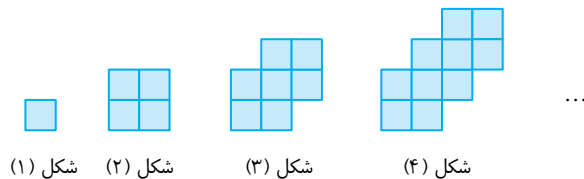


فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

به شکل‌های زیر دقت کنید:



بازی با اعداد

به تساوی‌های زیر توجه کنید

$$0 \times 9 + 1 = 1$$

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

آیا می‌توانید تساوی زیر را کامل کنید؟

$$123456789 \times 9 + \dots = \dots$$

این شکل‌ها بر اساس یک الگو ساخته شده‌اند. در این‌جا منظورمان از این‌که این شکل‌ها الگو دارند، این است که هر شکل از شکل قبلی‌اش به دست آمده، به طوری که با آن، اشتراک‌ها و اختلاف‌هایی دارد. در مورد این شکل‌ها می‌توان سوال‌های مختلفی مطرح کرد. مثلاً شکل بیستم از چند مربع تشکیل شده است؟ محیط شکل بیستم چند است؟ مساحت شکل بیستم چند است؟ و سوال‌هایی از این قبیل. برای یافتن پاسخ این سوال‌ها، باید با مقایسه‌ی شکل‌ها مشخص کنیم که چه ویژگی‌هایی ثابت می‌مانند و چه ویژگی‌هایی تغییر می‌کنند. این کار را **الگویابی** می‌نامند.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم را پیدا کنیم. الگوی این شکل‌ها این‌طور است: شکل اول ۱ مربع دارد. به شکل اول ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل دوم درست شده است، به شکل دوم ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل سوم به دست آمده است و همین‌طور این کار را ادامه داده‌ایم. هر بار ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل بعدی درست شود. تعداد مربع‌های کوچک در شکل اول را a_1 ، تعداد مربع‌های کوچک در شکل دوم را a_2 ، ... و به‌طور کلی تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام را a_n می‌گیریم. به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع‌های کوچک	۱	$1+3$	$1+2 \times 3$	$1+3 \times 3$...	$1+(n-1)3$

از روی این جدول معلوم می‌شود که

$$a_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$$

بنابراین، تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم برابر است با $a_{20} = 3 \times 20 - 2 = 58$.

دستور $a_n = 3n - 2$ برای تعداد مربع‌های کوچک در این مثال را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامند. به کمک جمله‌ی عمومی، می‌توانیم خیلی از سوال‌ها در مورد الگو را پاسخ دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم بدانیم شکل چندم از این الگو با ۶۷ مربع کوچک ساخته شده است. اگر شماره‌ی این شکل n باشد، آن‌گاه $a_n = 67$. بنابراین

$$a_n = 3n - 2 = 67$$

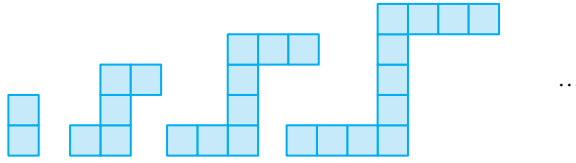
در نتیجه $n = 23$ ، یعنی شکل ۲۳ ام با ۶۷ مربع کوچک درست شده است.

یک سوال دیگر: آیا شکلی در الگوی بالا وجود دارد که با ۹۵ مربع کوچک ساخته شده باشد؟

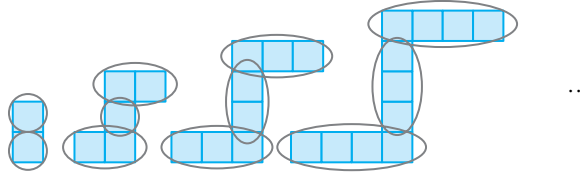
در این صورت $a_n = 3n - 2 = 95$ ، یعنی $n = \frac{97}{3}$. بنابراین، چون n طبیعی نمی‌شود، پس شکلی با ۹۵ مربع

کوچک نداریم.

