

دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن ۱

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

قدرنسبت = اختلاف جملات متوالی جمله‌ی اول جمله‌ی عمومی

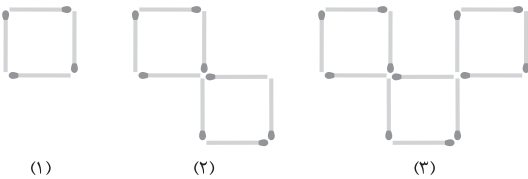
ویژگی ۱: اگر سه عدد a, b, c جملات متوالی (یا متساوی‌الفاصله) از یک دنباله‌ی حسابی باشند، در این صورت b را واسطه‌ی حسابی a و c می‌گوییم و داریم:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

ویژگی ۲: در هر دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d ، اگر $d > 0$ باشد، دنباله صعودی و اگر $d < 0$ باشد، دنباله نزولی می‌شود.

تمرین ۱ ص ۵

با استفاده از چوب کبریت اشکال زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل دهم کدام است؟



- ۴۰ (۱)
- ۴۴ (۲)
- ۳۶ (۳)
- ۴۸ (۴)

تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر مرحله را به صورت یک دنباله کنار هم می‌نویسیم:

$$4, 8, 12, \dots \Rightarrow a_1 = 4, d = 4$$

حال جمله‌ی دهم این دنباله را می‌یابیم:

$$a_{10} = a_1 + 9d = 4 + 9(4) = 40$$

۲ اعداد $1, 3, 5, 7, \dots, 2p+3, 2p+4, \dots, 5p-1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی عددی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۷ (۴)
- ۶ (۳)
- ۵ (۲)
- ۴ (۱)

$$\underbrace{2p+3}_a, \underbrace{2p+4}_b, \underbrace{5p-1}_c \xrightarrow{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی}} 2p+4 = \frac{(5p-1) + (2p+3)}{2}$$

$$\Rightarrow 6p+8 = 7p+2 \Rightarrow p = 6 \xrightarrow{\text{سه جمله}} 15, 22, 29 \Rightarrow d = 29 - 22 = 22 - 15 = 7$$

۳ شمعی ۲۵ سانتی‌متری را روشن کرده‌ایم. این شمع در هر دقیقه ۲ میلی‌متر کوتاه می‌شود. بعد از گذشت چند دقیقه طول شمع به $17/6$ سانتی‌متر می‌رسد؟

مثال ۲ ص ۸

- ۳۸ (۴)
- ۳۷ (۳)
- ۳۶ (۲)
- ۳۵ (۱)

طول اولیه‌ی شمع $a_1 = 25 \text{ cm}$ و قدرنسبت دنباله‌ی «طول شمع در دقایق متوالی» برابر با $d = -2 \text{ mm}$ یا $d = -0.2 \text{ cm}$ است. بنابراین:

$$a_n = 17/6 \Rightarrow 25 + (n-1)(-0.2) = 17/6 \Rightarrow n-1 = 37 \Rightarrow n = 38$$

عجله نکنید برای انتخاب گزینه!

در دقیقه‌ی ۳۸ م طول شمع $17/6 \text{ cm}$ می‌شود، یعنی پس از گذشت ۳۷ دقیقه!

وقتی دو جمله از دنباله‌ی حسابی رو داریم ... ۲

هرگاه دو جمله از دنباله‌ی حسابی را داشتیم،

حرکت اول: می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ مقدار قدرنسبت را به دست آورده و به کمک آن جملات دیگر را پیدا کنیم.

حرکت دوم: می‌توانیم با استفاده از تناسب اندیس‌ها، مستقیماً جمله‌ی دیگری از دنباله را به دست آوریم.

مثال: فرض کنید از روی جملات $a_8 = 33$ و $a_5 = 12$ قصد پیدا کردن جمله‌ی سیزدهم را داشته باشیم:

$$\text{حرکت اول} \Rightarrow d = \frac{a_8 - a_5}{8 - 5} = \frac{33 - 12}{3} = 7$$

حالا با رابطه‌ی $d = \frac{a_{13} - a_8}{13 - 8}$ مقدار a_{13} را پیدا می‌کنیم:

$$7 = \frac{a_{13} - 33}{5} \Rightarrow a_{13} = 68$$

حرکت دوم: $\begin{matrix} +2 & a_5 = 12 \\ & a_8 = 33 \\ +5 & a_{13} = ? \end{matrix} +21 \xrightarrow{\text{تناسب اندیس‌ها}} \begin{matrix} 3 & 21 \\ 5 & \end{matrix} \xrightarrow{\text{○}=35} a_{13} = 33 + 35 = 68$

نتیجه ۱: اگر بین دو عدد a و b تعداد n واسطه‌ی حسابی با قدرنسبت d درج کنیم، $d = \frac{b-a}{n+1}$ خواهد بود.

