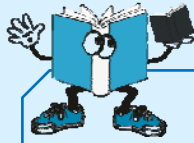


درس اول

مجموعه



مجموعه

مفهوم «مجموعه» در ریاضیات تعریف دقیقی ندارد ولی می توان آن را این گونه بیان کرد: «هر مجموعه یک دسته از اشیاء مشخص و متمایز (غیر تکراری) است». به هر کدام از آن اشیاء، یک عضو از مجموعه می گوییم.

نکته: عضوهای یک مجموعه باید کاملاً مشخص باشند و در انتخاب عضوها نباید «سلیقه‌ای» عمل کرد.

مثال: هر یک از دسته‌ها (گروه‌ها)ی زیر، یک مجموعه را مشخص می کند.

(الف) حروف صدادار الفبای انگلیسی

(ب) اعداد ۲۰۰ و ۱۰۱ و ۱۲ و ۵

(ج) دانش جویان ورودی دانشگاه تهران در سال ۱۳۷۰

(د) اسامی استان‌های ایران که با حرف «ش» شروع می شوند.

سؤال: آیا دسته‌ی «سه عدد طبیعی زوج متوالی» یک مجموعه را مشخص می کند؟ چرا؟

جواب: خیر - زیرا این سه عدد مشخص نشده‌اند و هر شخصی بنا به سلیقه‌ی خود می تواند سه عدد طبیعی زوج متوالی نام ببرد.

سؤال: آیا دسته‌ی «پنج کشور زیبای جهان» یک مجموعه را مشخص می کند؟ چرا؟

جواب: خیر - زیرا عضوهای آن کاملاً مشخص نشده‌اند و هر شخصی می تواند ۵ کشور را نام ببرد در حالی که می تواند کشورهای نام برده شده در بین افراد مختلف، متفاوت باشد.

نکته: عضوهای یک مجموعه باید کاملاً مشخص باشند اما می توانند از تباط

خاصی با یکدیگر نداشته باشند. به عنوان مثال {غزل، ۵، □، a} یک مجموعه را مشخص می کند.

نکته: عضوهای مجموعه را داخل آکولاد { } قرار داده و بین هر دو عضو یک کاما «،» و یا «و» قرار می دهیم و هر مجموعه را با یکی از حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C و ... نام گذاری می کنیم.

مثال: مجموعه‌ی اعداد صحیح بین ۲- و ۳+ را می توان به صورت $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ نمایش داد.





عضویت



هر شیء که متعلق به یک مجموعه باشد را عضو آن مجموعه می‌نامیم و آن را با علامت \in نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال در مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ داریم:
 $1 \in A$ و $2 \in A$ ولی عدد ۵ عضوی از این مجموعه نیست. بنابراین می‌نویسیم: $5 \notin A$

نکته: در نمایش یک مجموعه، تکرار اعضا تأثیری در تعداد اعضا ندارد. برای مثال:

$$\{2, 5, 5, 7, 2, 5\} = \{2, 5, 7\}$$

نکته: در مجموعه‌ها، ترتیب قرار گرفتن اعضا اهمیت ندارد. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 3, 2\}$$

نکته: در مواردی که تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد باشد، نوشتن همه‌ی آن‌ها مشکل است. در صورتی که عضوهای آن مجموعه الگوی مشخصی داشته باشند می‌توانیم فقط تعدادی از آن‌ها را بنویسیم و به جای بقیه‌ی اعضا «...» قرار دهیم.

مثال: مجموعه‌ی اعداد زوج بین ۳۱ تا ۶۵ عبارت‌اند از:

$$A = \{32, 34, 36, \dots, 64\}$$

سؤال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۸۰ را نشان دهید.

$$\{1, 2, 3, 4, \dots, 78, 79\}$$

✓ **جواب:**

مجموعه‌های معروف



با توجه به کاربرد زیاد بعضی از مجموعه‌ها در ریاضیات، این مجموعه‌ها معروف‌تر از بقیه‌ی مجموعه‌ها هستند و برای آن‌ها اسم‌های ثابت و مشخصی را انتخاب کرده‌اند. بعضی از این مجموعه‌ها که با آن‌ها سر و کار بیش‌تری داریم، عبارت‌اند از:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه‌ی اعداد طبیعی}$$

$$E = \{2, 4, 6, \dots\} \text{ مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج}$$

$$O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \text{ مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه‌ی اعداد حسابی}$$

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه‌ی اعداد صحیح}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\} \text{ مجموعه‌ی اعداد گویا}$$

$$Q' \text{ مجموعه‌ی اعداد گنگ}$$

$$R \text{ مجموعه‌ی اعداد حقیقی}$$



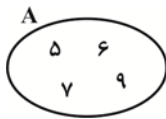
نکته: با مجموعه‌ی اعداد گنگ (Q') و اعداد حقیقی (R) در درس‌های آینده بیشتر آشنا خواهیم شد.



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون

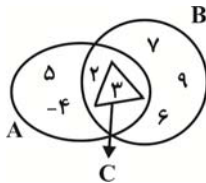


در بعضی از موارد می‌توانیم عضوهای یک مجموعه را به کمک منحنی‌های بسته نشان دهیم که به این گونه از نمایش مجموعه‌ها، «نمودار ون» می‌گوییم.



سؤال: اعضای مجموعه‌ی $A = \{5, 6, 7, 9\}$ را به کمک نمودار ون نشان دهید.

