۱$$

تمرین ۲۱ در شکل مقابل $DE\parallel BC$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۵

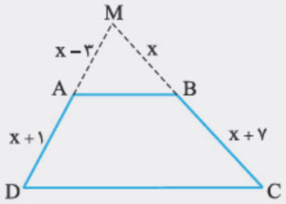
۲) ۷

۳) ۳

۴) −۵

stop گاهی اوقات به جای این‌که مستقیماً از واژه‌ی موازی استفاده کنند، می‌گویند چهارضلعی درون شکل، ذوزنقه است که آن هم به معنی موازی‌بودن قاعده‌های ذوزنقه است.

مثال ۲۱ ذوزنقه‌ی $ABCD$ مطابق شکل مفروض است و امتداد ساق‌های آن در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. مقدار x کدام است؟

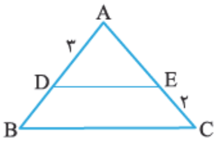


۱) ۵/۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۶/۵

گزینه‌ی ۳ چون $ABCD$ ذوزنقه است، پس $AB \parallel CD$ می‌باشد و حالا داریم:

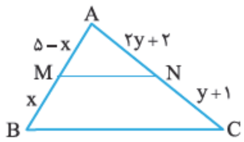
$$\frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x-۳}{۴}=\frac{x}{۷} \Rightarrow ۷x-۲۱=۴x \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=۷$$

تمرین ۲۲ در شکل مقابل $DECB$ ذوزنقه است و ساق BD یک واحد کوچک‌تر از AE است. اندازه‌ی AC کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

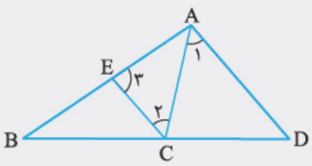
تمرین ۲۳ در شکل مقابل $MNCB$ ذوزنقه است. مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

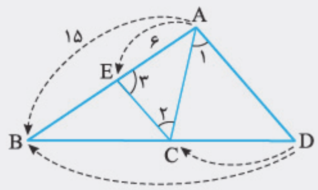
stop گاهی اوقات هم نه از کلمه‌ی موازی استفاده می‌شود و نه نامی از ذوزنقه است. بلکه از عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب استفاده می‌کنند و با این وسیله به بیان موازی‌بودن دو خط می‌پردازند.

مثال ۲۲ در شکل مقابل داریم $\hat{۳}=\hat{۲}=\hat{۱}$. اگر $AB=۱۵$ و $AC=۶$ باشد، حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

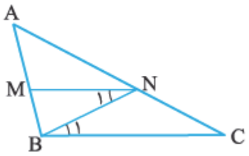
گزینه‌ی ۲ چون $\hat{۲}=\hat{۱}$ می‌باشد، طبق عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب می‌توان نتیجه گرفت $AD \parallel CE$ است. هم‌چنین $\hat{۳}=\hat{۲}$ نشان می‌دهد مثلث ACE متساوی‌الساقین است، یعنی $AE=AC=۶$. حال این دستاوردها را به روی شکل منتقل می‌کنیم:



حال با توجه به اطلاعات روی شکل و خواسته‌ی مسئله، متوجه می‌شویم که بهتر است از تالس جزءبه‌کل از قاعده به سمت رأس استفاده کنیم:

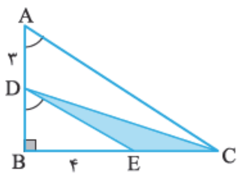
$$\frac{CD}{BD}=\frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BD}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

تمرین ۲۴ در شکل مقابل $AM=۳MB$ و $\hat{N}_۱=\hat{B}_۱$ می‌باشد. حاصل $\frac{CN}{AC}$ کدام است؟



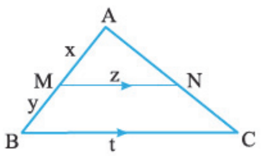
۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

تمرین ۲۵ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مطابق شکل $\hat{A}=\hat{D}$ می‌باشد. اگر $AD=۳$ و $BE=۴$ باشد، مساحت قسمت رنگ‌شده کدام است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

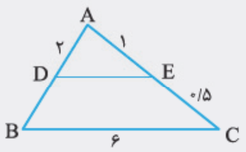
تیپ دوم: تالس جزء‌به‌کل



در این تیپ همان‌طور که قبلاً هم توضیح دادیم، یک پاره‌خط موازی قاعده رسم می‌شود و طول آن داده یا خواسته می‌شود که در این حالت حتماً باید از تالس جزء‌به‌کل استفاده کرد، آن هم از رأس به سمت قاعده.

$$\boxed{\frac{x}{x+y}=\frac{z}{t}}$$

مثال ۲۳ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. اندازه‌ی پاره‌خط DE کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

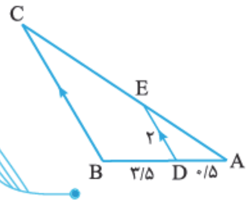


۱) ۵
۲) ۳
۳) ۴/۵
۴) ۴

گزینه‌ی ۴ چون پاره‌خط DE جزء خواسته‌های مسئله است، باید از جزء‌به‌کل استفاده کنیم:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۱/۵}=\frac{DE}{۶} \Rightarrow DE=۴$$

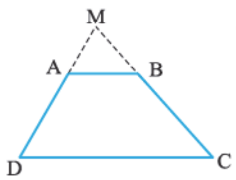
تمرین ۲۶ در شکل مقابل، اندازه‌ی BC کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۴
۳) ۱۲
۴) ۱۸

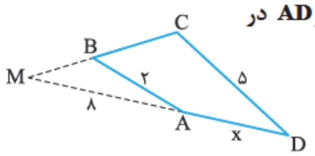
stop هرگاه ساق‌های یک ذوزنقه را امتداد دادند، به احتمال قوی مسئله مربوط به تالس است. اما اگر ارتفاع ذوزنقه هم دخالت داشته باشد، می‌توان به سراغ تشابه هم رفت.

