

فصل اول

آشنایی با
مبانی ریاضیات

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

تعریف به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) داشته باشد، گزاره می‌گوییم.

معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهیم. درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نشان می‌دهیم. توجه کنید که یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد هم نادرست؛ یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. همچنین جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

تست

کدام جمله یک گزاره است؟

(۱) $\sqrt{\pi}$ را حساب کنید.

(۳) آیا π عددی مثبت است؟

(۲) $1+2+3=5$

(۴) چه هوای دلپذیری!

راه‌حل

جمله‌های گزینه‌های اول، سوم و چهارم به ترتیب امری، پرسشی و عاطفی هستند، بنابراین هیچ‌یک از این سه جمله گزاره نیستند. تنها جمله خبری جمله گزینه (۲) است (و البته توجه کنید که ارزش این گزاره نادرست است).

جدول ارزش گزاره‌ها

چون هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش درست یا نادرست را داشته باشد، پس اگر n گزاره داشته باشیم، بنابر اصل ضرب، ارزش این گزاره‌ها 2^n حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. می‌توانیم جدولی با n ستون و 2^n سطر در نظر بگیریم که هر سطر آن متناظر با یکی از این 2^n حالت باشد. جدول ارزش n گزاره به‌ازای $n=1, 2, 3$ به صورت زیر است.

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

تعریف

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

- گزاره‌نما را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.
- در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم.
- در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم. توجه کنید که $S \subseteq D$.

تست

۲

مجموعه جواب گزاره‌نمای « x عددی فرد و مضرب ۷ است» با دامنه $D = \{1, 2, \dots, 50\}$ چند عضو دارد؟

۲۸ (۴)

۷ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

راه‌حل

فقط به‌ازای $x = 7, 21, 35, 49$ گزاره‌نمای داده شده تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست می‌شود، بنابراین مجموعه جواب این گزاره‌نما با دامنه D ، چهار عضو دارد.

ترکیب گزاره‌ها

تعریف

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. به علامت « \sim » ناقض می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $\sim p$ به صورت زیر است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

تعریف

هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت $p \vee q$ نمایش داده می‌شود، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی « \vee » فاصل می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

تعریف

هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p و q » را که به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی « \wedge » عاطف می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

تست ۳

فرض کنید p گزاره «هفته پنج روز دارد» و q گزاره «۳ عددی اول است» باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \vee q$ و ارزش گزاره $p \wedge q$ است.

- (۱) درست - درست
(۲) درست - نادرست
(۳) نادرست - درست
(۴) نادرست - نادرست

راه حل

چون هفته هفت روز دارد، پس p گزاره‌ای نادرست و چون ۳ عددی اول است، پس q گزاره‌ای درست است. بنابراین $p \vee q$ گزاره‌ای درست و $p \wedge q$ گزاره‌ای نادرست است.

تعریف

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «اگر p ، آن گاه q » را که به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش داده

می‌شود، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم.

در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان گونه که در این جدول ملاحظه می‌کنید، هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ درست است و ارزش آن به ارزش q بستگی ندارد. در این حالت می‌گوییم گزاره $p \Rightarrow q$ به انتهای مقدم درست است.

به گزاره $p \Rightarrow q$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ و به گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

تست ۴

فرض کنید p گزاره «تهران پایتخت ایران است» و q گزاره « $5 > 3$ » باشد. ارزش کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) $p \Rightarrow q$ (۲) $p \Rightarrow \sim q$ (۳) $\sim p \Rightarrow q$ (۴) $\sim p \Rightarrow \sim q$

راه حل

چون تهران پایتخت ایران است و $5 > 3$ ، پس هر دو گزاره p و q درست‌اند. طبق جدول، ارزش ترکیب شرطی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. در نتیجه در بین چهار ترکیب شرطی داده شده فقط ارزش گزاره $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است.