مسئله ۱ در الگوی زیر، شکل n ام از چند مربع کوچک درست شده است؟ شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است؟



راه حل: در این جا، از شکل اول چیز زیادی متوجه نمی شویم. به شکل دوم نگاه کنید. در هر دو قسمت افقی آن، دو مربع کوچک و بین قسمت های افقی، یک مربع کوچک وجود دارد. شکل سوم در هر دو قسمت افقی اش سه مربع کوچک و بین قسمت های افقی، دو مربع کوچک دارد. در شکل چهارم، در هر دو قسمت افقی، چهار مربع کوچک و بین قسمت های افقی، سه مربع کوچک وجود دارد.



بنابراین، شکل n ام از دو گروه n تایی و یک گروه $(n-1)$ تایی مربع کوچک درست شده است. به این ترتیب، اگر جمله ی عمومی تعداد مربع ها را a_n بگیریم، معلوم می شود که

$$a_n = 2n + (n-1) = 3n - 1$$

توجه کنید که تعداد مربع های کوچک شکل اول هم از این تساوی به دست می آید.

برای این که بفهمیم شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است، باید معادله ی $a_n = 3n - 1 = 95$ را حل کنیم، که از آن به دست می آید $n = 32$ ، یعنی شکل ۳۲ام از ۹۵ مربع کوچک درست شده است.

بازی با اعداد

فرض کنید

$$a = 12345679$$

به تساوی های زیر توجه

کنید

$$1 \times 9a = 111111111$$

$$2 \times 9a = 222222222$$

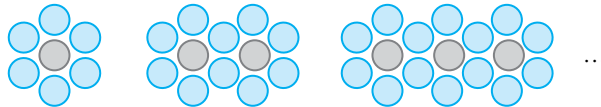
$$3 \times 9a = 333333333$$

$$4 \times 9a = 444444444$$

آیا می توانید تساوی زیر را کامل کنید؟

$$9 \times 9a = \dots$$

مسئله ۲ در الگوی زیر، در شکلی که ۲۰ دایره ی خاکستری دارد، چند دایره ی رنگی وجود دارد؟



راه حل: توجه کنید که در شکل اول ۶ دایره ی رنگی وجود دارد. در شکل دوم ۴ دایره ی رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود، در شکل سوم 2×4 دایره ی رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود، ... در شکل n ام $(n-1) \times 4$ دایره ی رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود. بنابراین اگر تعداد دایره های

رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم،

$$a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$$

(توجه کنید که شکل n ام، n دایره ی خاکستری دارد.)

بنابراین $a_{20} = 4 \times 20 + 2 = 82$.

تعداد نقاط شکل n ام در الگوی مقابل چندتا است؟ تست ۱:

	شکل (۱)	$n + 5$ (۱)
	شکل (۲)	$2n + 4$ (۲)
	شکل (۳)	$3n + 2$ (۳)

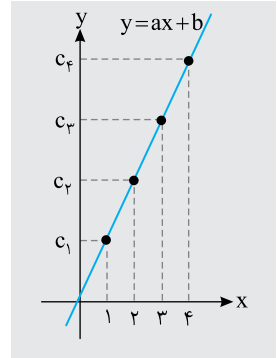
پاسخ: شکل اول دارای ۶ نقطه است و در شکل های بعدی، در هر مرحله ۳ نقطه به شکل اضافه می شود. پس در مرحله ی n ام $(n-1) \times 3$ نقطه به شکل اضافه شده است. یعنی تعداد نقاط شکل n ام برابر است با

$$3(n-1) + 6 = 3n + 3$$

الگوی خطی

در همه‌ی الگوهای که تا این‌جا دیدیم، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، مقداری ثابت بوده و جمله‌ی عمومی به شکل $c_n = an + b$ بود. این الگوها را **الگوهای خطی** می‌نامند، زیرا نقطه‌های $(1, c_1)$ ، $(2, c_2)$ ، ...، (n, c_n) ، ... روی خط $y = ax + b$ قرار دارند.

تعریف اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به شکل $c_n = an + b$ باشد، که در این‌جا a و b عددهایی حقیقی و ثابت‌اند، این الگوها را **الگوهای خطی** می‌نامند.



اگر دو جمله‌ی متوالی الگوی با جمله‌ی عمومی $c_n = an + b$ را از هم کم کنیم، اختلاف آن‌ها برابر با a می‌شود:

$$c_{n+1} - c_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$$

a در حقیقت شیب خط متناظر این الگو، یعنی $y = ax + b$ است.