تمرین ۲۷ در ذوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۴ و ۹ و طول ساق‌ها ۶ و ۵ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود کدام است؟



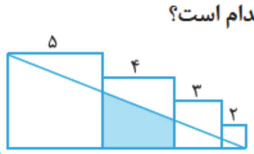
۱) ۱۱/۴
۲) ۱۱/۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱۲/۸

تمرین ۲۸ در چهارضلعی ABCD اگر زوایای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۸ واحد از رأس A متقاطع باشند، اندازه‌ی ضلع AD کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۱۱
۴) ۱۲

تمرین ۲۹ در شکل زیر ۴ مربع به اضلاع ۲، ۳، ۴ و ۵ کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت رنگ‌شده کدام است؟

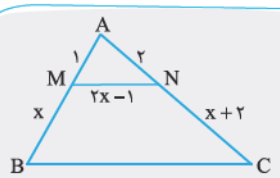


۱) $\frac{۵۰}{۷}$
۲) $\frac{۶۰}{۷}$
۳) $\frac{۵۴}{۵}$
۴) ۱۰

تیپ سوم: ترکیب «تالس جزء‌به‌جزء» و «تالس جزء‌به‌کل»

این تیپ همان‌طور که از نام‌گذاری آن معلوم است، به گونه‌ای است که برای حل آن مجبوریم هم از تالس جزء‌به‌جزء و هم از تالس جزء‌به‌کل استفاده کنیم. در اکثر موارد در این تیپ تست‌ها دو مجهول وجود دارد که هر کدام از آن‌ها با یکی از تالس‌ها به دست می‌آید. بعضی اوقات هم ممکن است راجع به محیط مثلث‌ها یا ذوزنقه‌ی ایجادشده توسط خط موازی صحبت شود که این در حالت مجموع متغیرها به کار می‌آید.

مثال ۲۴ در شکل مقابل MNCB ذوزنقه است. اندازه‌ی پاره‌خط BC کدام است؟



۱) ۷/۵
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۶/۵

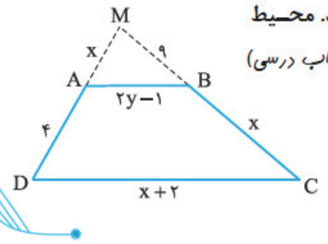
گزینه‌ی ۲ ابتدا با استفاده از تالس جزء‌به‌جزء مقدار x را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \Rightarrow ۲x=x+۲ \Rightarrow x=۲$$

حالا که x معلوم شده است، می‌توانیم با استفاده از تالس جزء‌به‌کل مقدار BC را به دست آوریم:

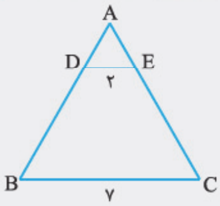
$$\frac{۱}{x+۱}=\frac{۲x-۱}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۳}{BC} \Rightarrow BC=۹$$

تمرین ۳۰ در شکل مقابل ذوزنقه‌ی **ABCD** مفروض است و امتداد ساق‌های آن در **M** متقاطع‌اند. محیط ذوزنقه کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*



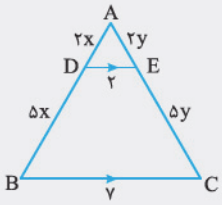
۱) ۲۰/۴
۲) ۲۰/۸
۳) ۲۲/۶
۴) ۲۲/۸

مثال ۲۵ در شکل مقابل پاره‌خط **DE** موازی قاعده‌ی **BC** است. اگر محیط مثلث کوچک‌تر ۱۰ باشد، محیط مثلث **ABC** کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۳۵

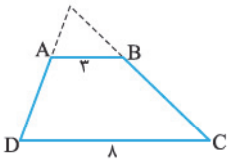
گزینه‌ی ۴ چون $\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۷}$ است، پس نسبت جزءبه‌کل در روی ساق‌ها هم باید ۲ به ۷ باشد، یعنی DE ساق‌ها را به نسبت ۲ به ۵ مطابق شکل مقابل تقسیم کرده است:



$$\overset{\Delta}{ADE}\ \text{محیط} = ۲x+۲y+۲=۱۰ \Rightarrow x+y=۴$$

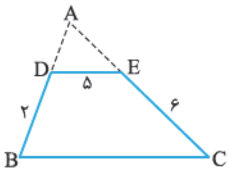
$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط} = ۷x+۷y+۷=۷(x+y)+۷=۲۸+۷=۳۵$$

تمرین ۳۱ در شکل مقابل محیط ذوزنقه‌ی **ABCD** برابر **۳۱** است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌های آن روی قاعده‌ی کوچک تشکیل می‌شود کدام است؟



۱) ۱۷
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۵

تمرین ۳۲ در شکل مقابل محیط مثلث **ADE** برابر **۲۱** است. محیط ذوزنقه **DECB** کدام است؟



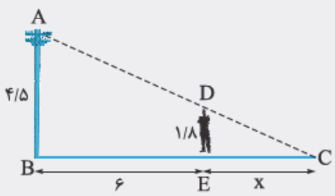
۱) ۲۱/۵
۲) ۱۹/۵
۳) ۲۰/۵
۴) ۱۸/۵

تیپ چهارم: تالس جزءبه‌کل کاربردی

در این تیپ مسائل که می‌خواهیم طول سایه یا بلندی یک درخت یا ساختمان را پیدا کنیم، باید یک مثلث قائم‌الزاویه و خطی که موازی ضلع قائم آن است پیدا کنیم و اطلاعات داده‌شده را روی آن مثلث منتقل کنیم و سپس با استفاده از تالس جزءبه‌کل مجهول خواسته‌شده را پیدا کنیم.