تعریف هرگاه p و q دو گزاره باشند، به گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ که آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم، **ترکیب دو شرطی** دو گزاره می‌گوییم. گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت «اگر p ، آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» یا «اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

تست

ارزش کدام ترکیب دو شرطی درست است؟

- (۱) ۲ عددی اول است اگر و تنها اگر ۳ عددی زوج باشد.
- (۲) ۳ عددی زوج است اگر و تنها اگر $۲ > ۵$.
- (۳) $۲ = ۲$ اگر و تنها اگر ۷ عددی زوج باشد.
- (۴) ۶ عددی فرد است اگر و تنها اگر $۱ + ۲ = ۳$.

راه‌حل

طبق جدول، ارزش ترکیب دو شرطی دو گزاره در صورتی درست است که دو گزاره هم‌ارزش باشند. در گزینه (۲) هر دو گزاره «۳ عددی زوج است» و « $۲ > ۵$ » نادرست‌اند، بنابراین ارزش ترکیب دو شرطی این دو گزاره درست است.

تعریف اگر دو گزاره p و q در همه حالت‌ها هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم « p هم‌ارز است با q ». در این حالت p و q را **هم‌ارز منطقی** می‌نامیم.

هم‌ارزی‌های منطقی

(۱) نقیض نقیض هر گزاره با خود آن گزاره هم‌ارز است.

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

(۲) قوانین جابه‌جایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$

(۳) قوانین شرکت‌پذیری

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$$

۴ قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

۵ قوانین دمورگان

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

(۶)

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

۷ قوانین جذب

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

۸ هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

(۹)

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

غیر از هم‌ارزی‌های فوق تعداد دیگری هم‌ارزی که در حل مسئله‌ها بسیار کارایی دارند در جدول زیر فهرست شده است.

ترکیب دو شرطی	ترکیب شرطی	ترکیب عطفی	ترکیب فصلی
$p \Leftrightarrow p \equiv T$	$p \Rightarrow p \equiv T$	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$	$p \Rightarrow F \equiv \sim p$	$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee \sim p \equiv T$
$p \Leftrightarrow T \equiv p$	$p \Rightarrow T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	$p \vee F \equiv p$
$p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$	$F \Rightarrow p \equiv T$ $T \Rightarrow p \equiv p$	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee T \equiv T$

تست ۶

گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز کدام است؟

F (۴)

T (۳)

q (۲)

p (۱)

راه‌حل

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (q \Rightarrow p) &\equiv \sim p \vee (q \Rightarrow p) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee p) \\ &\equiv \sim p \vee (p \vee \sim q) \quad (\text{جاب‌جایی}) \\ &\equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q \quad (\text{شرکت‌پذیری}) \\ &\equiv T \vee \sim q \equiv T \end{aligned}$$

تعریف به گزاره‌ای که ارزش آن در همه حالت‌ها درست باشد گزاره همیشه درست و به گزاره‌ای که ارزش آن همیشه نادرست باشد، گزاره همیشه نادرست می‌گوییم.

مثلاً با توجه به جدول قبل $p \vee \sim p$ گزاره‌ای همیشه درست و $p \wedge \sim p$ گزاره‌ای همیشه نادرست است.

گزاره‌های $p \Rightarrow (p \vee q)$ و $(p \wedge q) \Rightarrow p$ همیشه درست‌اند.

تست ۷

کدام گزاره همواره درست است؟

 (۱) $p \Rightarrow \sim p$ (۲) $p \vee (p \Rightarrow \sim p)$ (۳) $p \wedge (p \vee \sim p)$ (۴) $p \vee (p \wedge \sim p)$

گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

راه‌حل

گزینه (۱)

$$p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee \sim p \equiv \sim p$$

گزینه (۲)

$$p \vee (p \Rightarrow \sim p) \equiv p \vee (\sim p \vee \sim p) \equiv p \vee \sim p \equiv T$$

گزینه (۳)

$$p \wedge (p \vee \sim p) \equiv p \wedge T \equiv p$$

گزینه (۴)

$$p \vee (p \wedge \sim p) \equiv p \vee F \equiv p$$

سورها

عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی» به **سور** معروف‌اند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند. برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای **تمام** مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد» یا «به‌ازای **بعضی** مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall **سور عمومی** و نماد \exists **سور وجودی** نامیده می‌شود.