✓ **جواب:**



سؤال: با توجه به نمودار ون مقابل، عضوهای مجموعه‌های A ، B و C را بنویسید.

✓ **جواب:**

$$A = \{-4, 2, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 6, 7, 9\}$$

$$C = \{3\}$$



مجموعه‌ی تهی



مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه‌ی «تهی» می‌گوییم و آن را با نماد \emptyset و یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

سؤال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی منفی را مشخص کنید.

✓ **جواب:** همان‌طور که می‌دانیم، هیچ عدد طبیعی منفی وجود ندارد. بنابراین برای این مجموعه، هیچ عضوی را

نمی‌توان در نظر گرفت.

مثال: مجموعه‌ی انسان‌هایی که بر روی خورشید زندگی می‌کنند یک مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند.

سؤال: کدام یک از مجموعه‌های زیر، تهی است؟

۱: مجموعه‌ی اعداد اول بخش پذیر بر ۲

۲: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج بخش پذیر بر ۱۱

۳: مجموعه‌ی اعداد اول بین ۳۲ تا ۳۶

۴: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک تر از ۲

جواب: گزینه‌ی (۳)

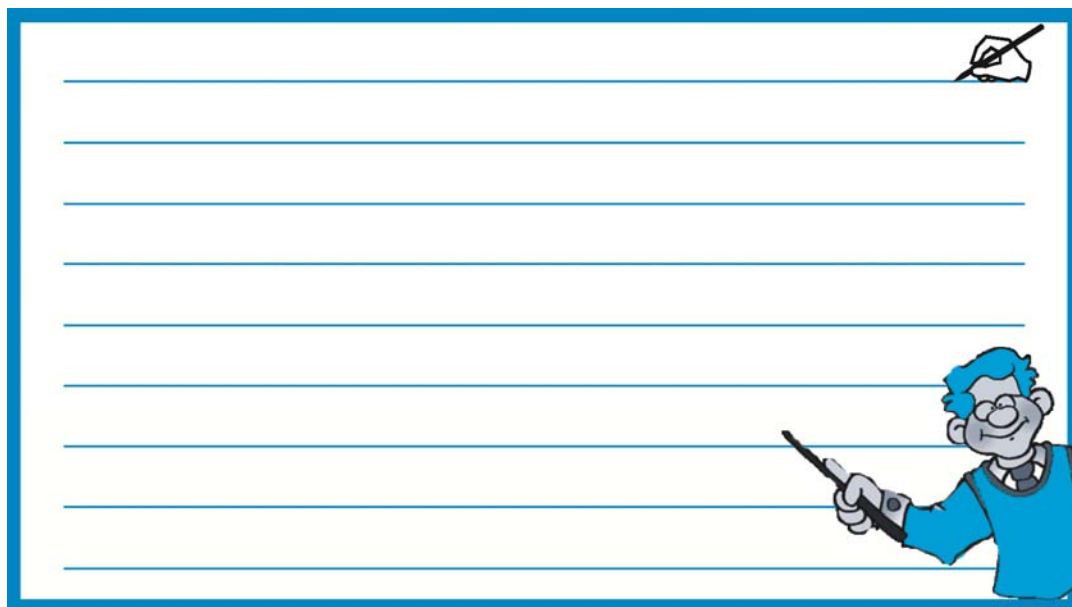
گزینه‌ی «۱»: $A = \{2\}$

گزینه‌ی «۲»: $B = \{22, 44, 66, \dots\}$

گزینه‌ی «۳»: $C = \{ \}$

گزینه‌ی «۴»: $D = \{1\}$

نکته: $\{0\}$ و $\{\emptyset\}$ و $\{\{\}\}$ مجموعه‌های تهی نیستند زیرا هر کدام شامل یک عضو هستند.




سوالات تشریحی درس اول (معرفی مجموعه)



۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) کتابهای پرفروش جهان، معرف یک مجموعه است.

ب) اگر $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$ باشد، آن گاه $2 \in A$.

ج) مجموعه‌ی $B = \{4, 5, 6, \dots\}$ دارای سه عضو است.

د) مجموعه‌ی اعداد صحیح که نه منفی و نه مثبت هستند یک مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند.

۲- جاهای خالی را با اعداد و یا کلمات مناسب کامل کنید.

الف) به دسته‌ای از اشیاء کاملاً مشخص و غیر تکراری می‌گویند.

ب) مجموعه‌ی $A = \{2, 9, 3, 2, 2, 9\}$ دارای عضو است.

ج) مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه‌ی می‌نامند.

د) کوچک‌ترین عضو از مجموعه‌ی اعداد حسابی است.

۳- مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان بنویسید.

الف) مجموعه‌ی اعداد صحیح بین ۱۰- و ۲۰



ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰

ج) مجموعه‌ی شماره‌های اول عدد ۳۰

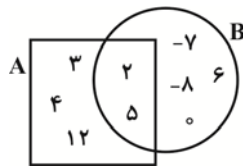
د) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۵

ه) مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰

و) مجموعه‌ی شماره‌های زوج عدد ۱۰۹



۴- با توجه به نمودار ون زیر؛



الف) مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان بنویسید.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$

ب) عضوهای مشترک دو مجموعه‌ی A و B را مشخص کرده و در مجموعه‌ی C بنویسید.

$$C = \{ \quad \quad \quad \}$$

ج) در جاهای خالی علامت مناسب \in یا \notin را قرار دهید.

$$-8 \square B$$

$$2 \square C$$

$$12 \square B$$

$$6 \square C$$

۵- با توجه به عبارتهای زیر، مجموعه‌های A، B و C را روی نمودار ون زیر مشخص کنید.