مثال ۲۶ شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصله‌ی ۶متری از تیر چراغ برق به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده است. طول سایه‌ی این شخص روی زمین چند متر است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۳/۵
۴) ۵/۵



گزینه‌ی ۲ چون هیچ شکلی داده نشده است، باید یک شکل فرضی خودمان رسم کنیم. حال همه‌ی اندازه‌ها را برحسب متر می‌نویسیم و داریم:

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{۱/۸}{۴/۵}=\frac{x}{x+۶}$$

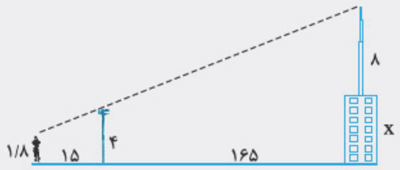
$$\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x}{x+۶} \Rightarrow ۲x+۱۲=۵x \Rightarrow ۳x=۱۲ \Rightarrow x=۴$$

تمرین ۳۳ در شکل مقابل اگر نوک سایه‌ی چوب ۱/۵متری بر نوک سایه‌ی درخت منطبق باشد و طول سایه‌ی چوب و درخت ۶ و ۱۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) ۳۶
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۲۵

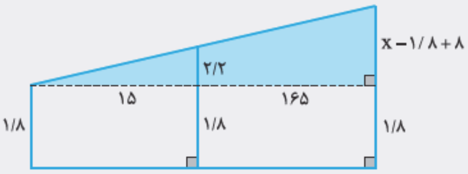
stop در نوع دوم این تیپ که می‌خواهیم آن‌ها را بررسی کنیم، مثلثی در داده‌های مسئله وجود ندارد و ما باید با رسم یک خط موازی افق (زمین) یک مثلث از دل اطلاعات مسئله بیرون بکشیم.

مثال ۲۷ در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشم ناظری با قد ۱/۸ متر از نوک دکل و تیرک ۴ متری بین آن‌ها در یک راستا است. ارتفاع برج چند متر است؟ *(داخل - ریاضی - ۸۷)*



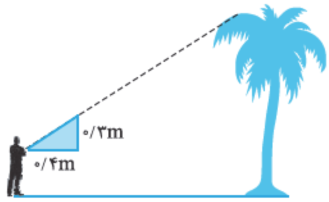
۱) ۱۹/۸ ۲) ۲۰/۲
۳) ۲۰/۸ ۴) ۲۱/۲

گزینه‌ی ۲ کافی است از چشم ناظر یک خط به موازات افق رسم کنیم و اطلاعات موجود در مسئله را روی آن منتقل کنیم و تالس را بنویسیم:



$$\frac{۲/۲}{۶/۲+x}=\frac{۱۵}{۱۸۰} \Rightarrow \frac{۲/۲}{۶/۲+x}=\frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x+۶/۲=۲۶/۴ \Rightarrow x=۲۰/۲$$

تمرین ۳۴ شخصی برای پیداکردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل مقابل ساخت. اگر او در فاصله‌ی ۸/۸ متری از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه‌کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند. فاصله‌ی تقریبی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. ارتفاع تقریبی درخت کدام است؟

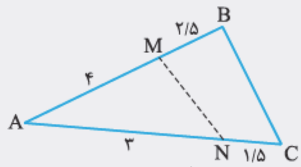


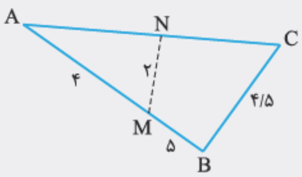
۱) ۷/۸ ۲) ۸
۳) ۸/۲ ۴) ۸/۴

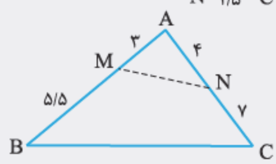
تیپ پنجم: عکس تالس

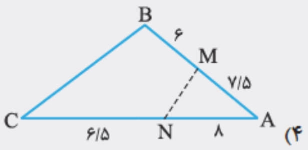
در تست‌هایی که به کمک عکس تالس حل می‌شوند، معمولاً اشاره‌ای به خط موازی قاعده نمی‌شود و یا حتی گاهی چنین خطی اصلاً وجود ندارد. اما در این حالت طول هر چهار قطعه روی ساق‌های مثلث معلوم است و اعداد طوری هستند که نسبت آن‌ها یک تناسب تشکیل می‌دهد.