توجه

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر مثال نقض نداشته باشد.

- گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

تست ۸

کدام گزاره درست است؟

 (۱) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ (۲) $\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ (۳) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ (۴) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \notin \mathbb{Z}$

راه‌حل

گزاره‌نمای « $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} مثال نقض دارد. مثلاً به‌ازای عدد صحیح $x=2$ ، $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$. در نتیجه گزاره (۱) نادرست است.

مجموعه جواب گزاره‌نمای « $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} برابر $\{-1, 1\}$ است. چون مجموعه جواب ناتهی است، پس گزاره (۲) درست است.

گزاره‌نمای « $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} مثال نقض دارد. مثلاً به‌ازای عدد صحیح $x=1$ ، $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. بنابراین گزاره (۳) نادرست است.

مجموعه جواب گزاره‌نمای « $x^2 \notin \mathbb{Z}$ » با دامنه \mathbb{Z} برابر تهی است، زیرا مربع هر عدد صحیح عددی صحیح است. بنابراین گزاره (۴) نادرست است.

نقیض گزاره‌های سوری

$$\sim(\forall x: p(x)) \equiv \exists x: \sim p(x) \quad (۱)$$

$$\sim(\exists x: p(x)) \equiv \forall x: \sim p(x) \quad (۲)$$

قضیه ۲

نقیض گزاره « $\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 \geq 0) \wedge ([x] \in \mathbb{Z})$ » کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 < 0) \vee ([x] \notin \mathbb{Z}) \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 < 0) \wedge ([x] \notin \mathbb{Z}) \quad (۱)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 < 0) \vee ([x] \notin \mathbb{Z}) \quad (۴)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 < 0) \wedge ([x] \notin \mathbb{Z}) \quad (۳)$$

تست ۹

راه حل

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 \geq 0) \wedge ([x] \in \mathbb{Z}))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R}: \sim((x^2 \geq 0) \wedge ([x] \in \mathbb{Z}))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R}: \sim(x^2 \geq 0) \vee \sim([x] \in \mathbb{Z}) \quad (\text{دمورگان})$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R}: (x^2 < 0) \vee ([x] \notin \mathbb{Z})$$