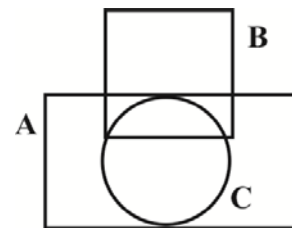
$$-2 \in A \quad 0 \in A \quad -2 \in C$$

$$-6 \notin C \quad -6 \notin B \quad -6 \in A$$

$$3 \notin C \quad 3 \in B \quad 3 \in A$$

$$0 \in C \quad 0 \in B \quad -2 \notin B$$

$$4 \in B \quad 4 \notin C \quad 4 \notin A$$



۶- اگر عضوهای مجموعه‌های زیر، الگوی مشخصی داشته باشند، سه عضو دیگر این مجموعه‌ها را بنویسید.

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 30\}$$

$$B = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \dots \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{98}{100} \right\}$$

$$D = \{1, 4, 9, \dots\}$$



۷- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با \checkmark یا \times مشخص کنید.

الف) $۳۵ \in \{۵, ۱۰, ۱۵, \dots\}$

ب) $۱ \in \{\frac{۷}{۲}, \frac{۷}{۳}, \frac{۷}{۴}, \dots\}$

ج) $-۴۲ \notin \{-۲, -۴, -۶, \dots, -۵۰\}$

د) $\frac{۱}{۱۵} \in \{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \dots, \frac{۱}{۱۲}\}$

۸- مجموعه‌های زیر را به زبان فارسی توضیح دهید.

$A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$

$B = \{-۳, -۲, -۱, ۰, +۱\}$

$C = \{-۵, -۴, -۳, \dots\}$

$D = \{۴, ۸, ۱۲, \dots, ۴۴\}$

$E = \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \dots\}$

۹- عبارتهای زیر را به صورت مجموعه‌ای از اعضا بنویسید.

الف) چهارضلعی‌هایی که در آن‌ها اضلاع مقابل دوه‌دو مساوی و موازی‌اند.

ب) حروف بی‌نقطه در الفبای فارسی

ج) حروف زبان انگلیسی بین I و Q

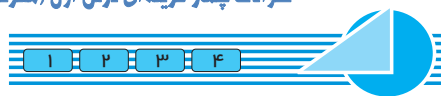
د) اعداد اول دو رقمی که مجموع ارقام آن‌ها ۶ می‌شود.

۱۰- کدام عضو از مجموعه‌ی $A = \{۲۱, ۲۳, ۲۴, ۲۵\}$ با بقیه‌ی اعضای A فرق دارد؟ چرا؟ ۴ مورد پیدا کنید.





سوالات چهار گزینه‌ای درس اول (معرفی مجموعه):



۱۱- کدام یک از دسته‌های زیر، یک «مجموعه» را مشخص می‌کند؟

- (۱) سه عدد طبیعی بزرگ
(۲) سه عدد صحیح متوالی
(۳) پنج عدد صحیح بین ۱۰ و -۱۰
(۴) سه عدد طبیعی کوچک‌تر از ۴

۱۲- کدام یک از مجموعه‌های زیر، بیانگر یک مجموعه‌ی تهی است؟

- (۱) $\{0\}$
(۲) مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از ۳
(۳) $\{\emptyset\}$
(۴) مجموعه‌ی اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸

۱۳- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

(۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۳۰ و ۴۰ که بر ۲۱ بخش‌پذیر هستند، مجموعه‌ای تهی است.

(۲) دو مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 3, 2, 1, 2\}$ و $B = \{3, 3, 1, 2\}$ با یکدیگر برابرند.

(۳) عبارت «انسان‌های قد بلند» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

(۴) مجموعه‌ی اعداد اول بین ۸۰ تا ۹۰ دارای سه عضو است.

۱۴- اگر $A = \{\{1\}, \{\{2\}\}, \{\}\}$ باشد، چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف) $\emptyset \in A$ ب) $\{2\} \in A$ ج) $1 \in A$ د) $\{\{2\}\} \in A$ هـ) $\{1\} \in A$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

۱۵- کدام یک از اعداد زیر به مجموعه‌ی $A = \{5, -1, -7, \dots, -43\}$ تعلق ندارد؟

- (۱) -۲۵ (۲) -۱۳ (۳) -۳۷ (۴) -۲۴



درس دوم

مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها



تعریف دو مجموعه مساوی (برابر)



اگر دو مجموعه A و B اعضای یکسانی داشته باشند یعنی تمام عضوهای مجموعه‌ی A در B باشد و بالعکس، می‌گوییم دو مجموعه‌ی A و B با هم برابرند و می‌نویسیم: $A = B$

مثال: اگر مجموعه‌ی A شامل ۳ عدد طبیعی متوالی باشد که حاصل جمع آن‌ها ۳۳ بوده و مجموعه‌ی B نیز شامل اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۳ باشد، این دو مجموعه با یکدیگر برابرند. زیرا اعضای هر دو مجموعه برابر با $\{۱, ۱۱, ۱۲\}$ خواهد بود.

سؤال: آیا دو مجموعه‌ی $A = \{۲\}$ و $B = \{\{۲\}\}$ مساوی‌اند؟ چرا؟

جواب: خیر- زیرا $۲ \in A$ ولی $۲ \notin B$ و از آن‌جا که $\{۲\} \neq ۲$ پس $A \neq B$.

سؤال: اگر $A = \{۴, a\}$ و $B = \{۳, a, b\}$ داشته باشیم $A = B$ ، مقدار a و b را بیابید.

جواب: از آن‌جایی که یک مجموعه‌ی ۲ عضو با یک مجموعه‌ی ۳ عضو مساوی است درمی‌یابیم که دو عضو از

عضوهای مجموعه‌ی B با یکدیگر برابرند. پس $a = ۳$ و $b = ۴$

سؤال: اگر $\{۵, ۳, ۷\} = \{۷, ۳x - ۱, ۳\}$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

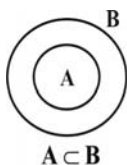
$$۳x - ۱ = ۵ \Rightarrow ۳x = ۶ \Rightarrow x = ۲$$

جواب:

تعریف زیرمجموعه



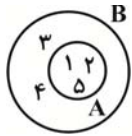
اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضوی از A ، عضوی از B نیز باشد، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعه‌ای از B است و می‌نویسیم $A \subset B$.



نکته: مطلب بالا را می‌توانیم با نمودار ون به صورت مقابل نشان دهیم.



مثال: اگر $A = \{1, 2, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد، مشخص است که تمامی عضوهای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی



بزرگ‌تر B وجود دارند بنابراین می‌توان گفت مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم: $A \subset B$
و نمودار ون این دو مجموعه را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.

سؤال: اگر $A = \{a, b, d\}$ و $B = \{a, b, c, e\}$ باشد، آیا می‌توان گفت $A \subset B$ ؟ چرا؟

جواب: خیر- با توجه به این که عضو d از مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B نیست نمی‌توان گفت $A \subset B$.

نکته: A زیر مجموعه‌ی B نیست را به صورت $A \not\subset B$ نشان می‌دهیم.

سؤال: آیا می‌توان ادعا کرد تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است؟ چرا؟

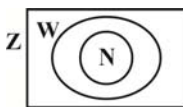
جواب: بله- زیرا تهی عضو ندارد که در مجموعه‌ی دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد. بنابراین: $\emptyset \subset A$

سؤال: آیا می‌توان گفت: «هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است»؟ چرا؟

جواب: بله- زیرا تمامی عضوهای مجموعه‌ای مانند A در داخل مجموعه‌ی A وجود دارند. پس: $A \subset A$

نکته: اگر N مجموعه‌ی اعداد طبیعی، W مجموعه‌ی اعداد حسابی و Z مجموعه‌ی اعداد صحیح باشند، می‌توان گفت

$N \subset W \subset Z$ و آن را به صورت نمودار ون زیر نشان داد.



سؤال: تمامی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

جواب:

هیچ عضوی	یک عضوی	دو عضوی	سه عضوی
\emptyset	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
(تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.)	$\{b\}$	$\{a, c\}$	(هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.)
	$\{c\}$	$\{b, c\}$	

مجموعه‌ی A دارای ۸ زیرمجموعه است. از این مثال می‌توان به نتیجه‌ی زیر برای تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه رسید.

نتیجه: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 2^n است.

سؤال: مجموعه‌ای دارای ۵ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه را مشخص کنید.

جواب: $n = 5 \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها $= 2^5 = 32$

سؤال: تمامی زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ را بنویسید.

جواب: $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}$



نکته: تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی را می‌توانیم از رابطه‌ی $\frac{n \times (n-1)}{2}$ به‌دست می‌آوریم.

مثال: در سؤال قبل، تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی A را می‌توانیم از رابطه‌ی $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ به‌دست آوریم.

به‌دست آوریم.

سؤال: یک مجموعه‌ی ۷ عضوی چند زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد؟

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی $n = 7 \Rightarrow \frac{7 \times 6}{2} = 21$

جواب: ✓



نمایش مجموعه‌ها به‌صورت نمادهای ریاضی



در بیش‌تر موارد، در ریاضیات، مجموعه‌ها را با نمادهای ریاضی نشان می‌دهند. برای مثال:

$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ اعداد طبیعی زوج

$O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ اعداد طبیعی فرد

$P = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ اعداد طبیعی مجذور کامل

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < +1\}$ اعداد صحیح بین -۵ و +۱

$S = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ مضرب‌های صحیح عدد ۳

سؤال: هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضاء مشخص کنید.

$$A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{W}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < +2\}$$

$$C = \{3k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 = 7\}$$

$$E = \{5x \mid x = 0, 4, 9, 12\}$$

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$B = \{-3, -2, -1, 0, +1\}$$

$$C = \{8, 11, 14, \dots\}$$

$$D = \{3\}$$

$$E = \{0, 20, 45, 60\}$$

جواب: ✓

نکته: مجموعه‌هایی مانند B ، D و E (در سؤال قبل) که عضوهای آن محدود و قابل شمارش هستند را مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌هایی مانند A و C را که تعداد عضوهای آن‌ها نامحدود و غیرقابل شمارش هستند را مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم.



سوالات تشریحی درس دوم
(مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها)



۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- الف) اگر هر عضو مجموعه A ، عضوی از مجموعه B باشد، این دو مجموعه حتماً با یکدیگر برابر هستند.
 ب) مجموعه‌ای اعداد طبیعی با مجموعه‌ای اعداد صحیح مثبت برابر است.
 ج) مجموعه‌ای $\{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای اعداد حسابی را نشان می‌دهد.
 د) هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است.

۲- جاهای خالی را با اعداد و یا کلمات مناسب کامل کنید.

- الف) زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.
 ب) بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A = \{2k + 5 \mid k = 0, 1, -3\}$ برابر با عدد است.
 ج) مجموعه‌ی تهی دارای زیرمجموعه است.
 د) مجموعه‌ی $B = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، با مجموعه‌ای اعداد برابر است.

۳- اگر $\{6\} = \{(x - y), (3x + 3y)\}$ باشد مقادیر x و y را به دست آورید.

۴- مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{1\} \quad , \quad B = \{1, 3\} \quad , \quad C = \{1, 5, 9\} \quad , \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad , \quad F = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

در جاهای خالی علامت \subset یا $\not\subset$ را قرار دهید.

- | | | |
|--------------------------|-----------------|----------------|
| الف) $A \dots \emptyset$ | ب) $B \dots C$ | ج) $C \dots D$ |
| د) $D \dots E$ | هـ) $A \dots B$ | و) $B \dots E$ |
| ز) $C \dots E$ | ح) $F \dots F$ | ط) $B \dots F$ |

۵- از بین مجموعه‌های زیر، مشخص کنید کدام متناهی و کدام نامتناهی است؟

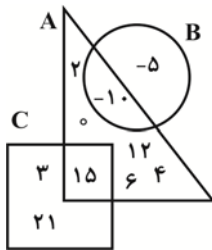
- | | |
|-----------------------------------------|---------------------------------------|
| الف) مجموعه‌ای اعداد صحیح بین ۱۰۰ و ۵۰- | ب) مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۳۶ |
| ج) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۱۲ | د) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ |
| هـ) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر از ۵ | و) مجموعه‌ی اعداد گویای بین ۱ و ۲ |



۶- تمامی زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $A = \{۶, ۷, ۸, ۹\}$ را بنویسید.

۷- تمامی زیرمجموعه‌های مجموعه $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۴\}$ را بنویسید.

۸- آیا می‌توان گفت: «هر مجموعه‌ی غیر تهی، حداقل دو زیرمجموعه دارد.»؟ چرا؟



۹- با توجه به نمودار ون زیر:

الف) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که عضوهایش مضرب ۳ باشند.

ب) زیرمجموعه‌ای از C بنویسید که عضوهایش عدد اول باشند.

ج) زیرمجموعه‌ای از کل مجموعه‌ها بنویسید که عضوهایش مربع کامل باشند.

۱۰- هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی بنویسید.

$$A = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

$$B = \{0, 3, 8, 15, \dots\}$$

$$C = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16} \right\}$$

$$D = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

۱۱- اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$A = \{2x - 5 \mid x \in \mathbb{W}\}$$

$$B = \left\{ \frac{2x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

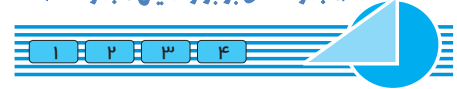
$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < +1\}$$

$$D = \{x^r - 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$$



سوالات چهار گزینه‌ای درس دوم

(مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها)



۱۲- اگر $\{a\} = \{(2x-5), (25-3x)\}$ باشد، a چقدر است؟

- (۱) $\frac{25}{3}$ (۲) ۷ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۶

۱۳- اگر $A = \{0, 1\}$ باشد، کدام یک از رابطه‌های زیر صحیح است؟

- (۱) $\{1\} \subset A$ (۲) $1 \subset A$ (۳) $\{1\} \in A$ (۴) $\emptyset \in A$

۱۴- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $B = \{\{a\}, b\}$ چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{b, \{b\}\}\}$ می‌باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۵- کدام یک از روابط زیر در مورد مجموعه‌های Z, W, Q و N صحیح است؟

- (۱) $N \subset Z \subset Q \subset W$ (۲) $Z \subset N \subset W \subset Q$ (۳) $N \subset W \subset Z \subset Q$ (۴) $W \subset N \subset Z \subset Q$

۱۶- اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ ، $B = \{x | x = fn - 1, n \in A\}$ و $B \subset A$ ، آن‌گاه B چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

۱۷- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{a, \{b, c\}, d\}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

۱۸- برای سه مجموعه‌ی A, B و C ، اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد، همواره چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

- (۱) $A = C$ (۲) $C \subset A$ (۳) $A \subset C$ (۴) $B = C$

۱۹- برای دو مجموعه‌ی A و B ، اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ ، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) $A \subset \emptyset$ (۲) $A = B$ (۳) $B \subset \emptyset$ (۴) $A \cup B = \emptyset$



درس سوم

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها



اجتماع دو مجموعه



اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ی جدیدی که عضوهای آن متشکل از عضوهای A یا B باشد را اجتماع دو مجموعه‌ی A و B می‌گوییم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم.

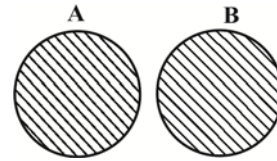
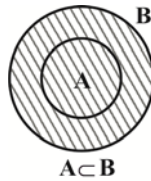
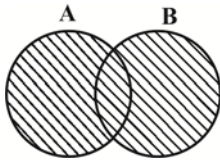
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال: اگر داشته باشیم $A = \{1, 5, 6\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، در این صورت:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نکته: عضوهای تکراری مانند ۱ و ۵ فقط یک بار نوشته می‌شوند.

نکته: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را در حالت‌های مختلف، با یکی از نمودارهای زیر نشان می‌دهیم:



خواص اجتماع دو مجموعه



۱) $A \cup B = B \cup A$

۲) $A \cup \emptyset = A$

۳) $A \subset (A \cup B), B \subset (A \cup B)$

۴) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

اشتراک دو مجموعه

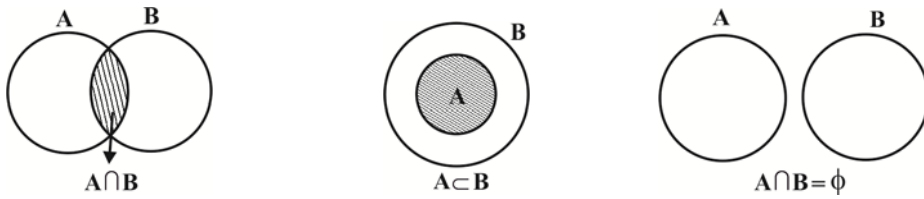
مجموعه‌ی عضوهایی که هم در مجموعه‌ی A و هم در مجموعه‌ی B وجود داشته باشد را اشتراک دو مجموعه‌ی A و

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

B می‌گوییم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم.

مثال: اگر داشته باشیم $A = \{1, 4, 7\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آن‌گاه $A \cap B = \{1, 4\}$.

نکته: نمایش اشتراک دو مجموعه A و B به صورت نمودار ون در حالت‌های مختلف به صورت زیر است.



نکته: دو مجموعه که اشتراک آن‌ها تهی باشد را دو مجموعه‌ی «جدا از هم» می‌گوییم.



خواص اشتراک دو مجموعه

۱) $A \cap B = B \cap A$

۲) $A \cap \emptyset = \emptyset$

۳) $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$

۴) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

تفاضل دو مجموعه

اگر دو مجموعه A و B داشته باشیم، مجموعه‌ی عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند را تفاضل B از A

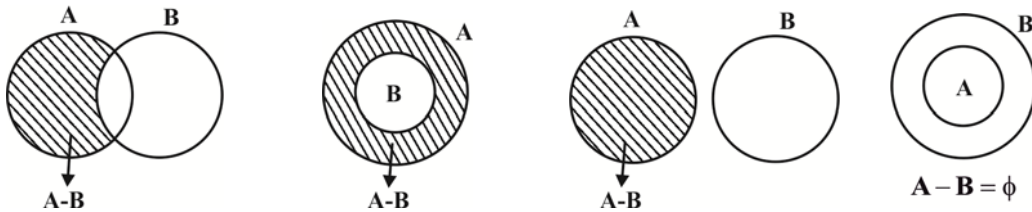
$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$

می‌گوییم و با $(A - B)$ نشان می‌دهیم.

مثال: اگر $A = \{1, 4, 7\}$ و $B = \{2, 4, 8\}$ باشند، آن‌گاه:

$A - B = \{1, 7\}$, $B - A = \{2, 8\}$

نکته: تفاضل دو مجموعه را می‌توان در حالت‌های مختلف با یکی از نمودارهای ون زیر نشان داد.



نکته: اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، آن‌گاه $A - B = A$.

خواص تفاضل دو مجموعه

۱) $A - B \neq B - A$

۲) $A - \emptyset = A$

۳) $\emptyset - A = \emptyset$

۴) $A - A = \emptyset$

نکته: اگر $A \subset B$ باشد، آن‌گاه $A - B = \emptyset$.

نکته: تعداد عضوهای مجموعه‌ای مانند A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.



سؤال: مجموعه‌ی $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 5\}$ چند عضو دارد؟

جواب:

$$B = \{4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(B) = 4$$

سؤال: اگر $A = \{1, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 6\}$ و $C = \{2, 3, 5, 7\}$ باشند، مطلوب است تعیین:

الف) $A \cup B \cup C$

ب) $(A \cup C) \cap B$

ج) $(A - B) \cup (B - C)$

د) $(A \cap B \cap C) \cup (A - C)$

جواب:

الف) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ب) $(A \cup C) \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 6\} = \{1, 2, 3\}$

ج) $(A - B) \cup (B - C) = \{4, 5\} \cup \{1, 6\} = \{1, 4, 5, 6\}$

د) $(A \cap B \cap C) \cup (A - C) = \{3\} \cup \{1, 4\} = \{1, 3, 4\}$

سوالات تشریحی درس سوم
(اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها)



۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر کدام از مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌ی $A \cup B$ هستند.

ب) مجموعه‌ی $Z - N$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

ج) $(B - A) \subset B$

۲- جاهای خالی را با اعداد و یا کلمات مناسب کامل کنید.

الف) مجموعه‌ی عضوهایی که در A هستند ولی در B وجود ندارند را مجموعه‌ی B از A می‌گوییم.

ب) اجتماع دو مجموعه‌ی $(B - A)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه‌ی برابر است.

ج) دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد.

د) مجموعه‌ی $(W - N)$ دارای عضو می‌باشد.

۳- اگر $A \subset B$ باشد، طرف دوم روابط زیر را کامل کنید.

الف) $B - A \neq$ ب) $A - B =$ ج) $A \cap B =$ د) $A \cup B =$



۴- از رابطه‌های زیر در مورد مجموعه‌های A ، B و C ، کدام روابط برقرارند؟ در صورتی که رابطه‌ای برقرار نبود آیا می‌توان حالت خاصی مشخص کرد که رابطه برقرار شود؟

۱) $A - B = B - A$

۲) $A \cup B = A - B$

۳) $A \cup B = B \cup A$

۴) $A - B = A - (A \cap B)$

۵) $A \cap (A - B) = A$

۶) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

۵- اگر داشته باشیم $A \cap B = \{a, b\}$ ، $A - B = \{c, d\}$ و $B - A = \{e, f\}$ ، مجموعه‌های A و B را مشخص کنید.

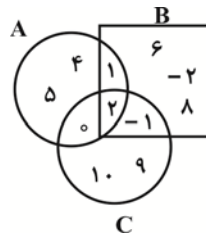
۶- اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ باشند، مطلوب است تعیین:

الف) $A \cup B$

ب) $A \cap B$

ج) $A - B$

د) $B - A$



۷- با توجه به نمودار ون زیر، مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$A = \{ \}$ الف) {

$B = \{ \}$ ب) {

$C = \{ \}$ ج) {

$A \cup B = \{ \}$ د) {

$B \cup C = \{ \}$ ه) {

$A \cap B = \{ \}$ و) {

$B \cap C = \{ \}$ ز) {

$A \cap B \cap C = \{ \}$ ح) {

$A - B = \{ \}$ ط) {

$B - C = \{ \}$ ی) {

$C - A = \{ \}$ ک) {

$(A \cup C) - (A \cap C) = \{ \}$ ل) {

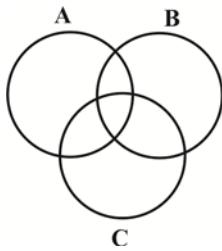


۸- اگر $A = \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشند، ثابت کنید:

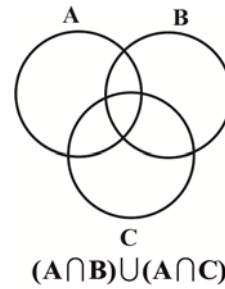
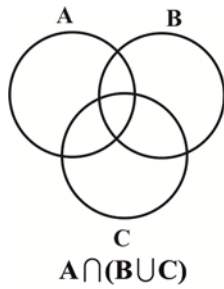
الف) $A - (A \cap B) = A - B$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

۹- در نمودار ون زیر، قسمت $C - (A \cap B)$ را هاشور بزینید.



۱۰- در نمودارهای ون زیر قسمت‌های خواسته شده را هاشور بزینید.



چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۱- اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشند، سمت راست عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $(A - B) \cup [(A \cup B) \cap B] =$

ب) $[(B - A) \cup (A - B)] \cap B =$

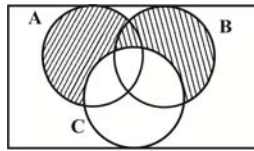
ج) $[(A \cap B) - (B - A)] =$

د) $[A - (A - B)] \cup [A - (B - A)] =$



سوالات چهار گزینه‌ای درس سوم

(اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها)



۱۲- مجموعه‌ی هاشور خورده در شکل مقابل برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $(A \cap B) \cup C$ (۲) $(A \cap C) \cup B$

(۳) $(A \cup B) - C$ (۴) $(A \cup C) - B$

۱۳- مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 30\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 3\}$ دارای چند عضو است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۳۰ (۴) ۱۵

۱۴- مجموعه‌ی $(A \cup B)$ دارای ۵ عضو، $(A \cap B)$ دارای ۲ عضو و $(A - B)$ نیز دارای ۲ عضو می‌باشد. $(B - A)$

چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال



یادآوری احتمال

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد } A = \frac{\text{تعداد حالت‌های رخ دادن } A}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

سؤال: در یک خانواده که ۳ فرزند دارد، چقدر احتمال دارد:

- (الف) هر سه فرزند پسر باشند؟
(ب) فرزند اول خانواده دختر باشد؟
(ج) حداقل دو فرزند از خانواده دختر باشد؟
(د) حداقل خانواده دارای یک فرزند پسر باشد؟

جواب: $n(S) = 8 \Rightarrow \{ (پ پ پ), (پ پ د), (پ د پ), (پ د د), (د پ پ), (د پ د), (د د پ), (د د د) \}$

(الف) $A = \{ (پ پ پ) \} \Rightarrow n(A) = 1, P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(ب) $B = \{ (د د د), (د پ د), (د د پ), (د پ پ) \} \Rightarrow n(B) = 4, P(B) = \frac{4}{8}$

(ج) $C = \{ (د د د), (د پ د), (د د پ), (د پ پ) \} \Rightarrow n(C) = 4, P(C) = \frac{4}{8}$

(د) به جز حالت (د د د)، در سایر حالت‌ها که تعداد آن‌ها ۷ حالت می‌باشد خانواده حداقل دارای یک فرزند پسر می‌باشد.

پس: $P(D) = \frac{7}{8}$



سؤال: عقربه‌ای مطابق شکل زیر، پس از به حرکت در آمدن، به تصادف روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و



عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد:

(الف) عقربه عددی اول را نشان دهد؟

(ب) عقربه عددی فرد را نشان دهد؟

(ج) عقربه روی عددی مضرب ۳ بایستد؟

جواب:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

(الف) $A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4, P(A) = \frac{4}{8}$ (عدد اول)

(ب) $B = \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 4, P(B) = \frac{4}{8}$ (عدد فرد)

(ج) $C = \{3, 6\} \Rightarrow n(C) = 2, P(C) = \frac{2}{8}$ (مضرب ۳)

سؤال: تاسی را یک بار پرتاب می‌کنیم.

(الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را نوشته و آن را S بنامید.

(ب) مجموعه یا پیشامدی را تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن $\frac{1}{4}$ باشد.

(ج) مجموعه یا پیشامدی را تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن $\frac{2}{3}$ باشد.

(د) مجموعه یا پیشامدی را تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن $\frac{1}{6}$ باشد.

(هـ) مجموعه یا پیشامدی را تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن صفر باشد.

جواب:

(الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ب) احتمال آن که عددی زوج ظاهر شود.

(ج) احتمال آن که عددی بزرگ‌تر از ۲ ظاهر شود.

(د) احتمال آن که عددی زوج و اول ظاهر شود.

(هـ) احتمال آن که عددی بزرگ‌تر از ۶ ظاهر شود.



سوالات تشریحی درس چهارم
(مجموعه‌ها و احتمال)



۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) در پرتاب یک تاس، پیشامد عدد اول آمدن و عدد زوج ظاهر شدن تاس، هم‌شانس هستند.

ب) در صورتی که عضوهای یک پیشامد تهی باشد، احتمال آن پیشامد صفر خواهد شد.

ج) در پرتاب یک تاس، پیشامدی وجود دارد که احتمال وقوع آن $\frac{4}{5}$ باشد.

د) احتمال وقوع یک پیشامد همواره عددی کوچک‌تر از ۱ است.

۲- جاهای خالی را با اعداد و یا کلمات مناسب کامل کنید.

الف) در پرتاب دو تاس، مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن این پرتاب دارای عضو می‌باشد.

ب) احتمال آن که از بین اعداد ۱ تا ۱۰ عددی مضرب ۵ را به تصادف خارج کنیم برابر با است.

ج) در پرتاب دو سکه، احتمال آن که هر دو سکه مثل هم ظاهر شوند برابر با است.

د) در یک پیشامد اگر تعداد عضوهای این پیشامد با تعداد اعضای همه‌ی حالت‌های ممکن یکسان باشد، احتمال برابر با خواهد بود.

۳- سه سکه را پشت سر هم به هوا پرتاب می‌کنیم.

الف) تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد هر ۳ سکه مثل هم بیایند؟

ج) چقدر احتمال دارد که فقط یکی از سکه‌ها «رو» بیاید؟

د) چقدر احتمال دارد که فقط دو سکه «رو» بیاید؟

هـ) چقدر احتمال دارد سکه‌ی اول «رو» بیاید؟

۴- اعداد ۱ تا ۱۰ را روی کارت‌هایی نوشته و به تصادف یک کارت را انتخاب می‌کنیم.

الف) پیشامدی را تعریف کنید که احتمال وقوع آن برابر با $\frac{3}{5}$ باشد.

ب) مجموعه یا پیشامدی را تعریف کنید که احتمال وقوع آن $\frac{2}{5}$ باشد.

ج) دو پیشامد مشخص کنید که هم‌شانس باشند.

۵- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی مشکی است، یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که:

الف) این مهره قرمز باشد.

ب) این مهره آبی باشد.

ج) این مهره آبی یا مشکی باشد.



۶- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد اعداد ظاهر شده یکسان نباشند؟

۷- در پرتاب دو تاس قرمز و آبی با یکدیگر، چقدر احتمال دارد اعداد ظاهر شده هر دو تاس مضرب ۳ باشد؟

۸- در پرتاب یک تاس چقدر احتمال دارد عدد ظاهر شده حداقل ۳ باشد؟

سوالات چهار گزینه‌ای درس چهارم

(مجموعه‌ها و احتمال)



۹- اگر در پرتاب هم‌زمان دو تاس، مجموع شماره‌های تاس‌ها برابر با A باشد، در این صورت احتمال وقوع کدام A

بیش‌تر است؟

$$A = 6 \quad (1) \qquad A = 7 \quad (2) \qquad A = 8 \quad (3) \qquad A = 9 \quad (4)$$

۱۰- یک تاس را دو بار می‌اندازیم. احتمال آن که جمع دو عدد رو شده حداقل برابر ۱۰ شود، کدام است؟

$$\frac{1}{18} \quad (1) \qquad \frac{1}{12} \quad (2) \qquad \frac{1}{6} \quad (3) \qquad \frac{1}{9} \quad (4)$$

۱۱- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که شماره‌ی تاس اولی از تاس دومی بیش‌تر باشد چقدر است؟

$$\frac{5}{6} \quad (1) \qquad \frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{5}{12} \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۲- سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که هر ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \qquad \frac{1}{8} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۳- از بین مجموعه‌ی اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که هر دو عدد انتخابی اول

باشد کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \qquad \frac{2}{5} \quad (2) \qquad \frac{3}{5} \quad (3) \qquad \frac{2}{15} \quad (4)$$

۱۴- اعداد طبیعی $\{21, 22, \dots, 41\}$ را بر روی کارت‌هایی یکسان نوشته و به‌طور تصادفی یک کارت از بین آن‌ها بیرون

می‌کشیم. با کدام احتمال عدد نوشته شده، مضرب ۳ است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \qquad \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \frac{2}{5} \quad (3) \qquad \frac{2}{7} \quad (4)$$