مثال ۲۸ در کدام‌یک از شکل‌های زیر پاره‌خط MN موازی قاعده‌ی BC است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


گزینه‌ی ۲ در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» می‌توانیم از تالس جزءبه‌جزء برای چک‌کردن تناسب استفاده کنیم، ولی در گزینه‌ی «۲» باید از جزءبه‌کل استفاده کنیم:

۱) $\frac{۴}{۲/۵}=\frac{۳}{۱/۵} \Rightarrow ۴\times۱/۵=۳\times۲/۵ \Rightarrow ۶=۷/۵$

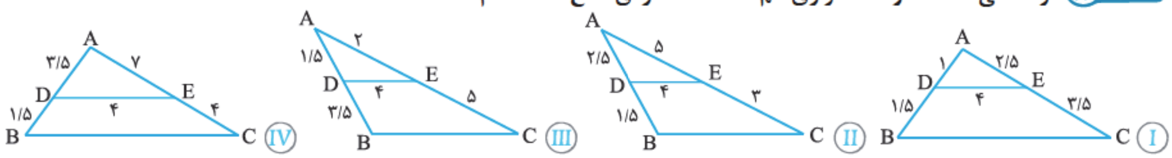
۳) $\frac{۳}{۵/۵}=\frac{۴}{۷} \Rightarrow ۳\times۷=۴\times۵/۵ \Rightarrow ۲۱=۲۲$

۲) $\frac{۴}{۴+۵}=\frac{۲}{۴/۵}= \Rightarrow ۴\times۴/۵=۲\times۹ \Rightarrow ۱۸=۱۸$ ✓

۴) $\frac{۷/۵}{۶}=\frac{۸}{۶/۵} \Rightarrow ۷/۵\times۶/۵=۸\times۶ \Rightarrow ۴۸/۷۵=۴۸$

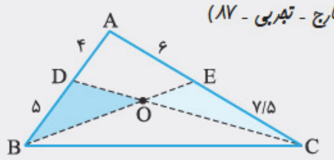
بنابراین تنها در گزینه‌ی «۲» تناسب برقرار است و در نتیجه: $MN \parallel BC$

تمرین ۳۵ در شکلی که BC و DE موازی هم هستند، اندازه‌ی ضلع BC کدام است؟



۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ۲) $\frac{۴۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲}{۵}$

مثال ۲۹ در شکل زیر نسبت مساحت مثلث **OBD** به مساحت مثلث **OCE** کدام است؟ (خارج ـ تجربی ـ ۸۷)



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

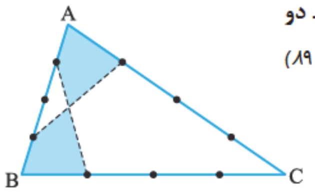
۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

گزینه‌ی ۴ همان‌طور که روی شکل دیده می‌شود، طول هر ۴ قطعه روی اضلاع مثلث مشخص است، بنابراین معلوم‌بودن هر ۴ قطعه روی ساق‌ها خبر از عکس تالس می‌دهد. فقط برای اطمینان نسبت آن‌ها را چک می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۶}{۷/۵} \Rightarrow ۴\times۷/۵=۶\times۵ \Rightarrow ۳۰=۳۰$$

بنابراین بنا بر عکس قضیه‌ی تالس $DE \parallel BC$ می‌باشد، یعنی چهارضلعی DECB ذوزنقه است، در نتیجه مساحت بال‌های پروانـه‌ی متکی بر ساقین یعنی OEC و OBD برابر است و نسبت آن‌ها برابر «۱» است.

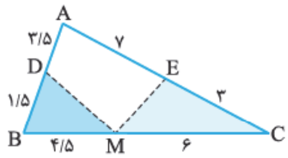
تمرین ۳۶ در شکل مقابل هر ضلع مثلث **ABC** بـه ۴ قـسمت مـساوی تقـسیم شـده اسـت. دو چهارضلعی سایه زده شده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ (خارج ـ ریاضی ـ ۸۹)



۱) هم‌مساحت ۲) هم‌محیط

۳) همنهشت ۴) متشابه

تمرین ۳۷ در شکل مقابل مساحت مثلث **BDM** چند درصد مساحت مثلث **EMC** است؟

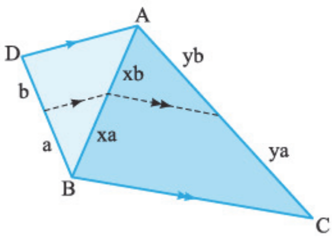


۱) ۵۰ ۲) ۷۵

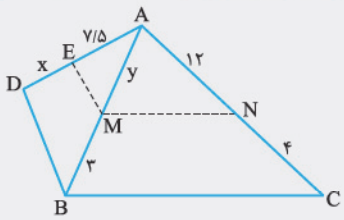
۳) ۶۰ ۴) ۴۸

تیپ ششم: تالس لاله و لادن

در بعضی از مسائل، دو مثلث از یک ضلع به هم چسبیده‌اند[1] و در هر کدام آن‌ها خطی مـوازی قاعـده وجـود دارد. در این حالت هر نسبتی روی یکی از ساق‌های یکی از این دو مثلث برقرار باشد، آن نسبت روی همـه‌ی ساق‌ها برقرار است. در این تیپ سؤال‌ها معمولاً یکی از مثلث‌ها مجهولات کم‌تری دارد، لذا اول تـالس را روی آن می‌نویسیم و سپس به سراغ مثلث بعدی می‌رویم.



مثال ۳۰ در شکل مقابل $BC \parallel MN$ و $BD \parallel ME$ می‌باشد. $x+y$ کدام است؟



۱) ۱۲/۵

۲) ۱۰/۵

۳) ۱۲

۴) ۱۱/۵

گزینه‌ی ۴ همان‌طور که می‌بینید در مثلث ABC تنها مقدار y مجهول است، پس ابتدا آن را پیدا می‌کنیم:

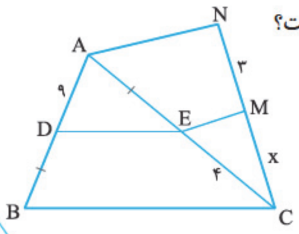
$$\frac{y}{۳}=\frac{۱۲}{۴} \Rightarrow y=۹$$

حالا با معلوم‌شدن y می‌توانیم با نوشتن تالس در مثلث ABD مقدار x را هم پیدا کنیم:

$$\frac{۷/۵}{x}=\frac{y}{۳} \Rightarrow \frac{۷/۵}{x}=\frac{۹}{۳} \Rightarrow x=۲/۵ \Rightarrow x+y=۱۱/۵$$

۱. لاله و لادن معروف‌ترین دوقلوی جهان بودند که از یک طرف بدن به هم چسبیده بودند. با هم می‌خوابیدند، با هم بیدار می‌شدند، با هم بـه مدرسـه مـی‌رفتنـد، بـا هـم امتحان می‌دادند و با هم مردند ... . من یک بار آن‌ها را در دانشگاه تهران هنگام دانشجویی دیده بودم و این نوع از اشکال را به یاد آن‌ها به این نام، نام‌گذاری کردم ... یادشان گرامی.