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره نیست؟
- (۱) آیا $3+4=7$ برابر است؟
- (۲) در پرتاب یک تاس، احتمال رو شدن عدد ۵ برابر $\frac{1}{4}$ است.
- (۳) ایتالیا کشوری در اروپا است.
- (۴) تیم فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.
- ۲- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
- (۱) $2+5>7$
- (۲) این کتاب را خوب بخوانید.
- (۳) $x+1=2$
- (۴) به امید درمان همه بیماران
- ۳- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
- (۱) لطفاً خارج نشوید!
- (۲) $x^2+y^2=z^2$
- (۳) هزارمین رقم اعشار عدد π برابر ۷ است.
- (۴) آیا خسته‌اید؟
- ۴- ارزش کدام گزاره درست است؟
- (۱) حاصل ضرب هر دو عدد فرد عددی زوج است.
- (۲) هندوستان یکی از شهرهای پرجمعیت در قاره آسیا است.
- (۳) دو عدد اول وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.
- (۴) مجموع هر دو عدد اول عددی زوج است.
- ۵- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
- (۱) $3+7\geq 5$
- (۲) هر معادله درجه دوم حداقل یک ریشه حقیقی دارد.
- (۳) هر عدد زوج برابر مجموع دو عدد فرد است.
- (۴) معادله $3x+2=7$ در مجموعه عددهای صحیح جواب ندارد.
- ۶- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۳۲ حالت دارد. تعداد این گزاره‌ها برابر کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|--------|
| ۴ (۱) | ۵ (۲) | ۸ (۳) | ۱۶ (۴) |
|-------|-------|-------|--------|
- ۷- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۶۴ حالت دارد. در چندتا از این ۶۴ حالت ارزش دقیقاً دو گزاره درست است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۰ (۱) | ۱۲ (۲) | ۱۵ (۳) | ۲۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ۸- جدول ارزش‌های ۴ گزاره را در نظر بگیرید. در چند حالت ارزش حداقل یکی از این ۴ گزاره درست و حداقل یکی نادرست است؟
- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| ۷ (۱) | ۸ (۲) | ۱۲ (۳) | ۱۴ (۴) |
|-------|-------|--------|--------|
- ۹- کدام گزاره‌نما سه متغیره است؟
- (۱) a عددی فرد است.
- (۲) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه بیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{4}$ است.
- (۳) حاصل ضرب سه عدد برابر ۳۶۰ است.
- (۴) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۱۰ است.
- ۱۰- مجموعه جواب گزاره‌نمای « x عددی زوج یا مضرب ۷ است» با دامنه $D=\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ چند عضو دارد؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۶ (۱) | ۱۷ (۲) | ۱۸ (۳) | ۱۹ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ۱۱- به‌ازای چند مقدار حقیقی x فقط یکی از دو گزاره‌نمای « $x(x-1)(x-2)=0$ » و « $x(x-1)(x-3)(x-4)=0$ » به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-----|
| ۱ (۲) | ۲ (۳) | ۳ (۴) | صفر |
|-------|-------|-------|-----|
- ۱۲- به‌ازای چند عدد طبیعی مانند a ، گزاره‌نمای « a عددی مرکب و کوچک‌تر از ۲۰ است» به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۰ (۱) | ۱۱ (۲) | ۱۲ (۳) | ۱۳ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|

۱۳- به ازای چند پیشامد مانند A ، گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{3}$ است» به گزاره‌ای با ارزش

نادرست تبدیل می‌شود؟

۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۵ (۳) ۴۹ (۴)

۱۴- به ازای چند زوج مرتب (x, y) ، گزاره‌نمای «در پرتاب دو تاس، اگر عددهای رو شده به ترتیب x و y باشند، آن گاه $x+2y=11$ » به

گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۵- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی باشند. کدام گزاره درست نیست؟

(۱) $(a-1)(b-2)=0 \Rightarrow (a=1 \vee b=2)$ (۲) $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 0 \Rightarrow (a=1 \wedge b=2)$

(۳) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (a=0 \wedge b=0)$ (۴) $ab(a+1)=0 \Rightarrow (a=0 \vee b=0)$

۱۶- فرض کنید p گزاره «ماه مهر ۳۰ روز دارد» و q گزاره «تهران پایتخت ایران است» باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \wedge \sim q$
و ارزش گزاره $\sim p \vee \sim q$ است.

(۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

۱۷- فرض کنید p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \vee (p \wedge \sim q)$ و ارزش گزاره $\sim p \wedge (p \vee q)$ است.

(۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

۱۸- ارزش کدام گزاره نادرست است؟

(۱) اگر $1=1$ ، آن گاه $2 \neq 1$. (۲) اگر $1 \neq 1$ ، آن گاه $2=1$. (۳) اگر $1=1$ ، آن گاه $1 \neq 1$. (۴) اگر $1 \neq 1$ ، آن گاه $2 \neq 1$.

۱۹- ارزش کدام گزاره به انتفای مقدم درست است؟

(۱) اگر ۱ عددی فرد باشد، آن گاه ۲ عددی زوج است. (۲) اگر ۱ عددی فرد باشد، آن گاه ۲ عددی فرد است.
(۳) اگر ۲ عددی فرد باشد، آن گاه ۱ عددی زوج است. (۴) اگر ۲ عددی زوج باشد، آن گاه ۱ عددی زوج است.