نتیجه ۲: قانون اندیس‌ها در دنباله‌ی حسابی: $m+n = p+q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

۴ تفاوت جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله‌ی عددی، ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم، ۲۵ است. جمله‌ی بیست و یکم این دنباله کدام است؟

۳۸/۵ (۴) ۳۷/۵ (۳) ۳۶ (۲) ۳۵ (۱)

$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a_{12} = 15, a_{10} = 10$

حالا با تناسب، a_{21} را پیدا می‌کنیم:

$\begin{matrix} +2 & a_{10} = 10 \\ & a_{12} = 15 \\ +9 & a_{21} = ? \end{matrix} +5 \xrightarrow{\text{تناسب}} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 9 & \end{matrix} \Rightarrow \text{○} = 22/5 \Rightarrow a_{21} = 10 + 22/5 = 37/5$

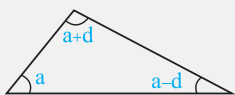
۵ در یک دنباله‌ی حسابی با ۲۱ جمله، مجموع سه جمله‌ی اول و سه جمله‌ی آخر برابر با ۶۰ است. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

۱۳ (۴) ۱۲ (۳) ۱۱ (۲) ۱۰ (۱)

$a_1 + a_2 + a_3 + a_{19} + a_{20} + a_{21} = 60 \Rightarrow a_1 + a_{21} = a_2 + a_{20} = a_3 + a_{19} = 20$

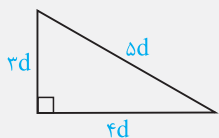
جمله‌ی یازدهم وسط هر جفت از جملات بالا است، پس $a_{11} = \frac{20}{2} = 10$ می‌باشد.

۳ حضور دنباله‌ی حسابی در مثلث

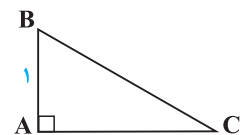


۱ اگر زوایای مثلثی تشکیل دنباله‌ی حسابی داده باشند، قطعاً یکی از زوایای آن مثلث 60° خواهد بود.

$a + (a - d) + (a + d) = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$



۲ اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d بدهند، طول اضلاع مثلث $3d$ ، $4d$ و $5d$ خواهد بود.



۶ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که طول ضلع کوچک آن ۱ سانتی‌متر است، طول اضلاع آن تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. محیط مثلث کدام است؟

۴ (۲) ۳/۵ (۱)
۵ (۴) ۴/۵ (۳)

اضلاع مثلث $3d$ ، $4d$ و $5d$ هستند، پس طبق شکل $3d = 1$ و در نتیجه $d = \frac{1}{3}$

است. حال خواهیم داشت:

$\begin{matrix} 3d & 1 \\ & 1 \\ & 4/3 \end{matrix} \xrightarrow{d=1/3} \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & 4/3 \end{matrix} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = 4$

۴ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی a_n ، قدرنسبت d و جمله‌ی اول a_1 ، با دو روش می‌توان مجموع n جمله‌ی اول آن را پیدا کرد:

$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

روش اول: با در اختیار داشتن a_1 و d :

$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

روش دوم: با در اختیار داشتن جمله‌ی اول (a_1) و جمله‌ی آخر (a_n) :

مثال: مجموع اعداد طبیعی ۲ رقمی مضرب ۶ برابر است با:

$$12 + 18 + 24 + \dots + 96 = \frac{96-12}{6} + 1 = 15 \quad \frac{15}{2} [2(12) + 14(6)] = 810 \quad \text{یا} \quad \frac{15}{2} (12 + 96) = 810$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 a_1 d a_1 a_n

اعداد $\frac{5}{3}, y, x, 10$ ، چهار جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

- ۱) ۵۷ (۲) ۶۲/۵ (۳) ۶۷/۵ (۴) ۶۸

روش اول:

$$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{\frac{5}{3} - 1}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \xrightarrow[n=15]{a_1=1, d=\frac{1}{3}} S_{15} = \frac{15}{2} [2 \times (1) + (15-1) \times \frac{1}{3}] \Rightarrow S_{15} = 67/5$$