تمرین ۳۸ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $EM \parallel AN$ می‌باشد. اگر $BD = AE$ باشد، مقدار x کدام است؟



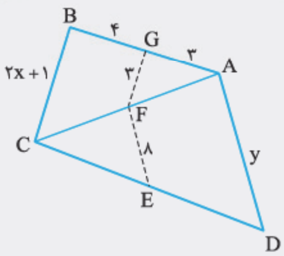
۱) ۲

۲) ۵/۵

۳) ۵

۴) ۳

مثال ۳۱ در شکل مقابل هر دو چهارضلعی $FADE$ و $BGFC$ ذوزنقه هستند. مقدار $x + y$ کدام است؟



۱) ۱۶

۲) ۱۶/۵

۳) ۱۵/۵

۴) ۱۷

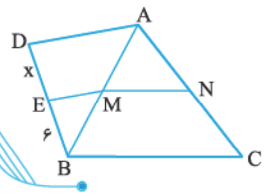
گزینه‌ی ۴ ابتدا در مثلث ABC با استفاده از تالس جزءبه‌کل مقدار x را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۴+۳} = \frac{۳}{۲x+۱} \Rightarrow ۲x+۱ = ۷ \Rightarrow x = ۳$$

حال در همان مثلث با استفاده از تالس جزءبه‌جزء می‌گوییم: $AF = ۳k$ و $CF = ۴k$ و حالا به سراغ مثلث ACD می‌رویم:

$$\frac{۸}{y} = \frac{۴k}{۷k} \Rightarrow y = ۱۴ \Rightarrow x + y = ۱۷$$

تمرین ۳۹ دو مثلث ABC و ABD در ضلع AB مشترک‌اند. اگر چهارضلعی‌های $MNCB$ و $MEDA$ ذوزنقه باشند و $AC = \frac{۵}{۲}AN$، مقدار x کدام است؟



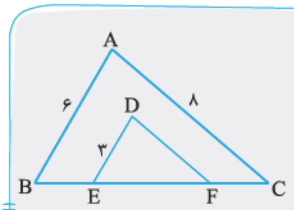
۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۳/۵

۴) ۵/۵

مثال ۳۲ در شکل مقابل $AC \parallel DF$ و هم‌چنین $AB \parallel DE$ است. اندازه‌ی پاره‌خط DF کدام است؟



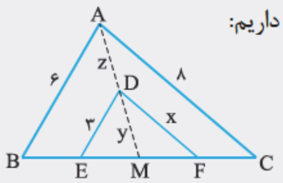
۱) ۴

۲) ۴/۲

۳) ۴/۵

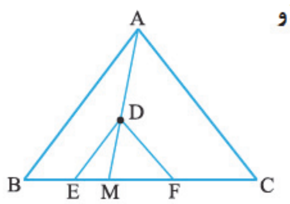
۴) ۵/۴

گزینه‌ی ۱ کافی است از A به D وصل کنیم و امتداد دهیم تا ضلع BC را در M قطع کند. حال داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABM}: \frac{۳}{۶} = \frac{y}{y+z} \\ \overset{\Delta}{AMC}: \frac{x}{۸} = \frac{y}{y+z} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{x}{۸} \Rightarrow x = ۴$$

تمرین ۴۰ در شکل مقابل چهارضلعی‌های $ADFC$ و $ADEB$ ذوزنقه هستند. اگر $MC = ۵ME$ و $MF = ۱۵$ و $MB = ۱۲$ باشد، اندازه‌ی MC کدام است؟



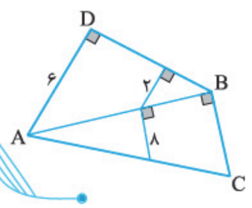
۱) ۳۰

۲) ۲۵

۳) ۲۶

۴) ۲۰

تمرین ۴۱ در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی پاره‌خط BC کدام است؟



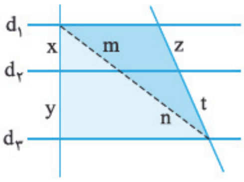
۱) ۱۰

۲) ۱۶

۳) ۱۲

۴) ۲۴

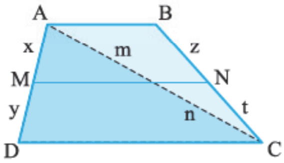
تیپ هفتم: خطوط موازی و مورب



به راحتی می‌توان نشان داد که اگر دو خط مورب، چند خط موازی را قطع کنند، نسبت‌های پدیدآمده روی آن‌ها متناسب است:

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n}\ ,\ \frac{m}{n}=\frac{z}{t} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y}=\frac{z}{t}}$$

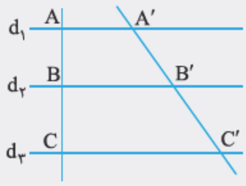
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با رسم پاره‌خط خط‌چین‌شده، چیزی شبیه حالت مثلث‌های لاله و لادن پدید آمد.