اگر دو نقطه از خطی را بدانیم، می‌توانیم معادله‌ی آن را بنویسیم. اگر دو جمله از الگوی خطی را هم بدانیم، می‌توانیم جمله‌ی عمومی آن را پیدا کنیم.

مسئله ۳ در الگوی خطی، جمله‌های سوم و دوازدهم به ترتیب ۱۱ و ۴۷ هستند. جمله‌ی عمومی این الگو را پیدا کنید.

راه‌حل: فرض کنید جمله‌ی عمومی این الگو به شکل $c_n = an + b$ باشد. در این صورت

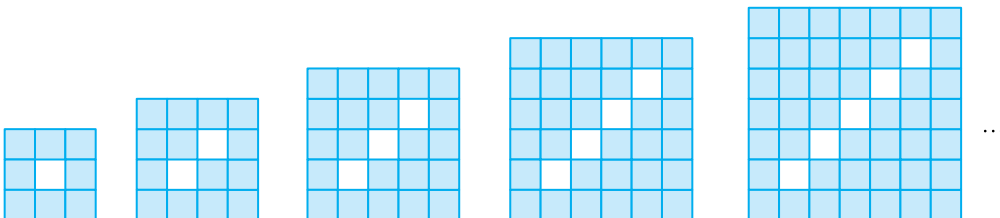
$$\begin{cases} c_3 = 11 \\ c_{12} = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 11 \\ 12a + b = 47 \end{cases}$$

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، به دست می‌آید $a = 4$ و $b = -1$. بنابراین جمله‌ی عمومی الگو به صورت $a_n = 4n - 1$ است.

الگوهای غیر خطی

لزومی ندارد که جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی باشد. چند نمونه الگوی غیرخطی را در مسائل زیر مشاهده می‌کنید.

مسئله ۴ تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



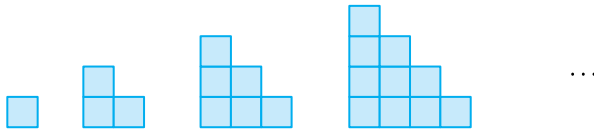
راه‌حل: تعداد کل مربع‌های کوچک شکل n ام $(n+2)^2$ تا است، که از این تعداد n تا سفیدند. بنابراین

اگر تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم،

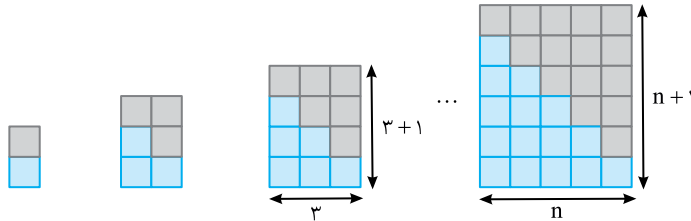
$$a_n = (n+2)^2 - n = n^2 + 3n + 4$$

به کمک الگوها می‌توان برخی مجموع‌ها را حساب کرد.

مثال: می‌خواهیم مقدار مجموع $1+2+3+\dots+n$ را حساب کنیم. الگوی زیر را در نظر بگیرید که در آن تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام $1+2+\dots+n$ است:



اکنون توجه کنید که اگر دو شکل یک‌جور از این‌ها را مانند زیر روی هم قرار دهیم، مستطیلی به دست می‌آید که مساحتش دو برابر تعداد مربع‌های کوچک آن شکل است.



مستطیل متناظر شکل n ام، مستطیلی به طول $n+1$ و عرض n است، پس مساحتش $n(n+1)$ است و

در نتیجه

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع جمله‌های الگوی خطی

مجموع n جمله‌ی اول یک الگوی خطی را که جمله‌ی عمومی آن $c_n = an + b$ است، می‌توان محاسبه کرد.

اگر این مجموع را S بنامیم، به شکل زیر محاسبه می‌شود:

مجموع‌های زیر را حساب کنید:

مسئله ۵

(الف) $2+4+6+\dots+2n$

(ب) $1+3+5+\dots+(2n-1)$

راه‌حل: (الف) توجه کنید که

$$2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+\dots+n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$$

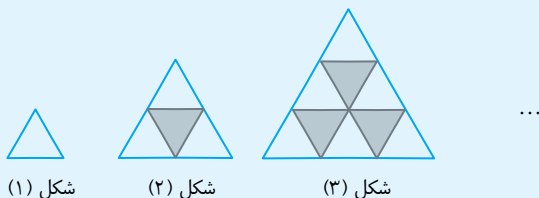
(ب) توجه کنید که برای جمع کردن عددهای فرد $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ می‌توانیم همگی عددهای طبیعی $1, 2, 3, 4, \dots, 2n$ را با هم جمع کرده، سپس عددهای زوج $2, 4, 6, \dots, 2n$ را از این مجموع کم کنیم. بنابراین، با توجه به قسمت (الف)،

$$1+3+\dots+2n-1 = (1+2+3+\dots+2n) - (2+4+6+\dots+2n) = \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) \\ = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2$$

$$S = (a+b) + (2a+b) + (3a+b) + \dots + (na+b) \\ = a(1+2+3+\dots+n) + \underbrace{(b+b+b+\dots+b)}_{n \text{ terms}} \\ = \frac{an(n+1)}{2} + nb \\ = \frac{n}{2}(2b + (n+1)a) \\ = \frac{n}{2}(a+b+an+b) \\ = \frac{n}{2}(c_1 + c_n)$$

تست ۲:

تعداد مثلث‌های رنگ نشده در الگوی زیر، در شکل بیستم چند تا است؟



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(۱) ۱۹۰

(۲) ۲۰۰

(۳) ۲۱۰

(۴) ۲۲۰

پاسخ: تعداد مثلث‌های رنگ نشده در شکل n ام برابر است با

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین در شکل بیستم $\frac{20 \times 21}{2} = 210$ مثلث رنگ نشده داریم.

دنباله

در نمایش مجموعه‌های عددی، عددهایی را پشت سر هم می‌نویسیم و ترتیب نوشتن عددها مهم نیست. مثلاً، مجموعه‌های $\{1, 2, 3\}$ و $\{2, 3, 1\}$ برابرند. ردیف‌هایی از عددها که در آن‌ها ترتیب مهم است، نام خاصی دارند.

تعریف دنباله، ردیفی از عددها است که ترتیب دارند. این عددها را جمله‌های دنباله می‌نامند.

مثال: عددهای طبیعی را می‌توانیم به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم: $1, 2, 3, 4, \dots$

به این ردیف از عددها، دنباله‌ی عددهای طبیعی می‌گویند. در این‌جا ترتیب مهم است: اولین عدد ۱ است، دومین عدد ۲ است، سومین عدد ۳ است و همین‌طور در مورد بقیه عددها. بنابراین، دنباله‌ی زیر، دنباله‌ی عددهای طبیعی نیست:
 $2, 1, 3, 4, 5, \dots$

اگر جمله‌ی اول دنباله را با a_1 ، جمله‌ی دوم آن را با a_2 ، ... و جمله‌ی n ام آن را با a_n نشان دهیم، a_n را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند.

اگر $a_n = an^2 + bn + c$ (که در این‌جا a, b و c عددهایی حقیقی و ثابت‌اند و $a \neq 0$) دنباله را دنباله‌ی درجه‌ی ۲ می‌نامند.

مثال: ممکن نیست جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به شکل $a_n = \frac{n+1}{n-2}$ باشد، زیرا نمی‌توان جمله‌ی دوم آن را که به ازای $n=2$ به دست می‌آید، حساب کرد.

مسئله ۶ جمله‌ی عمومی مناسبی برای دنباله‌ی زیر پیدا کنید:

$$2, 6, 12, 20, 30, \dots$$

راه‌حل: جمله‌ی عمومی این دنباله را a_n بنامید. توجه کنید که

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2+4 \\ a_3 &= 2+4+6 \\ a_4 &= 2+4+6+8 \\ a_5 &= 2+4+6+8+10 \end{aligned}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی زیر مناسب است:

$$a_n = 2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+\dots+n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n^2 + n$$

مسئله ۷ جمله‌ی چندم دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{3n-1}{5n+7}$ برابر با $\frac{7}{12}$ است؟

راه‌حل: اگر معادله‌ی $\frac{3n-1}{5n+7} = \frac{7}{12}$ را حل کنیم، به دست می‌آید $n=61$. بنابراین جمله‌ی 61 ام این

دنباله برابر با $\frac{7}{12}$ است.