روش دوم: به کمک تناسب a_{15} را می‌یابیم:

$$\begin{matrix} +3 & a_1 = 1 \\ & a_4 = \frac{5}{3} \\ +11 & a_{15} = ? \end{matrix} \xrightarrow{\text{تناسب}} \frac{3}{11} \mid \frac{1/5}{\quad} \Rightarrow \quad = 5/5 \Rightarrow a_{15} = \frac{5}{3} + 5/5 = 8$$

حالا نوبت به پیدا کردن S_{15} رسید:

$$S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2} (1 + 8) = 67/5$$

در یک دنباله‌ی عددی با جمله‌ی اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چه قدر افزوده خواهد شد؟

- ۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

جمله‌ی اول دنباله a است و در نتیجه مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی اولیه برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2a + (20-1)d] = 10(2a + 19d)$$

و اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه کنیم، مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی جدید برابر می‌شود با:

$$S'_{20} = \frac{20}{2} [2a + 19(d+1)] = 10(2a + 19d + 19) = \underbrace{10(2a + 19d)}_{S_{20}} + 190 \Rightarrow S'_{20} = S_{20} + 190$$

در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله‌ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله‌ی اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی دهم کدام است؟

- ۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۴ (۴) ۳۸

با استفاده از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ خواهیم داشت:

$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow \frac{20}{2} (2a_1 + 19d) = 3 \left(\frac{12}{2} (2a_1 + 11d) \right) \Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow -8d = 16a_1 \Rightarrow d = -2a_1 \quad (*)$$

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{(*)} -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{(*)} d = 4 \xrightarrow{\text{جمله دهم}} a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 36 = 34$$

در یک دنباله‌ی عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۷/۵ (۲) ۸ (۳) ۸/۵ (۴) ۹

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{15} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}_{30} \Rightarrow \begin{cases} S_4 = 15 \\ S_9 = 45 \end{cases}$$

به لحظه دقت کن:

$$\begin{cases} \frac{4}{2} (2a + 3d) = 15 \\ \frac{9}{2} (2a + 8d) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3d = 7/5 \\ 2a + 8d = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 3, d = \frac{1}{2}$$

حالا با حل دستگاه زیر، a و d را می‌یابیم:

$$a_{11} = a + 10d = 3 + 5 = 8$$

در نتیجه:

۱۱ اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: (۱) ، $(۲, ۳, ۴)$ ، $(۵, ۶, ۷, ۸, ۹)$ ، ...

مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟

- (۱) ۱۶۹۱ (۲) ۱۷۱۰ (۳) ۱۷۲۹ (۴) ۱۷۴۸

با تعریفی که برای هر دسته در صورت مسأله ارائه شده است، عدد آخر دسته‌ی نهم $۹^۲$ یعنی ۸۱ است، پس دسته‌ی دهم با عدد ۸۲ شروع می‌شود، بنابراین دسته‌ی دهم دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$\{a_n\} = \{۸۲, ۸۳, ۸۴, \dots, ۱۰۰\}$$

که یک دنباله‌ی حسابی متناهی با جمله‌ی اول $a_1 = ۸۲$ ، قدرنسبت $d = ۱$ و جمله‌ی آخر $a_{19} = ۱۰۰$ می‌باشد. پس مجموع این ۱۹ جمله برابر است با:

$$S_{19} = \frac{19}{2} [۸۲ + ۱۰۰] = \frac{19}{2} \times ۱۸۲ = ۱۷۲۹$$

۱۲ در ۲۰ جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\text{مجموع جملات ردیف فرد} = a_1 + a_3 + \dots + a_{19} \xrightarrow{\text{جمله هستند}} S_{10} = \frac{10}{2} (a_1 + a_{19})$$

$$\text{مجموع جملات ردیف زوج} = a_2 + a_4 + \dots + a_{20} \xrightarrow{\text{جمله هستند}} S_{10} = \frac{10}{2} (a_2 + a_{20})$$

با توجه به اطلاعات مسأله، داریم:

$$\begin{cases} 5(a_1 + a_{19}) = 135 \\ 5(a_2 + a_{20}) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_{19} = 27 \\ a_2 + a_{20} = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_1 + 20d = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a_1 = 0, d = \frac{3}{2}$$

۵ ویژگی‌های S_n یک دنباله‌ی حسابی و مقایسه‌ی آن با a_n

عدد ثابت	ضریب n^2	ضریب n	درجه بر حسب n	یافتن جمله‌ی اول	
می‌تواند داشته باشد	ندارد	d	۱	$n = 1$	a_n
ندارد	$\frac{d}{2}$	$a - \frac{d}{2}$	۲	$n = 1$	S_n

۱ اساسی‌ترین نکته جدول: در S_n یک دنباله‌ی حسابی، ضریب n^2 ، نصف قدرنسبت (یعنی $\frac{d}{2}$) است.