نتیجه‌ی مهم در ذوزنقه‌ها خطی که موازی دو قاعده رسم می‌شود و دو ساق را قطع می‌کند، روی آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورد. در این‌جا نیز برای استدلال کافی است یکی از قطرها را رسم کنید.

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{z}{t}}$$

مثال ۳۳ در شکل مقابل سه خط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ موازی‌اند. اگر $A'B'=x+۱$، $B'C'=۲$ و $BC=x-۲$ و $AB=۲$ باشد، مقدار x کدام است؟



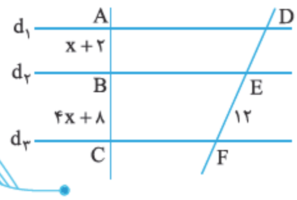
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۲/۵
۴) ۳/۵

گزینه‌ی ۲ همان‌طور که دیدیم، چهار پاره‌خط ایجادشده متناسب هستند، یعنی:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{۲}{x-۲}=\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۴ \Rightarrow x^۲-x-۲=۴$$

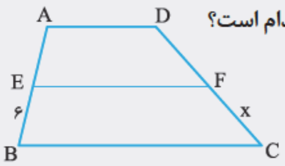
$$\Rightarrow x^۲-x-۶=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۳$$

تمرین ۴۲ در شکل مقابل خطوط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ موازی‌اند. با توجه به مقادیر داده‌شده روی شکل، اندازه‌ی پاره‌خط DE کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

مثال ۳۴ در ذوزنقه‌ی $ADCB$ مطابق شکل، EF موازی دو قاعده است. اگر $۴AE=۳DF$ باشد، مقدار x کدام است؟

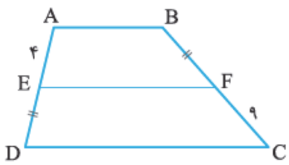


۱) ۹
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

گزینه‌ی ۲ می‌دانیم که چهار پاره‌خط ایجادشده متناسب‌اند، یعنی:

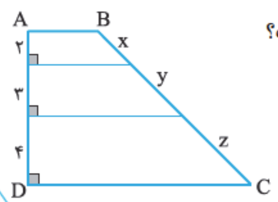
$$\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{DF}=\frac{EB}{FC} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{۶}{x} \Rightarrow x=۸$$

تمرین ۴۳ در شکل روبه‌رو ذوزنقه‌های $ABFE$ و $EFCD$ در یک قاعده مشترک‌اند، به طوری که $BF=ED$ می‌باشد. نسبت طول دو ساق ذوزنقه‌ی $ABCD$ کدام است؟



۱) ۱/۲
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۱/۸

تمرین ۴۴ در شکل مقابل اندازه‌ی ساق بزرگ ذوزنقه‌ی $ABCD$ برابر ۳۶ است. مقدار $x+z$ کدام است؟

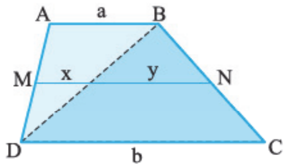


۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۲۸

تمرین ۴۵ دو قاعده‌ی یک ذوزنقه ۳ و ۹ و طول ساق‌های آن ۴ و ۶ است. خطی موازی قاعده‌های آن، ذوزنقه را به دو ذوزنقه با محیط‌های مساوی تقسیم می‌کند. در این صورت ساق‌ها به چه نسبتی تقسیم می‌شوند؟ *(مسابقه‌های ریاضی آمریکا ـ ۱۹۵۷)*

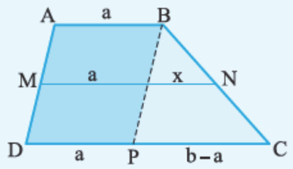
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

تیپ هفت‌ونیم: ذوزنقه‌ی تکامل‌یافته



در این زیرتیپ که حالت تکامل‌یافته‌ی خطوط موازی و مورب است، علاوه بر استفاده از نسبت ساق‌های ذوزنقه، اندازه‌ی قاعده‌ها و پاره‌خط MN نیز دخالت دارند که برای حل و فصل آن‌ها راه کلاسیک و متعارف این است که یکی از قطرهای ذوزنقه را رسم کنید و از تالس جزء‌به‌کل در مثلث‌های ایجادشده استفاده کنید.

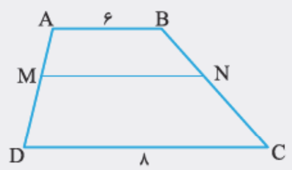
راه هیجان‌انگیز



راه دیگر حل این مسائل این است که از یک رأس، خطی به موازات یک ساق رسم کنیم و ذوزنقه را به یک متوازی‌الاضلاع و یک مثلث تبدیل کنیم و فقط با یک بار استفاده از تالس در مثلث BPC، پاره‌خط MN را پیدا کنیم.

$$\boxed{\frac{x}{b-a}=\frac{AM}{AD}}$$

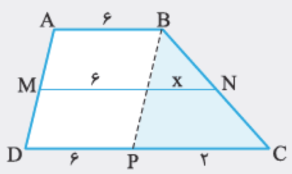
مثال ۳۵ در ذوزنقه‌ی ABCD مطابق شکل، $\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۴}$ و پاره خط MN موازی قاعده‌ها است. اگر اندازه‌ی قاعده‌ها ۶ و ۸ باشد، اندازه‌ی MN کدام است؟



۱) ۵/۵   ۲) ۶/۵

۳) ۷/۵   ۴) ۷

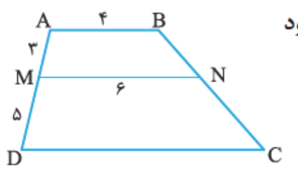
گزینه‌ی ۲ کافی است طبق راه هیجان‌انگیز از B خطی به موازات ساق AD رسم کنیم،