۲۰- در چند حالت از چهار حالت جدول ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ارزش این گزاره درست است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۱- ارزش کدام ترکیب دو شرطی نادرست است؟

(۱) $2 > 1$ اگر و تنها اگر $3 \neq 4$. (۲) $3 > 5$ اگر و تنها اگر $2 = 2$.
(۳) $4 + 1 = 6$ اگر و تنها اگر $2 + 3 = 7$. (۴) $1 = 1$ اگر و تنها اگر $2 = 2$.

۲۲- فرض کنید p گزاره «عدد حقیقی x وجود دارد به طوری که $x^2 - 1 = 0$ » و q گزاره «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای ۳۵ و ۲۱ برابر ۷ است» باشد. کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $p \Leftrightarrow q$ (۲) $\sim p \Rightarrow q$ (۳) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (۴) $\sim p \vee \sim q$

۲۳- فرض کنید ABC یک مثلث باشد. ارزش کدام گزاره درست نیست؟

(۱) نقطه A روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد اگر و تنها اگر $AB = AC$.

(۲) $AB = AC$ اگر و تنها اگر $\hat{B} = \hat{C}$.

(۳) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

(۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر میانه‌های آن هم‌مس باشد.

۲۴- در چند حالت از ۸ حالت جدول ارزش گزاره $(q \vee r) \Leftrightarrow p$ ارزش این گزاره نادرست است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۲۵- عکس ترکیب شرطی «اگر ۲ عددی زوج باشد، آن گاه $3 > 5$ » کدام است؟

(۱) اگر $3 > 5$ ، آن گاه ۲ عددی زوج است. (۲) اگر ۲ عددی زوج نباشد، آن گاه $3 \leq 5$.
(۳) اگر $3 \leq 5$ ، آن گاه ۲ عددی فرد است. (۴) اگر ۲ عددی زوج نباشد، آن گاه $3 > 5$.

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
 (۱) چه میز زیبایی! (۲) مریم سال ۱۳۸۵ ازدواج کرد. (۳) تخته را پاک کن. (۴) آیا این بازی را می‌بریم؟
- ۲- به ازای چند عدد طبیعی مانند a ، گزاره‌نمای « $a > 10$ یا a بر ۳ بخش پذیر است» به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۳- در چند حالت از جدول ارزش‌های پنج گزاره، ارزش دقیقاً سه گزاره درست است؟
 (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰
- ۴- فرض کنید p گزاره «در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر با هم برابرند» و q گزاره «۲ عددی اول است» باشد. کدام گزاره درست است؟
 (۱) $p \leftrightarrow \sim q$ (۲) $p \wedge \sim q$ (۳) $p \vee \sim q$ (۴) $q \Rightarrow p$
- ۵- ارزش کدام گزاره به انتقای مقدم درست است؟
 (۱) اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$. (۲) اگر $3 \geq 2$ ، آن گاه $5 \geq 3$. (۳) اگر $2 > 3$ ، آن گاه $5 > 3$. (۴) اگر $3 > 2$ ، آن گاه $5 < 3$.
- ۶- می‌دانیم «اگر مریم ۲۰ بگیرد، آن گاه باران می‌بارد» و «اگر مریم ۲۰ بگیرد، آن گاه باران نمی‌بارد». کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) مریم ۲۰ می‌گیرد. (۲) مریم ۲۰ نمی‌گیرد. (۳) باران می‌بارد. (۴) باران نمی‌بارد.
- ۷- راستگو همیشه راست و دروغگو همیشه دروغ می‌گوید. تام گفت: «اگر جری دروغگو باشد، آن گاه من نیز دروغگو هستم». کدام گزینه درست است؟
 (۱) تام و جری هر دو راستگو هستند. (۲) تام و جری هر دو دروغگو هستند.
 (۳) تام راستگو و جری دروغگو است. (۴) تام دروغگو و جری راستگو است.
- ۸- فرض کنید گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow (r \vee s)$ درست و گزاره $p \Rightarrow r$ نادرست باشد. کدام گزاره درست است؟
 (۱) $q \Rightarrow r$ (۲) $r \Rightarrow s$ (۳) $s \Rightarrow r$ (۴) $q \wedge \sim s$
- ۹- نقیض گزاره $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ هم‌ارز کدام است؟
 (۱) $p \wedge q$ (۲) $p \vee q$ (۳) p (۴) $\sim p$
- ۱۰- کدام گزینه درست نیست؟
 (۱) $p \wedge (\sim p \wedge q) \equiv q$ (۲) $p \vee (\sim p \vee q) \equiv T$ (۳) $p \wedge (p \Rightarrow T) \equiv p$ (۴) $p \wedge (T \Rightarrow p) \equiv p$
- ۱۱- کدام هم‌ارزی درست است؟
 (۱) $\sim p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow p$ (۲) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p$ (۳) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \Rightarrow \sim q$ (۴) $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$
- ۱۲- کدام هم‌ارزی درست است؟
 (۱) $F \Rightarrow p \equiv T$ (۲) $p \Leftrightarrow F \equiv F$ (۳) $p \Leftrightarrow p \equiv p$ (۴) $T \Rightarrow p \equiv T$
- ۱۳- گزاره $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام است؟
 (۱) $(p \vee q) \Rightarrow r$ (۲) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (۳) $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$ (۴) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
- ۱۴- گزاره $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ هم‌ارز کدام است؟
 (۱) T (۲) F (۳) p (۴) $\sim p$
- ۱۵- نمایش گزاره «برای هر عدد طبیعی مانند n ، $n + 1$ عددی اول است» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟ (P مجموعه عددهای اول است).
 (۱) $\exists n \in \mathbb{N}: n + 1 \in P$ (۲) $\forall n \in \mathbb{N}: n + 1 \in P$ (۳) $\exists n \in \mathbb{Z}: n + 1 \in P$ (۴) $\forall n \in \mathbb{Z}: n + 1 \in P$
- ۱۶- کدام گزاره درست است؟
 (۱) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq x$ (۳) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 2x - 1$ (۴) $\forall x \in \mathbb{R}: \tan x \cot x = 1$