۱۳ مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله‌ی

هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

روش اول: اگر جملات دنباله‌ی حسابی (عددی) را با a_1, a_2, \dots, a_n نشان دهیم، داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 9 + 9 = 18$$

روش دوم: ابتدا a_1 و d را می‌یابیم:

$$S_n = \frac{n(n-15)}{6} = \frac{1}{6}n^2 - \frac{5}{2}n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow S_1 = -\frac{14}{6} \Rightarrow a_1 = -\frac{14}{6} \\ n^2 \text{ ضریب} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}d = \frac{1}{6} \Rightarrow d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} \xrightarrow{\text{جمله ۱۲}} \frac{12}{2} (a_7 + a_{18}) = 6(2a_1 + 11d) = 6\left(-\frac{14}{3} + \frac{11}{3}\right) = 18$$

دنباله‌ی هندسی و ویژگی‌های آن

۶

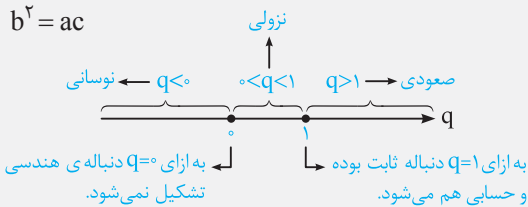
در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q داریم:

$$a, aq, aq^2, \dots \Rightarrow a_n = aq^{n-1}$$

قدرنسبت = نسبت جملات متوالی جمله‌ی اول جمله‌ی عمومی

ویژگی ۱: اگر سه عدد a, b, c و جملات متوالی (یا متساوی‌الفاصله) از یک دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت b را واسطه‌ی هندسی a و c می‌نامیم و داریم:

$$b^2 = ac$$



ویژگی ۲: در هر دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q و جمله‌ی اول $a_1 > 0$ داریم:

ویژگی ۳: اگر جملات دنباله‌ی هندسی را به صورت توان‌دار بنویسیم، توان‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، به عنوان مثال:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots \Rightarrow 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, \dots$$

$$3, 6, 12, 24, \dots \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از عدد ۳}} 3(1, 2, 4, 8, \dots) \Rightarrow 3(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots)$$

۱۴ اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی‌اند. واسطه‌ی عددی بین a و b کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$1/5 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$2/5 \quad (۱)$$

روش اول: $4\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی 2^a و 2^b است، بنابراین:

$$(4\sqrt{2})^2 = (2^b) \times (2^a) \Rightarrow (2^2 \times 2^2)^2 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^8 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=8$$

واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b بنا بر تعریف، برابر است با:

$$b \text{ و } a \text{ واسطه‌ی عددی (حسابی) } = \frac{a+b}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

روش دوم: اگر جملات را به صورت عددی توان‌دار بنویسیم، توان‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند:

$$2^b, 4\sqrt{2}, 2^a \Rightarrow 2^b, 2^{2.5}, 2^a \Rightarrow b, \frac{5}{2}, a \Rightarrow b \text{ و } a \text{ واسطه‌ی حسابی} = \frac{5}{2}$$

دنباله‌ی حسابی

۱۵ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

تمرین ۵ ص ۵

$$8 \quad (۴)$$

$$7 \quad (۳)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$5 \quad (۱)$$

فرض کنیم شدت تابش a باشد، در این صورت پس از عبور از اولین لایه، شدت تابش $\frac{a}{2}$ ، پس از عبور از لایه‌ی بعدی $\frac{a}{4}$ و ... می‌شود. در نتیجه شدت تابش پس از عبور از لایه‌ی n ام، یعنی $\frac{a}{2^n}$ باید از $0.01a$ هم کم‌تر باشد تا در مراحل قبل ۹۹٪ آن کاهش یافته باشد:

$$\frac{a}{2^n} < 0.01a \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n_{\text{Min}} = 7$$

۱۶ در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

$$7 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$5 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

هر سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی را می‌توان به صورت m, mq, mq^2 نشان داد، پس:

$$\left(\frac{m}{q}\right)(m)(mq) = 216 \Rightarrow m^3 = 216 \Rightarrow m = 6$$

در نتیجه:

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13 \xrightarrow{\times q} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$6q - \frac{6}{q} \xrightarrow{q = \frac{3}{2}} 9 - 4 = 5$$

تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جمله به ازای $q = \frac{3}{2}$ برابر است با:

۱۷ تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \qquad \frac{1}{2} \quad (2) \qquad 2 \quad (3) \qquad 3 \quad (4)$$

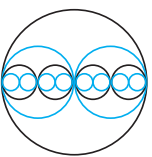
راه اول:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots} = 3 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots} + \frac{a_2 + a_4 + a_6 + \dots}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{aq + aq^3 + aq^5 + \dots}{a + aq^3 + aq^5 + \dots} = 2 \Rightarrow \frac{q(a + aq^3 + aq^5 + \dots)}{a + aq^3 + aq^5 + \dots} = 2 \Rightarrow q = 2$$

راه دوم: فرض می‌کنیم تعداد جملات دنباله برابر با $n = 2$ (چون تعداد جملات باید زوج باشد) باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع تمام جملات} = a_1 + a_2 \\ \text{مجموع جملات ردیف فرد} = a_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق شرط سؤال}} a_1 + a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 \Rightarrow aq = 2a \Rightarrow q = 2$$



۱۸ در شکل مقابل، مساحت دایره‌ی بزرگ‌تر برابر S_1 است. داخل آن دو دایره به شکل روبه‌رو رسم کرده و مجموع مساحت آن‌ها را S_2 می‌نامیم. با تکرار این عملیات دنباله‌ی S_1, S_2, \dots, S_n ساخته می‌شود. جمله‌ی عمومی این دنباله کدام است؟

تمرین ۷ ص ۱۲

$$S_n = \frac{S_1}{4^n} \quad (4) \qquad S_n = \frac{S_1}{4^{n-1}} \quad (3) \qquad S_n = \frac{S_1}{2^{n-1}} \quad (2) \qquad S_n = \frac{S_1}{2^n} \quad (1)$$

با نوشتن چند جمله‌ی اولیه، جمله‌ی عمومی را می‌یابیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مساحت اولین دایره} = S_1 = \pi r^2 \\ \text{مساحت دایره‌های مرحله‌ی دوم} = S_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 2\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{2} \\ \text{مساحت دایره‌های مرحله‌ی سوم} = S_3 = 4\pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S_n = \frac{\pi r^2}{2^{n-1}} = \frac{S_1}{2^{n-1}}$$

۱۹ اگر $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، کدام گزینه‌ی زیر نمی‌تواند همواره دنباله‌ی هندسی باشد؟

تمرینات ۸ و ۹ ص ۱۳

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2a_1, 4a_2, 8a_3, 16a_4, \dots \\ (2) \quad a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \dots \\ (3) \quad a_1 + 2, a_2 + 4, a_3 + 8, a_4 + 16, \dots \\ (4) \quad a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots \end{array}$$

دنباله‌ی صورت سؤال به صورت a, aq, aq^2, aq^3, \dots دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q است:

گزینه‌ی (۱): دنباله‌ی a هندسی با قدرنسبت $2q$ است. گزینه‌ی (۲): دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q^2 است.

گزینه‌ی (۴): دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q است: $\frac{aq - a}{a_2 - a_1}, \frac{aq^2 - aq}{a_3 - a_2}, \frac{aq^3 - aq^2}{a_4 - a_3}, \dots$

۲۰ اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (1) \qquad \frac{3}{2} \quad (2) \qquad 2 \quad (3) \qquad 3 \quad (4)$$

باید برای جملات $a_4 = a_1 + 3d, a_6 = a_1 + 5d, a_{12} = a_1 + 11d$ از دنباله‌ی حسابی، شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی را بررسی کنیم:

$$\underbrace{a_1 + 3d, a_1 + 5d, a_1 + 11d}_{\text{دنباله‌ی هندسی}} \Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d) \Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 33d^2$$

$$\Rightarrow 8d^2 = -4a_1d \Rightarrow a_1 = -2d \quad (*)$$

پس دنباله‌ی هندسی به صورت زیر است:

$$\underbrace{a_1 + 3d, a_1 + 5d, a_1 + 11d}_{\text{دنباله‌ی هندسی}} \xrightarrow{(*)} d, 3d, 9d \Rightarrow q = 3$$

نکته توب: هرگاه جملات a_m, a_n و a_p از دنباله‌ی حسابی، جملات متوالی دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت قدرنسبت دنباله‌ی هندسی از

$$q = \frac{p-n}{n-m} \text{ به دست می‌آید. } (p > n > m)$$

$$a_4, a_6, a_{12} \Rightarrow q = \frac{12-6}{6-4} = 3$$

مثلاً در سؤال فوق:

۲۱ در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

$$7 + 4\sqrt{3} \quad (4) \qquad 5 + 4\sqrt{3} \quad (3) \qquad 5 + 2\sqrt{3} \quad (2) \qquad 2 + \sqrt{3} \quad (1)$$

در دنباله‌ی هندسی $a_7 = aq^6$ ، $a_5 = aq^4$ و $a_8 = aq^7$ است، پس طبق صورت سؤال می‌نویسیم:

$$a_7 \cdot 2a_5 \cdot a_8 \Rightarrow 2a_5 \cdot a_8 = \frac{a_7 + a_8}{2} \Rightarrow 4aq^6 = aq + aq^7 \xrightarrow{\div aq} 4q^5 = 1 + q^6$$

دنباله‌ی حسابی

اگر $q^3 = t$ فرض شود:

$$4t = 1 + t^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

با فرض $q^3 = 2 + \sqrt{3}$ ، نسبت بزرگ‌ترین جمله (a_8) به کوچک‌ترین جمله (a_7) را می‌یابیم:

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{aq^7}{aq^6} = q = (q^3)^{\frac{1}{3}} = (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی ۷

در دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q \neq 1$ و جمله‌ی اول a_1 ، مجموع n جمله‌ی اول دنباله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

نکته توپ:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}_{S_{2n}} \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$$

۲۲ در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت $\dots, b, a, 9a, 4b$ ، مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟

$$83 \frac{1}{8} \quad (4) \qquad 82 \frac{3}{8} \quad (3) \qquad 81 \frac{7}{8} \quad (2) \qquad 81 \frac{3}{8} \quad (1)$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{دنباله صعودی است.}} q = \frac{3}{2}$$

در نتیجه:

$$S_6 = 4 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^6}{1 - \frac{3}{2}} \right) = 83 \frac{1}{8}$$

۲۳ بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

$$488 \quad (4) \qquad 486 \quad (3) \qquad 484 \quad (2) \qquad 482 \quad (1)$$

وقتی سه عدد درج کنیم، جمله‌ی اول ۴ و جمله‌ی پنجم ۳۲۴ خواهد بود، پس:

$$\frac{a_5}{a_1} = q^{5-1} \Rightarrow 81 = q^4 \Rightarrow q = \pm 3$$

چون ۵ عدد مثبت هستند، پس $q = 3$ قابل قبول است، در نتیجه:

$$S_5 = 4 \left(\frac{1 - 3^5}{1 - 3} \right) = 484$$

وایسا نروا! اگر بین دو عدد a و b تعداد m واسطه‌ی هندسی درج شود $q^{m+1} = \frac{b}{a}$ خواهد بود. پس می‌توانستیم در این سؤال بنویسیم:

$$q^{3+1} = \frac{324}{4} \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

۲۴ به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ و $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله‌ی اول این دنباله، کدام است؟

$$127 \quad (4) \qquad 63 \quad (3) \qquad 125 \quad (2) \qquad 117 \quad (1)$$

شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی را می‌نویسیم:

$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ t = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \end{cases}$$

به ازای $x = 2$ ، دنباله‌ی هندسی نزولی $8, 4, 2, \dots$ تولید می‌شود. مجموع هفت جمله‌ی اول این دنباله برابر است با:

$$S_7 = 8 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 16 \left(1 - \frac{1}{128} \right) = \frac{127}{8}$$

۲۵ در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟

- (۱) ۱۰/۸ (۲) ۱۱/۲ (۳) ۱۲/۶ (۴) ۱۳/۴

ابتدا q و a_1 را می‌یابیم:

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \quad (*)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 \Rightarrow \underbrace{(a_1 + a_3)}_1 + \underbrace{(a_2 + a_4)}_{a_1 q + a_1 q^3 = q(a_1 + a_1 q^2) = q(1) = q} = 3 \Rightarrow 1 + q = 3 \Rightarrow q = 2 \xrightarrow{(*)} a_1 = \frac{1}{5}$$

و حالا محاسبه S_6 :

$$S_6 = \frac{1}{5} \left(\frac{1-2^6}{1-2} \right) = \frac{63}{5} = 12.6$$

۲۶ در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- (۱) ۸/۱۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶

با توجه به رابطه $\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$ داریم:

$$\frac{S_{12}}{S_6} = q^6 + 1 \Rightarrow \frac{153}{136} = q^6 + 1 \Rightarrow \frac{17}{136} = q^6 \Rightarrow \frac{1}{8} = q^6 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad (*)$$

از طرف دیگر در یک دنباله هندسی برای محاسبه $\frac{a_1}{a_5}$ داریم:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = q^{-4} \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

۲۷ حاصل $(1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

هریک از پرانتزها مجموع جملات یک دنباله هندسی متناهی می‌باشد، یعنی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی متناهی} \\ \text{با جمله اول } a_1 = 1 \text{ و قدرنسبت } q = x \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + x + x^2 + \dots + x^8 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{(1)(1-x^9)}{1-x} = \frac{1-x^9}{1-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی متناهی} \\ \text{با جمله اول } a_1 = 1 \text{ و قدرنسبت } q = -x \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - x + x^2 - \dots + x^8 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{(1)(1-(-x)^9)}{1-(-x)} = \frac{1+x^9}{1+x}$$

$$\Rightarrow A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8) = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)\left(\frac{1+x^9}{1+x}\right) = \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{x = \sqrt{2}} A = \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-(2^9)}{1-2} = \frac{1-512}{-1} = 512 - 1 = 511$$

۲۸ حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دنباله هندسی با جمله ۱۲} \\ \xrightarrow[q=t]{} S_{12} = 1 \left(\frac{1-t^{12}}{1-t} \right) \\ \text{دنباله هندسی با جمله ۴} \\ \xrightarrow[q=t^3]{} S'_4 = 1 \left(\frac{1-(t^3)^4}{1-t^3} \right) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{S_{12}}{S'_4} = \frac{1-t^3}{1-t}$$

با اتحاد چاق و لاغر، کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{S_{12}}{S'_4} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)} = 1+t+t^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{3}{4} \stackrel{t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{=} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 2$$

حد مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

۸

اگر در یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q ، اندازه‌ی جملات در حال کاهش باشد، یعنی $-1 < q < 1$ باشد، در این صورت جملات دنباله به عدد صفر نزدیک می‌شوند و مجموع تمام جملات دنباله (حد مجموع) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q^n \rightarrow 0} S_\infty = a_1 \left(\frac{0 - 1}{q - 1} \right) = \frac{a_1}{1 - q}$$

موجی بر روی نیم‌دایره‌ها بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه‌ی ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی، دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟



$$3\pi \quad (2)$$

$$2\pi \quad (1)$$

$$\frac{5}{2}\pi \quad (4)$$

$$\frac{3}{2}\pi \quad (3)$$

$$d_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{\pi d_1}{2} = \frac{\pi}{2} = 0.5\pi$$

$$d_2 = d_1 - 0.2d_1 = 0.8d_1 = 0.8 \Rightarrow P_2 = \frac{\pi d_2}{2} = \frac{0.8\pi}{2} = 0.4\pi$$

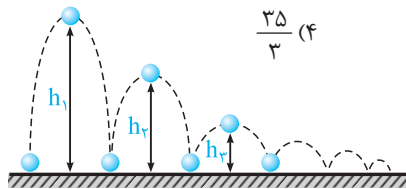
$$d_3 = d_2 - 0.2d_2 = 0.64d_2 = 0.64 \Rightarrow P_3 = \frac{\pi d_3}{2} = \frac{0.64\pi}{2} = 0.32\pi$$

دنباله‌ی $\{P_n\} = \{0.5\pi, 0.4\pi, 0.32\pi, \dots\}$ یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $P_1 = \frac{\pi}{2}$ و قدرنسبت $q = \frac{P_2}{P_1} = \frac{4}{5}$ می‌باشد. پس حد مجموع جملات برابر است با:

$$\frac{\text{جمله‌ی اول}}{1 - \text{قدرنسبت}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2}$$

توپ‌ی را از سطح زمین تا ارتفاع ۵ متری به هوا پرتاب می‌کنیم. این توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه‌ی یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ، پس از شروع پرتاب تا زمان توقف، چه مسافتی را طی می‌کند؟

مثال من ۴



$$\frac{25}{3} \quad (4)$$

$$\frac{25}{3} \quad (3)$$

$$\frac{40}{3} \quad (2)$$

$$\frac{20}{3} \quad (1)$$

$$h_1 = 5, h_2 = \frac{5}{4}, h_3 = \frac{5}{16}, \dots$$

مجموع مسافت‌های طی شده توسط توپ برابر است با:

$$5 + 5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{16} + \dots = 2 \left(5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \dots \right) = 2 \left(\frac{5}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{40}{3}$$

وایسا نروا! دقت کنید که توپ فقط در راستای عمودی حرکت می‌کند ولی در شکل، جهت وضوح؛ هر حرکت را جداگانه نشان داده‌ایم.

اگر $S_1 = 1$ و $S_n = S_{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

ابتدا جملات دنباله‌ی $\{S_n\}$ را می‌نویسیم:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = S_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

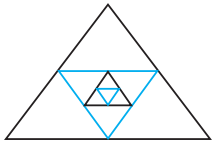
$$S_3 = S_2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \dots - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \dots = 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

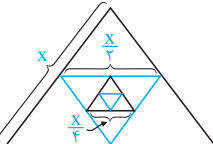
جملات دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ و جمله‌ی اول $-\frac{1}{3}$



یک مثلث متساوی‌الاضلاع با مساحت S را در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل می‌کنیم و مثلث‌های کوچک‌تر جدیدی می‌سازیم و این عمل را مجدداً روی مثلث کوچک‌تر انجام می‌دهیم. اگر این عملیات را به‌طور متوالی انجام دهیم، مجموع مساحت مثلث‌های به دست آمده با احتساب مثلث اولیه، کدام است؟

تمرین ۹ ص ۹

$2S$ (۱) $\frac{2}{3}S$ (۲) $\frac{4}{3}S$ (۳) $3S$ (۴)



ضلع مثلث اولیه را x در نظر می‌گیریم. از آن جایی که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر با $S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است، پس:

$$\text{مجموع مساحت مثلث‌ها} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{64}x^2 + \dots$$

قدرنسبت $\frac{1}{4}$ است، در نتیجه:

$$S_{\infty} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{S}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}S$$

نکته توپ: در حالت کلی اگر وسط‌های اضلاع یک n ضلعی منتظم را متوالیاً به هم وصل کنیم، n ضلعی‌های منتظم کوچک‌تری به وجود می‌آیند که محیط‌های آن‌ها تشکیل دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\cos \frac{\pi}{n}$ و مساحت‌های آن‌ها تشکیل دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\cos^2 \frac{\pi}{n}$ می‌دهند.

مثال: در سؤال فوق، قدرنسبت مساحت مثلث‌ها (۳ ضلعی‌ها) برابر با $\cos^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$ است، پس:

$$S_{\infty} = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S$$

۹ دنباله‌ی تقریبات اعشاری

برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک شوند به طوری که جمله‌ی n ام این دنباله، یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله‌ی آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. در واقع:

جمله‌ی n ام دنباله‌ی تقریبات اعشاری x = تقریب اعشاری x با n رقم اعشار

مثال: عدد $\frac{5}{7}$ را در نظر بگیرید:

$$\frac{5}{7} \begin{array}{l} \longdiv{7} \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ \dots \end{array} \Rightarrow \frac{5}{7} \text{ دنباله‌ی تقریبات اعشاری } : 0,700\overline{71}, 0,714\overline{28}, 0,7142\overline{85}, \dots$$

۳۳ اگر x در نامعادلات $\begin{cases} 4 - x < 0,4343 \\ 2x + 1 < 8,1316 \end{cases}$ صدق کند، اختلاف جمله‌ی دوم و سوم دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن کدام است؟

- $0,06$ (۱) $0,006$ (۲) $0,05$ (۳) $0,005$ (۴) تمرین ۵ ص ۱۶

ابتدا محدوده‌ی x را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 4 - x < 0,4343 \Rightarrow x > 3,5657 \\ 2x + 1 < 8,1316 \Rightarrow x < 3,5658 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3,5657 < x < 3,5658$$

جملات دنباله‌ی تقریبات اعشاری x (که حداکثر می‌توان آن را تا ۴ جمله نوشت)، به صورت زیر است:

$$3,503, 3,560, 3,565, 3,5657 \Rightarrow a_3 - a_4 = 0,005$$