در این صورت با توجه به این‌که $\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد، داریم:

$$\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=۰/۵ \Rightarrow MN=۶/۵$$

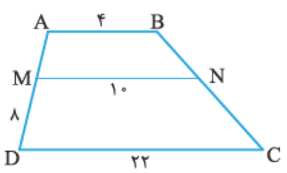
تمرین ۴۶ در ذوزنقه‌ی ABCD مطابق شکل، اندازه‌ی پاره‌خط MN که موازی قاعده‌ها رسم می‌شود برابر ۶ است. اگر اندازه‌ی قاعده‌ی کوچک ۴ باشد، اندازه‌ی قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه کدام است؟



۱) $\frac{۲۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲۶}{۳}$

۳) $\frac{۲۸}{۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲}$

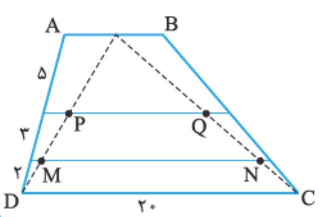
تمرین ۴۷ در ذوزنقه‌ی ABCD مطابق شکل، نسبت $\frac{NC}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تمرین ۴۸ در ذوزنقه‌ی ABCD مطابق شکل $CD=۲۰$ است. حاصل $PQ+MN$ کدام است؟



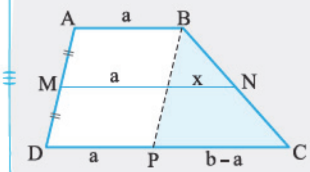
۱) ۲۸

۲) ۲۶

۳) ۲۴

۴) ۳۰

مثال ۳۶ نشان دهید خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل می‌کند (خط میانگین) میانگین دو قاعده است.

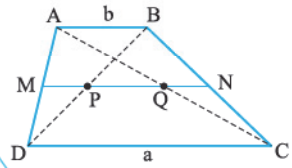


استدلال فرض کنیم قاعده‌های ذوزنقه a و b باشد، در این صورت از رأس B خطی به موازات ساق AD رسم می‌کنیم و در مثلث رنگ‌شده، تالس را می‌نویسیم:

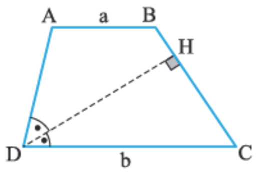
$$\Rightarrow \frac{x}{b-a}=\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{b-a}{۲} \Rightarrow MN=a+\frac{b-a}{۲}=\frac{a+b}{۲}$$

تمرین ۴۹ در شکل مقابل پاره‌خط **MN** وسط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند. نشان دهید:

$$\boxed{PQ=\frac{a-b}{۲}}$$



تمرین ویژه‌ی خردورزان نشان دهید در ذوزنقه‌ی **ABCD** مطابق شکل، اندازه‌ی ساق **AD** برابر تفاضل دو قاعده است.

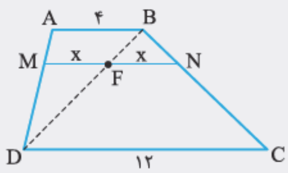


stop در همین تیپ از مسائل ذوزنقه، حالتی وجود دارد که هیچ صحبتی از اعداد یا نسبت‌های ایجادشده روی ساق نیست. در این موارد و مواردی مشابه این می‌توانید از راه هیجان‌انگیز زیر استفاده کنید:

راه هیجان‌انگیز

هرگاه یک پاره‌خط با طول نامشخص داشته باشید که توسط نقطه‌ای روی پاره‌خط به نسبت خاصی تقسیم شده باشد، برای پیداکردن آن نسبت کافی است یکی از قطعه‌ها را k و دیگری را ۱ در نظر بگیرید.

مثال ۳۷ در ذوزنقه‌ی **ABCD** قطر **BD** توسط پاره‌خط **MN** به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر قاعده‌های ذوزنقه ۴ و ۱۲ باشند، اندازه‌ی پاره‌خط **MN** کدام است؟

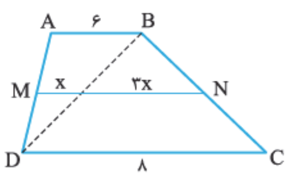


۱) ۶
۲) $۲\sqrt{۶}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) ۸

گزینه‌ی ۱ چون طول ساق‌ها نامشخص است و نسبت ایجادشده توسط نقطه‌ی M روی ساق AD (یا نقطه‌ی N روی ساق BC) در حل مسئله مؤثر است، فرض می‌کنیم $MD=k$ و $AM=۱$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

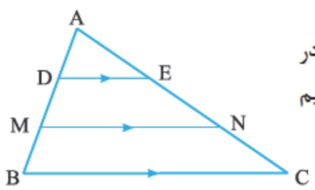
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}: MF \parallel AB \Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{k}{k+۱} \Rightarrow \frac{۴-x}{۴}=\frac{۱}{k+۱} \\ \overset{\Delta}{BDC}: FN \parallel DC \Rightarrow \frac{x}{۱۲}=\frac{۱}{k+۱}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۴-x}{\cancel{۴}}=\frac{x}{\underset{۳}{\cancel{۱۲}}} \Rightarrow ۱۲-۳x=x \Rightarrow x=۳ \Rightarrow MN=۶$$

تمرین ۵۰ در ذوزنقه‌ی **ABCD** مطابق شکل قاعده‌ها ۶ و ۸ می‌باشند. مقدار **x** کدام است؟