۱۷- ارزش کدام گزاره درست است؟

(۱) در هر متوازی‌الاضلاع اندازه دو قطر با هم برابرند.

(۳) در هر لوزی دو قطر بر یکدیگر عمودند.

(۲) در هر مستطیل دو قطر بر یکدیگر عمودند.

(۴) وجود دارد مستطیلی که قطرهای آن با هم برابر نیستند.

۱۸- کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

(۳) $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : x^n \geq 0$

(۲) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{Z}$

(۴) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x^n > 0$

۱۹- نقیض گزاره « $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 = -1) \vee (x^2 = 7)$ » کدام است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq -1) \vee (x^2 \neq 7)$

(۳) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq -1) \vee (x^2 \neq 7)$

(۲) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq -1) \wedge (x^2 \neq 7)$

(۴) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq -1) \wedge (x^2 \neq 7)$

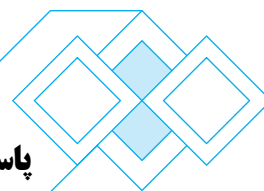
۲۰- نقیض گزاره «عددی صحیح وجود دارد که نه اول است و نه مرکب» کدام است؟

(۱) عددی صحیح وجود دارد که هم اول است و هم مرکب.

(۳) هر عدد صحیح یا اول است یا مرکب.

(۲) عددی صحیح وجود دارد که یا اول است یا مرکب.

(۴) هر عدد صحیح نه اول است و نه مرکب.



۷- گزینه ۳ اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، آن‌گاه $2^n = 64$ ، پس $n = 6$. در نتیجه تعداد حالت‌هایی که ارزش دقیقاً دوتا از گزاره‌ها درست است، برابر $\binom{6}{2} = 15$ است.

۸- گزینه ۴ روی تعداد گزاره‌های درست و نادرست حالت‌بندی می‌کنیم و پاسخ را به دست می‌آوریم.

۳ گزاره درست و ۱ گزاره نادرست و
۲ گزاره نادرست و ۲ گزاره نادرست و ۳ گزاره نادرست

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 4 + 6 + 4 = 14$$

۹- گزینه ۳ در گزاره‌نمای گزینه (۱) فقط یک متغیر a وجود دارد، در نتیجه این گزاره‌نما یک متغیره است. در گزاره‌نمای گزینه (۲) نیز فقط یک متغیر A وجود دارد، در نتیجه این گزاره‌نما نیز یک متغیره است. گزاره‌نمای گزینه (۳) را می‌توانیم به صورت $abc = 360$ بنویسیم که سه متغیره است و گزاره‌نمای گزینه (۴) را می‌توانیم به صورت $3a + 2b = 10$ بنویسیم که دو متغیره است.

۱۰- گزینه ۲ فرض کنید A مجموعه عددهای زوج در D و B مجموعه عددهای مضرب 7 در D باشد. در این صورت مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $A \cup B$ است. اکنون توجه کنید که

$$\begin{array}{l} \text{مضرب } 14 \quad \text{مضرب } 7 \quad \text{مضرب } 2 \\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 4 - 2 = 17 \end{array}$$

۱۱- گزینه ۴ گزاره‌نمای اول به‌ازای $x = 0, 1, 2$ به گزاره‌های درست تبدیل می‌شود و گزاره‌نمای دوم به‌ازای $x = 0, 1, 3, 4$ به گزاره‌های درست تبدیل می‌شود، بنابراین به‌ازای $x = 2, 3, 4$ فقط یکی از دو گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

۱۲- گزینه ۱ مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر است با

$$\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

که ۱۰ عضو دارد.

۱- گزینه ۱ جمله گزینه (۱) جمله‌ای پرسشی است، پس این جمله گزاره نیست. توجه کنید که سه جمله دیگر همگی خبری‌اند، بنابراین هر سه گزاره‌اند.

۲- گزینه ۱ جملات گزینه‌های (۲) و (۴) به ترتیب امری و عاطفی هستند، در نتیجه این دو گزاره نیستند. همچنین جمله گزینه (۳) در واقع یک گزاره‌نما است، در نتیجه این جمله نیز گزاره نیست. تنها جمله خبری جمله گزینه (۱) است، بنابراین فقط این جمله گزاره است.

۳- گزینه ۳ جمله گزینه (۱) امری است، در نتیجه این جمله گزاره نیست. جمله گزینه (۲) یک گزاره‌نما است در نتیجه این جمله نیز گزاره نیست. جمله گزینه (۳) جمله‌ای خبری است، در نتیجه این جمله گزاره است. جمله گزینه (۴) پرسشی است، در نتیجه این جمله گزاره نیست.

۴- گزینه ۳ گزینه (۱) نادرست است، زیرا حاصل ضرب هر دو عدد فرد عددی فرد است. گزینه (۲) نادرست است، زیرا هندوستان یک کشور است. گزینه (۳) درست است، زیرا مجموع عددهای اول ۳ و ۷ برابر ۱۰ است. گزینه (۴) نادرست است؛ به عنوان مثال نقض، مجموع دو عدد اول ۲ و ۳ عددی فرد است.

۵- گزینه ۲ گزاره گزینه (۱) به وضوح درست است. گزاره گزینه (۲) نادرست است؛ به عنوان مثال نقض، معادله $x^2 + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد.

گزاره گزینه (۳) درست است، زیرا $2k = 1 + (2k - 1)$ ، پس هر عدد زوج مانند $2k$ مجموع دو عدد فرد ۱ و $2k - 1$ است. گزاره گزینه (۴) نیز درست است، زیرا از $3x + 2 = 7$ نتیجه می‌گیریم $x = \frac{5}{3}$ که عددی غیر صحیح است، پس معادله $3x + 2 = 7$ در مجموعه عددهای صحیح جواب ندارد.

۶- گزینه ۲ می‌دانیم جدول ارزش‌های n گزاره 2^n حالت دارد، بنابراین $2^n = 32$ ، پس $n = 5$.

۲۰- گزینه ۳ توجه کنید که

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

۲۱- گزینه ۲ می‌دانیم ارزش ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$

وقتی نادرست است که یکی از p و q درست و دیگری نادرست باشد. در بین چهار ترکیب دو شرطی داده شده فقط گزینه (۲) این ویژگی را دارد، زیرا « $3 > 5$ » گزاره‌ای نادرست و « $2 = 2$ » گزاره‌ای درست است.

۲۲- گزینه ۴ چون به‌ازای $x=1$ ، $x^2 - 1 = 0$ ، پس p

گزاره‌ای درست است و چون بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای ۳۵ و ۲۱ برابر ۷ است، پس q نیز گزاره‌ای درست است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	ن	ن	د	د	د	ن

۲۳- گزینه ۴ سه گزینه اول قضیه‌های معروف دو شرطی

در هندسه هستند، بنابراین ارزش این سه گزاره درست است. در مورد گزاره گزینه چهارم می‌دانیم میانه‌ها در هر مثلثی هم‌مس‌اند و نه فقط در مثلث‌های متساوی‌الساقین! در نتیجه این گزاره نادرست است.

۲۴- گزینه ۳

p	q	r	$q \vee r$	$p \Leftrightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د

۲۵- گزینه ۱ عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »، ترکیب

شرطی « $q \Rightarrow p$ » است.

۲۶- گزینه ۳ عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »،

ترکیب شرطی « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » است.

۲۷- گزینه ۳ طبق قانون دمورگان نقیض گزاره « p و q »

هم‌ارز گزاره « $\sim p$ یا $\sim q$ » است.

۱۳- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک تاس

برابر $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. اگر احتمال پیشامد A

برابر $\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3} \Rightarrow n(A) = \frac{1}{3} n(S) = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

بنابراین اگر پیشامد A دو عضوی باشد، گزاره‌نمای داده شده به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود. در نتیجه تعداد پیشامدهایی مانند A که گزاره‌نمای داده شده به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود برابر است با

$$\text{پیشامدهای دو عضوی کل پیشامدها} \\ 2^6 - \binom{6}{2} = 64 - 15 = 49$$

۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که مجموعه جواب گزاره‌نمای

داده شده برابر است با

$$\{(1, 5), (3, 4), (5, 3)\}$$

۱۵- گزینه ۴ اگر $ab(a+1) = 0$ ، آن‌گاه ممکن است a برابر

۱- باشد، بنابراین نمی‌توان نتیجه گرفت که a یا b برابر صفر است.

۱۶- گزینه ۴ چون ماه مهر ۳۰ روز دارد و تهران پایتخت

ایران است، پس هر دو گزاره p و q درست‌اند. اکنون از اینکه

p درست و $\sim q$ نادرست است نتیجه می‌گیریم که گزاره

$p \wedge \sim q$ نادرست است و از اینکه $\sim p$ و $\sim q$ نادرست‌اند،

نتیجه می‌گیریم $\sim p \vee \sim q$ نیز نادرست است.

۱۷- گزینه ۲

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \vee (p \wedge \sim q)$	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	ن	د	ن

۱۸- گزینه ۳ می‌دانیم ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط

وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در بین

چهار گزاره داده شده فقط گزاره گزینه (۳) این ویژگی را دارد. در

واقع « $1 = 1$ » گزاره‌ای درست و « $2 = 1$ » گزاره‌ای نادرست است.

۱۹- گزینه ۳ می‌دانیم که اگر در یک گزاره شرطی ارزش

مقدم نادرست باشد، گزاره شرطی به انتهای مقدم درست

است. در بین چهار گزاره داده شده فقط گزاره سوم این ویژگی

را دارد، زیرا ارزش مقدم این گزاره، یعنی «۲ عددی فرد است»

نادرست است.