تست ۳: اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مربع کامل باشد. عدد اول دسته‌ی یازدهم کدام است؟

$\{2, 4\}$, $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $\{18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}, \dots$

دسته‌ی اول

دسته‌ی دوم

دسته‌ی سوم

۴۰۱ (۴)

۲۲۶ (۳)

۱۷۰ (۲)

۱۰۱ (۱)

پاسخ: عدد آخر دسته‌ی اول 2^2 ، عدد آخر دسته‌ی دوم 4^2 ، عدد آخر دسته‌ی سوم 6^2 و ... عدد آخر دسته‌ی n برابر $(2n)^2$ است. پس عدد آخر دسته‌ی دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دسته‌ی یازدهم 401 است.

مثال: در دنباله‌ای $a_1 = 2$ و هر جمله به‌جز جمله‌ی اول، از دو برابر جمله‌ی قبل از آن، یک واحد

بیش‌تر است. یعنی به ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

توجه کنید که به این ترتیب

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

و به همین ترتیب می‌توانیم مقدار هر جمله را از روی مقدار جمله‌ی قبل از آن پیدا کنیم.

تست ۴: در دنباله‌ای با جمله‌ی اول ۱، مکعب هر جمله، ۹۹ برابر مکعب جمله‌ی قبل از آن است. جمله‌ی 100 ام این دنباله کدام است؟

۹۹۹۹ (۴)

۹۹۳۳ (۳)

۳۳۹۹ (۲)

۳۳۳۳ (۱)

پاسخ: فرض کنید جمله‌ی عمومی دنباله، a_n باشد. در این صورت $a_n^3 = 99a_{n-1}^3$ ، پس $\frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} = 99$. اگر در

این تساوی n را از ۲ تا ۱۰۰ جای‌گذاری کنیم و تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که (توجه کنید که $a_1 = 1$)

$$99^{99} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \times \frac{a_3^3}{a_2^3} \times \dots \times \frac{a_{100}^3}{a_{99}^3} = a_{100}^3$$

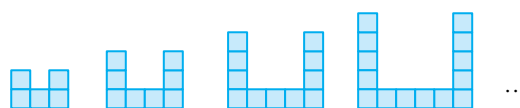
بنابراین $a_{100} = 99^{33}$.

تمرین

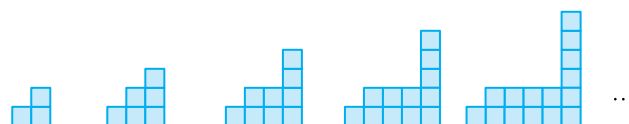
۴۳- در الگوی زیر، شکل n ام از چند نقطه‌ی رنگی درست شده است؟



۴۴- در شکل n ام الگوی زیر چند مربع وجود دارد؟



۴۵- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



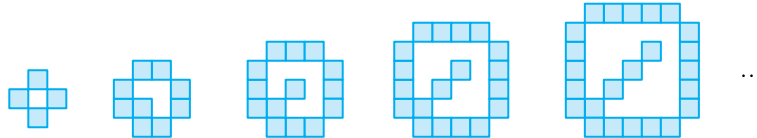
۴۶- شکل n ام الگوی زیر از چند نقطه‌ی رنگی درست شده است؟



۴۷- تعداد نقطه‌ها در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



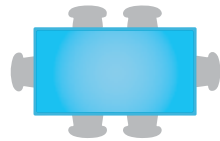
۴۸- شکل n ام الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



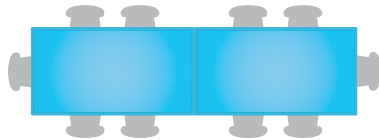
۴۹- برای ساختن شکل 50 ام در الگوی زیر چند مربع کوچک لازم داریم؟




۵۰- دور یک نوع میز شش نفر می‌توانند بنشینند.

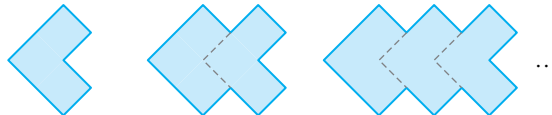


می‌توانید دو تا از این میزها را به هم بچسبانید تا چهار نفر دیگر هم بتوانند بنشینند.

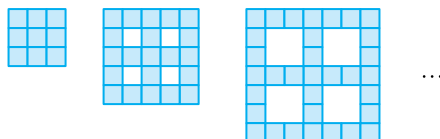


برای این که ۳۴ نفر بتوانند بنشینند، دست کم چند میز را باید به هم بچسبانید؟

۵۱- شکل‌های زیر از چسباندن تعدادی کاشی به شکل  ساخته شده‌اند، که در آن طول ضلع هر مربع کوچک ۱ سانتی‌متر است. محیط شکل n ام چقدر است؟



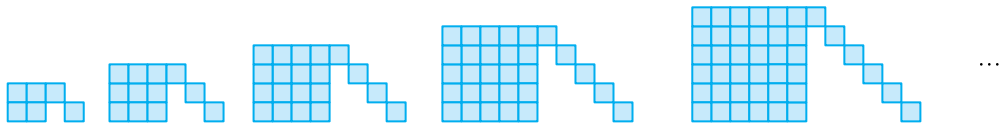
۵۲- تعداد مربع‌های رنگی در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



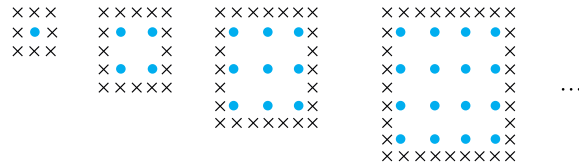
۵۳- در شکل n ام الگوی زیر چند نقطه وجود دارد؟



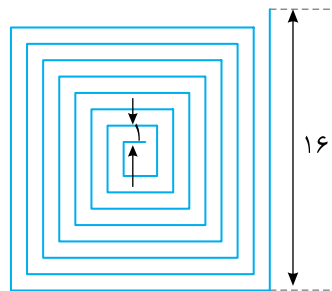
۵۴- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



۵۵- آیا در الگوی زیر شکلی وجود دارد که در آن تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر باشد؟

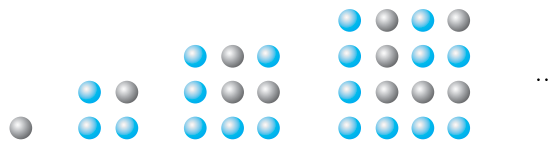


۵۶- در شکل زیر طول ریسمان رنگی چقدر است؟ (فاصله‌ی دو تکه‌ی مجاور ۱ سانتی‌متر است.)

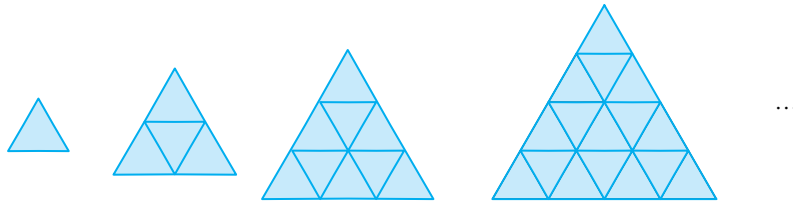


۵۷- به کمک الگوی زیر ثابت کنید

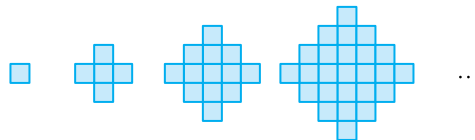
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



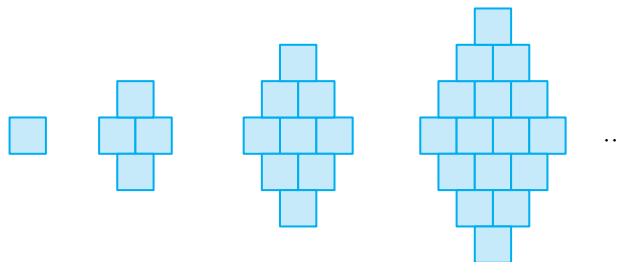
۵۸- در شکل n ام الگوی زیر چند مثلث کوچک وجود دارد؟



۵۹- شکل n ام الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



۶۰- آیا می‌توان با ۱۲۳ مربع کوچک یکی از شکل‌های الگوی زیر را ساخت؟



۶۱- کدام یک از عبارت‌های زیر ممکن است جمله‌ی عمومی یک دنباله باشد؟

الف) $3n - 16$ ب) $\frac{2n+1}{2n-1}$ پ) $\frac{1}{n^2-3}$

ت) $\frac{1}{n^2-4}$ ث) $\sqrt{n-2}$

۶۲- در هر مورد جمله‌ی عمومی مناسبی برای دنباله‌ای که چند جمله‌ی اول آن داده شده است، پیدا کنید.


الف) $1, 3, 5, \dots$


ب) $-1, 3, -5, \dots$

پ) $0, 3, 8, 15, \dots$

ت) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$

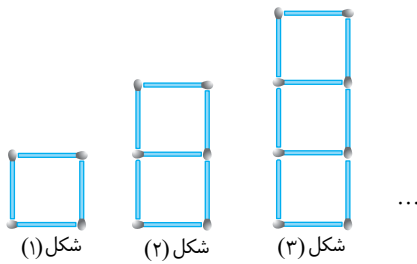
۶۳- در دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = 2 \cdot n - n^2$ چند جمله مثبت‌اند؟

۶۴- جمله‌ی چندم دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{4n+4}$ برابر با $-\frac{1}{6}$ است؟ 

۶۵- درباره‌ی دنباله‌ی a_n می‌دانیم $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = 1 + 2a_n$. کوچک‌ترین مقدار n که a_n اول نیست، چه عددی است؟ 

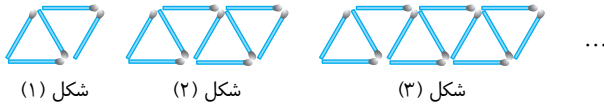
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۱- در الگوی مقابل که به کمک چوب کبریت ساخته شده است، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل بیستم کدام است؟



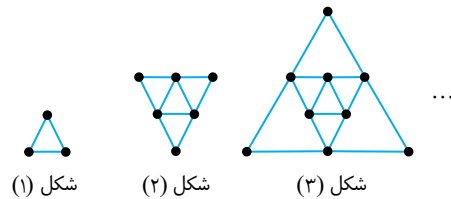
- (۱) ۵۹
- (۲) ۶۰
- (۳) ۶۱
- (۴) ۶۲

۳۲- تعداد چوب کبریت‌های در شکل پانزدهم الگوی مقابل چندتا است؟



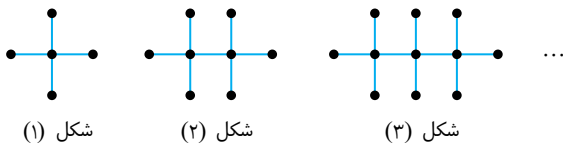
- (۱) ۵۹
- (۲) ۶۰
- (۳) ۶۱
- (۴) ۶۲

۳۳- در شکل n ام از الگوی مقابل چند نقطه دیده می‌شود؟



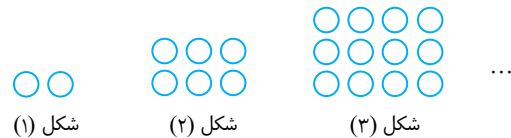
- (۱) $\frac{n(n+1)}{2}$
- (۲) $3n$
- (۳) $n+2$
- (۴) n^2+2

۳۴- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



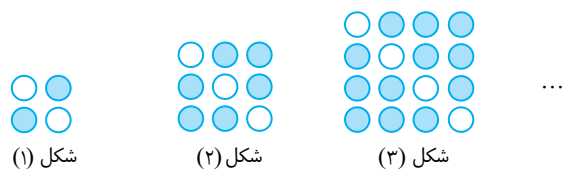
- (۱) ۶۰
- (۲) ۶۱
- (۳) ۶۲
- (۴) ۶۴

۳۵- در شکل بیستم الگوی مقابل چند دایره وجود دارد؟

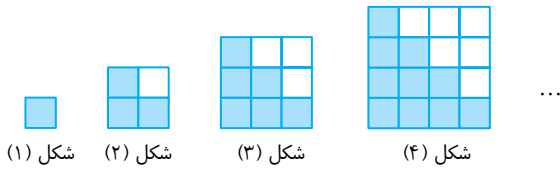


- (۱) ۴۰۰
- (۲) ۴۱۰
- (۳) ۴۲۰
- (۴) ۴۴۰

۳۶- تعداد دایره‌های رنگی در شکل مرحله‌ی n ام، مطابق الگوی مقابل کدام است؟



- (۱) n^2+1
- (۲) $2n^2$
- (۳) $3n^2-1$
- (۴) n^2+n



۳۷- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده در شکل سی‌ام چندتااست؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۲۰
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵

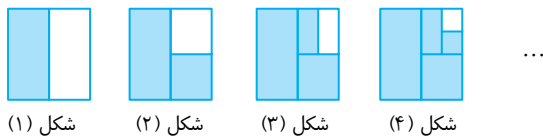
۳۸- مقدار عبارت $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ کدام است؟

- (۱) ۴۵۰۰ (۲) ۴۵۵۰ (۳) ۵۰۰۰ (۴) ۵۰۵۰

۳۹- مقدار عبارت $A = 1 \frac{1}{2} + 2 \frac{2}{2} + 3 \frac{3}{2} + \dots + 19 \frac{19}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۹۰/۵ (۲) ۱۹۹/۵ (۳) ۱۹۰/۹۵ (۴) ۱۹۰/۹

۴۰- در الگوی مقابل، مساحت مربع بزرگ یک واحد مربع است. کل مساحت رنگ شده در شکل n ام چقدر از کل مساحت رنگ شده در شکل قبلی آن بیشتر است؟



(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2^n}$

(۳) $\frac{1}{2^{n-1}}$ (۴) $\frac{1}{2^{n-2}}$

۴۱- یک دنباله دارای الگوی خطی است. اگر جمله اول آن ۳ و جمله پنجم آن ۵- باشد، کدام جمله آن برابر ۳۹- است؟

- (۱) t_{22} (۲) t_{21} (۳) t_{11} (۴) t_{12}

۴۲- کدام یک می‌تواند جمله عمومی دنباله‌ی زیر باشد؟

- (۱) $n+1$ (۲) $n^2 - (-1)^n$ (۳) $3n^2 - 8n + 7$ (۴) $2n^2 - 5n + 5$

۴۳- در دنباله‌ی $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$ چند جمله کوچک‌تر از $2/99$ وجود دارد؟

- (۱) ۲۹۰۰ (۲) ۲۹۹۰ (۳) ۲۹۸۱ (۴) ۲۸۸۹

۴۴- در یک دنباله، هر جمله (به‌جز جمله اول) مربع جمله قبلی است. اگر $a_1 = 2$ ، جمله چهارم دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۵ (۳) ۶۴ (۴) ۲۵۶

۴۵- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مضرب ۵ باشد. عدد اول دسته‌ی پنجاهم کدام است؟

$\{1, 3, 5\}$, $\{7, 9, 11, 13, 15\}$, $\{17, 19, 21, 23, 25\}$, ...
دسته‌ی سوم دسته‌ی دوم دسته‌ی اول

- (۱) ۴۸۷ (۲) ۴۹۷ (۳) ۴۷۷ (۴) ۴۶۷

۴۶- کدام یک می‌تواند جمله عمومی دنباله‌ی زیر باشد؟

$3, -9, 27, -81, \dots$

- (۱) $(-1)^{n-1} 3^{n+1}$ (۲) $(-1)^n 3^n$ (۳) $(-1)(-3)^n$ (۴) $(-1)^n 3^n$

۴۷- اگر جمله عمومی دنباله‌ی d_n به صورت $d_n = an^2 + 2bn$ و جملات دوم و سوم این دنباله به ترتیب برابر با ۴ و ۱۵ باشند، جمله پنجم دنباله کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۵ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵

۴۸- در دنباله‌ی $a_n = 14 \cdot n - 5n^2$ ، چند جمله مثبت وجود دارد؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) صفر (۴) بی‌نهایت جمله

۴۹- اگر $a_n = \frac{n-2}{4n-5}$ و $b_n = \frac{3n-6}{12n}$ ، جمله‌ی مشترک دو دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) صفر

۵۰- در یک دنباله، $a_1 = 1$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، رابطه‌ی $a_{n+1} = a_n + 2$ برقرار است. مجموع n جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $(2n+1)^2$ (۲) $(2n-1)^2$ (۳) n^2 (۴) $2n^2$