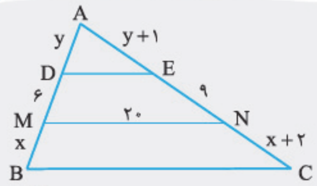
۱) $\frac{۲۵}{۱۲}$
۲) $\frac{۲۳}{۱۳}$
۳) $\frac{۲۶}{۱۱}$
۴) $\frac{۲۴}{۱۳}$

تیپ هشتم: تالس با دو خط موازی قاعده



در این تیپ دو پاره‌خط موازی قاعده‌ی مثلث رسم می‌شود و معمولاً هم حداقل دو مجهول در مسئله وجود دارد. در این موارد یک بار مثلث AMN را در نظر می‌گیریم و با استفاده از موازی‌بودن DE و MN از تالس استفاده می‌کنیم و یک بار هم مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و از موازی‌بودن MN و BC یا DE و BC استفاده می‌کنیم.

مثال ۳۸ در شکل مقابل DE و MN موازی قاعده‌ی BC هستند. حاصل $BC-DE$ کدام است؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۵
۳) ۲۶ ۴) ۲۴

گزینه‌ی ۲ ابتدا مثلث AMN را در نظر می‌گیریم:

$$\overset{\Delta}{AMN}: DE \parallel MN \Rightarrow \frac{y}{۶}=\frac{y+۱}{۹} \Rightarrow ۹y=۶y+۶ \Rightarrow ۳y=۶ \Rightarrow y=۲$$

حال مثلث ABC را در نظر می‌گیریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC \Rightarrow \frac{y+۶}{x}=\frac{y+۱۰}{x+۲} \Rightarrow \frac{۸}{x}=\frac{۱۲}{x+۲} \Rightarrow ۸x+۱۶=۱۲x \Rightarrow ۴x=۱۶ \Rightarrow x=۴$$

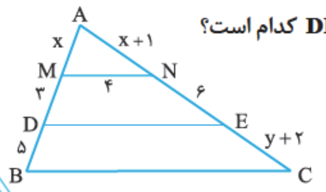
حال برای پیداکردن DE از تالس جزءبه‌کل در مثلث AMN استفاده می‌کنیم:

$$\frac{DE}{۲۰}=\frac{y}{y+۶}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow DE=۵$$

برای پیداکردن BC نیز از تالس جزءبه‌کل در مثلث ABC استفاده می‌کنیم:

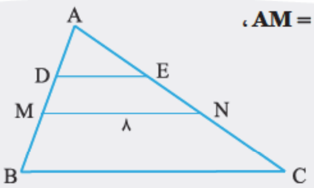
$$\frac{۲۰}{BC}=\frac{۸}{۸+۴} \Rightarrow BC=۳۰ \Rightarrow BC-DE=۳۰-۵=۲۵$$

تمرین ۵۱ در مثلث ABC مطابق شکل، MN و DE موازی قاعده‌ی BC هستند. حاصل $DE+BC$ کدام است؟



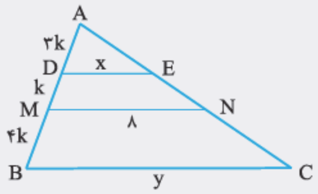
۱) ۴۸ ۲) ۵۲
۳) ۵۴ ۴) ۵۰

مثال ۳۹ در مثلث ABC مطابق شکل، پاره‌خط‌های DE و MN موازی قاعده‌ی BC هستند. اگر $AM=MB$، $AD=۳MD$ و $MN=۸$ باشد، $BC-DE$ کدام است؟



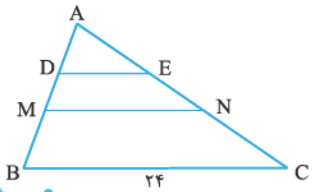
۱) ۱۲ ۲) ۸
۳) ۱۴ ۴) ۱۰

گزینه‌ی ۴ با فرض کوچک‌ترین قطعه یعنی $MD=k$ خواهیم داشت $AD=۳k$ و در نتیجه $MB=۴k$. حال به سراغ تالس جزءبه‌کل در مثلث‌های AMN و ABC می‌رویم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMN}: DE \parallel MN \Rightarrow \frac{x}{۸}=\frac{۳k}{۴k} \Rightarrow x=۶ \\ \overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC \Rightarrow \frac{۸}{y}=\frac{۴k}{۸k} \Rightarrow y=۱۶\end{array}\right\} \Rightarrow y-x=۱۰$$

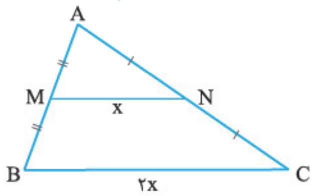
تمرین ۵۲ در مثلث ABC مطابق شکل، پاره‌خط‌های DE و MN موازی قاعده‌ی BC هستند. اگر $BC=۲۴$، $MD=۲AD$ و $MB=۵AD$ باشد، حاصل $MN-DE$ کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۶
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

تیپ نهم: حالت خاص تالس

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، بر طبق تالس نصف ضلع سوم و بر طبق عکس تالس موازی ضلع سوم است.



$$AM=MB, AN=NC \Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}BC \,,\, MN \parallel BC$$

نتیجه‌ی هیجان‌انگیز

اگر یک ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر یک خطوطی موازی قاعده رسم کنیم تا ضلع مقابل را قطع کنند، پاره‌خط‌های تولیدشده تشکیل تصاعد عددی می‌دهند.

مثلن در مثلث ABC مطابق شکل، ضلع AC به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده و از هر یک خطوطی به موازات ضلع BC رسم شده است: